Hydraulique générale et appliquée

M. Carlier

14

Préface
de
G. Réméniéras



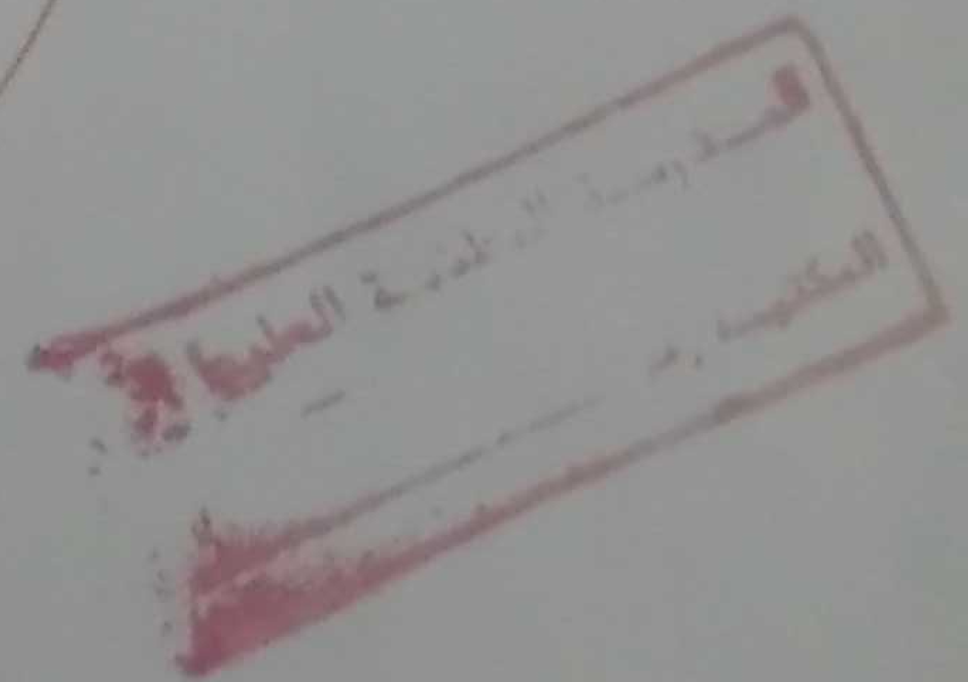
EYROLLES

D-7b

Collection de la Direction
des Etudes et Recherches d'Electricité de France

تاريخ
رقم الجرد :

Hydraulique générale et appliquée



Du même auteur :

MACHINES HYDRAULIQUES (Préface de M. le Professeur L. ESCANDE, Membre de l'Académie des Sciences)

(Service des Publications du Centre de NANCY de l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, 14 rue Girardet, 54 – NANCY) (1968).

COLLECTION
DE LA DIRECTION
DES ÉTUDES ET RECHERCHES
D'ÉLECTRICITÉ DE FRANCE

Hydraulique générale et appliquée

M. Carlier

Ingénieur Général du Génie Rural,
des Eaux et des Forêts
•
Président d'Honneur du Comité Français
des Grands Barrages
•
Membre du Comité Technique Permanent
des Barrages
•
Secrétaire Général
de la Commission Internationale
du Génie Rural

Préface
de
G. Réméniéras

Ancien Conseiller scientifique
à la Direction des Etudes et Recherches
d'Electricité de France
•
Secrétaire général honoraire
de la Société
Hydrotechnique de France

ÉDITIONS EYROLLES
61, Bd Saint-Germain Paris 5e
1986

1re édition 1972
nouveaux tirages 1980, 1986

© 1972 DIRECTION DES ETUDES ET RECHERCHES D'ELECTRICITE DE FRANCE

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droits ou ayants-cause, est illicite" (alinéa 1er de l'Article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.



Studio Harcourt

A

Armand BLANC

Directeur Général honoraire du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole
Professeur honoraire à l'Institut National Agronomique
Ancien Directeur de l'Ecole Nationale du Génie Rural
et ancien Professeur d'Hydraulique à cette Ecole
1892-1962

qui fut mon Maître et me forma aux disciplines de l'Hydraulique et ses applications dans les divers domaines de l'Art de l'Ingénieur.

PRÉFACE

Monsieur l'Ingénieur en Chef M. Carlier m'a fait un grand honneur en me demandant de présenter au lecteur son "Hydraulique générale et appliquée". J'ai accepté avec plaisir, non seulement en raison de l'amicale confraternité scientifique et technique qui nous lie depuis bien des années, mais encore et surtout parce que son remarquable ouvrage vient opportunément combler une lacune dans la bibliothèque française de l'Hydraulicien.

En effet, depuis les traités classiques de A. Flamant et de M. Eydoux, les éditeurs français n'avaient guere publié dans ce domaine que des manuels à caractère didactique, spécifiquement destinés aux étudiants, ou des livres consacrés à une branche particulière de cette technique et à l'usage des spécialistes. C'est le mérite de M. Carlier de mettre aujourd'hui à notre disposition un exposé d'ensemble très complet et bien à jour de l'"Hydraulique générale et appliquée" modernes, tel que le réclamaient de nombreux Ingénieurs des grandes Administrations et de l'Industrie.

La mise sur pied d'un tel ouvrage était une tâche ample et ardue ; M. Carlier l'a réussie grâce à sa haute culture classique et technique et à sa double expérience de Professeur et d'Ingénieur.

Pendant près de vingt années il a professé le Cours d'Hydraulique à l'Ecole Nationale du Génie Rural – où, jusqu'à ces dernières, il assuma la responsabilité de la Direction des Etudes – et à l'Institut National Agronomique où il reste titulaire de la Chaire d'Hydraulique. A l'occasion des leçons d'Hydrologie que je professe depuis bientôt quinze ans dans la première de ces grandes Ecoles, j'ai été le témoin du souci permanent de M. Carlier de perfectionner et de tenir à jour – au prix d'un dur travail – les divers chapitres de son Cours d'Hydraulique, afin d'en faire un outil efficace au service de ses Elèves et des Ingénieurs du Corps du Génie rural dont les tâches, en matière d'aménagement et d'utilisation de l'eau, allaient croissant.

C'est cet outil, désormais bien au point, que M. l'Ingénieur en Chef Carlier offre aujourd'hui à un plus large public. A chaque page de ce traité, celui-ci pourra profiter de la clarté et de la rigueur des exposés ; mais à ces qualités traditionnelles des auteurs français s'allie ici un haut souci des applications pratiques, trop souvent négligées dans certains cours magistraux. L'aspect théorique qui seul permet un exposé rationnel et cohérent des divers domaines d'une technique n'en garde pas moins la priorité.

Cette heureuse synthèse de l'Hydraulique des Mathématiciens et de l'Hydraulique des Expérimentateurs et des Ingénieurs est l'une des plus belles réussites de l'auteur. On en jugera notamment en lisant les chapitres substantiels et originaux qu'il consacre, d'une part à l'écoulement dans les canalisations en charge et d'autre part, à l'hydraulique souterraine. Mais comment n'être pas séduit par ce premier chapitre dédié à l'évolution de l'Hydraulique depuis les premiers âges de l'Antiquité jusqu'à nos jours, éloquent témoignage du goût de l'Ingénieur français pour la culture universelle ? Pour avoir passé une partie de ma carrière dans les Laboratoires d'Hydraulique, j'ai aussi vivement apprécié le caractère synthétique du dernier chapitre traitant de la similitude en hydraulique et des modèles physiques et mathématiques.

C'est donc avec une grande confiance que je recommande l'"Hydraulique générale et appliquée" de M. Carlier, non seulement aux Etudiants et aux "Hydrauliciens", mais aussi à tous les nombreux Ingénieurs qui dans les domaines les plus divers ont à comprendre profondément et à utiliser efficacement les techniques de l'hydraulique.

G. RÉMÉNIÉRAS

TABLE DES MATIÈRES

L'ouvrage comporte les chapitres suivants :

I	Historique
II	Considérations générales
III	Hydrostatique
IV	Cinématique des liquides
V	Hydrodynamique
V.1.	Hydrodynamique du liquide parfait
V.2.	Hydrodynamique du liquide réel
VI	Les régimes d'écoulement
VI.1.	Distinction des régimes d'écoulement Expérience de Reynolds
VI.2.	Régime laminaire
VI.3.	Régime turbulent
VII	Le courant liquide
VIII	Ecoulement par les orifices
IX	Ecoulement par les ajutages
X	Ecoulement par les déversoirs
XI	Ecoulement dans les canalisations en charge
XII	Ecoulements à surface libre
XII.1.	Régime uniforme
XII.2.	Régime permanent varié
XII.3.	Jaugeage des écoulements à surface libre
XIII	Hydraulique souterraine
XIV	La similitude en hydraulique – Modèles physiques et mathématiques

Page

Préface XI

Avant-propos XXXV

Chapitre I

HISTORIQUE

I.1. L'Hydraulique pratique des premiers âges de l'Antiquité 1

I.2. La civilisation grecque 2

I.3. Les adductions d'eau romaines 2

I.4. Le Moyen Age 3

I.5. La Renaissance – Apparition de la méthode expérimentale 3

I.6. L'Hydraulique après la Renaissance 5

I.7. Le développement des mathématiques et de la mécanique au 17ème siècle 6

I.8. L'avènement de l'hydrodynamique 8

I.9. L'Hydraulique expérimentale au 18ème siècle 9

I.10. L'Hydraulique au cours de la première moitié du 19ème siècle . 12

I.11. L'Hydraulique au cours de la seconde moitié du 19ème siècle . 14

I.12. L'Hydrodynamique classique et l'Hydrodynamique appliquée au 19ème siècle 15

I.13. Tendances de l'Hydraulique au début du 20ème siècle 16

I.14. L'avènement de la Mécanique des fluides 17

I.15. Les tendances actuelles de l'Hydraulique 18

Page

Chapitre II

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

II.1. Propriétés générales du liquide 21

II.2. Pression en un point d'une masse liquide 22
II.2.1. Existence et définition 22
II.2.2. Propriété de la pression en un point (fluidité parfaite) . 23
II.2.3. Cas d'un liquide de fluidité non parfaite 24

Chapitre III

HYDROSTATIQUE

III.1. Equations générales 27

III.2. Fonction de forces - Surfaces équipotentielles 29

III.3. Application des équations générales au cas d'un fluide soumis à la seule action de la pesanteur 29
III.3.1. Fluide incompressible 30
III.3.2. Fluide élastique 32

III.4. Cas particuliers d'équilibre d'un liquide 32
III.4.1. Liquide pesant tournant autour d'un axe vertical 32
III.4.2. Liquide pesant tournant autour d'un axe horizontal 34

III.5. Unités de pression 35

III.6. Mesure des pressions 36

III.7. Pression exercée par un liquide au repos sur une surface solide en contact avec lui 39
III.7.1. Surface sur laquelle les pressions élémentaires ont une résultante unique 39
III.7.1.1. Surface plane 39
III.7.1.2. Surface sphérique 43
III.7.2. Surface quelconque — Cas d'un corps immergé 43

III.8. Equilibre des corps immergés et des corps flottants 46
III.8.1. Corps immergés 46
III.8.2. Corps flottants 46
III.8.2.1. Flottaisons isocarènes 47
III.8.2.2. Définition et position du métacentre 47
III.8.2.3. Condition de stabilité 48
III.8.2.4. Petites oscillations d'un flotteur en eau calme . 49
III.8.2.5. Stabilité statique et stabilité dynamique d'un flotteur 51

Page

Chapitre IV

CINÉMATIQUE DES LIQUIDES

IV.1. Définitions 55
IV.1.1. Système de référence 55
IV.1.1.1. La méthode de Lagrange 55
IV.1.1.2. La méthode d'Euler 55
IV.1.2. Lignes de courant – Surfaces et tubes de courant – Trajectoires – Lignes d'émission 55
IV.1.2.1. Cas général de l'écoulement non permanent. Matérialisation des différentes lignes 56
IV.1.2.2. Cas particulier de l'écoulement permanent 56
IV.2. Equation de continuité 57
IV.3. Mouvements et déformations d'un volume élémentaire de fluide . 59
IV.4. Ecoulements rotationnels et irrotationnels 64
IV.5. Etude des écoulements irrotationnels 65
IV.5.1. Existence d'un potentiel des vitesses 65
IV.5.2. Etude analytique des écoulements irrotationnels 66
IV.5.2.1. Cas général des écoulements à trois dimensions. 66
IV.5.2.2. Cas particulier des écoulements plans – Fonction de courant 67
IV.5.2.3. Fonction analytique d'une variable complexe .. 68
IV.5.2.4. Méthode des transformations conformes 72
IV.5.2.4.1. Rappel de la théorie des transformations conformes 72
IV.5.2.4.2. Application à l'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses 73
IV.5.3. Etude graphique des écoulements irrotationnels 76
IV.5.4. Etude analogique des écoulements irrotationnels 79
IV.6. Etude cinématique des écoulements giratoires 80
IV.6.1. Définition 80
IV.6.2. Coordonnées cylindriques 80
IV.6.3. Equation de continuité 81
IV.6.4. Exemple d'un écoulement giratoire et irrotationnel : le vortex 82

Chapitre V

HYDRODYNAMIQUE

V.1. Hydrodynamique du liquide parfait 87
V.1.1. Equations générales du mouvement (équations d'Euler) .. 87
V.1.2. Equation caractéristique 88
V.1.3. Equation de continuité 88
V.1.4. Equation du mouvement le long de la trajectoire 89

Page

V.1.5. Répartition des pressions dans une section droite d'une masse liquide en mouvement dont les trajectoires des molécules liquides sont des droites parallèles ou des courbes parallèles à grand rayon de courbure 89
V.1.6. Cas particulier du mouvement permanent 90
V.1.6.1. Définition 90
V.1.6.2. Equation générale du mouvement permanent 90
V.1.6.2.1. Cas d'un fluide élastique dans le champ de la pesanteur – Formule de Navier . 90
V.1.6.2.2. Cas d'un liquide incompressible dans le champ de la pesanteur – Théorème de Daniel Bernoulli 91
V.1.7. Ecoulements potentiels et écoulements conservatifs 93
V.1.7.1. Mouvement à potentiel des accélérations – Théorème de Lagrange 93
V.1.7.2. Signification énergétique des équations d'Euler . 94
V.1.7.2.1. Mouvement permanent – Théorème de Bernoulli 94
V.1.7.2.2. Mouvement irrotationnel non permanent 95
V.1.7.3. Gradient transversal des pressions – Influence de la courbure de la trajectoire 95
V.1.7.4. Gradient transversal des vitesses 96
V.1.7.5. Application à l'écoulement sur un barrage-déversoir . 96

V.2. Hydrodynamique du liquide réel 98
V.2.1. Notions générales sur la viscosité des liquides 98
V.2.1.1. Expérience de Couette 98
V.2.1.2. Coefficients de viscosité 99
V.2.1.3. Nature physique de la viscosité des fluides 100
V.2.2. Intervention de la viscosité dans les équations générales du mouvement des fluides parfaits 100
V.2.2.1. Détermination des tensions visqueuses 100
V.2.2.2. Equations générales du mouvement d'un liquide réel : Equations de Navier-Stokes 102
V.2.2.3. Cas particuliers de simplification des équations de Navier-Stokes 104
V.2.3. Cas particulier du régime permanent – Extension du théorème de Bernoulli au cas d'un liquide réel 105
V.2.4. Equations intrinsèques du mouvement permanent d'un liquide réel dans le champ de la pesanteur 107

Chapitre VI

LES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

VI.1. Distinction des régimes d'écoulement – Experience de Reynolds . . 111
VI.2. Régime laminaire 112

Page

VI.2.1. Ecoulement entre deux plans parallèles 112
VI.2.1.1. Les deux parois sont immobiles : écoulement plan de Poiseuille 113
VI.2.1.2. Une paroi est immobile, l'autre en mouvement avec une vitesse constante V_0 : écoulement plan de Couette 114
VI.2.1.3. Une paroi est immobile, l'autre en mouvement avec une vitesse constante V_0 mais le gradient de pression dp/dx n'est pas nul : écoulement de Couette généralisé 114
VI.2.1.4. Ecoulement de Hele-Shaw 115
VI.2.1.5. Ecoulement de Reynolds dans un coin d'huile – Graissage hydrodynamique 116
VI.2.2. Ecoulement dans un tube cylindrique 117
VI.2.3. Mesure de la viscosité des liquides – Viscosimètres 119
VI.2.4. Ecoulement en régime laminaire dans les sols 120
VI.2.5. Limitation de la loi de Newton – Introduction à la rhéologie 120
VI.3. Régime turbulent 121
VI.3.1. Définition, fluctuations du vecteur vitesse, mouvement moyen 121
VI.3.2. Paradoxe de Du Buat 122
VI.3.3. Echange latéral de quantité de mouvement – Analogie de Bakhmeteff 123
VI.3.4. Etude statistique de la turbulence 124
VI.3.5. Longueur de mélange – Equation de Prandtl et Von Karman . 125
VI.3.6. Coefficient de turbulence 126
VI.3.7. Etude expérimentale de la turbulence – L'anémomètre à fil chaud 128
VI.3.8. Influence de la turbulence sur le degré d'inégalité des vitesses dans une section transversale 128
VI.3.9. Conséquences secondaires de la turbulence 129

Chapitre VII

LE COURANT LIQUIDE

VII.1. Régime, débit, vitesse moyenne 133
VII.1.1. Régime 133
VII.1.2. Débit 133
VII.1.3. Vitesse moyenne – Coefficients η, α et β 133
VII.1.3.1. Quantité de mouvement 134
VII.1.3.2. Energie cinétique 134
VII.2. Répartition des vitesses dans une section transversale 136
VII.2.1. Répartition générale 136
VII.2.2. Etude du courant liquide en régime turbulent au voisinage de la paroi – Notion de couche-limite 136
VII.2.2.1. Couche-limite laminaire 137
VII.2.2.2. Couche-limite turbulente – Sous-couche laminaire 138
VII.2.2.3. Développement de la couche-limite à l'entrée d'un tube cylindrique ou d'un canal 139

Page

VII.3. Résistance opposée par un solide immergé dans un courant liquide 141
VII.3.1. Résistance de surface 141
VII.3.2. Résistance de forme – Décollement – Sillage 141
VII.3.3. Comparaison du pouvoir d'adhérence de la couche-limite laminaire et de la couche-limite turbulente – Paradoxe d'Eiffel 142
VII.3.4. Aspiration de la couche-limite 143
VII.3.5. Expression de la résistance totale sur des solides immergés de forme symétrique 143
VII.3.6. Vitesse-limite de chute d'une sphère dans un liquide au repos 145
VII.3.6.1. Variation du coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds 145
VII.3.6.2. Vitesse-limite de chute en régime laminaire – Formule de Stokes 145
VII.3.6.3. Vitesse-limite de chute en régime turbulent . 146

VII.4. Equation générale du mouvement permanent d'un courant liquide dans le champ de la pesanteur 146

VII.5. Application au courant liquide du théorème des quantités de mouvement : théorème d'Euler 150
VII.5.1. Théorème d'Euler 151
VII.5.2. Application au calcul de la poussée exercée par un jet horizontal sur une plaque 152
VII.5.2.1. Plaque plane 152
VII.5.2.2. Plaque courbe 153
VII.5.3. Application au calcul de la poussée sur un coude de conduite horizontal 154

VII.6. Perte de charge le long d'un courant liquide 155
VII.6.1. Expression générale de la perte de charge – Utilisation de l'analyse dimensionnelle 155
VII.6.1.1. Principe de l'analyse dimensionnelle – Théorème des π ou de Vaschy-Buckingham 155
VII.6.1.2. Application de l'analyse dimensionnelle en hydraulique 156
VII.6.1.3. Application à l'établissement de l'expression de la perte de charge dans un écoulement rectiligne de section transversale constante 156
VII.6.2. Variation de la perte de charge d'un écoulement en fonction du nombre de Reynolds 158
VII.6.3. Pertes de charge locales le long d'un courant liquide . 159
VII.6.3.1. Elargissement brusque de la section d'un courant liquide 159
VII.6.3.2. Elargissement progressif de la section d'un courant liquide (cône divergent) 161
VII.6.3.3. Rétrécissement brusque de la section d'un courant liquide 162

Page

VII.6.3.3.1. La partie rétrécie a une très faible longueur : Diaphragme 162
VII.6.3.3.2. La partie rétrécie a une certaine longueur 162
VII.6.3.4. Rétrécissement progressif de la section d'un courant liquide (convergent) 162
VII.6.3.5. Influence comparée d'un convergent et d'un divergent sur la répartition des vitesses dans la section transversale d'un courant liquide . 163
VII.6.3.6. Changement de direction d'un courant liquide . 163

Chapitre VIII

ÉCOULEMENT PAR LES ORIFICES

VIII.1. Définitions et propriétés qualitatives de l'écoulement 167
VIII.2. Orifices non noyés 167
VIII.2.1. Orifice en mince paroi 167
VIII.2.1.1. Observation expérimentale – Phénomène de contraction de la veine 168
VIII.2.1.2. Formule de Torricelli 168
VIII.2.1.3. Calcul du débit 169
VIII.2.1.4. Valeurs du coefficient m 170
VIII.2.1.5. Particularités de l'écoulement par un orifice polygonal 170
VIII.2.1.6. Application : orifice de jauge 171
VIII.2.1.7. Similitude des écoulements par les orifices . 172
VIII.2.2. Orifice à veine moulée 172
VIII.2.3. Orifices à contraction incomplète 173
VIII.3. Orifices noyés 174
VIII.4. Vidange d'un réservoir muni d'un orifice 176
VIII.4.1. Cas général d'un réservoir de forme quelconque 176
VIII.4.2. Cas particulier d'un réservoir prismatique ou cylindrique vertical 176

Chapitre IX

ÉCOULEMENT PAR LES AJUTAGES

IX.1. Ajutage cylindrique 179
IX.1.1. Ajutage intérieur ou rentrant ou ajutage de Borda 179
IX.1.1.1. Ajutage court, à veine non adhérente 179
IX.1.1.2. Ajutage long, à veine adhérente 180
IX.1.2. Ajutage extérieur ou sortant 182
IX.2. Ajutage conique 183
IX.2.1. Ajutage conique convergent 183
IX.2.2. Ajutage conique divergent 184

Page

IX.3. Application des ajutages 185
IX.3.1. Débitmètre Venturi 185
IX.3.2. Bac de jaugeage 186
IX.3.3. Pompe à piston sans soupape 186

Chapitre X

ÉCOULEMENT PAR LES DÉVERSOIRS

XI. Définitions – Différents types de nappes 189
X.1.1. A l'amont 189
X.1.2. A l'aval 189
X.1.2.1. Influence de la charge 189
X.1.2.2. Influence du niveau d'aval 191

X.2. Ecoulement par nappe libre 192
X.2.1. Déversoir à mince paroi ou à crête mince 192
X.2.1.1. Déversoir vertical 192
X.2.1.1.1. Déversoir rectangulaire 192
X.2.1.1.1.1. Déversoir rectangulaire sans contraction latérale 193
X.2.1.1.1.2. Déversoir rectangulaire avec contraction latérale 195
X.2.1.1.1.3. Formule de Kindsvater et Carter 196
X.2.1.1.1.4. Valeurs usuelles du coefficient de débit 197
X.2.1.1.1.5. Application du déversoir rectangulaire vertical à crête mince au jaugeage rapide d'un petit cours d'eau 197
X.2.1.1.2. Déversoir triangulaire 198
X.2.1.1.3. Déversoir trapézique 200
X.2.1.1.4. Déversoir circulaire 201
X.2.1.1.5. Déversoir réalisant une loi $Q(h)$ donnée. 202
X.2.1.2. Déversoir incliné 203
X.2.1.3. Déversoir latéral 204
X.2.1.4. Déversoir oblique 206
X.2.2. Déversoir à crête épaisse ou à large seuil 207
X.2.2.1. Description de l'écoulement 207
X.2.2.2. Principe du débit maximal 207
X.2.2.3. Expression du débit 208
X.2.2.4. Barrage-déversoir à poutrelles 208
X.2.2.5. Déversoir à seuil épais dont le parement aval guide la nappe (seuil déversant) 209
X.2.2.6. Profils déprimés avec aspiration de la couche-limite 210
X.3. Ecoulement par nappe déprimée 211

Page

X.4. Ecoulement par nappe noyée en dessous 211
X.5. Déversoir noyé 212
X.6. Vidange d'un réservoir par un déversoir 214
X.7. Utilisation des déversoirs comme ouvrages régulateurs des plans d'eau 215

Chapitre XI

ÉCOULEMENT DANS LES CANALISATIONS EN CHARGE

XI.1. Formules générales de l'écoulement permanent en régime turbulent dans les canalisations cylindriques de diamètre constant 219
XI.1.1. Equation générale de l'écoulement 219
XI.1.2. Formules anciennes 219
XI.1.3. Formules modernes 222
XI.1.3.1. Expression générale de la perte de charge 222
XI.1.3.2. Cas des tuyaux lisses : Régime turbulent lisse 223
XI.1.3.2.1. Etudes de l'Ecole de Prandtl 223
XI.1.3.2.2. Formules du type $\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$ 227
XI.1.3.2.3. Formules du type $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{\mathcal{R}^n}$ 228
XI.1.3.2.4. Conclusions sur les formules d'écoulement en régime turbulent lisse – Critique des formules logarithmiques . 228
XI.1.3.3. Cas des tuyaux rugueux 228
XI.1.3.3.1. Notion de rugosité 228
XI.1.3.3.2. Régime de faible turbulence dans les conduites rugueuses 230
XI.1.3.3.3. Régime de pleine turbulence dans les conduites rugueuses ou régime turbulent rugueux 231
XI.1.3.3.4. Formule de Colebrook 233
XI.1.3.3.5. Formules dérivées de la formule de Colebrook 234
XI.1.3.3.6. Cas particulier de la rugosité d'ondulation, des rugosités en hélice et des joints 235
XI.1.3.3.7. Fonction générale de rugosité 236
XI.1.3.3.8. Evolution de la rugosité en fonction de l'âge et de la nature de la canalisation et des caractéristiques du liquide transporté 237
XI.1.4. Récapitulation des diverses formules d'écoulement en régime turbulent 239

Page

XI.2. Utilisation pratique des formules – Problèmes usuels 243
XI.2.1. Détermination de J et tracé de la ligne des niveaux piézométriques dans quelques cas usuels 243
XI.2.1.1. Réservoir à niveau constant alimentant une canalisation rectiligne débouchant à l'air libre 243
XI.2.1.2. On dispose une vanne à l'extrémité de la canalisation 246
XI.2.1.3. On dispose une vanne entre le réservoir et l'extrémité de la canalisation 246
XI.2.1.4. Canalisation reliant deux réservoirs 247
XI.2.1.5. Application au transvasement d'un liquide d'un réservoir dans un autre à l'aide d'une canalisation 248
XI.2.2. Pertes de charges singulières le long d'une canalisation .. 250
XI.2.2.1. Elargissements et rétrécissements brusques ou progressifs 250
XI.2.2.2. Coudes 250
XI.2.2.2.1. Coudes arrondis 250
XI.2.2.2.2. Coudes à angles vifs 253
XI.2.2.2.3. Coudes à ailettes 254
XI.2.2.3. Branchements et dérivations 254
XI.2.2.4. Robinets-vannes 255
XI.2.2.5. Divers autres accessoires 256
XI.2.3. Problèmes usuels – Usage des tables et abaques 256
XI.2.3.1. Calcul du débit 257
XI.2.3.2. Calcul du diamètre 257
XI.2.3.3. Calcul de la perte de charge 258
XI.2.3.4. Cas où la vitesse moyenne ne doit pas dépasser certaines valeurs maximales 258
XI.2.4. Calcul d'un réseau de canalisations (réseau ramifié) 259
XI.2.4.1. Principe du calcul 259
XI.2.4.2. Cas où les divers tronçons ont des diamètres différents 261
XI.2.4.3. Cas où les divers tronçons transportent des débits différents 262
XI.2.4.4. Cas d'une canalisation présentant des contrepentes 262
XI.2.4.5. Influences relatives de la charge et du diamètre sur le débit d'une canalisation – Diamètre économique d'une canalisation de distribution 263
XI.3. Canalisation de diamètre variable 264
XI.3.1. Canalisation de diamètre progressivement variable 264
XI.3.2. Canalisation constituée de tronçons successifs ayant chacun un diamètre constant 264
XI.3.2.1. Règle de Dupuit – Conduite équivalente 264
XI.3.2.2. Application de la formule de Darcy à l'expression plus exacte de la longueur équivalente 265

Page

XI.4. Canalisation assurant un service en route 265
XI.4.1. Service en route 265
XI.4.2. Service mixte 267
XI.4.3. Canalisation alimentant plusieurs prises régulièrement espacées et délivrant, chacune, un débit constant 268
XI.4.4. Point neutre : Définition et position 269

XI.5. Calcul des réseaux maillés 271
XI.5.1. Définition, exposé du problème, principes directeurs 271
XI.5.2. Cas particulier des conduites en parallèle 272
XI.5.3. Méthode Hardy-Cross 274
XI.5.3.1. Principe de la méthode 274
XI.5.3.2. Utilisation d'une formule quadratique du type $j = Rq^2$ 275
XI.5.4. Méthode graphique 276
XI.5.4.1. Courbe caractéristique d'une canalisation 276
XI.5.4.2. Caractéristique résultante de canalisations en série ou en parallèle 277
XI.5.4.3. Calcul d'une maille dont un tronçon assure un service en route uniforme 277
XI.5.4.4. Calcul d'un réseau à deux mailles 278
XI.5.5. Méthodes expérimentales par analogie 281
XI.5.5.1. Analogie hydraulique ou pneumatique 281
XI.5.5.2. Analogie électrique 282

XI.6. Réseaux comportant des réservoirs d'équilibre ou d'extrémité . . . 282
XI.6.1. Alimentation d'une prise d'eau par deux réservoirs 282
XI.6.1.1. Solution mathématique 283
XI.6.1.2. Solution graphique 283
XI.6.1.3. Cas où les divers tronçons assurent des services en route uniformes 284
XI.6.2. Alimentation d'une prise d'eau par trois réservoirs 285
XI.6.3. Prise en compte de la non-permanence du régime 286

XI.7. Nœud de canalisations 286

XI.8. Calcul d'une conduite de refoulement 288
XI.8.1. Puissance à fournir 288
XI.8.2. Calcul du diamètre "économique" de la canalisation de refoulement 289
XI.8.2.1. Formule de Bresse 289
XI.8.2.2. Formule de Koch et Vibert 289
XI.8.2.3. Formule simplifiée de Munier 291

XI.9. Transmission hydraulique d'énergie mécanique 291

XI.10. Le coup de bélier 292
XI.10.1. Hypothèses de base – Intervention de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité des enveloppes 293
XI.10.2. Equations différentielles du régime variable (équations d'Alliévi) 294
XI.10.2.1. Théorème des quantités de mouvement 294

Page

XI.10.2.2. Equation de continuité, compte tenu de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité de la conduite 294
XI.10.2.3. Intégration des équations différentielles du mouvement 296
XI.10.2.4. Interprétation des équations d'Alliévi 297
XI.10.2.5. Simplification des équations d'Alliévi 298
XI.10.3. Application des équations d'Alliévi à quelques cas pratiques 298
XI.10.3.1. Fermeture brusque 299
XI.10.3.2. Fermeture lente 301
XI.10.3.3. Etude des phénomènes d'ouverture 303
XI.10.3.4. Conduites à caractéristiques multiples 303
XI.10.3.5. Mesure du débit d'une canalisation par la méthode de Gibson 303
XI.10.3.6. Transmission sonique 304
XI.10.4. Méthode graphique de Schnyder-Bergeron 305
XI.10.4.1. Principe de la méthode 305
XI.10.4.2. Application à un cas général 306
XI.10.4.3. Courbes caractéristiques $h(q)$ des principales singularités 308
XI.10.4.4. Application à l'analyse du coup de bélier provoqué par la fermeture lente d'un robinet-vanne situé à l'extrémité d'une canalisation alimentée par un réservoir à niveau constant . 313
XI.10.5. Protection contre les coups de bélier 316

Chapitre XII

ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

XII.1. Régime uniforme 323
XII.1.1. Formule générale de l'écoulement 323
XII.1.2. Formules usuelles pour les canaux artificiels 325
XII.1.3. Formules de l'écoulement dans les cours d'eau naturels. 330
XII.1.3.1. Application aux cours d'eau naturels des formules de l'écoulement dans les canaux 330
XII.1.3.2. Formules sans coefficient de rugosité 331
XII.1.4. Cas des sections composées ou hétérogènes 331
XII.1.4.1. Section composée 331
XII.1.4.2. Section hétérogène 332
XII.1.5. Vitesses 333
XII.1.5.1. Répartition des vitesses dans une section transversale 333
XII.1.5.2. Vitesses limites 334
XII.1.6. Sections transversales – Profils en travers 334
XII.1.6.1. Section tranversale 334
XII.1.6.2. Eléments normaux 335

Page

XII.1.6.3. Profils en travers 335
XII.1.6.4. Profil de débit maximal ou forme de section la plus avantageuse 337
XII.1.6.4.1. Forme demi-circulaire 337
XII.1.6.4.2. Forme trapézoïdale 337
XII.1.6.4.3. Forme rectangulaire 338
XII.1.6.4.4. Comparaison des trois formes précédentes 339
XII.1.7. Problèmes usuels sur les canaux en régime uniforme ... 339
XII.1.8. Formules simplifiées de Porchet pour les petits canaux .. 340
XII.1.9. Aqueducs 340
XII.1.9.1. Condition de débit maximal 341
XII.1.9.2. Condition de vitesse moyenne maximale 342
XII.1.9.3. Application à l'aqueduc de section circulaire . 342

XII.2. Régime permanent varié 343
XII.2.1. Définitions 343
XII.2.2. Utilisation des théorèmes fondamentaux 343
XII.2.2.1. Théorème de Bernoulli 343
XII.2.2.2. Théorème d'Euler 346
XII.2.3. Energie spécifique 347
XII.2.3.1. Définition 347
XII.2.3.2. Courbe $h(Q)$ pour E constant 348
XII.2.3.3. Courbe $E(h)$ pour Q constant 349
XII.2.4. Régime critique 350
XII.2.4.1. Définitions 350
XII.2.4.2. Formules du régime critique 351
XII.2.4.2.1. Section de forme quelconque 351
XII.2.4.2.2. Section rectangulaire 352
XII.2.4.3. Régime torrentiel et régime fluvial. Correspondance avec le nombre de Froude 352
XII.2.4.4. Courbe (F) – Impulsion totale. Impulsion critique 353
XII.2.4.4.1. Section de forme quelconque ... 353
XII.2.4.4.2. Section rectangulaire 354
XII.2.4.5. Utilisation des grandeurs réduites (cas des sections rectangulaires) 355
XII.2.4.6. Pente critique 356
XII.2.4.6.1. Section de forme quelconque ... 356
XII.2.4.6.2. Section rectangulaire 356
XII.2.5. Utilisation de la courbe (E) pour l'étude des régimes variés. 357
XII.2.5.1. Canal uniforme 357
XII.2.5.2. Canal de section non uniforme 358
XII.2.5.3. Pentes "faibles" et "fortes" 359
XII.2.5.4. Signe de $\frac{\partial E}{\partial s}$ le long d'un écoulement en canal uniforme et en régime graduellement varié .. 359

Page

360

XII.2.6. Etude générale des mouvements graduellement variés . . 360
XII.2.6.1. Généralités et hypothèses . . . .
XII.2.6.2. Equation différentielle du mouvement graduellement varié en canal uniforme 362
XII.2.6.3. Etude qualitative systématique et classification des différentes lignes d'eau des mouvements permanents graduellement variés 362
XII.2.6.4. Propriétés communes des courbes de remous en régime graduellement varié 371
XII.2.7. Calcul du profil de la ligne d'eau en mouvement permanent graduellement varié (courbes de remous) 372
XII.2.7.1. Méthode de Bresse 373
XII.2.7.1.1. Intégration de l'équation differentielle 373
XII.2.7.1.2. Calcul pratique d'une courbe de remous par la méthode de Bresse . 375
XII.2.7.2. Méthode de Bakhmeteff 376
XII.2.7.2.1. Principe de la méthode 376
XII.2.7.2.2. Utilisation pratique de la méthode . 377
XII.2.7.2.3. Méthode simplifiée dans le cas où on peut négliger la variation d'énergie cinétique 378
XII.2.7.2.4. Cas d'un canal horizontal 378
XII.2.7.3. Méthode par approximations successives 379
XII.2.7.4. Méthode graphique de Raytchine et Chatelain. 380
XII.2.7.5. Méthode de Silber 382
XII.2.7.5.1. Caractéristique universelle des écoulements graduellement variés à surface libre 382
XII.2.7.5.2. Diagramme universel 384
XII.2.7.5.3. Caractéristique du ressaut 386
XII.2.7.5.4. Courbe d'utilisation d'un écoulement, calcul et tracé des courbes de remous 389
XII.2.8. Intumescences infinitésimales 397
XII.2.8.1. Définition 397
XII.2.8.2. Formule de Lagrange 398
XII.2.8.3. Célérité de l'onde et vitesse critique 398
XII.2.8.4. Analogie avec le coup de bélier 399
XII.2.8.5. Intumescence et onde stationnaire ou "ressaut". 399
XII.2.9. Le ressaut hydraulique stationnaire 399
XII.2.9.1. Définition ; description ; profondeurs conjuguées 399
XII.2.9.2. Relation fondamentale entre les profondeurs conjuguées 400
XII.2.9.2.1. Section de forme quelconque . . . 401
XII.2.9.2.2. Section rectangulaire 401
XII.2.9.3. Perte de charge due au ressaut 402

Page

XII.2.9.4. Utilisation des courbes (E') et (f') en coordonnées réduites (cas d'une section rectangulaire) 402
XII.2.9.5. Recherche de la position du ressaut 403
XII.2.9.6. Utilisation du ressaut 404
XII.2.10. Application à l'étude de quelques autres régimes variés ... 405
XII.2.10.1. Ecoulements noyés et dénoyés 405
XII.2.10.2. Singularités de la section transversale 406
XII.2.10.2.1. Rétrécissement de grande longueur 406
XII.2.10.2.2. Elargissement de grande longueur 408
XII.2.10.2.3. Canal-Venturi ou Parshall ... 409
XII.2.10.2.4. Action des piles de pont 411
XII.2.10.2.4.1. Etude descriptive – Divers types d'écoulement 411
XII.2.10.2.4.2. Calcul du remous 414
XII.2.10.2.4.3. Affouillements et phénomènes alternés dûs aux piles 417
XII.2.10.2.4.4. Calcul du remous pour les petits ouvrages . 417
XII.2.10.2.4.5. Remous à la traversée des grilles 418
XII.2.10.3. Singularités du profil en long 418
XII.2.10.3.1. Canal horizontal 418
XII.2.10.3.2. Relèvement du fond d'un canal (seuil) 421
XII.2.10.3.3. Changement brusque de pente . 421
XII.2.10.3.4. Déversoir à crête épaisse horizontale 423
XII.2.11. Exemple du tracé de la ligne d'eau et de la ligne d'énergie d'un courant permanent rencontrant une singularité quelconque 424

XII.3. Jaugeage des écoulements à surface libre 427
XII.3.1. Généralités – Classification des méthodes de jaugeage . 427
XII.3.2. Méthode volumétrique 429
XII.3.3. Méthode chimique ou de dilution 429
XII.3.3.1. Injection à débit constant 429
XII.3.3.1.1. Principe 429
XII.3.3.1.2. Caractéristiques des solutions utilisées 430
XII.3.3.1.3. Technique opératoire 430

Page

XII.3.3.2. Injection instantanée ou jaugeage par intégration 432
XII.3.3.2.1. Principe 432
XII.3.3.2.2. Condition de bon mélange 432
XII.3.3.2.3. Technique opératoire 432
XII.3.3.2.4. Réactifs utilisés – Utilisaton des traceurs radioactifs 433
XII.3.3.2.5. Avantages de la méthode d'intégration 433
XII.3.4. Méthode de l'écran mobile ou écran Andersson 433
XII.3.5. Méthode de l'écran salin ou méthode d'Allen 434
XII.3.6. Méthode du flotteur 435
XII.3.7. Méthode par exploration du champ des vitesses dans une section transversale 436
XII.3.7.1. Mesure des vitesses 436
XII.3.7.1.1. Moulinets hydrométriques 436
XII.3.7.1.2. Tube de Pitot et ses perfectionnements 439
XII.3.7.1.3. Autres appareils de mesure des vitesses 442
XII.3.7.2. Technique opératoire 442
XII.3.7.2.1. Choix de la section de jaugeage . . . 442
XII.3.7.2.2. Exécution des jaugeages 443
XII.3.7.2.3. Calcul du débit 445
XII.3.8. Méthode du déversoir 447
XII.3.8.1. Conditions d'emploi 447
XII.3.8.2. Types d'installations 447
XII.3.8.3. Normes d'exécution 448
XII.3.8.4. Normes de mesure 448
XII.3.8.5. Précision des mesures 449
XII.3.9. Méthode des veines contractées 449

Chapitre XIII
HYDRAULIQUE SOUTERRAINE

XIII.1. Différents états de l'eau dans le sol 455
XIII.2. Loi fondamentale de l'écoulement – Les vitesses de filtration 456
XIII.2.1. Loi de Darcy 456
XIII.2.2. Limites d'application de la loi de Darcy 457
XIII.2.3. Les différentes vitesses de filtration 458
XIII.2.3.1. La vitesse apparente de filtration 458
XIII.2.3.2. La vitesse réelle 458
XIII.2.3.3. La vitesse de filtration par unité de gradient hydraulique ou "vitesse de filtration de Darcy" 459
XIII.2.4. Les différentes expressions de la perméabilité d'un milieu filtrant 459

Page

XIII.2.4.1. Module de Thiem 459
XIII.2.4.2. Définition du "Darcy" 459
XIII.2.4.3. Perméabilité intrinsèque 460
XIII.2.4.4. Perméabilité Lugeon 461
XIII.2.5. Variations de K en fonction des divers paramètres dont il dépend 461
XIII.2.5.1. Influence de la température 461
XIII.2.5.2. Influence des caractéristiques granulométriques du sol 461

XIII.3. Théorie élémentaire de Dupuit sur les nappes souterraines 462
XIII.3.1. Hypothèses fondamentales de Dupuit 462
XIII.3.2. Nappes cylindriques 464
XIII.3.2.1. Définition 464
XIII.3.2.2. Application de la théorie de Dupuit 464
XIII.3.2.3. Hauteur de résurgence 465
XIII.3.2.4. Application de la théorie de Dupuit au drainage – Formule de l'ellipse 465
XIII.3.2.5. Améliorations apportées à la formule de l'ellipse – Formule de Hooghoudt 466
XIII.3.2.6. Cas de deux liquides différents 467
XIII.3.3. Nappes à filets convergents 468
XIII.3.3.1. Définition 468
XIII.3.3.2. Application de la théorie de Dupuit 468
XIII.3.3.3. Mesure de K par la méthode de Thiem ... 469
XIII.3.3.4. Prise en compte de la courbure des filets liquides 470
XIII.3.3.5. La hauteur de résurgence – Débit maximal d'un puits 471
XIII.3.3.6. Coefficient de débit ou "module" d'un puits 471
XIII.3.3.7. Hypothèse de Porchet. Formule simplifiée du débit d'un puits 472
XIII.3.3.8. Terrains de perméabilités différentes....... 473
XIII.3.3.9. Puits absorbant 473
XIII.3.3.10. Puits n'atteignant pas le fond imperméable de la nappe 473
XIII.3.3.11. Puits creusé dans une nappe dont le fond imperméable est incliné 475
XIII.3.3.12. Nappe captive – Puits artésien 476

XIII.4. Nappes souterraines en régime variable 476
XIII.4.1. Mise en évidence du régime variable 476
XIII.4.2. Equation différentielle du régime variable 477
XIII.4.3. Intégration de l'équation différentielle du régime variable. Formules de Theis et Jacob 479
XIII.4.4. Utilisation pratique des formules du régime variable 480
XIII.4.4.1. Utilisation de la formule de Theis et de la courbe standard 480

Page

XIII.4.4.2. Utilisation de la formule simplifiée de Jacob au cours de la période de pompage 482
XIII.4.4.3. Application de la formule simplifiée de Jacob à la remontée de la nappe après l'arrêt du pompage 483
XIII.4.4.4. Variations brusques du débit de pompage . . . 483
XIII.4.4.5. Extension des méthodes de Theis et Jacob à plusieurs forages 484
XIII.4.4.6. Rayon d'action d'un puits dans le cadre du régime variable 485
XIII.4.4.7. Cas des nappes cylindriques 486
XIII.4.4.8. Nappes de drainage en régime variable 487

XIII.5. Application aux écoulements souterrains de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses 488
XIII.5.1. Existence d'un potentiel des vitesses 488
XIII.5.2. Conditions aux limites de l'écoulement 489
XIII.5.2.1. Au contact d'une paroi imperméable 489
XIII.5.2.2. Au contact d'une masse d'eau présentant une surface libre 489
XIII.5.2.3. Au contact de la surface d'une nappe libre . . 489
XIII.5.2.4. Surface de suintement 490
XIII.5.3. Méthodes analytiques : application à l'écoulement autour d'une file de palplanches – Le phénomène de renard . . . 490
XIII.5.3.1. Définitions 490
XIII.5.3.2. Application de la méthode des transformations conformes 491
XIII.5.3.3. Application au calcul de la condition d'entraînement des particules – Risque de renard 493
XIII.5.4. Méthodes graphiques 495
XIII.5.4.1. Ecoulement à travers une digue en terre . 495
XIII.5.4.2. Ecoulement entre une fondation et une couche imperméable 496
XIII.5.4.3. Sol constitué de plusieurs zones de perméabilités différentes 497
XIII.5.4.4. Sol présentant une anisotropie transversale . 497
XIII.5.5. Méthodes analogiques 497
XIII.5.5.1. Analogie électrique 497
XIII.5.5.2. Analogie hydraulique 500
XIII.5.6. Autres méthodes d'étude des écoulements souterrains . . 501
XIII.5.6.1. Essais sur modèles réduits 501
XIII.5.6.2. Modèles mathématiques 501
XIII.5.6.3. Méthodes géophysiques 501
XIII.6. Annexes 501
XIII.6.1. Méthode limnigraphique de Porchet pour l'étude des puits 501
XIII.6.2. Mesure de la vitesse de filtration K 504

Page

XIII.6.2.1. Méthodes de mesure sur le terrain 504
XIII.6.2.1.1. Essais de pompage 504
XIII.6.2.1.2. Injections............... 505
XIII.6.2.1.2.1. Méthode Lefranc . 505
XIII.6.2.1.2.2. Méthode Lugeon . 507
XIII.6.2.1.3. Mesure de K de la tranche superficielle d'un sol sec en vue de l'irrigation............ 507
XIII.6.2.1.4. Mesure de K de la tranche superficielle d'un sol gorgé d'eau en vue du drainage 508
XIII.6.2.2. Méthodes de laboratoire 509
XIII.6.3. Electrosmose 510

Chapitre XIV

LA SIMILITUDE EN HYDRAULIQUE – MODÈLES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

XIV.1. Introduction aux essais sur modèles réduits 519
XIV.2. Lois de similitude 520
XIV.2.1. Similitude géométrique 520
XIV.2.2. Similitude cinématique 520
XIV.2.3. Similitude dynamique 520
XIV.2.3.1. Analyse des forces 520
XIV.2.3.2. Lois de similitude dynamique 521
XIV.2.3.2.1. Similitude de Reech-Froude .. 521
XIV.2.3.2.2. Similitude de Reynolds 523
XIV.2.3.2.3. Incompatibilité des similitudes de Reech-Froude et de Reynolds 523
XIV.3. Application aux essais sur modèles réduits 524
XIV.3.1. Utilisation de la similitude de Reech-Froude – Seuil de Reynolds 524
XIV.3.2. Influence de la rugosité 525
XIV.3.3. Distorsion 526
XIV.3.4. Conditions aux limites 527
XIV.3.5. Modèles à fond mobile 527
XIV.3.6. Modèles basculés 528
XIV.3.7. Modèles tournants 528
XIV.3.8. Effets d'échelle nuisibles 528
XIV.3.9. Essais sur modèles des turbo-machines 529
XIV.4. Modèles mathématiques 530
XIV.4.1. Limites d'emploi des modèles réduits 530
XIV.4.2. Définition et principe du modèle mathématique 530
XIV.4.3. Avantages du modèle mathématique 531

Page

XIV.4.4. Comparaison du modèle mathématique et du modèle physique ; leur complémentarité 531
XIV.4.5. Exemples d'emploi de modèles mathématiques en hydraulique 531
XIV.4.5.1. Modèles mathématiques d'écoulements à surface libre 531
XIV.4.5.2. Modèles mathématiques hydrologiques 532
XIV.4.5.3. Modèles mathématiques hydrogéologiques . 532
XIV.4.5.4. Autres exemples d'emploi de modèles mathématiques 532

ANNEXES 535

INDEX ALPHABÉTIQUE 551

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE 567

LISTE DES ANNEXES

1 — Abaques d'utilisation de la formule de Colebrook

2 — Tables d'application de la formule de Bazin

3 — Nomogramme à points alignés de la formule de Bazin

4 — Valeurs du coefficient n des formules de Ganguillet et Kutter et de Manning

5 — Formule de Manning — Table des puissances 2/3 de R

6 — Abaque d'utilisation de la formule de Strickler

7 — Table de la fonction de Bresse

8 — Table de la fonction de Bakhmeteff

9 — Table de la fonction $\Phi = \eta + \int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta^n - 1}$

10 — Diagramme universel de Silber pour le calcul et le tracé des courbes de remous

11 — Courbe standard $W(u) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$

11-a : $10^{-1} \leqslant u \leqslant 10$

11-b : $10^{-15} \leqslant u \leqslant 10^{-1}$

Les annexes n^{os} 1, 3, 6, 10 et 11 sont insérées dans une pochette placée à la fin de l'ouvrage

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage reproduit en le développant le contenu de l'enseignement dispensé pendant dix ans à l'Ecole Nationale du Génie Rural où j'ai eu la charge et l'honneur de succéder à Armand Blanc, ancien Directeur Général du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole, titulaire de la chaire de Mécanique des liquides dans cet établissement de 1938 à 1955 et qui fut mon Maître dans cette discipline.

La matière du cours fut progressivement complétée et adaptée à la formation des Ingénieurs du Génie Rural.

Après une introduction consacrée au développement de l'art et de la science de l'Hydraulique à travers les âges, les chapitres II à V traitent des notions classiques de Mécanique des liquides, montrant comment l'utilisation du seul "outil mathématique" permet d'analyser le comportement du liquide parfait ou visqueux. Le domaine d'application des résultats obtenus est relativement limité et le recours à l'expérimentation est indispensable pour fournir à l'Ingénieur les méthodes d'analyse permettant d'établir les formules susceptibles de traduire le comportement du liquide dans les divers cas de la pratique courante.

C'est l'objet des chapitres suivants traitant successivement des écoulements en charge, à surface libre et dans les sols et s'achevant par l'étude des lois de similitude et leurs applications aux essais sur modèles réduits et par les modèles mathématiques.

Cette seconde partie qu'on pourrait intituler l'"Hydraulique" au sens restreint du terme, associe donc la théorie pure et l'expérience, traduisant la double origine de cette science qui en constitue l'originalité.

On ne saurait trop insister sur une conséquence importante de l'introduction de l'expérimentation dans l'hydraulique : les analyses faites et les formules auxquelles elles aboutissent comportent généralement des coefficients expérimentaux intégrant de nombreuses approximations et dont les valeurs ne peuvent couvrir qu'une gamme limitée des divers paramètres physiques intervenant dans l'écoulement considéré ; il est donc essentiel de considérer les résultats obtenus, en particulier les formules établies, comme une première approche vers la solution du problème susceptible de fournir à l'Ingénieur l'outil de travail dont il a besoin, mais qu'il faut constamment adapter aux données particulières du problème à résoudre. Nulle part plus qu'en hydraulique les formules proposées ne sont susceptibles d'extrapolations au-delà du domaine – toujours limité – des variations des nombreux paramètres dont dépend le phénomène étudié. Le talent de l'Ingénieur consistera précisément dans le choix judicieux de la formule susceptible de traduire le mieux possible l'écoulement qu'il doit étudier et ce choix ne peut résulter que d'une analyse aussi complète que possible des nombreux paramètres qui régissent cet écoulement.

Cet ouvrage a précisément été conçu pour faciliter aux Ingénieurs la compréhension des phénomènes en insistant sur la diversité des paramètres physiques qui régissent les conditions d'écoulement des liquides dans les divers cas de la pratique courante et sur le caractère souvent très approximatif des formules proposées pour analyser les écoulements les plus usuels ; le recours à l'expérimentation sur modèle réduit reste alors souvent le seul recours possible pour résoudre complètement le problème lorsque ses paramètres

s'éloignent par trop de ceux des écoulements classiques.

La plupart des chapitres comportent des développements orientés vers les applications pratiques dans les domaines de l'Ingénieur hydraulicien, du Génie civil ou du Génie Rural ; tel est le cas, notamment, des écoulements dans les canalisations en charge, des écoulements à surface libre et de l'hydraulique souterraine.

Nous ne voulons pas terminer cet avant-propos sans exprimer notre respectueuse gratitude à MM. les Ingénieurs Généraux Lyon, Lucas et Becker, anciens Directeurs de l'Ecole Nationale du Génie Rural, pour la confiance qu'ils nous ont témoignée et dont les précieux encouragements nous ont permis de compléter progressivement cet enseignement.

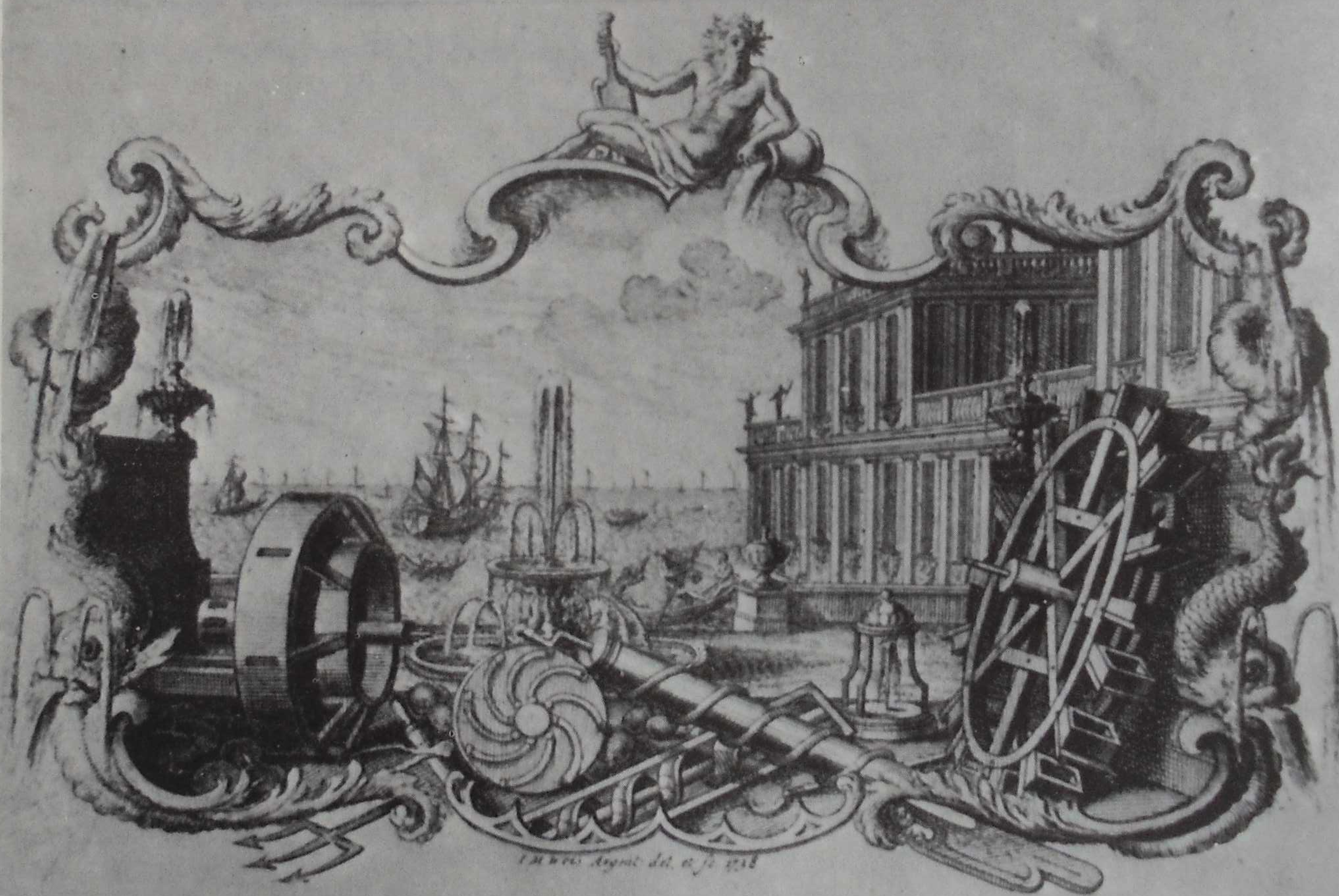
Nous tenons aussi à remercier M. Réméniéras du plaisir et de l'honneur qu'il nous fait en acceptant de préfacer cet ouvrage, témoignant ainsi des sentiments d'estime réciproque et de confraternité scientifique et technique qui ont toujours marqué nos relations depuis l'époque où nous partagions la charge et l'honneur de former les Ingénieurs du Génie Rural aux disciplines de l'Hydrologie et de l'Hydraulique.

Enfin, nous exprimons à M. Banal, Directeur-adjoint des Etudes et Recherches d'Electricité de France, notre très sincère gratitude pour l'accueil qu'il a bien voulu réserver à ce modeste ouvrage dans la prestigieuse Collection du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou qui rassemble nombre de traités remarquables témoignant de la vitalité et du dynamisme de la Science et de la Technique de l'Hydraulique.

DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.

HYDRODYNAMICA,

SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.



ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CCXXXVIII.

Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

HYDRODYNAMICA de Daniel BERNOULLI
(Strasbourg, 1738)

CHAPITRE I

HISTORIQUE

L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine puisqu'elle commande toutes les utilisations de l'eau.

I.1. L'HYDRAULIQUE PRATIQUE DES PREMIERS ÂGES DE L'ANTIQUITÉ

On possède de nombreux témoignages de l'existence d'ouvrages hydrauliques datant de la préhistoire, notamment en *Egypte* et en *Mésopotamie* où ont été découverts des vestiges d'ouvrages d'irrigation remontant à une période certainement antérieure à 4 000 ans avant l'ère chrétienne.

En *Egypte* on a retrouvé les traces des canaux d'assainissement de la vallée du Nil ; un des premiers rois de la première dynastie égyptienne fondée par le roi légendaire Menes, vers 4 000 ans avant J.-C., fit construire un barrage en enrochements sur le Nil à Memphis (ancienne capitale de l'Egypte, à 22 km au Sud du Caire) permettant l'irrigation des terres.

En *Mésopotamie,* la région arrosée par le Tigre et l'Euphrate se prêtait également à l'utilisation des eaux pour l'irrigation ; on y a retrouvé des traces de canaux dont la création remonte à environ 4 000 ans avant l'ère chrétienne.

Les *"Khanats"* (galeries souterraines de captage des nappes de faible profondeur pour les besoins de l'irrigation) datent vraisemblablement de cette époque et se sont largement développés en Iran, au Moyen-Orient, puis en Afrique du Nord (*"foggaras"* des oasis sahariennes et *"rhettaras"* du Maroc) à la suite de l'invasion arabe.

En *Inde* et au *Pakistan,* dans la vallée de l'Indus, des fouilles ont révélé l'existence de bains alimentés par des tuyaux en céramique et se déversant dans des canalisations souterraines placées dans l'axe des rues (environ 3 000 ans avant J.-C.).

En *Chine,* bien qu'il soit souvent difficile de distinguer à ses débuts l'histoire de la légende, on sait que l'irrigation y était déjà certainement très développée, 3 000 ans avant l'ère chrétienne.

La construction de *puits* fut un procédé utilisé postérieurement à la construction des canaux ; le puits de Joseph, au Caire, date du 17ème siècle avant J.-C. ; il descendait à 90 mètres, en plein rocher.

Le premier moyen utilisé pour élever l'eau fut l'*écope,* pour transporter l'eau, à la main, des rivières aux canaux (4 000 ans avant J.-C.). Très vite, le procédé fut amélioré par l'adaptation d'un balancier avec contrepoids (*shadouf,* encore en usage actuellement). Le puisage dans les puits était réalisé à l'aide d'outres, de jarres ou de seaux manœuvrés avec une corde tenue à la main ou actionnée par un treuil simple ou même, comme en Chine, un treuil à vis différentielle.

Plus tard apparut la *noria* qui équipait notamment le puits de Joseph ; cette machine était actionnée d'abord par l'homme, ensuite par les animaux.

Les *roues à aubes* semblent être apparues en Egypte, Mésopotamie et Chine, un millier d'années avant l'ère chrétienne ; peu de temps après, les Perses utilisèrent les premiers moulins à vent de forme primitive.

Plus tard (1 000 ans avant J.-C.) apparurent les *canalisations artificielles* ; des vestiges d'aqueducs avec tunnels et même des tronçons de conduites en charge construits par les Phéniciens ont été retrouvés en Syrie et dans l'île de Chypre.

Vers la même époque, on voit apparaître de petits appareils hydrauliques tels que le siphon et la seringue qui jouèrent un rôle important pour les découvertes ultérieures, notamment celle de la pompe volumétrique à piston.

On ne peut que hasarder des conjectures quant à l'intelligence des principes d'hydraulique que possédaient alors les artisans, les ingénieurs et les constructeurs des ouvrages ou appareils hydrauliques de l'Antiquité. Le succès ultérieur d'un quelconque des projets primitifs fut certainement le résultat de beaucoup de tâtonnements ; il est certain que les connaissances acquises se transmettaient surtout verbalement.

En définitive, l'Hydraulique de l'Antiquité fut surtout un *art* sans aucune base scientifique, en dehors du principe d'approximations successives vers le but cherché.

On doit tout de même admirer l'œuvre de ces anciens constructeurs qui ont permis à leurs successeurs d'entreprendre le développement de la science de l'Hydraulique.

I.2. LA CIVILISATION GRECQUE

Les inventions et découvertes antérieures (siphon, seringue) furent utilisées et perfectionnées par les Ingénieurs qui jouèrent un rôle important dans l'équipement des forces expéditionnaires grecques. Parmi les philosophes qui créèrent les nombreuses écoles classiques (école ionique de Thales de Milet, 640-546 avant J.-C. ; école italique de Pythagore de Samos ; école atomique de Democrite ; école péripatéticienne de Platon, 428-348 avant J.-C. et Aristote 384-322 avant J.-C.), il faut citer *Archimède*, 287-212 avant J.-C., qui étudia à Alexandrie, sous la direction des disciples d'Euclide. On lui attribue l'invention de la vis hydraulique qui porte son nom, bien qu'elle ait pu exister autrefois en Egypte sous une forme plus primitive. La plus populaire de ses découvertes fut celle du principe de flottabilité :

Hieron I^{er}, roi de Syracuse, pensait, dit-on, qu'il avait été frustré dans la quantité d'or utilisé pour la fabrication de sa couronne et il chargea Archimède de découvrir cette fraude. On raconte que la solution lui apparut en entrant dans la piscine d'un bain public, sur quoi, plein d'enthousiasme, il courut chez lui, sans même prendre le temps de se vêtir et tout en criant *"Eurêka"* ("j'ai trouvé"). Il détermina alors par immersion dans l'eau, les déplacements de la couronne et ceux de poids égaux d'or et d'argent, ce qui lui permettait de mesurer le poids volumique de la couronne, de l'or et de l'argent et d'en déduire la proportion de ces deux métaux dans la couronne.

Parmi les nombreux manuscrits d'Archimède, citons une analyse en deux volumes de l'hydrostatique et de la flottabilité qui renferment la théorie de la stabilité des corps flottants à laquelle, vingt siècles plus tard, les Modernes n'ont ajouté que fort peu de choses.

Citons également un autre représentant de l'Ecole d'Alexandrie : *Ctesibios* inventeur d'orgues hydrauliques dans lesquelles la pression de l'eau servait à produire l'écoulement de l'air. Cette machine, appelée *"hydraule"*, fut traduite par d'Alembert dans son *"Encyclopédie"*, par l'expression *"eau sonnante"*. (du grec : *ὕδωρ*, *eau* et *αὐλός*, *flûte*, d'où le terme *ὕδραυλός*, "hydraule"). C'est là l'origine – pleine de charme – du mot *"hydraulique"*.

Ctesibios est également l'inventeur de la première pompe aspirante et foulante.

Toujours de l'Ecole d'Alexandrie, on doit citer Philon de Byzance qui développa la théorie du siphon et Héron d'Alexandrie dont les nombreux écrits constituent en quelque sorte une encyclopédie des connaissances scientifiques de son époque ; on y trouve, notamment, la description du premier exemple de propulsion par jet que l'on connaisse.

I.3. LES ADDUCTIONS D'EAU ROMAINES

Les Romains acquirent des Grecs, leurs voisins, une grande partie des connaissances initiales qu'ils utilisèrent par la suite ; en fait, Rome fit son éducation dans les écoles grecques et de nombreux spécialistes grecs furent employés pour diriger les constructions romaines.

Alors que la civilisation de la Grèce ancienne s'est imposée à la mémoire des siècles par ses philosophes, ses mathématiciens et ses artisans qualifiés, les efforts des Romains se tournèrent principalement vers la politique, les conquêtes et l'administration civile.

Dans ce dernier domaine, les célèbres *aqueducs* constituent le témoignage de la technique des Ingénieurs de cette époque. A l'époque impériale, Rome était alimentée par neuf aqueducs qui fournissaient autant d'eau par personne qu'il en est fourni actuellement à bien des grandes villes ; l'eau provenait généralement des sources ou des rivières dont le plan d'eau était surélevé au moyen d'un *barrage* ; parfois l'eau de la rivière était élevée jusqu'au niveau de l'aqueduc par une *vis d'Archimède* ou un grand ou petit *tympan*. Si on ne pouvait disposer de sources, on creusait des puits dont l'eau était élevée le plus souvent par une *noria*.

Parfois, l'eau de plusieurs sources ou puits était collectée dans un réservoir qui servait aussi de *"piscina"* ou bassin de décantation. De là, l'eau était conduite par un aqueduc ou parfois une conduite en charge vers un *"castellum"* ou réservoir. Les aqueducs étaient des canaux en maçonnerie supportés par de lourdes arches maçonnées ; les canaux étaient couverts pour éviter la contamination de l'eau et son échauffement par le soleil ; des regards facilitant l'aération ou l'inspection de l'aqueduc étaient placés tous les 70 mètres environ ; souvent, deux ou trois canaux étaient superposés, les canaux supérieurs ayant été ajoutés au canal primitif pour satisfaire des besoins croissants ; leur section était généralement rectangulaire : largeur de 0,60 à 1,80 *m* ; hauteur de 1,5 à 2,4 *m*. Les pentes des aqueducs semblent avoir été fixées autant par des considérations d'ordre topographique qu'hydraulique, car elles variaient de 1 : 2 000 à 1 : 250 avec de fréquents changements de pente.

Du *"castellum"* l'eau était amenée dans trois sous-réservoirs desservant respectivement les bassins et fontaines, les thermes et enfin les particuliers, de manière à éviter les conséquences d'une consommation excessive de ces derniers.

Pour la distribution de l'eau à l'intérieur de la ville et parfois à la place des aqueducs eux-mêmes, on utilisait des conduites en charge le plus souvent en plomb ou en terre cuite, mais aussi parfois en cuivre, bronze ou pierre.

Frontin (Sextus Julius Frontinus), curateur des eaux à Rome, à la fin du 1er siècle de notre ère, a laissé une description de la méthode de mesure des débits distribués aux particuliers, à l'aide de petits ajutages calibrés, piqués sur la canalisation principale venant du réservoir ; pour l'estimation du débit délivré, on tenait seulement compte de la section de l'ajutage, en négligeant la pression dans la canalisation. On utilisait rarement des robinets ou obturateurs, l'eau coulant continuellement ; chaque consommateur payait un tarif uniforme pour la jouissance d'un certain débit.

Malgré les grands progrès effectués par les Romains dans l'art de la distribution des eaux, ils saisirent les principes de base de l'hydraulique moins encore que certains Grecs dont ils connaissaient et citaient les ouvrages. Ils eurent certainement la notion des effets de la charge, de la pente et de la résistance (perte de charge) sur le débit, mais il n'est pas du tout prouvé qu'ils aient eu une idée précise des rapports entre la vitesse, la section et le débit et du principe de continuité.

I.4. LE MOYEN ÂGE

La chute de l'Empire romain amena une période de transition d'un millier d'années environ, fréquemment dénommée *"l'Age des Ténèbres"*.

Le progrès de la science fut lent et laborieux et ce ne fut qu'au bout de plusieurs siècles que l'accumulation des efforts de nombreux savants et philosophes en différents pays, permit de clarifier les principes élémentaires de mécanique sur lesquels allait se fonder la science de l'hydraulique.

I.5. LA RENAISSANCE – APPARITION DE LA MÉTHODE EXPÉRIMENTALE

Pendant la Renaissance, se fit enfin jour une évolution progressive de la science purement philosophique des Scolastiques à la science d'observation de l'époque actuelle.

L'hydraulique qui porte encore la marque distinctive de ses origines empiriques, fut nécessairement retardée dans son développement jusqu'au moment où la *méthode expérimentale* fit son apparition dans le domaine de la mécanique.

Une figure marquante de cette période fut *Léonard de Vinci* (1452-1519) qui fit preuve d'un égal génie en dessin, peinture, sculpture, musique, physique, anatomie, botanique, géologie, mécanique, art de l'Ingénieur et architecture. En matière d'hydraulique, il projeta et dirigea des travaux de canalisations et constructions portuaires en Italie Centrale et, quelques années avant sa mort, il se rendit à Amboise, sur

l'invitation de François 1^er^ et établit le projet d'un canal reliant la *Loire* à la *Saône*.

Bien que Léonard de Vinci ne fut pas le premier à préconiser l'emploi de la méthode expérimentale, il attachait la plus grande importance à l'expérience ; dans son traité *"Del moto e misura dell'acqua"* il part de cette prémisse : *"Quand vous traitez de l'écoulement de l'eau, n'oubliez pas d'invoquer l'expérience, puis la raison"*. Citons notamment ses études sur la distribution des vitesses dans un tourbillon, le profil des jets libres, la propagation, la réflexion et l'interférence des ondes et le ressaut. Il fut le premier à proposer l'observation des courants internes au moyen de particules en suspension dans un réservoir d'eau à parois de verre.

Il énonce en passant des principes fondamentaux : *"L'eau ne pèse pas moins transversalement que selon la verticale"*, des remarques profondes sur le cours des rivières : *"Où le mouvement de l'eau est moindre, la surface de son fond sera de plus fin limon ou de sable. Où le courant est plus fort, le galet est plus gros"*, sur les ondes : *"La vague de l'eau créée par le vent est plus lente que le vent qui la meut, mais plus rapide que le courant d'eau engendré par le vent"*.

On doit aussi attribuer à Léonard de Vinci l'énoncé correct du principe de continuité (interdépendance de la section, de la vitesse et du débit) et le principe de la presse hydraulique que Pascal devait développer longuement 150 ans plus tard. Par contre, il est dans l'erreur lorsqu'il indique que le débit d'un orifice ou d'un déversoir varie en raison directe de la charge.

Un mathématicien hollandais de cette époque *Simon Stevin* (1548-1620) contribua au développement de l'hydrostatique, sans avoir subi aucune influence de Léonard de Vinci. Né à Bruges, Stevin devint Directeur des digues de Hollande. Son ouvrage d'hydrostatique publié en 1586, renferme la première analyse correcte de la force exercée par un liquide sur une surface plane. Toutefois, Stevin n'a pas encore la notion de pression et ne voit que la pesanteur ; il énonce, en effet, comme suit, ce principe d'hydrostatique : *"Sur le fond d'une masse d'eau parallèle à l'horizon repose un poids égal à la pesanteur de la colonne d'eau, dont la base est le fond susdit et la hauteur le perpendicule sur l'horizon (verticale) entre le fond et la fleur de l'eau"*.

Comme conséquence de cette proposition, il explique le paradoxe hydrostatique connu sous le nom de *"paradoxe de Stevin"* et que l'on peut mettre en évidence par l'expérience suivante (fig. I.5) :

Supposons un vase *ABCD* de poids nul, ayant la forme indiquée sur la figure, de volume 700 cm^3, de hauteur 10 cm, le fond *BC* ayant une surface de 100 cm^2.

Versons dans ce vase 700 cm^3 d'eau distillée à 4°C, c'est-à-dire le volume d'eau nécessaire pour remplir le vase.

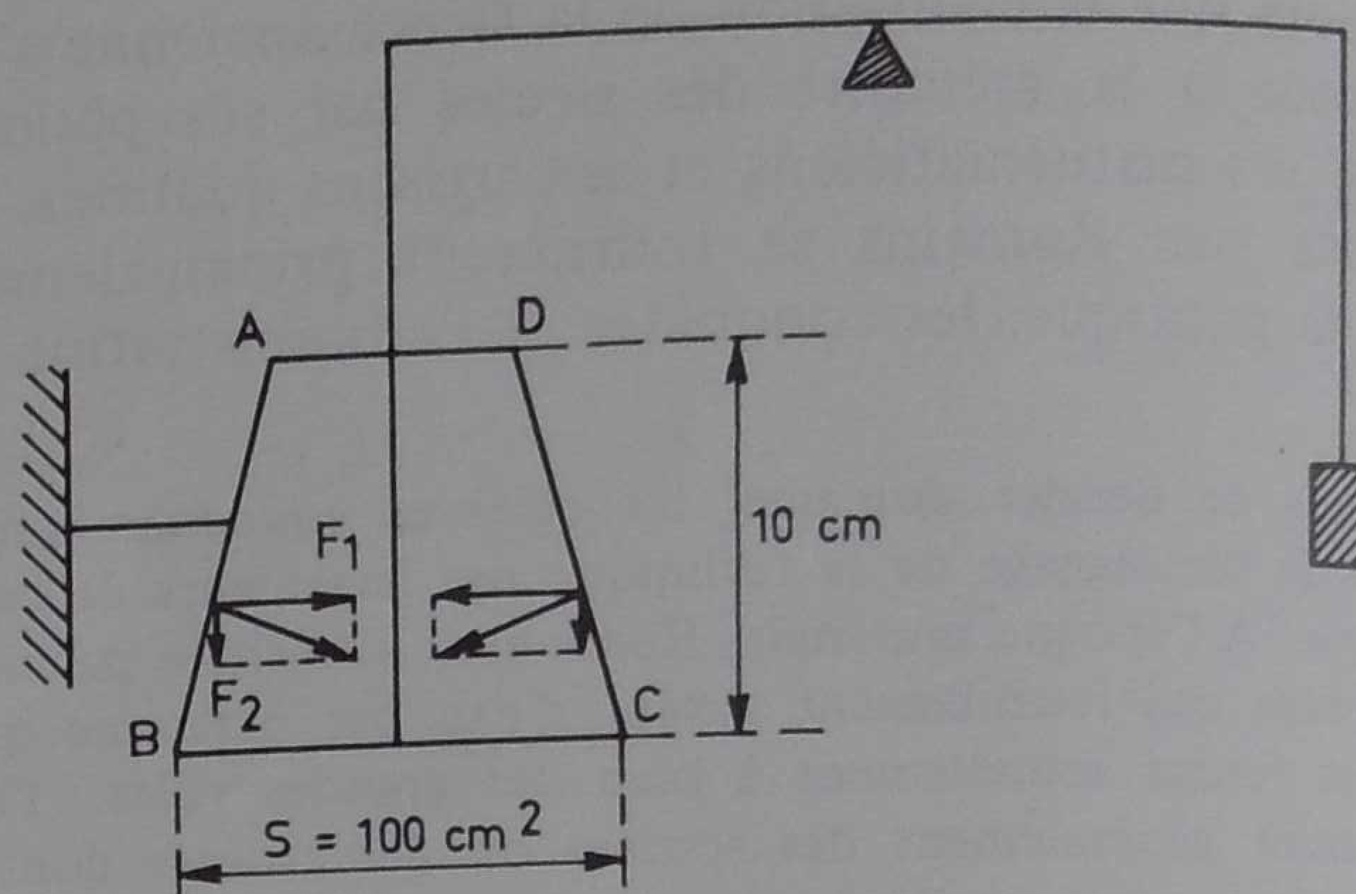


Fig. I.5. – Paradoxe de Stevin

Si on le pose sur le plateau d'une balance, comme le poids du vase est nul, il faudra mettre sur l'autre plateau un poids de 700 g qui est le poids de l'eau contenue dans le vase.

Supposons maintenant le fond *BC* séparé des parois et fixé à un fil attaché à l'extrémité du fléau de la balance, la paroi latérale étant fixée sur un support. Pour réaliser l'équilibre, il faudra non plus un poids de 700 g mais, cette fois, un poids de 1 000 g et cependant c'est la même quantité d'eau qui intervient. C'est là le paradoxe de Stevin.

Stevin l'explique en faisant appel aux efforts que le liquide exerce sur la paroi latérale du vase ; en effet, si le liquide exerce un effort sur la paroi, réciproquement la paroi réagit et cette réaction de la paroi peut se décomposer en deux : un effort horizontal F_1 qui annule la composante conjuguée et un effort vertical F_2 dont la somme vient peser sur le fond, en plus du poids de l'eau. Stevin a donc bien vu l'existence de la pression sur la paroi.

Enfin, on doit rappeler ici les célèbres travaux de *Galilée* (1564-1642) sur la chute des corps, dont plus tard son élève Torricelli devait tirer de si remarquables conséquences dans le domaine de l'hydraulique.

Sur le plan des réalisations pratiques, on perfectionne les appareils connus mais on n'invente rien de nouveau. De ce point de vue, une réalisation célèbre de cette époque fut la *pompe de la Samaritaine* à Paris, construite en 1608 près du Pont-Neuf. Cette énorme machine comportait deux groupes de deux pompes verticales aspirantes et foulantes mues par une roue en-dessous ; le débit était de 700 m^3/jour, la hauteur d'élévation de 23 mètres.

La période d'environ deux siècles qui s'étend de la jeunesse de Léonard de Vinci à la mort de Galilée reflète donc une phase essentielle de la transformation de la mécanique de science métaphysique en science physique. L'hydraulique proprement dite, qui

dépend essentiellement du développement préalable de la mécanique, resta, de ce fait, quelque peu en arrière. Néanmoins Léonard de Vinci avait réussi à exprimer le principe de continuité ; ses disciples et Stevin avaient fait progresser l'hydrostatique et Léonard de Vinci et Galilée avaient ensemble démontré d'une manière concluante les possibilités latentes de la méthode expérimentale.

I.6. L'HYDRAULIQUE APRÈS LA RENAISSANCE

(L'Ecole italienne : *Torricelli* ; l'Ecole française : *Mariotte*).

A la suite de Léonard de Vinci et Galilée, l'Ecole italienne d'hydraulique prit un brillant essor aux 16ème et 17ème siècles.

Evangelista Torricelli (1608-1647), élève et disciple de Galilée, appliqua les principes du maître au mouvement des liquides. N'ayant pas, semble-t-il, le moyen de mesurer directement la vitesse de l'eau à la sortie d'un ajutage donnant un jet vertical, il constate simplement par expérience que l'eau monte à une hauteur à peu près égale à la hauteur h du plan d'eau dans le réservoir. Il assimile alors une particule liquide à un projectile solide isolé dans l'espace et, s'appuyant sur les découvertes de Galilée, déclare que si cette particule est montée à la hauteur h c'est qu'elle avait une vitesse initiale V telle que $V^2 = Kh$, d'où il tire $V = \sqrt{Kh}$ et il publie sa découverte en 1643.

Torricelli ne s'émeut pas de la différence qu'il constate expérimentalement entre la hauteur exacte de remontée et celle du plan d'eau ; il l'attribue en partie à l'action antagoniste de l'eau du jet qui retombe et à la résistance de l'air.

Quoique le principe de Torricelli soit généralement connu sous la forme $V = \sqrt{2gh}$, on doit remarquer qu'un siècle au moins devait s'écouler avant que le facteur 2 g soit explicitement introduit. Galilée et ses disciples établirent simplement la proportionnalité de V^2 à h, sans chercher à exploiter la signification physique du coefficient de proportionnalité.

Lorsque ce coefficient fut connu, on chercha à vérifier la formule de Torricelli $V = \sqrt{2gh}$ en mesurant le débit d'un orifice et en le divisant par la section de l'orifice ; les valeurs obtenues étaient tellement éloignées de celles données par la formule de Torricelli que bon nombre de savants et de chercheurs se refusèrent à admettre cette formule.

Ce ne fut qu'en 1713 (70 ans après la découverte de Torricelli) que Newton remarqua l'influence de la contraction de la veine à la sortie de l'orifice dont il calculait, d'ailleurs, le débit à partir d'une théorie inexacte (cf. § I.7). En définitive, ce ne fut seulement qu'au milieu du 18ème siècle qu'on put enfin comprendre que la formule de Torricelli ($V = \sqrt{2gh}$) s'appliquait seulement à la section contractée de la veine.

Edmé Mariotte (1620-1684) fut le premier hydraulicien notable du 17ème siècle qui n'appartint pas à l'Ecole italienne. Son principal ouvrage en matière d'hydraulique est le *"Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides"* publié en 1686, deux ans après sa mort. On y trouve notamment la description du *"vase de Mariotte"* qu'on utilise communément à l'heure actuelle pour fournir un dispositif à charge constante, l'étude de la déviation d'un jet d'eau par une surface normale (on y constate notamment que Mariotte ignorait le phénomène de la contraction du jet à la sortie d'un orifice ou d'un ajutage) et des règles sur la mesure des eaux courantes.

Contemporain de Mariotte, l'Anglais *Robert Hooke* (1635-1703) célèbre par sa loi élémentaire de l'élasticité, joua un rôle essentiel dans la mise au point des anémomètres et des moulinets et est considéré comme ayant eu une influence importante sur l'invention de l'hélice marine.

Antoine Parent (1666-1716) étudia notamment le fonctionnement des roues hydrauliques et rechercha le rapport qui doit exister entre la vitesse de l'aube et la vitesse de l'eau pour obtenir le rendement maximal ; ses calculs le conduisirent au rapport 2/3 plutôt qu'au rapport 1/2 qui fut déterminé plus tard.

En somme, le siècle qui suivit immédiatement la Renaissance contribua d'une manière générale au développement de l'hydraulique ; il est même surprenant de constater que les réalisations atteignirent une telle ampleur, car ni les mathématiques, ni la mécanique n'étaient encore assez avancées pour servir de guides certains dans l'interprétation des faits observés.

Notamment, les travaux importants entrepris par Louis XIV à Versailles permirent la réalisation d'aménagements hydrauliques dont un des plus célèbres fut la *machine de Marly* construite de 1678 à 1685. Sa création est due à Arnold de Ville, gentilhomme liégeois, qui fut l'animateur, le Directeur et l'Admi-

nistrateur de l'affaire ; il s'adjoint le concours d'un technicien : Rennequin Sualem, charpentier liégeois, qui construisit l'installation.

L'eau était refoulée depuis la Seine en trois étages, par 259 pompes aspirantes et foulantes. Les pompes du 1er étage aspiraient dans la Seine et refoulaient à une hauteur de 49 mètres ; les pompes du 2ème étage refoulaient 52 mètres plus haut et les pompes du 3ème étage, 54 mètres plus haut. Les trois refoulements étaient nécessaires pour éviter les trop fortes pressions entraînant des problèmes que l'on ne pouvait alors résoudre en matière d'étanchéité des joints et des coups de bélier dans les conduites.

La puissance nécessaire à l'ensemble de l'installation était fournie par 14 roues de 12 m de diamètre développant une puissance globale de 700 ch ; en fait, la puissance utilisée n'était que d'environ 150 ch en raison du très mauvais rendement des transmissions(1).

I.7. LE DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES ET DE LA MÉCANIQUE AU 17ème SIÈCLE

Le développement ultérieur de l'hydraulique repose essentiellement sur l'amélioration des outils mathématiques et sur des notions de mécanique qui prirent un très large essor au 17ème siècle.

Le mathématicien français *Marin Mersenne* (1588-1648) s'intéressa aussi à divers problèmes d'hydraulique et prépara la voie aux progrès que réaliseront deux de ses contemporains : Descartes et Pascal.

René Descartes (1598-1650) contribua largement au développement des mathématiques et de la philosophie (théorie des tourbillons de l'univers, introduction de la notation algébrique, fondation de la géométrie analytique).

Blaise Pascal (1623-1662) célèbre mathématicien, apporta une très importante contribution à l'hydraulique en donnant sa forme définitive à la *théorie de l'hydrostatique*, grâce, notamment, à la nouvelle de l'expérience de Torricelli sur le baromètre à mercure que Mersenne répandit en France. Dans une brochure intitulée *"Nouvelles expériences touchant le vide fait dans les tuyaux avec diverses liqueurs"*, il décrivit de nombreuses expériences constituant des variantes de celle de Torricelli ; poursuivant son étude, il démontra que la cause de l'élévation des liquides n'était pas l'horreur de la nature pour le vide, mais la pression atmosphérique, en faisant réaliser par son beau-frère Perier la célèbre expérience du Puy-de-Dôme.

Le traité magistral de Pascal en matière d'hydrostatique est intitulé *"Traité de l'équilibre des liqueurs"* et ne fut publié qu'en 1663, un an après sa mort. Il y compléta l'analyse du paradoxe de Stevin, en donna la preuve expérimentale et établit que *"tous ces exemples montrent qu'un petit filet d'eau peut tenir en équilibre un grand poids"*. Il reste à donner la raison d'une "telle multiplication de force". C'est ce qu'il fit en établissant le *principe de la presse hydraulique* qu'il appelait une "machine à multiplier les forces" :

"Si un vaisseau(2) plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures, l'une centuple de l'autre, en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront sur celui qui est cent fois plus large et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf".

"Et quelque proportion qu'aient ces ouvertures, si les forces qu'on mettra sur les pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre".

Et, après avoir montré que si cette nouvelle machine multiplie l'effort, elle ne multiplie pas le travail, Pascal poursuit :

"On peut encore ajouter, pour plus grand éclaircissement, que l'eau est également pressée sous ces deux pistons ; car si l'un a cent fois plus de poids que l'autre, aussi en revanche, il touche cent fois plus de parties, et ainsi chacune l'est également... de sorte que si un vaisseau plein d'eau n'a qu'une seule ouverture large d'un pouce, par exemple, où l'on mettra un piston chargé d'un poids d'une livre, ce poids fait effort contre toutes les parties du vaisseau, à cause de la continuité et de la fluidité de l'eau ; mais pour déterminer combien chaque partie souffre, en voici la règle : chaque partie large d'un pouce, comme l'ouverture, souffre autant que si elle était poussée par le poids d'une livre (sans compter le poids de l'eau dont je ne parle pas ici...) et chaque partie du vaisseau plus ou moins grande souffre précisément plus ou moins à proportion de sa grandeur, soit que cette portion soit vis-à-vis de l'ouverture, ou à côté, ou loin, ou près... tellement que si on fait une ouverture nouvelle à ce vaisseau, il faudrait pour arrêter l'eau qui en jaillirait une force... qui soit à celle d'une livre comme cette dernière ouverture est à la première".

(1) La "machine" de Louis XIV fut remplacée en 1858 par une installation comprenant 6 roues de côté de 12,50 m de diamètre commandant chacune 4 pompes à piston refoulant directement à 150 m de hauteur un débit de 21 000 m^3 par jour. Dans le cadre du projet de reconstruction du nouveau barrage de Bougival, la machine de Marly a été démontée en 1964.

(2) Le mot "vaisseau" est, ici, synonyme de "réservoir".

On voit très nettement apparaître dans ce dernier passage la notion de pression.

Pascal déduit d'ailleurs des lois d'hydrostatique un moyen pour le moins original de s'appliquer des ventouses :

"Si un homme met le bout d'un tuyau de verre long de vingt pieds sur sa cuisse et qu'il se mette en cet état dans une cuve pleine d'eau, en sorte que le bout d'en haut du tuyau soit hors de l'eau, sa chair s'enflera à la partie qui est à l'ouverture du tuyau et il s'y formera une grosse tumeur, avec douleur, comme si sa chair y était sucée et attirée par une ventouse ; parce que le poids de l'eau comprimant son corps de tous côtés, hormis en la partie qui est la bouche du tuyau qu'elle ne peut toucher, à cause que le tuyau où elle ne peut entrer empêche qu'elle n'y arrive, la chair est poussée des lieux où il y a de la compression au lieu où il n'y en a point ; et plus il y a de hauteur d'eau, plus cette enflure est grosse, et quand on ôte l'eau, l'enflure cesse, et de même si on fait entrer l'eau dans le tuyau ; car le poids de l'eau affectant aussi bien cette partie que les autres, il n'y a pas plus d'enflure en celle-là qu'aux autres".

En conclusion, Pascal établit le postulat fondamental de l'hydrostatique : dans un liquide au repos, la pression est également transmise dans toutes les directions ; cette proposition est d'ailleurs connue sous le nom de *"principe de Pascal"*.

Trois mathématiciens du 17[ème] siècle contribuèrent également au développement de la mécanique et de la physique : Huyghens (1629-1695), Hooke (1635-1703), déjà cité précédemment, et surtout *Newton* (1642-1728) ; de ce dernier nous retiendrons seulement la partie de son œuvre ayant un rapport direct avec l'hydraulique.

Faisant osciller des pendules dans divers liquides, Newton constate l'affaiblissement progressif de l'amplitude. Aux grandes vitesses, cet affaiblissement est proportionnel au carré de l'amplitude ; aux petites vitesses, seulement à la première puissance de l'amplitude et dans une zone intercalaire, la loi est intermédiaire. Ces résultats expérimentaux conduisent Newton à exprimer la résistance opposée par un corps se déplaçant au sein d'un liquide par une formule trinôme contenant un terme en V, un terme en V^2 et un terme intermédiaire en $V^{3/2}$; il met également en évidence, à côté de la vitesse, l'influence du poids volumique du fluide.

Bien qu'il ne l'écrive pas explicitement, il est d'usage d'attribuer à Newton la formule (due probablement à Stokes) qui exprime la proportionnalité de la contrainte de frottement au gradient transversal des vitesses :

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dn}$$

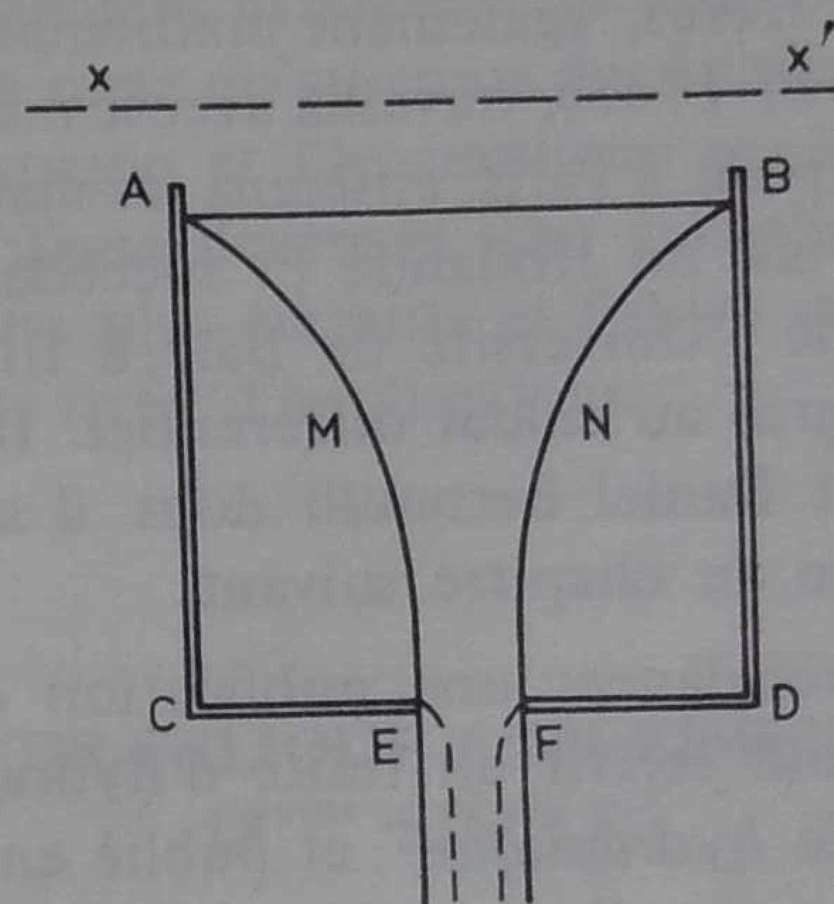


Fig. I.7. – Théorie de la cataracte de Newton

Pour expliquer l'écoulement par un orifice *EF* percé dans le fond horizontal d'un vase *ABCD* (fig. I.7), Newton propose la théorie suivante dite *"théorie de la cataracte"* : il admet que le liquide contenu dans le vase se divise en deux zones : une *"cataracte"* centrale AMEFNB, dont le diamètre varie en raison inverse de la distance à la puissance 0,25 à une ligne de repère $x'\,x$ située au-dessus de la surface libre, conformément à la loi de la chute libre, et une zone extérieure *ACEM* et *BDFN* qui, pensait-il, peut être liquide ou solidifiée puisqu'elle ne joue aucun rôle dans l'écoulement.

Dans la première édition de ses *"Principia Philosophiae Naturalis"* en 1687, Newton considère que le profil de la cataracte franchit les bords de l'orifice et que, par suite, il coïncide avec le profil du jet lui-même ; mais le calcul donnait un débit deux fois plus grand que le débit réel et ce ne fut pas avant la seconde édition de 1713 que Newton attribua l'erreur à la contraction de la veine dont la découverte apparaît ainsi comme sienne ; en effet, les mesures donnèrent environ $1/\sqrt{2}$, soit 0,707, comme rapport entre la section contractée de la veine et la section de l'orifice (au lieu de 0,62, valeur exacte pour un orifice circulaire en mince paroi).

Leibnitz (1646-1716) introduisit le concept de *"vis viva"* ou force vive, pour désigner ce qu'il appelait quantité de mouvement et que nous appelons maintenant énergie cinétique.

C'est au 17[ème] siècle, en 1622 qu'un huguenot d'Anvers, du nom de *Bernoulli*, vint s'établir à Bâle comme marchand et éleva ses fils devenus eux-mêmes marchands. L'un d'eux fut père de douze enfants, dont quatre survécurent : l'aîné *Jacob Bernoulli* (1654-1705) devint Professeur de Physique à l'Université de Bâle, puis Recteur ; il développa, notamment, le

calcul exponentiel ; on lui doit la célèbre théorie de la *"conservation des tranches"* en Résistance des matériaux.

Un de ses frères, également mathématicien, *Johan Bernoulli* (1667-1748), travailla avec le mathématicien français L'Hôpital, à Paris, enseigna les mathématiques pendant dix ans en Hollande et succéda à son frère à la chaire de l'Université de Bâle; il fit faire d'importants progrès au calcul différentiel. Il fut le père de Nicolas et Daniel Bernoulli dont il sera longuement question au chapitre suivant.

Pour contrebalancer une publication de son fils, Johan Bernoulli écrivit un traité d'hydraulique intitulé *"Nouvelle hydraulique"* et publié en 1743 dans lequel, notamment, il démontra l'inexactitude de la théorie de la cataracte de Newton en ce qui concerne l'écoulement par un orifice. Il fut également le créateur du calcul intégral.

En définitive, pendant la période d'une centaine d'années qui sépare l'époque de Galilée de celle de Bernoulli, les mathématiques, la physique et la mécanique avaient pris un essor remarquable ; toutes les possibilités étaient donc enfin rassemblées pour permettre l'énoncé des principes de base du mouvement des liquides.

I.8. L'AVÈNEMENT DE L'HYDRODYNAMIQUE

On peut attribuer la naissance de l'hydrodynamique à quatre mathématiciens contemporains du $18^{\text{ème}}$ siècle : Daniel Bernoulli, Euler, Clairault et d'Alembert.

Daniel Bernoulli (1700-1782) fils du mathématicien Johan Bernoulli, naquit à Groningue, fut essentiellement un mathématicien et un physicien. Il doit se célébrité à son traité : *"Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii"* (1), publié en 1738. C'était la première fois que le mot *"hydrodynamica"* apparaissait dans la littérature scientifique ; Daniel Bernoulli englobait d'ailleurs sous ce terme l'hydrostatique et l'hydraulique ; en réalité, ce traité nous apparaît maintenant beaucoup plus proche de l'hydraulique traditionnelle que de l'hydrodynamique classique, puisqu'il passe en revue la plupart des problèmes hydrauliques de l'époque ; en traitant de ces divers sujets, Bernoulli fut souvent un novateur ; il fut ainsi le premier à se servir d'ouvertures piézométriques (prises de pression) dans les parois des conduites pour déterminer la pression. Le célèbre *"Théorème de Bernoulli"* dont il est fait un usage quasi constant en hydraulique n'apparaît pas dans son ouvrage *"Hydrodynamica"* sous la forme classique ; ce furent les commentateurs de son œuvre (notamment Euler) qui en tirèrent l'expression classique :

$$z + \frac{p}{\omega} + \frac{V^2}{2\,g} = \text{Cte}\,.$$

En fait, dans son *"Hydrodynamica"*, Daniel Bernoulli applique les principes de Galilée et de Huyghens, non plus à la particule liquide envisagée isolément comme l'avait fait Torricelli, mais à un ensemble de particules, constituant ce que nous appelons maintenant un filet liquide.

Il appela l'attention sur l'importance de la conservation des forces vives, autrement dit, la *conservation de l'énergie*, c'est-à-dire, dans ses notations, l'égalité entre la dépression réelle et l'ascension potentielle : l'égalité *"inter descensum actualem ascensumque potentialem"*.

Le principe énoncé par Bernoulli ne comprenait donc que l'égalité de deux termes et non trois ; il supposa simplement que la somme de ce qu'on appelle maintenant énergie potentielle et énergie cinétique restait constante.

Les études mathématiques de d'Alembert (1717-1783) et Clairault (1713-1765) furent parachevées par *Léonard Euler* (1707-1783) qui fonda définitivement la science de l'hydrodynamique et les équations qui régissent l'écoulement d'un fluide non visqueux portent le nom *"d'équations d'Euler"*, à savoir :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t}\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t}\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}\right.$$

(1) "Hydrodynamique, ou Mémoire sur les forces et les mouvements des fluides".

qui peuvent se condenser en une expression vectorielle unique :

$$\frac{1}{\rho}\ \overrightarrow{\text{grad.}\ p} = \vec{F} - \vec{\gamma}$$

Euler généralisa également l'équation différentielle de continuité de d'Alembert sous la forme employée actuellement pour les fluides compressibles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Il déduisit de ces différentes équations, la forme classique de l'équation de Bernoulli :

$$z + \frac{p}{\omega} + \frac{V^2}{2\,g} = \text{Cte}\ .$$

Enfin, Euler étudia également les machines hydrauliques et exprima pour la première fois la relation de base des turbomachines, en égalant le couple recueilli ou fourni sur l'arbre à la variation du moment de la quantité de mouvement du fluide au cours de son passage dans la partie tournante.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) développa largement les travaux d'Euler ; en matière d'hydrodynamique, l'analyse de ce qui se passe en un point fixe de la masse liquide est généralement connue sous le nom de *méthode d'Euler* et l'analyse du sort d'une particule déterminée du liquide, connue sous le nom de *méthode de Lagrange* ; au cours de son analyse du mouvement des fluides, Lagrange introduisit les notions fondamentales de *potentiel des vitesses* Φ et de *fonction de courant* Ψ.

Enfin, Lagrange étudia également le mouvement d'une onde solitaire de hauteur infiniment petite dans un canal de profondeur finie et son nom demeure associé à l'expression qui en donne la vitesse de propagation :

$$V = \sqrt{gh}$$

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), contemporain de Lagrange, développa surtout la mécanique céleste ; on lui doit la forme générale de l'opérateur qui porte son nom et qu'on retrouve en hydrodynamique :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

En fait, les recherches des mathématiciens dont nous venons de rappeler les principaux travaux ayant un rapport étroit avec l'hydrodynamique, ne furent pas immédiatement utilisées dans le domaine de l'hydraulique, de sorte qu'au cours des années ultérieures l'hydrodynamique et l'hydraulique se développèrent séparément, l'une devenant une discipline mathématique toujours plus élégante et l'autre une technique toujours plus riche d'applications.

I.9. L'HYDRAULIQUE EXPÉRIMENTALE AU 18ème SIÈCLE

L'impulsion donnée par la première école italienne d'hydraulique créée à la Renaissance, provoqua l'édition de nombreux traités dans ce domaine ; au début du 18ème siècle, on doit citer, en Italie, le marquis *Giovanni Poleni* (1683-1781) ; il effectua de nombreuses mesures sur l'écoulement par les orifices et conclut à la valeur 0,62 du coefficient de contraction d'un orifice à mince paroi, ce qui représentait une amélioration sensible sur la valeur $1/\sqrt{2}$ donnée par Newton.

Il étudia également les écoulements par les ajutages et les déversoirs ; pour ces derniers ouvrages, l'équation de base du débit :

$$Q = \frac{2}{3}\, mbh\, \sqrt{2\,gh}$$

est souvent appelée *"équation de Poleni"* (1717).

Parallèlement à l'école italienne, nous avons cité la naissance de l'*école française d'hydraulique*, sous l'impulsion de Mariotte. Alors qu'elle ne prenait qu'un départ fort lent en comparaison de l'école italienne, elle allait se trouver à l'avant-garde en Europe à la fin du 18ème siècle.

Déjà, *Claude-Antoine Couplet* (1642-1722) avait effectué à Versailles de nombreuses mesures pour déterminer la résistance à l'écoulement de tuyaux de divers diamètres et diverses longueurs.

De 1737 à 1753, *Bernard Forest de Belidor*, "Commissaire provincial d'artillerie, Professeur royal des Mathématiques aux Ecoles du même Corps", publie les quatre volumes de son volumineux traité inti-

tulé : *"Architecture hydraulique ou l'art de conduire, d'élever et de ménager les eaux pour les différents besoins de la vie"*. Il récapitule les connaissances acquises et critique certaines opinions fausses concernant les lois de l'écoulement dans les canaux et tuyaux, dont il pense à juste titre que l'inexactitude tient à ce que l'on ne sait pas tenir compte du *frottement* des particules entre elles et contre les parois solides du dispositif qui guide la masse liquide.

Il critique notamment les essais de Couplet :

"M. Couplet commence par remarquer que, quoique les lois du mouvement des eaux ayant fait l'objet des recherches de plusieurs habiles mathématiciens, le fruit qu'ils en ont tiré se réduit seulement à quelques règles sur la hauteur et la dépense des jets, qui ne peuvent être d'un grand avantage dans la pratique, parce que leurs expériences n'ont été faites que sur des conduites très courtes ou sur des conduites terminées par des ajutages, dans lesquelles conduites l'eau n'a pas, à beaucoup près, les mêmes frottements que dans les grandes, et d'où l'eau sort à gueule bée, c'est-à-dire par un orifice égal au cercle du tuyau ; aussi ils n'ont pu observer les différences considérables qui se rencontreraient entre les quantités d'eau que l'expérience devait donner et celles que l'on trouvait par leurs règles : à cette occasion, M. Couplet rapporte qu'une conduite qui, suivant les mêmes règles, aurait dû fournir 61 pouces d'eau n'en a fourni que 2 pouces 3 lignes parce qu'elle était extrêmement longue et qu'elle versait ses eaux à gueule bée".

Il est juste de noter d'ailleurs que Bernoulli avait eu l'intuition de la perte de charge ; il conseillait, en effet, d'appliquer avec circonspection le principe de l'égalité *"inter descensum actualem ascensumque potentialem"* parce qu'une certaine quantité de puissance vive restait *"adhérente à la matière"*, mais il n'était pas allé plus loin.

Henri de Pitot (1695-1771) fut contemporain de Belidor. Son nom reste associé au célèbre *"tube"* permettant la mesure de la vitesse d'un courant liquide ; il en présenta la description à l'Académie des Sciences en 1732, par une note intitulée *"Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux"* ; la *"machine"* de Pitot, se composait de deux tubes parallèles montés sur un châssis portant une échelle graduée et quatre robinets ; l'un des tubes était droit, l'autre coudé à 90° à son extrémité inférieure, de manière que son orifice soit orienté face au courant. Après avoir immergé la base de l'instrument dans de l'eau courante à la profondeur voulue, il fermait les robinets, retirait l'instrument et notait la différence de niveau dans les deux colonnes d'eau ; il en déduisait la vitesse de l'écoulement.

Pitot était d'ailleurs tout étonné de ce que quelque chose d'aussi simple n'eût point encore été découvert ; sa communication à l'Académie des Sciences se termine ainsi :

"L'idée de cette machine est si simple et si naturelle que dès qu'elle me fût venue, je courus sur le champ à la rivière pour en faire un premier essai avec un tube de verre simple et l'effet répondit parfaitement à mon attente. Après ce premier essai, je ne pouvais pas m'imaginer qu'une chose aussi simple et en même temps très utile eût pu échapper à tant d'habiles gens qui ont écrit et travaillé sur le mouvement des eaux. J'ai fait depuis toutes les recherches qu'il m'a été possible dans les traités que j'ai pu trouver sur les hydrauliques et le mouvement des eaux, pour voir si absolument personne n'en avait parlé et si mon idée était nouvelle".

Jusqu'au début du 18ème siècle, trois méthodes expérimentales avaient été imaginées en vue de mesurer la *résistance des corps* : le chronométrage de la chute libre (Galilée, Newton), le montage du corps sur un pendule (Newton) et la suspension du corps en eau courante (Mariotte). Une quatrième méthode, le bras tournant, fut introduite par deux Anglais : *Rouse* et *Robins* (ce dernier est l'inventeur du pendule balistique) ; le dispositif imaginé se composait d'un bras de 1,20 *m* qui tournait autour d'un axe vertical au moyen d'une corde passant sur une poulie et supportant un poids ; le bras utilisé était relativement court, mais la méthode elle-même devait trouver une application fréquente tant en balistique qu'en hydraulique.

L'étude de l'*écoulement dans les canaux* et l'établissement d'une formule rendant compte de la résistance opposée par les parois et le fond du canal en régime uniforme, firent l'objet de nombreux travaux et recherches à la suite des premières tentatives de l'école italienne ; après des esquisses de solutions du Hollandais Cornélius Velsen (1749) et de l'Allemand Albert Brahms (1757), c'est à l'Ingénieur du "Pavé de Paris" *Antoine Chézy* (1718-1798) que revint, en définitive, l'honneur d'établir la première formule d'écoulement.

Après sa sortie de la nouvelle Ecole des Ponts et Chaussées, Chézy prit une part active dans la construction et l'inspection des ponts de Paris ; à ce titre, il fut amené à participer à l'étude de l'alimentation en eau de la capitale, à partir de l'utilisation des eaux de la rivière l'Yvette et il fut notamment chargé de déterminer la section transversale du canal d'amenée et d'en calculer le débit ; comme il ne put trouver aucune étude à ce sujet dans la littérature technique il en

entreprit lui-même la recherche et remit un rapport dans lequel il proposait une formule d'écoulement où l'on voit apparaitre pour la première fois la proportionnalité de V^2 au produit :

$I \frac{S}{B} \cdot$ (I = pente, S = section mouillée, B = périmètre mouillé).

La formule établie ainsi par Chézy passa alors inaperçue et c'est plusieurs années après sa mort que Du Buat isola le rapport S/B auquel il donna le nom de rayon hydraulique moyen ; la formule de Chézy prit alors sa forme classique :

$$V = C\sqrt{RI}$$

A cette époque (1759), un ouvrage de l'Anglais *John Smeaton* (1724-1792) fit connaitre les premières expériences sur modèles réduits, notamment en matière de roues hydrauliques et moulins à vent.

La France prit alors nettement la tête du développement de l'hydraulique expérimentale :

Jean-Charles Borda (1733-1799) fut un des savants-Ingénieurs typique de cette époque. En 1763 et 1767, il présenta à l'Académie des Sciences deux mémoires intitulés *"Expériences sur la résistance des fluides"* ; plus tard, un autre mémoire *"sur l'écoulement des fluides par les orifices des vases"* devait associer son nom à l'étude de l'écoulement par les ajutages, notamment l'ajutage rentrant, par application du théorème des quantités de mouvement, ainsi qu'à la perte de charge résultant d'un élargissement brusque $(V_1 - V_2)^2/2g$ qui porte encore le nom de *"perte à la Borda"*.

Il semble être le premier hydraulicien à avoir explicité le facteur $2g$ dans une équation de l'écoulement.

Charles Bossut (1730-1814), contemporain de Borda, fut le type de l'abbé épris de science de l'époque. Outre un *"Cours complet de mathématiques"* en 7 volumes, sa contribution en matière d'Hydraulique fut essentiellement celle d'un maître dans l'enseignement qu'il dispensa aux jeunes futurs Ingénieurs de l'Ecole d'Ingénieurs de Mézières, puis à la Chaire d'hydrodynamique au Louvre, à l'Ecole Polytechnique et à l'Institut de France. En 1775, le Gouvernement chargea Bossut, d'Alembert et le marquis de Condorcet, d'effectuer une série d'expériences pour déterminer la résistance des corps immergés de formes diverses ; dans ce but, Bossut dirigea la construction d'un *bassin des carènes* : c'est dans un bassin ornemental du Champ de Mars (qui était alors le jardin de l'Ecole militaire) que d'Alembert, Condorcet et l'abbé Bossut firent évoluer une vingtaine de modèles réduits, en vue d'améliorer, à la demande de Turgot, les voies navigables françaises.

Un troisième et non moindre hydraulicien français de cette époque, fut le comte *Du Buat* (1734-1809) qui est considéré avec l'abbé Bossut, comme le véritable fondateur de la technique expérimentale. On peut lire, en effet, dans l'*"Hydraulic Laboratory Practice"* publié en 1929 en Amérique par John R. Freemann :

"En raison du but et du caractère pratique de leurs essais comme en raison du soin qu'ils apportèrent à leurs dispositifs, je suis tenté de croire que nous devons choisir entre Bossut et Du Buat, de préférence à tous ceux qui les ont précédés, pour attribuer le titre de "Père des Laboratoires d'Hydraulique".

L'ouvrage principal de Du Buat est intitulé *"Principes d'Hydraulique"* ; dans sa préface, il fait le point de l'état actuel de la science de l'hydraulique et trace de façon tellement magistrale les progrès qu'il reste à faire, que nous jugeons bon de reproduire ci-dessous le texte original. L'auteur, en effet, ne s'est pas contenté de montrer le chemin parcouru, mais il a lumineusement tracé ce qu'il restait à parcourir et son exposé constitue, en somme, un excellent programme d'ensemble :

"On sait que jusqu'à présent, nos connaissances en hydraulique sont extrêmement bornées ; car, quoique de grands génies s'y soient appliqués en différents temps, nous sommes encore, depuis tant de siècles, dans une ignorance presque absolue des vraies lois auxquelles le mouvement de l'eau est assujetti ; à peine, depuis cent-cinquante ans, a-t-on découvert, à l'aide de l'expérience, quelle est la durée, la quantité et la vitesse de l'écoulement de l'eau par un orifice quelconque".

"Tout ce qui concerne le cours uniforme des eaux qui arrosent la surface de la terre nous est inconnu ; et pour se faire une idée du peu que nous savons, il suffit de jeter un coup d'œil sur ce que nous ignorons. Faut-il apprécier la vitesse d'un fleuve dont on connaît la largeur, la profondeur et la pente ; déterminer à quelle hauteur il élèvera ses eaux s'il vient à recevoir un autre fleuve dans son lit ; prévoir de combien il baissera si on lui fait une saignée ; fixer la pente qui convient à un aqueduc pour conserver à ses eaux une vitesse donnée ; ou la capacité du lit qui lui convient pour amener dans une ville avec une pente donnée, une quantité d'eau qui suffise à ses besoins, tracer les contours d'une rivière de telle sorte qu'elle ne travaille point à changer le

lit dans lequel on l'a enfermée ; prévoir l'effet d'un redressement, d'une coupure, d'un réservoir ; calculer la dépense(1) *d'un tuyau de conduite dont la longueur, le diamètre et la charge sont donnés ; déterminer de combien un pont, une retenue, une vanne feront hausser les eaux d'une rivière ; marquer jusqu'à quelle distance ce remous sera sensible et prévoir si le pays ne deviendra pas sujet aux inondations ; calculer la longueur et les dimensions d'un canal destiné à dessécher des marais perdus depuis longtemps pour l'agriculture ; assigner la forme la plus convenable aux entrées des canaux, aux confluents et aux embouchures des rivières ; déterminer la figure la plus avantageuse à donner aux vaisseaux ou aux bateaux pour fendre l'eau avec le moindre effort ; calculer en particulier la force nécessaire pour mouvoir un corps qui flotte sur l'eau ; toutes ces questions et une infinité d'autres du même genre sont encore insolubles. Le croirait-on ? On ignore presque encore à quoi est égal le choc de l'eau, quand elle frappe directement un plan ; à plus forte raison quand elle se meut contre des surfaces convexes de toute espèce".*

"Tout le monde raisonne sur l'hydraulique, mais il est peu de personnes qui l'entendent. Faute de principes, on adopte des projets dont la dépense n'est que trop réelle, mais dont le succès est chimérique ; on exécute des travaux dont l'objet se trouve manqué, on constitue l'Etat, les provinces, les communautés en des frais considérables, sans fruit, souvent même à leur préjudice ; ou du moins il n'y a pas de proportion entre la dépense et les avantages qui en résultent".

"La cause d'un si grand mal, je le répète, est l'incertitude des principes, la fausseté de la théorie que l'expérience dément, le peu d'observations faites jusqu'à présent, et la difficulté de les bien faire".

Le point de vue de Du Buat était donc celui de l'Ingénieur-hydraulicien en quête de moyens pratiques pour réaliser des travaux qui rempliraient leur objet. Il effectua de nombreuses expériences et analyses basées sur l'équilibre, en régime uniforme, entre l'accélération due à la pesanteur et la résistance de la paroi. Il aboutit à une formule d'écoulement analogue à celle de Chézy dans laquelle il isola le rapport S/B qu'il désigna sous le terme de *rayon moyen* et obtint la formule définitive :

$$V = C\sqrt{RI}$$

ou tout au moins une expression très proche.

En ce qui concerne l'influence de la rugosité de la paroi, Du Buat n'y apportait aucune attention, pensant que le fluide en contact avec la paroi constituait une couche stagnante le long de laquelle glissait le reste du liquide. Le rôle de la viscosité n'était pas non plus signalé.

(1) Le mot "dépense" est, ici, synonyme de "débit".

Ses études s'étendirent également à l'écoulement par les vannes et les déversoirs (il proposa la valeur 0,65 pour le coefficient m de la formule de Poleni(2)), à la forme des culées et piles et il proposa un procédé graphique pour évaluer l'étendue du remous à partir d'un déversoir. Il effectua de nombreuses expériences sur des tuyaux de dimensions et pentes diverses, sur des coudes, des réseaux de tuyaux, des canaux de diverses formes, des cours d'eau naturels, des réservoirs et des ponts, l'entraînement des sédiments et la résistance des corps immergés.

Les publications de Du Buat eurent une influence très importante en Europe, à la fin du 18ème siècle et au début du 19ème.

Deux autres hydrauliciens de cette époque doivent être également cités :

L'Allemand *Reinhard Woltman* (1756-1837) qui utilisa un moulinet à hélice avec compte-tours pour la mesure du débit des rivières et l'Italien *Giovanni Battista Venturi* (1746-1822) qui effectua de nombreuses expériences sur les ajutages de diverses formes et les dispositifs convergent-divergent auxquels son nom reste associé.

En conclusion, pendant la période d'un siècle à peine, qui sépare les expériences de Poleni et celles de Venturi, l'hydraulique expérimentale fit de très grands progrès, grâce essentiellement à l'apport de l'Ecole française. Bien que peu des buts ambitieux énoncés par Du Buat fussent effectivement atteints, on doit noter que cette période vit l'invention de cinq outils essentiels pour les recherches en laboratoire et dans la nature : le piézomètre, le tube de Pitot, le moulinet, le modèle réduit et le bassin des carènes ; elle marque le début d'observations expérimentales assez précises, enfin elle fut le témoin des premières tentatives pour établir les équations de l'écoulement.

I.10. L'HYDRAULIQUE AU COURS DE LA PREMIÈRE MOITIÉ DU 19ème SIÈCLE

De très nombreux savants contribuèrent, en France et dans d'autres pays, au développement de l'hydraulique. Nous ne citerons que les principaux.

(2) $Q = \frac{2}{3}\, mbh\sqrt{2gh}$

Le physicien français *Charles-Augustin de Coulomb* (1736-1806) inventeur de la balance de torsion, utilisa cet appareil pour mesurer la résistance opposée par les liquides au déplacement d'un solide immergé.

L'hydraulicien allemand *Johan Albert Eytelwein* (1764-1848) et les Ingénieurs français *Pierre-Simon Girard* (1765-1836) et le baron *Riche de Prony* (1755-1839) contribuèrent à l'établissement d'une formule d'écoulement dans les canaux à partir de la formule de Chezy.

Parmi les hydrauliciens italiens du 19$^{\text{ème}}$ siècle, nous retiendrons les noms de *Giorgio Bidone* (1781-1839) qui étudia notamment la contraction et la percussion des jets, le débit des déversoirs et le ressaut hydraulique et *Giuseppe Venturoli* (1768-1846) qui, le premier, établit l'équation élémentaire du remous pour les canaux rectangulaires.

Deux frères *Ernst Henrich* et *Wilhelm Weber* publièrent en 1825 les résultats d'expériences sur la propagation des ondes.

A cette époque apparut la première *turbine hydraulique* digne de ce nom ; elle était due aux efforts de deux Ingénieurs français : *Claude Burdin* (1790-1873) et *Benoît Fourneyron* (1802-1867). Les premières machines présentées étaient du type à écoulement libre, mais Fourneyron fit breveter, dès 1855, une turbine munie d'un diffuseur.

Grâce à la direction stimulante de Prony, Directeur de l'Ecole des Ponts et Chaussées, le Corps des *Ponts et Chaussées* forma, dans la première moitié du 19$^{\text{ème}}$ siècle, un certain nombre d'hydrauliciens remarquables, nous citerons notamment *Jean-Baptiste Bélanger* (1789-1874) qui établit l'équation élémentaire du *remous*, améliora l'analyse de Bidone sur le *ressaut* hydraulique et introduisit la notion de débit maximal sur un déversoir à large seuil, *Pierre Vauthier* (1784-1847) qui compléta l'analyse de Bélanger sur le remous et le ressaut et *Gaspard-Gustave de Coriolis* (1792-1843) qui introduisit dans les analyses de Bélanger et Vauthier, le coefficient α (encore appelé parfois coefficient de Coriolis) tenant compte de l'inégale répartition des vitesses dans la section transversale du courant, soit :

$$\alpha = \frac{1}{U^3 \Omega} \int_\Omega V^3 \, d\omega$$

Quant à la valeur à donner à ce coefficient, plusieurs chiffres ont été proposés par Coriolis et Vauthier ; le débat s'est d'ailleurs poursuivi jusqu'à une date tout à fait récente.

L'Ingénieur écossais *John Scott Russel* (1808-1882) étudia spécialement les écoulements non permanents et non uniformes dans les canaux découverts (formation des ondes et leur influence sur la résistance à l'avancement des navires, vitesse de propagation des ondes).

L'Alsacien *Frédéric Reech* (1805-1884) démontra l'utilité pratique des essais sur modèle et exprima, le premier, ce que l'on connaît maintenant sous le nom de *critère de similitude Reech-Froude.*

La propulsion des navires à l'aide de l'*hélice* fit l'objet, à cette époque, des essais, expériences et études de nombreux savants et Ingénieurs, notamment John Cox Stevens (1804), Francis Pettit Smith et John Ericsson.

L'hydraulicien allemand *Ludwig Hagen* (1797-1884) s'intéressa, notamment, aux problèmes de résistance en conduites et en canaux découverts, en particulier dans des tubes de faible diamètre et à des régimes qu'on désigne maintenant sous le terme de *"régimes laminaires"*. On relève d'ailleurs dans les études de Hagen la première mention de l'existence de deux modes d'écoulement et quoiqu'il ne parvint pas à établir un paramètre de similitude général permettant de les distinguer –ce qui fut l'œuvre de Reynolds 60 ans plus tard– il n'est pas douteux qu'il réalisa avant Reynolds plusieurs des découvertes habituellement attribuées à ce dernier.

A la même époque (1840), le médecin français *Jean-Louis Poiseuille* (1799-1869) étudiait le mouvement du sang dans les veines et vaisseaux capillaires ; ses études, conduites en ignorant absolument les recherches de Hagen, l'amenèrent à proposer une formule d'écoulement qui coïncidait presque exactement avec celle de Hagen. Les noms de ces deux chercheurs restent associés dans la formule de l'écoulement en régime laminaire.

Le Professeur allemand *Julius Weisbach* (1806-1871), publia, à partir de 1845, un ouvrage magistral de mécanique appliquée : *"Lehrbuch der Ingenieur –und Maschinen– Mechanik"* dont une partie importante était consacrée à l'hydraulique technique et eut une influence profonde sur les études et recherches contemporaines. Il fut notamment le premier à écrire l'équation de la perte de charge sous la forme moderne :

$$h = \xi \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \text{ (1)}$$

Il introduisit la vitesse d'approche dans la formule du débit du déversoir et contribua à répandre l'application de l'équation de Bernoulli sous sa forme classique actuelle :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = H$$

I.11. L'HYDRAULIQUE AU COURS DE LA SECONDE MOITIÉ DU 19ème SIÈCLE

A l'exception de Benjamin Franklin qui avait déjà procédé à des ébauches d'essais en bassin des carènes, le premier expérimentateur américain de marque, dans le domaine de l'hydraulique fut *James Bicheno Francis* (1815-1899) qui perfectionna les premiers types de turbines hydrauliques utilisées à cette époque et aboutit à un type de turbine centripète auquel son nom reste associé.

L'hydraulique française continua son essor sous l'impulsion de plusieurs Ingénieurs des Ponts et Chaussées parmi lesquels ont doit citer *Jean-Claude Barré de Saint-Venant* (1797-1886) qui étudia surtout l'élasticité des corps, mais dont les recherches portèrent aussi sur des questions du ressort de l'hydraulique telles que le mouvement des ondes, la résistance dans les conduites et les canaux.

Un de ses contemporains, *Arsène-Jules-Emile-Juvénal Dupuit* (1804-1866) publia des études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes dont la partie la plus remarquable traitait des écoulements à surface libre (tracé des lignes de remous, profondeur critique, élargissements et rétrécissements de la section).

Un contemporain encore plus jeune, *Jacques-Antoine-Charles Bresse* (1822-1883) réalisa finalement l'intégration analytique des équations différentielles du *remous* dans le cas d'un lit uniforme de grande largeur ; il établit également pour la première fois, les caractéristiques du ressaut hydraulique déduites du théorème des quantités de mouvement.

Un Ingénieur belge *Emmanuel-Joseph Boudin* (1820-1893) établit une classification systématique des lignes de remous en fonction des grandeurs relatives des profondeurs normale et critique.

Un autre illustre Ingénieur français de cette période fut *Henry-Philibert-Gaspard Darcy* (1803-1858) né à Dijon et qui fut nommé Ingénieur au corps des Ponts-et-Chaussées dans sa ville natale où il poursuivit ses recherches remarquables sur l'écoulement dans les canalisations et dans les sols perméables. En 1857 il publia son traité intitulé *"Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux"* où il proposa une formule de perte de charge encore couramment utilisée de nos jours.

Dans un second traité intitulé *"Les fontaines publiques de la ville de Dijon"* (1856) il établit la proportionnalité entre le débit de filtration et la perte de charge correspondante. Ce résultat fondamental est encore la base de la plupart des études actuelles sur les écoulements souterrains. Un hommage mondial a été rendu récemment (1956) au Symposium de Dijon, en commémoration du centenaire du traité de Darcy, en proposant le nom de Darcy pour désigner l'unité de filtration.

Dupuit dont il a été question précédemment, appliqua les résultats de Darcy à l'étude de divers types d'écoulements souterrains et proposa toute une série de formules définissant la forme et les caractéristiques des nappes souterraines, formules qui sont encore utilisées de nos jours comme point de départ pour des analyses plus poussées. Il étudia également l'aptitude d'un courant à transporter des matériaux en suspension.

De ce dernier point de vue, un des successeurs de Dupuit au corps des Ponts et Chaussées, *Paul-François-Dominique Du Boys* (1847-1924) entreprit l'analyse quantitative des transports solides.

Darcy avait commencé, vers la fin de sa vie, une série d'essais en canal sur une dérivation de 600 m de longueur du canal de Bourgogne à Dijon ; il ne put les mener à leur terme et cet honneur revint à son assistant *Henri-Emile Bazin* (1829-1917) qui étendit d'ailleurs le programme tracé par Darcy à la propagation des ondes et à l'écoulement par les déversoirs.

---

(1) On écrit actuellement :

$$J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}$$

En matière d'*écoulement dans les canaux*, il proposa plusieurs formules successives dont la dernière est la plus connue (1897) et encore couramment adoptée de nos jours :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

Bazin étudia aussi la répartition des vitesses dans diverses sections transversales comportant des revêtements différents en utilisant le tube de Pitot amélioré par Darcy.

Les études de Bazin sur les ondes en canaux découverts répètent d'abord celles de Russell, mais comprennent aussi la propagation des intumescences.

Enfin, ses études sur le débit des *déversoirs* à crête mince, verticaux et inclinés, ainsi que sur les déversoirs noyés, à crête épaisse ou arrondie, aboutirent à des résultats encore couramment utilisés de nos jours.

En même temps que Darcy et Bazin poursuivaient leurs travaux, les Ingénieurs américains établissaient des formules de pertes de charge dans les canaux et rivières, à la suite de recherches entreprises sur une grande échelle pour la lutte contre les crues du Missisipi. A partir de la documentation ainsi recueillie, deux Ingénieurs suisses *Emile-Oscar Ganguillet* (1818-1894) et *Wilhelm-Rudolph Kutter* (1818-1888) proposèrent une formule également encore utilisée actuellement.

Des formules furent aussi proposées par le français *Philippe-Gaspard Gauckler* (1826-1905) et l'irlandais *Robert Manning* (1816-1897).

Le dernier tiers du 19ème siècle marqua le développement de trois techniques expérimentales utilisées pour les essais sur modèles réduits : le tunnel aérodynamique, le modèle de rivière à fond mobile et le bassin des carènes.

Les premiers essais connus sur *modèle de rivière à fond mobile* furent ceux du français *Louis-Jérôme-Fargue* (1827-1910) réalisés en 1875 à l'occasion des essais de régularisation de la Garonne à Bordeaux ; les échelles des profondeurs et des temps furent choisies arbitrairement ; la correspondance entre ces échelles fut établie pour la première fois par Osborne Reynolds (1842-1912) (dont nous reparlerons plus loin) à propos des expériences qu'il fit en 1885 sur un modèle à marée de la Mersey près de Liverpool.

La technique des *bassins des carènes* pour l'essai des modèles de navires fut développée par deux autres anglais : *William Froude* (1810-1879) et son fils *Robert-Edmund Froude* (1846-1924). Le premier, dans les études préalables à ses essais, utilisa la loi de similitude de Reech, sans d'ailleurs mentionner son nom, de sorte que le nom de Froude reste associé à une loi de similitude dont il n'est pas le promoteur et à un nombre sans dimension :

$$\mathfrak{F} = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

qu'il n'utilisa jamais, alors que sa remarquable contribution à l'étude de la couche limite n'est que rarement mentionnée.

Enfin, la fin du 19ème siècle marqua le développement de la jeune école américaine ; on doit citer ici les noms de trois Ingénieurs américains : *Lester-Allen Pelton* (1829-1908) qui perfectionna les roues motrices portant des aubes en forme de coupelles dont sont dérivées les turbines Pelton actuelles ; *Clemens Herschel* (1842-1930) qui laissa son nom associé au compteur d'eau Venturi et *John Ripley Freeman* (1855-1933) qui dirigea des expériences sur les lances d'incendie et la résistance des canalisations et des appareillages.

A la fin du 19ème siècle, parmi les nombreux traités d'hydraulique publiés, nous citerons celui de *Flamant* (1891) qui synthétise l'état actuel de cette science, en utilisant les trois principes de base de la continuité, de l'énergie et de la quantité de mouvement.

I.12. L'HYDRODYNAMIQUE CLASSIQUE ET L'HYDRODYNAMIQUE APPLIQUÉE AU 19ème SIÈCLE

L'analyse mathématique continue de contribuer au progrès de l'hydraulique, parallèlement aux études expérimentales.

Louis-Marie-Henri Navier (1785-1836) dans son *"Mémoire sur les lois du mouvement des fluides"* chercha à analyser le mouvement d'un fluide d'une manière assez semblable à celle d'Euler, mais en tenant compte d'une attraction ou d'une répulsion hypothétique entre les molécules voisines.

Les conceptions de Navier furent reprises par le baron *Augustin-Louis Cauchy* (1789-1857) et *Siméon-Denis Poisson* (1781-1840) mais c'est finalement le mathématicien anglais *Sir George-Gabriel Stokes* (1819-1903) qui introduisit, dans les équations de Navier, le coefficient de viscosité dynamique μ et qui aboutit aux équations classiques de Navier-Stokes concernant l'écoulement des fluides visqueux.

Stokes étudia également le mouvement des ondes mais l'étude la plus complète de cette époque sur ce sujet est due à un autre savant anglais : *Sir George Biddle Airy* (1801-1892).

Deux physiciens allemands *Von Helmholtz* (1821-1894) et *Kirchhoff* (1824-1887) commencèrent à appliquer à l'étude de l'écoulement irrotationnel à deux dimensions, le puissant outil mathématique de la *transformation conforme* (créée par Lagrange et Cauchy et développée par les allemands *Riemann, Christoffel* et *Schwartz*).

Joseph Boussinesq (1842-1929) joua un rôle considérable dans le développement de l'hydrodynamique et de l'hydraulique. Son ouvrage magistral : *"Essai sur la théorie des eaux courantes"* (1872), demeure au premier plan de la littérature hydraulique ; il commence par établir les équations de base du mouvement dont l'intégration, dans le cas d'une variation très lente de la section transversale, l'amène à l'équation de l'écoulement graduellement varié en canaux découverts dans laquelle il introduit, à la place du coefficient α de Coriolis, un coefficient β appelé *"coefficient de quantité de mouvement"* et tel que :

$$\beta = 1 + \eta = \frac{1}{U^2 \Omega} \int_\Omega V^2 d\omega$$

Il montre que, dans les conditions admises, on a sensiblement :

$$\alpha = 1 + 3\eta .$$

Il passe ensuite à l'étude des divers aspects des ondes en canaux découverts et donne la formule générale de leur célérité. Enfin, il établit l'équation de base du régime variable.

Le traité de Boussinesq, extraordinairement complet pour l'époque, sert encore de base aux études actuelles de nature semblable.

L'anglais *Osborne Reynolds* (1842-1912) a également laissé une trace profonde dans la science de l'hydrodynamique et de l'hydraulique. Ses œuvres couvrent presque tous les domaines de la physique et de la technique. En ce qui concerne l'hydraulique, signalons ses études sur la cavitation, les modèles réduits avec distorsion et surtout l'expression du paramètre qui porte maintenant son nom et qui sert à distinguer les régimes d'écoulement.

Trois britanniques contemporains de Reynolds méritent aussi d'être signalés : *William Thomson* (1824-1907) plus connu sous le nom de *Lord Kelvin* (écoulement irrotationnel, mouvement tourbillonnaire, marées, ondes), *John William Strutt* (1842-1919) plus connu sous le titre de *Lord Rayleigh* (cavitation, instabilité des jets, similitude dynamique) et *Horace Lamb* (1849-1934) auteur d'un ouvrage monumental *"Hydrodynamics"*.

Le premier hydrodynamicien russe de marque fut *Nocolaï E. Joukowsky* (1847-1921) qui étudia le phénomène de la portance hydrodynamique en même temps que l'allemand *Wilhelm Kutta* (1867-1944) ; de ces travaux devait résulter le théorème de Kutta-Joukowsky sur une surface portante infiniment longue. Joukowsky a laissé également son nom attaché à l'étude du phénomène du coup de bélier dans le cas d'une manœuvre brusque.

I.13. LES TENDANCES DE L'HYDRAULIQUE AU DÉBUT DU 20ème SIÈCLE

Les contributions principales du début du 20ème siècle ne tiennent pas tant dans de nouvelles découvertes que dans la vérification, l'assimilation et le développement des découvertes déjà faites.

Au début du siècle, *l'école allemande* prit un essor remarquable avec *Hubert Engels* (1854-1945) (Laboratoire de l'Institut Polytechnique de Dresde spécialement adapté à l'étude des modèles à fond mobile), *Theodor Rehbock* (1864-1950) (Laboratoire de l'Institut Polytechnique de Karlsruhe comportant un canal vitré, des études sur modèles réduits de barrages en terre, déversoirs, siphons, etc . . .).

L'un des plus importants laboratoires allemands de cette époque fut réalisé à Berlin, en 1903, sous la forme d'un Centre fédéral d'études sur modèles réduits des ouvrages hydrauliques et des navires.

Dans le domaine des *machines hydrauliques*, l'école allemande prit également la tête avec Hermann Foettinger (1877-1945) (cavitation, convertisseurs hydrauliques de couple), Diétrich Thoma (cavitation) et

l'autrichien Victor Kaplan (1876-1934) qui mit au point les turbines hélices à pales orientables.

Les pays voisins de l'Allemagne ne tardèrent pas à créer des *laboratoires* semblables ; citons ceux de Timonoff (1862-1936) à Léningrad, Scimeni (1895-1952) à Padoue, Schaffernak (1881-1951) à Vienne, Thijsse (1893 . . . .) à Delft, Meyer-Peter à Zurich et Gibson à Manchester.

Aux Etats-Unis, citons ceux de Merriman (1848-1925) à Leigh, Allen (1871-1950) à Worcester, Schodef à Cornell University, Woodward (1871-1953), Yarnell (1886-1937) et Nagler (1892-1933) à Iowa.

En France, M. *Camichel* (1871-1966) créa le laboratoire d'Hydraulique de Toulouse qui s'agrandit progressivement et qui est actuellement dirigé par M. *Escande.* Vers la même période se créa, à Grenoble, un centre industriel important spécialisé dans la construction des machines et appareils hydrauliques, notamment les turbines ; ce centre se développa rapidement et comporta bientôt un important laboratoire anciennement dénommé Neyrpic, devenu actuellement Sogreah qui prit un développement remarquable sous l'impulsion de *Maurice Gariel* (1884-1960) (coups de bélier, régulation des turbines, groupes-bulbes), de *Pierre Danel* (1902-1966), *Henri Dagallier* et *Georges Halbronn.*

A Paris se créa le Laboratoire Central d'Hydraulique de France (M. *Laurent*)

Enfin, après la dernière guerre, le Ministère des Travaux Publics et Electricité de France créèrent, en collaboration, dans l'île de Chatou à proximité de Paris, le très important *Laboratoire National d'Hydraulique* qui fut rattaché ultérieurement au Centre de Recherches et d'Essais de Chatou. Parmi les nombreux Ingénieurs et Chercheurs qui ont apporté leur contribution au développement de ce Laboratoire, signalons, notamment, MM. *Nizery* (1907-1954), *Chapouthier* (1897-1966), *Gridel* (1903-1970), *Banal* et *Valembois.* On doit citer également M. *Remenieras* qui dirigea l'ancien laboratoire de la Société Hydrotechnique de France à *Beauvert* près de Grenoble et qui poursuivit sa carrière à la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, puis, récemment, à la Société Hydrotechnique de France.

Outre les laboratoires, de nombreuses expériences furent réalisées sur le terrain, notamment dans le domaine de l'*hydraulique agricole* : aux Etats-Unis, *Scobey* sur la résistance à l'écoulement dans les canaux d'irrigation, *Yarnell* sur l'écoulement dans les conduites de drainage, *Parshall* (1881-1959) sur le Canal-Venturi ; en France, *Porchet* (1890-1934) et *Blanc* (1892-1962) sur l'hydraulique souterraine.

Aux Indes, citons les travaux de *Kennedy* (1851-1920), *Lindley* et *Gérald Lacey* sur l'ensablement des canaux d'irrigation.

Sous l'impulsion de *John R. Freeman,* Ingénieur et homme d'Etat, les Etats-Unis développèrent largement leurs études et recherches dans les nombreux laboratoires créés à l'exemple de l'Europe, en particulier, en 1932, fut fondé le Laboratoire National d'Hydraulique du U.S. Bureau of Standards et le laboratoire du "Bureau of Reclamation" à Denver (Colorado) alors que l'Institut de Mécanique des liquides de l'Université d'Iowa poursuit ses activités sous la direction de *Hunter Rouse.*

Sur le plan des recherches mathématiques, on développe l'étude analytique du fonctionnement des cheminées d'équilibre, l'analyse du coup de bélier (*Allievi* 1856-1941), la méthode graphique fut adaptée à cette étude par le suisse *Othmar Schnyder* (1904 . . .) et le français *Louis Bergeron* (1876-1948).

I.14. L'AVÈNEMENT DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

On admet généralement que le fondateur de la mécanique des fluides moderne est *Ludwig Prandtl* (1875-1953), auteur de la théorie de la couche-limite ; il fut appelé à l'Université de Göttingen en 1905 et, sous sa direction stimulante, le nouveau centre de recherches devint le célèbre "Kaiser Wilhelm Institut für Strömungsforschung" de renommée mondiale ; il poursuivit ses recherches à Pasadena (Californie) à partir de 1933.

Prandtl forma de nombreux disciples parmi lesquels nous citerons notamment *Paul Richard Heinrich Blasius* qui étudia la répartition des vitesses et la résistance de la couche-limite laminaire ; il montra, le premier, que le coefficient de résistance des tuyaux lisses n'était fonction que du nombre de Reynolds.

Le plus illustre disciple de l'Ecole de Göttingen fut sans doute le hongrois *Théodor Von Karman* (1881-1963), Professeur à Göttingen, puis à Aix-la-Chapelle, et enfin à l'Institut de Technologie de Pasadena ; une de ses premières recherches concernait les tourbillons alternés se formant à l'arrière des corps cylindriques ;

après Prandtl, il contribua à l'analyse de la répartition des vitesses et la résistance de l'écoulement turbulent dans les conduites.

De nombreux autres chercheurs furent formés à l'école de Prandtl, citons notamment : *Johann Betz* (machines hydrauliques, transformations conformes), *Johannes Tollmien, Christian Schiller* (résistance dans les conduites), *Jakob Ackeret* (cavitation), *Karl Gustav Tietjens, Herman Schlichting* (couche-limite), *Johann Nikuradse* (perte de charge dans les conduites), *Richard Von Mises.*

Vers la même époque, le suisse *Franz Prasil* (1857-1929) préconisa l'emploi des réseaux à mailles carrées comme moyen graphique de détermination des caractéristiques des écoulements plans à potentiel des vitesses.

En Russie, à Joukowsky succéda *Dimitri Pavlevitch Riabouchinsky* (1882-1962) qui émigra à Paris en 1919 et collabora avec le Ministère de l'Air ; inventeur du tube lance-fusée (bazooka), ses contributions originales en matière de mécanique des fluides concernent essentiellement l'analyse dimensionnelle, la résistance laminaire et turbulente, la méthode de transformation conforme, la cavitation et les analogies en matière d'ondes.

En France, l'Ingénieur *Alexandre-Gustave Eiffel* (1832-1923) procéda à des essais sur modèles pour déterminer les pressions exercées par le vent ; il arriva, pour des vitesses relativement importantes, à un coefficient de résistance à l'avancement moitié moindre que celui obtenu à Göttingen. Ce fut Prandtl qui, en 1914, expliqua cette différence par la transformation de la couche-limite laminaire en couche-limite turbulente.

Ce problème de la couche-limite et du coefficient de résistance dans les tuyaux fut étudié par de nombreux physiciens-hydrauliciens, notamment les anglais *Taylor, Stanton, Goldstein, Colebrook* et *White.*

Aux U.S.A. une nouvelle orientation fut donnée aux analyses mathématiques par l'*analyse dimensionnelle*, sous l'impulsion de *Buckingham* (1867-1940) et *Bridgman* (1882 . . . .).

Un homme qui influença fortement les tendances scientifiques de l'époque fut *Boris Alexandrovitch Bakhmeteff* (1880-1951) qui commença ses études en Russie et les poursuivit aux U.S.A. Il publia, en 1912, un traité sur l'hydraulique des canaux à écoulement libre où était fait, pour la première fois, l'usage du diagramme d'énergie spécifique.

Au nouveau laboratoire de l'U.S. Bureau of Standards, le physicien américain *Keulegan* publia de nombreux mémoires sur le mouvement des ondes, la résistance des tuyaux et des canaux découverts et l'écoulement avec gradient de densité.

I.15. LES TENDANCES ACTUELLES DE L'HYDRAULIQUE

L'Hydraulique moderne étend ses frontières au-delà de son domaine traditionnel. Un changement d'orientation important résulte de l'utilisation de plus en plus poussée des méthodes d'analyse basées sur l'hypothèse du *mouvement irrotationnel* : les réseaux des lignes équipotentielles et des lignes de courant sont devenus un moyen classique pour déterminer les champs bi-dimensionnels de vitesse, soit par la méthode graphique, soit par la transformation conforme, soit par les méthodes numériques de relaxation ; l'analogie électrique reste particulièrement utile pour l'étude des écoulements à trois dimensions.

Dans tout le domaine d'étude des *ondes*, avec son application au cas de la seiche, du déferlement, des marées, etc . . . l'analyse mathématique continue de fournir un instrument d'étude et de recherche de premier ordre.

Le domaine de la *turbulence* fait l'objet de recherches de plus en plus poussées ; l'hydraulique classique déborde ici sur des domaines voisins, tels ceux relatifs à la cavitation tourbillonnaire, à l'évaporation, à l'entrainement d'air, au transfert de chaleur et au transport ou au dépôt de particules solides en suspension.

Les *machines hydrauliques* sont devenues une branche si développée de la technique qu'elles n'appartiennent plus guère au domaine de l'hydraulique classique ; ainsi les commandes et transmissions hydrauliques ont donné naissance à des machines très spécialisées (pompes et turbines volumétriques, coupleurs hydrauliques, convertisseurs de couple).

En ce qui concerne les *turbo-machines*, un grand progrès a été réalisé en précisant les conditions de leur fonctionnement quel que soit le fluide utilisé (liquide ou gaz) ; une amélioration sensible a été apportée grâce à l'application des transformations con-

formes dans l'essai comparatif des divers systèmes d'aubes. Le phénomène de cavitation qui reste un facteur limitatif dans la conception et la réalisation des turbo-machines, continue de faire l'objet de recherches à partir de résultats obtenus dans des domaines voisins (par exemple l'étude de la cavitation des torpilles). Citons également le récent développement des groupes bulbes pour l'équipement des usines marémotrices, des turbines-pompes réversibles pour l'équipement des usines d'accumulation d'énergie et des turbines de forage.

La recherche hydraulique se développe très largement dans les *laboratoires* industriels ou universitaires auxquels se sont adjoints, dans divers pays, des laboratoires gouvernementaux bénéficiant de l'appui financier de l'Etat.

Les problèmes d'*appareillage* ont profité des progrès réalisés en électronique (production d'éclairs de grande intensité et grande fréquence pour des projections animées à grande vitesse, anémomètre à fil chaud, reproduction par commandes électroniques des vagues ou des marées dans les modèles réduits).

La technique opératoire des *essais sur modèles réduits* se heurte toujours à l'impossibilité de satisfaire à la fois aux critères de similitude de Reech-Froude et de Reynolds avec le même fluide, ce qui conduit à la distorsion des échelles des longueurs et des temps, compliquée encore par l'emploi, pour les modèles à fond mobile, de matériaux dont les caractéristiques ne sont pas en elles-mêmes "semblables" à celles du sédiment réel. Ce problème s'est encore compliqué par la nécessité de représenter des phénomènes de mélanges (courants de densité) dans des écoulements stratifiés (mélange de couches fluides adjacentes dans les estuaires, les retenues de barrages-réservoirs, mécanique du dépôt et de l'entraînement des vases). Signalons également la récente technique des modèles tournants permettant de représenter l'accélération de Coriolis dans les études d'aménagements marémoteurs et la réalisation des modèles mathématiques fluviaux ou maritimes.

En définitive, si l'on a maintenant trouvé la solution à la plupart des problèmes posés par Du Buat au 18ème siècle, c'est en grande partie parce que ceux-ci relevaient aisément des méthodes d'investigation empiriques ou semi-empiriques.

La solution des problèmes qui se posent maintenant aux chercheurs ne dépend que pour une faible part des simples procédés de mesure ; citons, par exemple, l'évaluation statistique des degrés de rugosité d'une surface et de leurs effets sur la résistance à la paroi, le mécanisme d'un mélange par turbulence au voisinage d'une limite quelconque, qu'il s'agisse d'une surface d'eau avec entraînement d'air, d'un écoulement d'eau ou d'air charriant des sédiments ou de la surface de séparation de deux fluides en mouvement de densités très légèrement différentes (courants de densité), l'écoulement des fluides conducteurs à haute température (plasmas) dans un champ magnétique (magnéto-hydrodynamique).

Tels sont, parmi beaucoup d'autres, les problèmes qui se posent à l'hydraulique moderne et que les chercheurs actuels et futurs devront chercher à dominer.

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre I

BERNOULLI (D.).– *Hydrodynamica*. Traduction en langue anglaise du célèbre traité de Daniel Bernoulli (1738) et de l'ouvrage "Hydraulica" de son père, Jean Bernoulli (1743) (Traduction par Thomas Carmody et Helmut Kobus – Préface de Hunter Rouse – Ed. Dover Publications, New-York, 1968).

BUFFET (B.) et EVRARD (R.).– *L'eau potable à travers les âges*. Ed. Solédi, Liège, 1950.

CHABOT (J.).– Histoire des distributions d'eau. *Chaud, Froid, Plomberie*, nos 164, 168, 179, 190, années 1961-62.

COMBES (G.) et de SAINT-LAURENT (F.).– Le transport de l'eau à grande distance. *La Houille Blanche*, n° 4, 1967.

DURAND-DUBIEF (M.) et LORIFERNE (H.).– Les Ponts-et-Chaussées et les distributions d'eau. *Bulletin du P.C.M.*, Février 1956.

GARIEL (M.).– Quelques jalons sur la route de l'hydraulique. *Revue générale de l'Hydraulique*, nos 1, 2, 3 et 4.

ROUSE (H.) and INCE (S.).– *History of hydraulics*. Ed. Dover Publications, New-York. (Cet ouvrage avait été publié par *La Houille Blanche* en 1954, puis par l'Université d'Iowa en 1957.

KLEIN-REBOUR (F.).– L'eau à Paris au Moyen-Age. *La technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 261, Septembre 1968.

KOLUPAILA (S.).– Les jaugeages dans les ouvrages et les centrales hydro-électriques (résumé historique). *La Houille Blanche*, n° 4, Juin 1960.

PITOT (H. de).– Description d'une machine pour mesurer la vitesse des eaux courantes et le sillage des vaisseaux. *La Houille Blanche*, n° 8, 1966.

SACKMANN (L.A.).– Science et technique hydrauliques à travers les âges. *Techniques et sciences municipales*. n° 12, Décembre 1960.



Daniel BERNOULLI (1700-1782)

CHAPITRE II

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

II.1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU LIQUIDE

Le liquide est un fluide particulier, de sorte que la mécanique des liquides est une branche de la mécanique générale des fluides.

Le fluide est caractérisé par ce fait que ses molécules sont très mobiles les unes par rapport aux autres, elles se déplacent sous l'action de très faibles efforts, de sorte qu'à l'encontre des solides, un fluide n'offre aucune résistance aux déformations. En particulier, il épouse sans résistance la forme du récipient qui le contient. C'est ce qui constitue la *fluidité*.

Pratiquement, le *fluide parfait* n'existe pas, pas plus qu'il n'existe de solides indéformables, les *fluides naturels* sont constitués par des molécules présentant quelque adhérence entre elles, ce qui tend à gêner leurs mouvements relatifs, c'est ce qui constitue la *viscosité*. La viscosité provoque une dissipation de l'énergie cinétique de la masse fluide en mouvement, cette énergie est transformée en chaleur.

C'est au mouvement relatif des molécules les unes par rapport aux autres qu'est due cette dissipation d'énergie, de sorte que l'effet est d'autant plus accentué que la vitesse de déformation du fluide est plus considérable.

Inversement, si la vitesse de déformation devient très faible, la dissipation d'énergie diminue et à la limite, lorsqu'on étudiera le fluide au repos, la viscosité n'interviendra plus et on pourra considérer le fluide naturel au repos comme un fluide parfait.

Le liquide parfait sera généralement supposé *isotrope,* c'est-à-dire possédant les mêmes propriétés dans toutes les directions (sauf le cas particulier de la cavitation). Il sera également supposé pratiquement *incompressible.*

En fait, l'incompressibilité des liquides réels n'est pas absolue. Par exemple l'eau est légèrement compressible. Par analogie avec l'élasticité des solides, on définit la *compressibilité volumique* qui est le rapport entre la variation de pression (contrainte) et la variation relative du volume (déformation) qu'elle provoque, soit :

$$K = \frac{dp}{dV/V}$$

Pour l'eau à la température ordinaire, $K = 20\,000$ *bars,* ce qui signifie qu'une augmentation de pression de 1 *bar* entraîne une diminution de volume de $1/20\,000$.

Pour comparer avec les solides, il faut tenir compte de ce que la compressibilité volumique des liquides se rapporte à une variation relative de volume alors que pour les solides, le module d'élasticité longitudinale (ou module d'Young) E correspond à une variation relative de longueur. Pour les comparer, il faudrait donc faire intervenir, pour les solides, la variation relative des dimensions transversales (coefficient de Poisson). On trouverait ainsi que l'eau ($K = 20\,000$ *bars*) est 50 fois plus élastique que l'acier ($E = 20\,000$ *hbars*) bien que K soit égal à $E/100$.

Il faut noter que plus le liquide est élastique, plus sa compressibilité volumique est petite.

On peut aussi définir K en fonction des variations de la masse volumique ρ. Pour une masse m de liquide de volume V, on a $m = \rho V$, donc

$$K = \frac{dp}{dV/V} = \frac{dp}{d\rho/\rho}$$

Précisons que $1/K$ est parfois appelé *"module de compressibilité"*.

Dans la plupart des problèmes d'hydraulique, l'eau sera supposée pratiquement incompressible sauf toutefois pour l'étude du coup de bélier dans les canalisations où nous ferons précisément intervenir la compressibilité de l'eau.

Puisque le liquide est un fluide particulier, nous serons amenés à établir certaines relations générales concernant l'ensemble des fluides, nous les appliquerons ensuite au cas particulier du liquide.

Comme pour la mécanique classique, nous distinguerons :

– L'étude des liquides au repos (statique) : c'est l'*hydrostatique* ;

– L'étude des liquides en mouvement.

a) Sans tenir compte des forces produisant le mouvement : *cinématique* des liquides ;

b) En tenant compte des forces produisant le mouvement (dynamique) : *hydrodynamique.*

Toutefois, en raison de la nature particulière du liquide considéré, nous distinguerons, dans cette dernière science :

– L'*hydrodynamique du liquide parfait,* c'est-à-dire dénué de frottement ;

– L'*hydrodynamique du liquide réel,* c'est-à-dire en tenant compte de la *viscosité.*

En principe, ces différentes sciences (hydrostatique, cinématique, hydrodynamique des liquides parfaits et visqueux) devraient suffire. Mais, d'une part, elles conduisent à des équations différentielles souvent impossibles à intégrer notamment en raison de la complexité des conditions aux limites et, d'autre part, on n'a pas encore découvert toutes les lois mathématiques qui lient certains éléments naturels aux grandeurs hydrodynamiques ; aussi a-t-on créé pour les besoins de la pratique une science mixte, basée en partie sur la théorie et en partie sur l'expérience et qui est l'*Hydraulique* proprement dite.

Les formules de l'hydraulique, obtenues par des théories approximatives et affectées de coefficients déduits de l'expérience, satisfont aux besoins de la pratique, mais il faut être très prudent dans leur application et ne pas perdre de vue les conditions de l'expérience qui a permis de les déterminer.

Nous reviendrons sur cette remarque très importante lorsque nous aborderons cette partie principale du présent traité.

Nous étudierons donc successivement l'hydrostatique, la cinématique des liquides, l'hydrodynamique et l'hydraulique.

Mais avant d'entreprendre cette étude, il est indispensable de bien définir ce que l'on entend par *pression en un point d'une masse liquide,* au repos ou en mouvement.

II.2. PRESSION EN UN POINT D'UNE MASSE LIQUIDE

II.2.1. Existence et définition

La notion de pression étant très générale et valable aussi bien pour un liquide au repos que pour un liquide en mouvement, le raisonnement qui suit ne préjugera pas de l'état de repos ou de mouvement du liquide.

Nous supposerons tout d'abord le liquide de *fluidité parfaite,* c'est-à-dire sans viscosité.

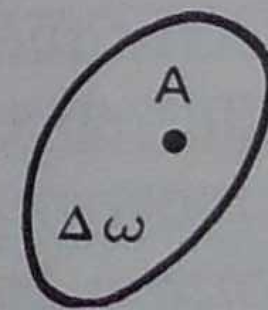


Fig. II.2.1

Considérons (fig. II.2.1) un point A au sein d'une masse liquide de fluidité parfaite, au repos ou en mouvement. Faisons passer par A une surface plane dont nous considérons une petite portion $\Delta\omega$ entourant A.

La fraction du liquide situé d'un côté de cette surface exerce sur l'autre une certaine action.

Comme tous les éléments qui constituent cette surface sont dans les mêmes conditions physiques et comme, en outre, la fluidité étant parfaite, les molécules liquides n'exercent aucun frottement, leurs actions élémentaires respectives n'ont aucune com-

posante dans le plan $\Delta\omega$ (composante tangentielle), elles sont toutes normales à $\Delta\omega$ et admettent donc une résultante ΔP également normale à $\Delta\omega$ et qui lui est proportionnelle. Cette résultante ΔP est appelée *pression* sur la fraction $\Delta\omega$.

Le rapport $\Delta P/\Delta\omega$ est la *pression moyenne* par unité de surface sur l'étendue $\Delta\omega$.

Si $\Delta\omega$ décroît indéfiniment en entourant le point A, le rapport $\Delta P/\Delta\omega$ tend vers une limite $dP/d\omega = p$ qu'on appelle la *pression au point A*.

II.2.2. Propriété de la pression en un point (fluidité parfaite)

Par A faisons passer trois axes rectangulaires Ax, Ay et Az arbitrairement choisis (fig. II.2.2). Coupons ce trièdre par un plan BCD infiniment voisin de A.

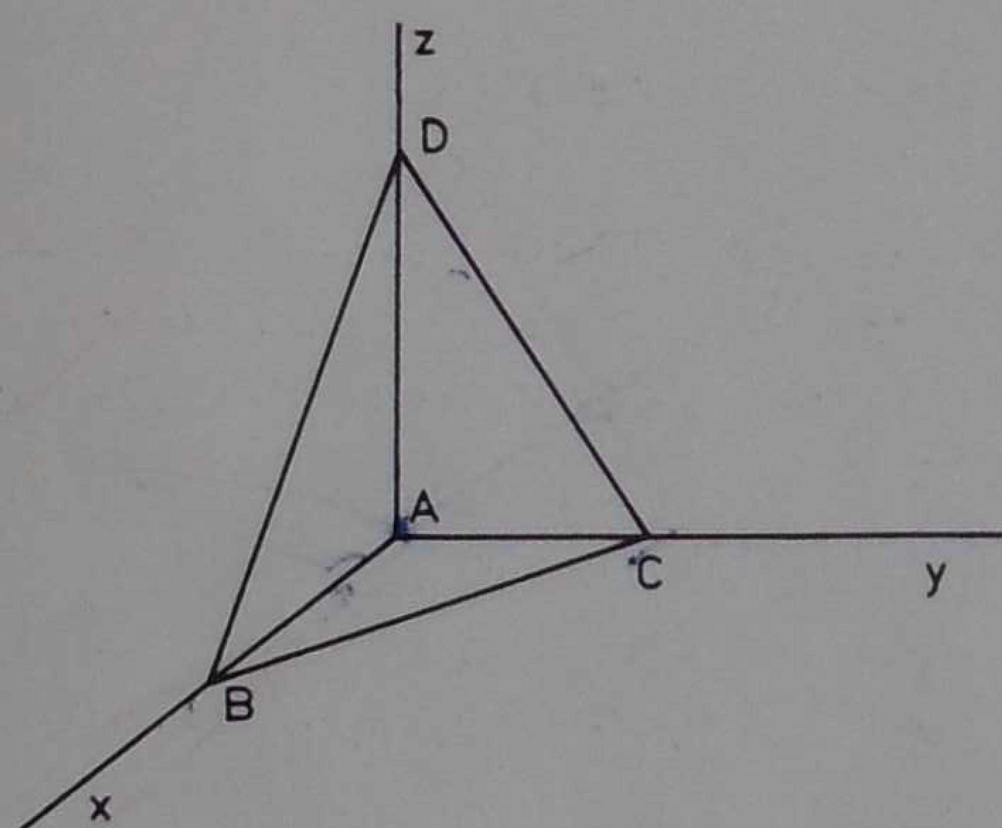


Fig. II.2.2

Posons

$$\text{aire } BCD = d\omega$$
$$\text{aire } ACD = d\omega_x$$
$$\text{aire } BDA = d\omega_y$$
$$\text{aire } CAB = d\omega_z$$

Soient α, β et γ les angles que fait la normale à BCD respectivement avec les 3 axes Ax, Ay et Az.

On a évidemment :

$$\begin{cases} d\omega_x = d\omega \cos\alpha \\ d\omega_y = d\omega \cos\beta \\ d\omega_z = d\omega \cos\gamma \end{cases}$$

Désignons par p la pression qu'on peut admettre constante en tout point de la surface infiniment petite $d\omega$.

La pression totale sur $d\omega$ sera $dP = pd\omega$. Soient $p_x, p_y, p_z, dP_x, dP_y$ et dP_z les éléments homologues sur les autres faces du tétraèdre élémentaire $ABCD$.

On a :

$$\begin{cases} dP_x = p_x\, d\omega_x \\ dP_y = p_y\, d\omega_y \\ dP_z = p_z\, d\omega_z \end{cases}$$

dP, dP_x, dP_y et dP_z sont normales aux faces du tétraèdre sur lesquelles elles s'appliquent.

En application du *principe de d'Alembert*, le tétraèdre élémentaire $ABCD$ est en équilibre sous l'action des forces suivantes :

- les pressions que nous avons définies,
- son poids,
- les forces d'inertie, s'il y a mouvement.

Les pressions sont des infiniment petits de l'ordre des surfaces ; le poids (mg) et les forces d'inertie ($-m\gamma$) sont des infiniment petits de l'ordre des volumes. On peut donc les négliger devant les pressions, ce qui revient à écrire que *les pressions sur les quatre faces du tétraèdre se font équlibre.*

En projetant l'équation d'équilibre des pressions sur l'axe Ax, il vient :

$$-dP\cos\alpha + dP_x = 0$$

ou

$$pd\omega\cos\alpha = p_x\, d\omega_x$$

$$p = p_x$$

En projetant sur les axes Ay et Az on aurait obtenu de la même manière :

$$p = p_y$$

$$p = p_z$$

Rapprochons indéfiniment le plan BCD du point A en le maintenant parallèle à lui-même.

A la limite, lorsque le plan BCD contient A, les pressions p_x, p_y, p_z et p, toujours égales entre elles, deviennent les pressions au point A dans quatre directions normales aux faces du tétraèdre.

Les directions Ax, Ay et Az ayant été choisies arbitrairement, on peut donc énoncer le théorème fondamental suivant :

Dans un liquide de fluidité parfaite, en équilibre ou en mouvement, la pression en un point est la même dans toutes les directions autour de ce point.

La pression est donc une grandeur *scalaire* ; elle ne dépend que de la position du point et non de l'orientation.

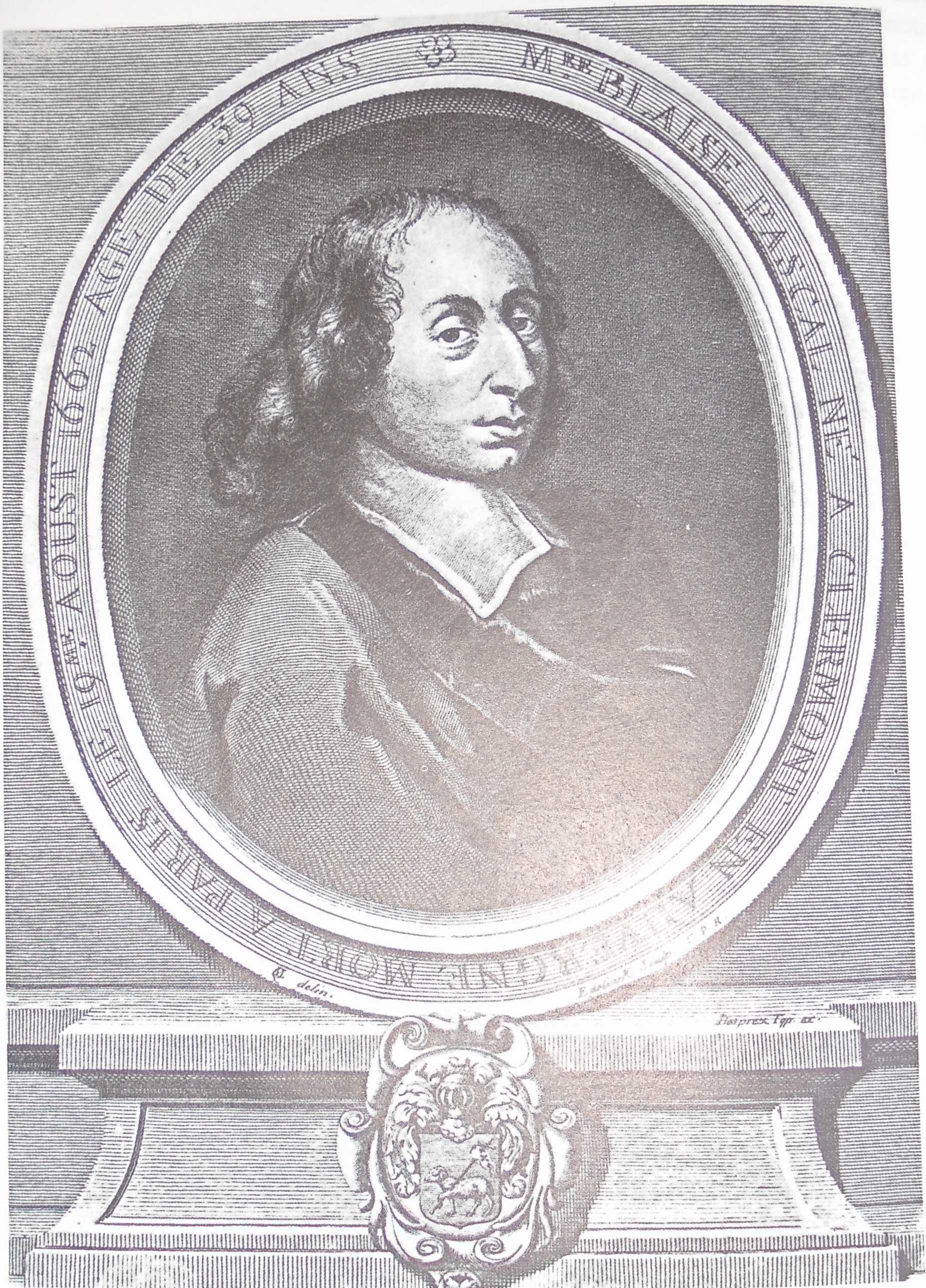
II.2.3. Cas d'un liquide de fluidité non parfaite

Lorsque la fluidité du liquide n'est pas parfaite, la pression sur un élément de surface pris dans la masse liquide en mouvement n'est plus normale à cet élément et admet une composante tangentielle dans le plan de l'élément de surface considéré (force de frottement).

Toutefois cette composante tangentielle n'intervient que si le liquide est en mouvement, de sorte que la viscosité n'interviendra pas en hydrostatique, ainsi que nous l'avons déjà souligné.

Par ailleurs, dans un liquide visqueux en mouvement, la pression sur un élément de surface est variable suivant l'orientation de l'élément au sein de la masse liquide ; la pression en un point d'un liquide visqueux en mouvement varie donc suivant la direction dans laquelle on la mesure.

Si toutefois le liquide visqueux est au repos, la viscosité n'intervient plus et la pression en un point est la même dans toutes les directions autour de ce point.



Blaise PASCAL (1623-1662)
(Gravure d'Edelinek)

CHAPITRE III

HYDROSTATIQUE

Comme le liquide est un fluide particulier, nous établirons d'abord les équations d'équilibre d'un fluide en général et nous les appliquerons ensuite au cas particulier du liquide.

S'agissant ici d'un fluide au repos, on peut admettre que la viscosité est nulle et considérer le *fluide parfait*.

III.1. ÉQUATIONS GÉNÉRALES

Soient OX, OY, OZ, trois axes de coordonnées rectangulaires auxquels nous rapporterons les points de la masse fluide (fig. III.1.1).

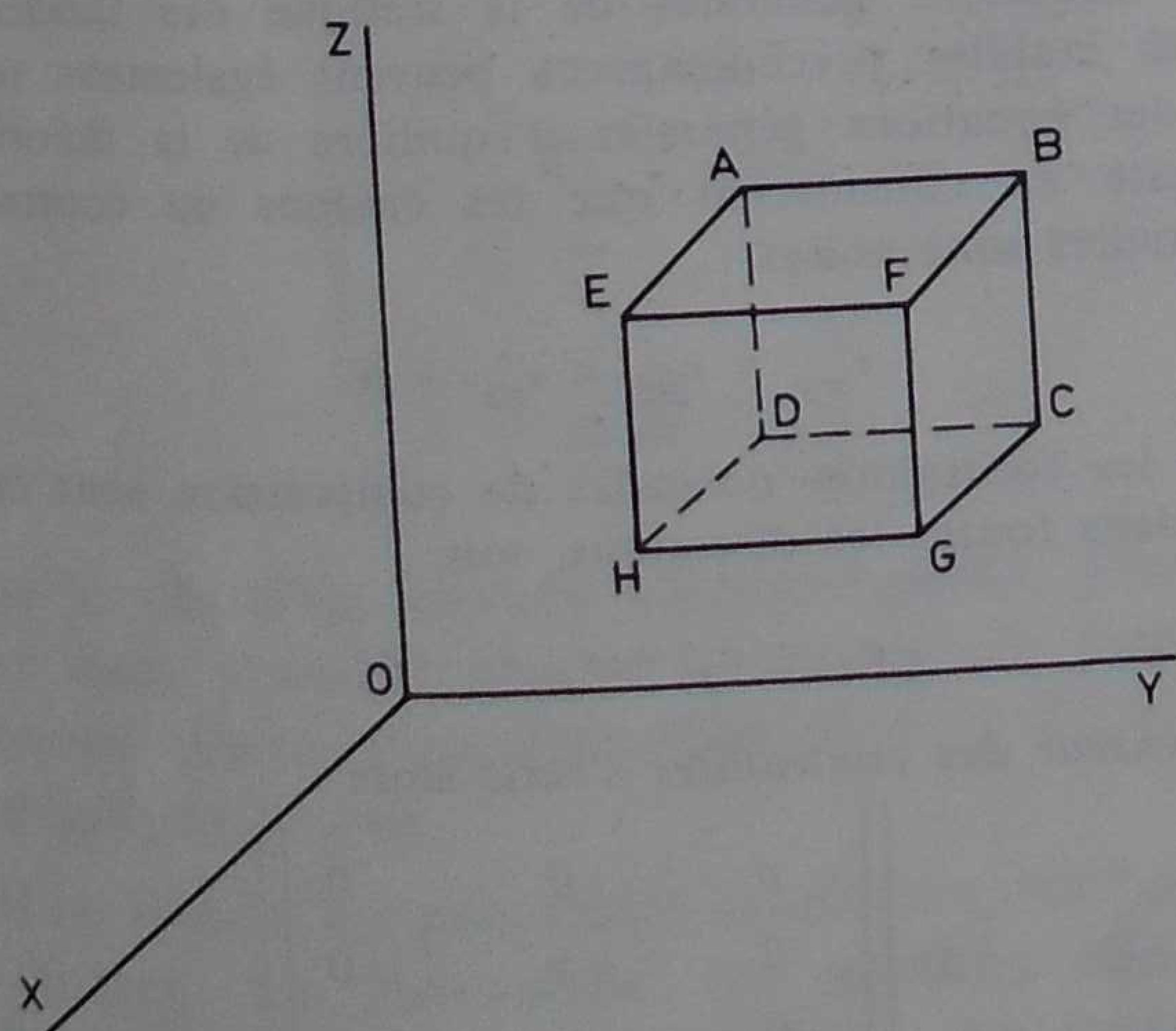


Fig. III.1.1

Considérons, dans cette masse fluide, un parallélépipède rectangle infiniment petit, dont les arêtes dx, dy, dz, sont parallèles aux axes.

Si ρ est la masse volumique du fluide considéré, la masse du parallélipède est

$$\rho\ dx\ dy\ dz$$

Ecrivons les *conditions d'équilibre* de ce parallélépipède.

Les forces agissant sur lui sont :

1) Les forces extérieures,
2) Les pressions sur les six faces.

Forces extérieures

Nous appellerons X, Y, Z, les sommes respectives des composantes, suivant OX, OY, OZ, des forces extérieures agissant sur la masse fluide et *rapportées à l'unité de masse*, soit $\vec{F}$.

Remarquons que, de ce fait, X, Y et Z ont les dimensions LT^{-2} c'est-à-dire celles d'une accélération.

Pour le parallélépipède considéré, les sommes des composantes de ces forces extérieures sont donc respectivement :

$$\rho\vec{F} \begin{cases} \rho X\ dx\ dy\ dz \\ \rho Y\ dx\ dy\ dz \\ \rho Z\ dx\ dy\ dz \end{cases}$$

Pressions sur les six faces.

Elles sont parallèles aux axes, on peut donc en faire immédiatement les sommes suivant les trois directions OX, OY, OZ.

La somme suivant OX est égale à la somme des pressions s'exerçant sur les faces $ABCD$ et $EFGH$.

Soit p la pression en A. Comme de A en E, seul x varie, la pression en E est égale à :

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

La somme algébrique de ces deux pressions prises suivant OX est donc :

$$p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) = - \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

La somme des pressions s'exerçant sur les deux faces considérées perpendiculaires à OX est, par suite, égale à :

$$- \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

On trouverait de même :

Suivant OY :

$$- \frac{\partial p}{\partial y} dy\, dz\, dx$$

Suivant OZ :

$$- \frac{\partial p}{\partial z} dz\, dx\, dy$$

La condition d'équilibre, en projection sur OX, s'écrit donc :

$$\rho X\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz = 0$$

ou :

$$\rho X = \frac{\partial p}{\partial x}$$

En projetant également sur les deux autres axes, on obtiendra en définitive :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z \end{aligned}\right\} \qquad [III.1.1]$$

ou, en notations vectorielles :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}\, p}$$

ou

$$\text{rot}\, \rho\vec{F} = 0$$

Le système [*III.1.1*] peut s'écrire également :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} dx &= X\, dx \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} dy &= Y\, dy \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} dz &= Z\, dz \end{aligned}\right\} \qquad [III.1.2]$$

Additionnons en remarquant que la somme des premiers membres est le produit de $1/\rho$ par la différentielle totale de la pression qui, ici, ne dépend que de x, y, z, puisqu'en statique le temps n'intervient pas.

Nous obtenons :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} dp = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz} \qquad [III.1.3]$$

C'est *l'équation fondamentale* de la statique des fluides.

Remarque sur le tenseur des contraintes en hydrostatique

Les équations générales de la statique des fluides qui ont été établies précédemment peuvent également se déduire des équations générales d'équilibre de la théorie de l'élasticité en considérant que les cissions ou contraintes tangentielles sont nulles :

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

et que les contraintes normales de compression sont égales à $-p$ dans toutes les directions, soit

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

Le *tenseur des contraintes* s'écrit alors

$$\bar{\bar{t}} = \begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}$$

C'est donc un tenseur isotrope ou sphérique

L'ellipsoïde des contraintes se réduit à une sphère de rayon p et le *cercle de Mohr* à un point M de l'axe des contraintes normales σ d'abscisse $-p$ (fig. III.1.2)

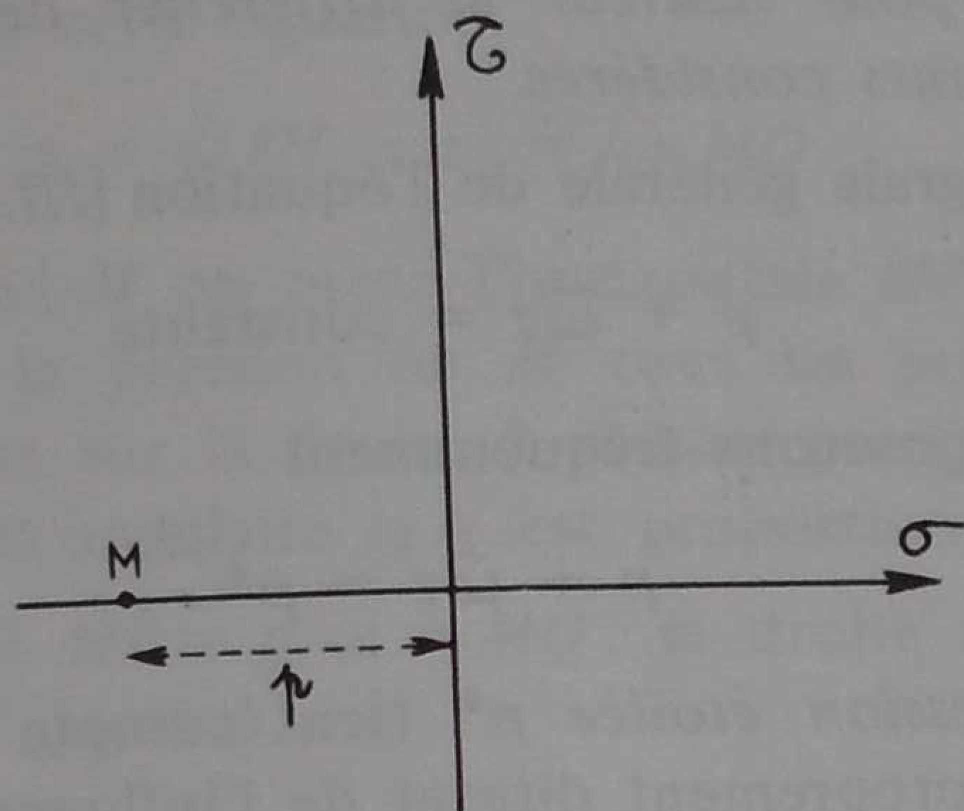


Fig. III.1.2

III.2. FONCTION DE FORCES, SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

L'équation fondamentale [*III.1.3*] s'écrit également

$$\frac{1}{\rho}\,dp = \vec{F}\,\vec{ds}$$

en désignant par $\vec{ds}$ le déplacement élémentaire de composantes dx, dy, dz.

Pour un liquide supposé incompressible, $\rho = C^{te}$ donc

$$\vec{F}\,\vec{ds} = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = dU$$

avec

$$U = \frac{p}{\rho} + C^{te}$$

d'où

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\;U$$

Dans le cas d'un liquide incompressible, l'*équilibre n'est donc possible que si le champ de forces extérieures dérive d'un potentiel* $\Phi = -U$. U est la *fonction de forces.*

Il en résulte les propriétés classiques des fonctions de forces. En particulier, les *surfaces équipotentielles* qu'on appelle également ici les *surfaces de niveau,* sont caractérisées par $U = C^{te}$ ou $p = C^{te}$.

Ce sont donc des surfaces d'égale pression et leur équation différentielle sera

$$dp = 0$$

ou

$$\boxed{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0} \qquad [III.2]$$

Il en résulte également que la résultante des forces extérieures $\vec{F}$ par unité de masse en un point quelconque de la masse fluide est normale à la surface de niveau passant par ce point et dirigée du côté de cette surface où la pression augmente.

Les lignes de force du champ sont ici les lignes de pression ; elles sont normales aux surfaces de niveau.

III.3. APPLICATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES AU CAS D'UN FLUIDE SOUMIS A LA SEULE ACTION DE LA PESANTEUR

Orientons le trièdre trirectangle $OXYZ$ de manière que OZ soit vertical et positif vers le haut.

Nous avons dans ce cas :

$$X = 0 \quad ; \quad Y = 0 \quad ; \quad Z = -g$$

et

$$U = -gz$$

Les équations précédentes deviennent alors :

1) Equation fondamentale [*III.1.3*] :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = -g\,dz$$

ou :

$$dp + \rho g\,dz = 0$$

ou enfin, si $\bar{\omega}$ est le poids volumique du fluide :

$$\boxed{dp + \bar{\omega}\,dz = 0} \qquad [III.3.1]$$

2) Equation des surfaces de niveau [*III.2*] :

$$-g\,dz = 0$$

$$dz = 0$$

$$\boxed{z = constante}$$

Dans un fluide pesant, les surfaces de niveau sont horizontales, résultat qu'on pouvait déduire directement de la propriété d'une surface de niveau d'être normale à la résultante des forces exterieures (ici la pesanteur qui est verticale). La surface libre qui est une surface de niveau particulière

$$(p = p_a = C^{te})$$

est donc horizontale.

L'équation [*III.3.1*] permet de déterminer p en fonction de z si on connait le poids volumique $\bar{\omega}$.

Il faut donc lui adjoindre une équation donnant la variation de ρ ou de $\bar{\omega}$ en fonction des différents éléments dont ce paramètre peut dépendre.

Cette équation varie avec chaque fluide, aussi l'appelle-t-on *équation caractéristique du fluide* ou *équation complémentaire.*

Nous considérerons successivement les deux cas suivants :

– Fluide incompressible
– Fluide élastique

III.3.1. Fluide incompressible

C'est le cas du liquide supposé incompressible. L'équation caractéristique s'écrit alors simplement :

$$\rho = C^{te}$$

ou

$$\bar{\omega} = C^{te}$$

Si on voulait tenir compte de la compressibilité du liquide, on introduirait sa compressibilité volumique K (cf. § II.1) et on écrirait :

$$\frac{dp}{d\rho/\rho} = K$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K}$$

dont l'intégration conduirait à

$$\rho = Ae^{p/K}$$

Revenant au liquide supposé incompressible, l'équation [*III.3.1*], intégrée entre deux points de cotes z_0 et z_1 et de pressions p_0 et p_1, donne :

$$p_1 - p_0 = - \bar{\omega}\,(z_1 - z_0) \qquad [III.3.2]$$

La différence de pression entre deux points d'une masse liquide au repos est égale au poids d'une colonne du liquide ayant pour base l'unité de section et pour hauteur la différence de niveau des deux points considérés.

L'intégrale générale de l'équation [*III.3.1*] s'écrit :

$$p + \bar{\omega}z = \text{constante}$$

Nous poserons fréquemment

$$p + \bar{\omega}z = p^*$$

La *pression étoilée* p^* tient compte ainsi de la pression proprement dite et de l'influence du poids du liquide.

La relation précédente peut également s'écrire :

$$\boxed{z + \frac{p}{\bar{\omega}} = \frac{p^*}{\bar{\omega}} = H = \text{constante}} \qquad [III.3.3]$$

La grandeur $p/\bar{\omega}$, homogène à une longueur, est la *hauteur représentative de la pression* au point considéré.

La grandeur

$$z + \frac{p}{\bar{\omega}} = \frac{p^*}{\bar{\omega}} = H,$$

également homogène à une longueur, est la *hauteur piézométrique* au point considéré

Si en chaque point tel que M de la masse liquide (fig. III.3.1) on mène une verticale MQ de longueur égale à $p/\bar{\omega}$, tous les points tels que Q se trouvent dans un même plan horizontal qui est le *plan de charge hydrostatique.*

Si $N'N$ est la surface libre du liquide, le plan de charge se trouve au-dessus de la surface libre à une distance $p_a/\bar{\omega}$, p_a étant la pression atmosphérique, et en chaque point de profondeur h, on a :

$$\frac{p}{\bar{\omega}} = h + \frac{p_a}{\bar{\omega}}$$

$$\boxed{p = p_a + \bar{\omega}h} \qquad [III.3.4]$$

Soit $x'x$ la trace sur le plan de la figure du plan horizontal de référence. Sa distance au plan de charge hydrostatique est $p^*/\bar{\omega} = H$ puisque

$$z + \frac{p}{\bar{\omega}} = \frac{p^*}{\bar{\omega}} = H$$

On tire de cette équation :

$$p = \bar{\omega}(H - z) = \bar{\omega}\, MQ$$

Si donc en M on mène l'horizontale MP proportionnelle à la pression en M tous les points tels que P seront sur la droite Δ passant par Q et dont le coefficient angulaire $tg\,\alpha$ est proportionnel à $\bar{\omega}$.

Si on fait $MP = p/\bar{\omega} = MQ$, la droite Δ est inclinée à 45°, soit Δ'.

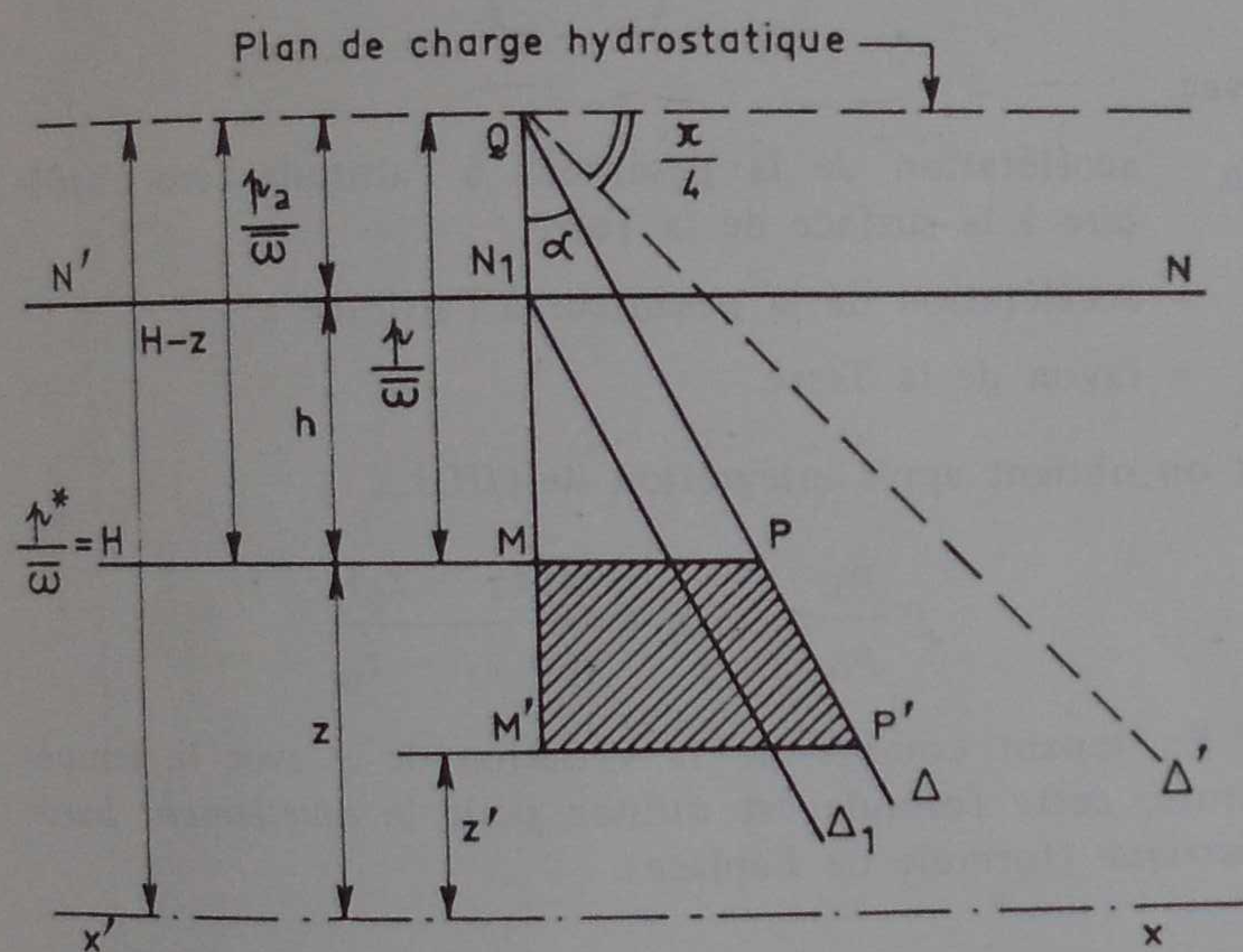


Fig. III.3.1

Si on néglige la pression atmosphérique, le plan de charge passe par la surface libre ; la droite Δ devient Δ_1 passant par N_1 et l'on a :

$$\boxed{p = \bar{\omega} h} \qquad [III.3.5]$$

Cette pression p mesurée au-dessus de la pression atmosphérique, s'appelle la *pression effective.*

Soit M' le point de cote z' sur la verticale passant par M.

La pression totale qui s'exerce par unité de largeur sur la surface verticale MM' est :

$$P = \int_{z'}^{z} p\, dz$$

soit :

$$P = \int_{z'}^{z} \bar{\omega}(H - z)\, dz$$

$$P = \bar{\omega}\left[H(z - z') - \frac{z^2 - z'^2}{2}\right]$$

C'est la surface du trapèze $MPM'P'$ (résultat qui concorde avec celui que nous donnerons au § III.7.1.1 dans le cas général d'une paroi plane de forme quelconque).

Si la masse liquide est constituée par *plusieurs liquides de densités différentes,* ces liquides se superposent par ordre de densité croissante, les surfaces de niveau, toujours perpendiculaires à la direction de la pesanteur, sont horizontales.

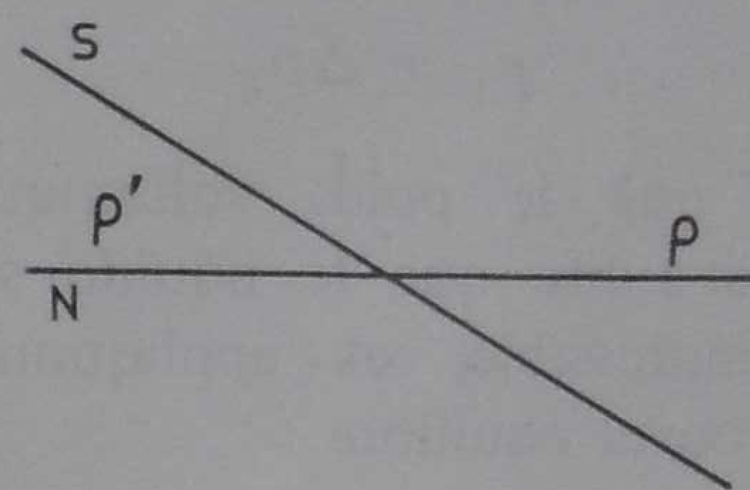


Fig. III.3.2

Les *surfaces de séparation* des différents liquides sont également horizontales (fig. III.3.2) ; en effet, s'il en était autrement, une surface de niveau N couperait une surface séparative S et le poids volumique variant à une même profondeur, la pression varierait le long d'une surface de de niveau, ce qui est impossible.

Pour chaque couche, les raisonnements précédents s'appliquent.

On a donc, dans le cas de la figure III.3.3 :

$$p_0 = \bar{\omega}_0 h_0$$

$$p_1 - p_0 = \bar{\omega}_1 h_1$$

$$p - p_1 = \bar{\omega}_2 h_2$$

et, en additionnant membre à membre :

$$p = \bar{\omega}_0 h_0 + \bar{\omega}_1 h_1 + \bar{\omega}_2 h_2$$

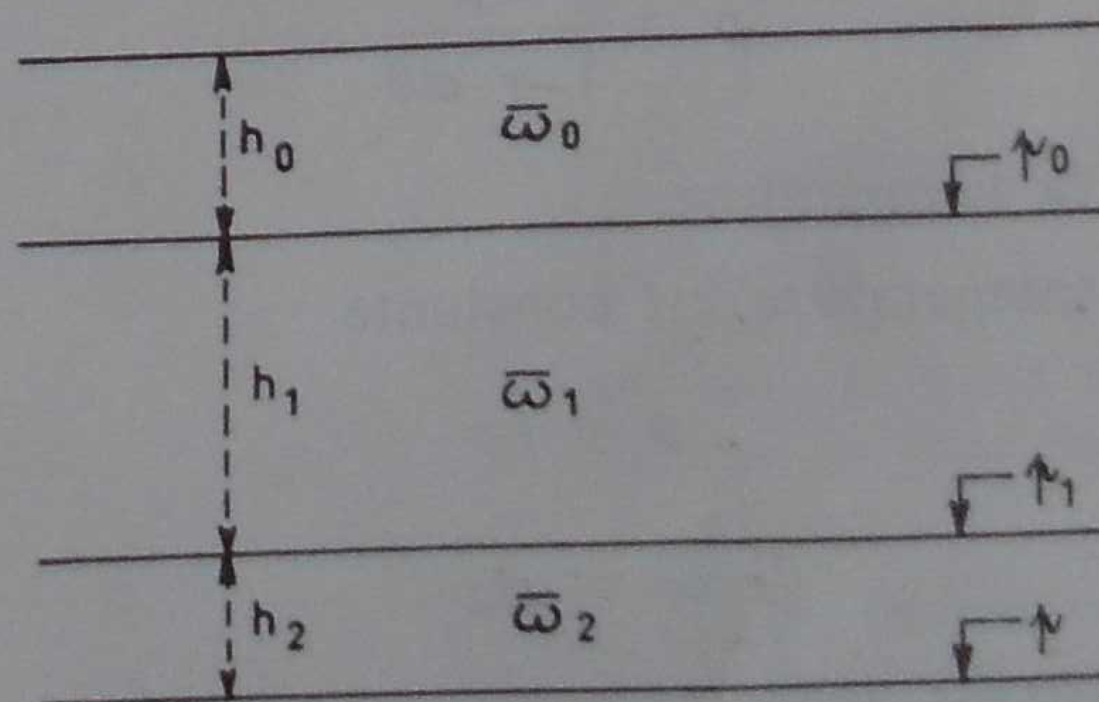


Fig. III.3.3

Principe de Pascal :

Reprenons l'équation [III.3.2]

$$p_1 - p_0 = - \bar{\omega} (z_1 - z_0)$$

Supposons que, par un procédé quelconque mais sans troubler l'équilibre du liquide, on puisse faire varier la pression p_0 en M_0 qui deviendra

$$p_0 + \Delta p_0$$

En M_1 la pression deviendra

$$p_1 + \Delta p_1$$

Supposons que le poids volumique soit resté constant, c'est-à-dire que le liquide soit rigoureusement incompressible, et appliquons l'équation [*III.3.2*] au nouvel équilibre :

$$(p_1 + \Delta p_1) - (p_0 + \Delta p_0) = - \bar{\omega} (z_1 - z_0) \qquad [III.3.6]$$

En comparant [*III.3.2*] et [*III.3.6*], il vient :

$$\Delta p_1 = \Delta p_0$$

d'où l'énoncé du *principe de Pascal* :

Dans un liquide en équilibre, les variations de pression se transmettent intégralement en tous les points de la masse liquide.

Application : presse hydraulique, transmission hydraulique.

Pour les fortes pressions, on doit faire intervenir la compressibilité du liquide.

III.3.2. Fluide élastique

Son équation caractéristique est :

$$\rho = \frac{k'p}{1 + \alpha\theta}$$

θ étant la température.

Si la température est constante :

$$\rho = kp$$

ou :

$$\bar{\omega} = gkp$$

En portant dans l'équation générale [*III.3.1*] :

$$dp + \bar{\omega}\, dz = 0 \qquad [III.3.1]$$

il vient :

$$\frac{dp}{p} = - gkz \qquad [III.3.2.1]$$

Intégrons entre les altitudes z_0 et z_1, où les pressions sont p_0 et p_1 et supposons g constant :

$$\mathcal{L} \frac{p_1}{p_0} = - gk (z_1 - z_0)$$

On a le signe moins, puisque z est mesuré positivement vers le haut.

Si on veut tenir compte des *variations de g avec l'altitude*, on écrit

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R}{R + z}\right)^2$$

avec

g_0 = accélération de la pesanteur à l'altitude zéro c'est-à-dire à la surface de la Terre,

g = accélération de la pesanteur à l'altitude z,

R = rayon de la Terre.

et on obtient après intégration de [*III.3.2.1*] :

$$\mathcal{L} \frac{p_1}{p_0} = - g_0\, k \frac{R(z_1 - z_0)}{R + z_1 - z_0}$$

En tenant compte de la variation de ρ avec la température, cette formule est utilisée pour le *nivellement barométrique* (formule de Laplace).

III.4. CAS PARTICULIERS D'ÉQUILIBRE D'UN LIQUIDE

III.4.1. Liquide pesant tournant autour d'un axe vertical

Supposons une masse liquide tournant en bloc d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical que nous prenons pour axe OZ (fig. III.4.1).

On peut considérer, par exemple, le liquide contenu dans un réservoir cylindrique d'axe vertical OZ ; les axes OX et OY sont dans le plan du fond du réservoir ; en négligeant le déplacement horizontal du réservoir ; en négligeant le déplacement relatif du liquide par rapport au réservoir, on peut supposer que le réservoir et le liquide tournent autour de OZ avec la vitesse angulaire ω.

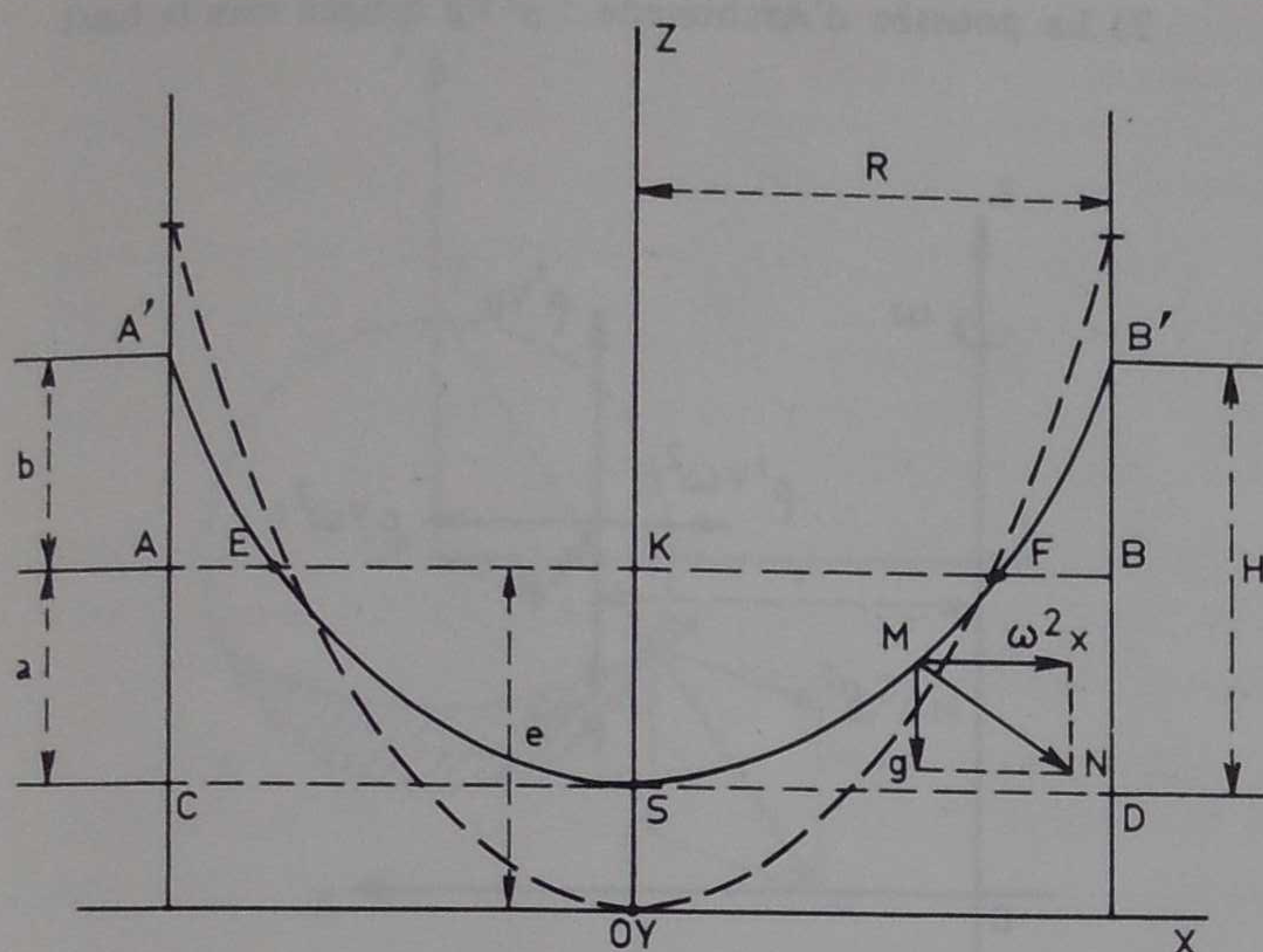


Fig. III.4.1 – Liquide pesant tournant en bloc autour d'un axe vertical

Cherchons les équations de l'*équilibre relatif* de la masse liquide par rapport au réservoir, c'est-à-dire par rapport aux axes $OXYZ$. Soit M un point de la masse liquide dans le plan XOZ ; étudions les conditions d'équilibre dans ce plan.

Les forces extérieures agissantes sont le poids et la force centrifuge qui, ramenées à l'unité de masse, ont respectivement pour valeur :

$$-g \quad \text{et} \quad \omega^2 x$$

Appliquons l'équation générale [*III.1.3*] :

$$\frac{1}{\rho}\, dp = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz \qquad [III.1.3]$$

Elle devient ici :

$$dp = \rho\,(\omega^2 x\, dx - g\, dz)$$

Les *surfaces de niveau* ($dp = 0$) ont donc pour traces, dans le plan XOZ, les courbes représentées par l'équation différentielle :

$$\omega^2 x\, dx - g\, dz = 0$$

dont l'intégrale générale s'écrit :

$$\omega^2 \frac{x^2}{2} - gz = c^{te} \qquad [III.4.1]$$

Ce sont des paraboles d'axe OZ.

Les surfaces de niveau et notamment la surface libre sont des *paraboloïdes de révolution* d'axe OZ.

En chaque point, elles sont perpendiculaires à la résultante :

$$N = \sqrt{\omega^4 x^2 + g^2}$$

donc :

$$N > g$$

la différence étant d'autant plus grande que la vitesse angulaire est plus grande ; on séparera donc plus facilement les liquides de densités peu différentes en les faisant tourner (centrifugation) qu'en les laissant au repos.

Reprenons l'équation [*III.4.1*] et choisissons l'origine 0 des axes au point S, sommet de la parabole ; l'équation devient :

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} - gz = 0$$

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

V étant la vitesse circonférencielle du point considéré.

Nous définirons plus tard l'expression $V^2/2g$ comme la hauteur représentative de la vitesse V (c'est en effet la hauteur de laquelle devrait tomber la molécule liquide pour acquérir, en chute libre dans le vide, la vitesse V).

Donc, l'ordonnée z d'un point quelconque M de la surface libre rapportée au plan horizontal passant par le sommet du paraboloïde, est égale à :

$$h = \frac{V^2}{2g}$$

hauteur représentative de la vitesse circonférencielle en ce point.

A la paroi du réservoir, on a :

$$V = \omega R$$

et

$$z = H = \frac{V^2}{2g} = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \qquad [III.4.2]$$

Soit AB le niveau du plan d'eau au repos et $A'ESFB'$ l'intersection de la surface libre et du plan XOZ pendant la rotation considérée.

Désignons par a l'abaissement du sommet S du paraboloïde et par b le relèvement de sa section d'intersection avec les parois cylindriques du réservoir, par rapport au niveau initial AB.

Au repos, le volume cylindrique $A'CDB'$ comprend :

– un volume d'eau $\pi R^2 a$

– un volume d'air $\pi R^2 b$

A l'état de mouvement, le volume d'air est devenu une calotte de paraboloïde $A'ESFB'$, de hauteur H et de rayon R, soit la moitié du volume du cylindre de même base et de même hauteur, c'est-à-dire :

$$\pi R^2 \frac{H}{2} = \pi R^2 \frac{a+b}{2}$$

Comme le volume d'eau n'a pas varié, le volume d'air n'a pas varié non plus, d'où :

$$\pi R^2 b = \pi R^2 \frac{a+b}{2}$$

$$b = \frac{a+b}{2}$$

$$a = b$$

Cherchons la valeur ω_1 de ω pour laquelle le sommet S du paraboloïde soit au fond du réservoir, c'est-à-dire en 0.

Soit $e = OK$ la hauteur d'eau dans le réservoir au repos (fonction du volume d'eau et des dimensions du réservoir).

Compte tenu de la propriété démontrée précédemment, la condition cherchée nécessite :

$$z = H = 2e$$

En remplaçant dans l'équation [*III.4.2*], il vient :

$$2e = \frac{V^2}{2g} = \frac{\omega_1^2 R^2}{2g}$$

$$\omega_1^2 = \frac{4ge}{R^2}$$

$$\omega_1 = \frac{2\sqrt{ge}}{R}$$

Si $\omega > \omega_1$ le fond s'assèche suivant un cercle de centre O et de rayon r qui croît avec ω et dont on peut calculer la valeur en fonction de ω, e et R.

Application à la centrifugation :

Désignons par ρ' la masse volumique du liquide contenu dans le réservoir et par ρ la masse volumique d'une particule de volume V immergée dans le liquide et placée à la distance r de l'axe OZ (fig. III.4.2).

Au cours de la rotation considérée de vitesse angulaire ω autour de OZ, la particule est soumise aux forces suivantes :

a) Dans la direction verticale :

1) Le poids de la particule : $-\rho V g$ dirigé vers le bas

2) La poussée d'Archimède : $\rho' V g$ dirigée vers le haut.

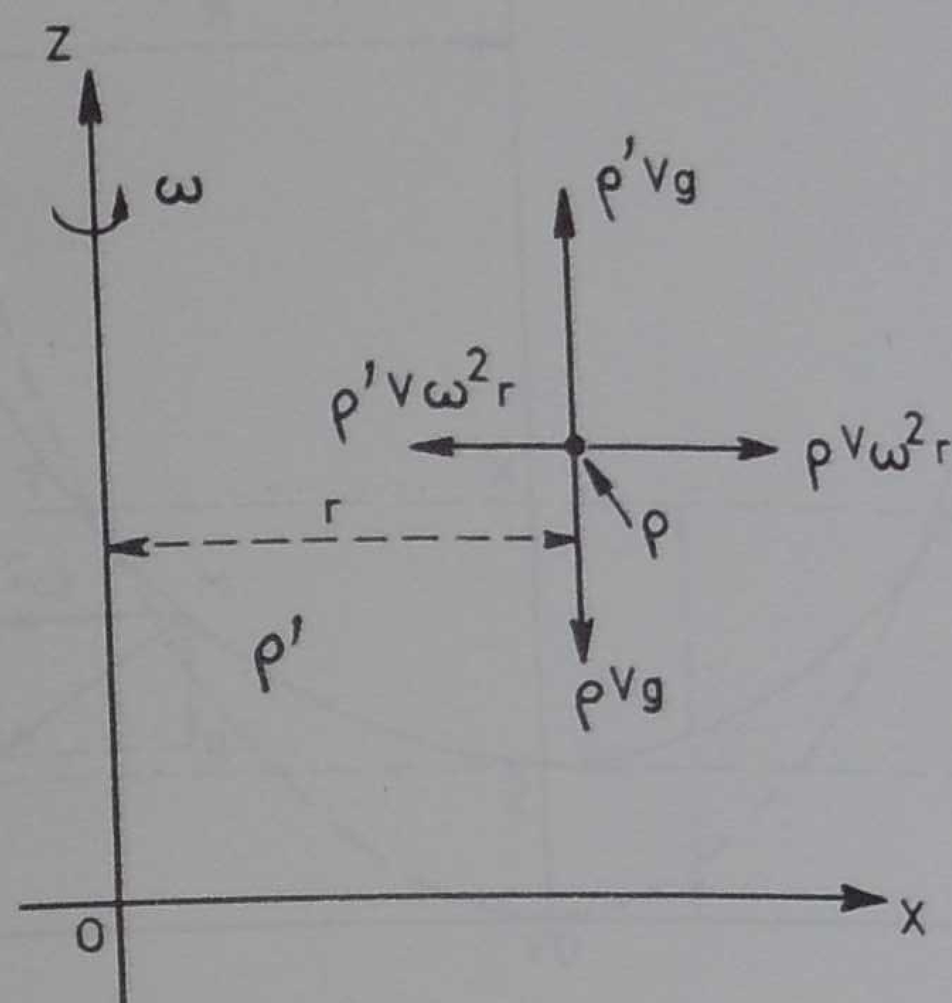


Fig. III.4.2

La résultante est donc $F_v = (\rho' - \rho) V g$ dirigée vers le haut.

b) Dans la direction horizontale, suivant le même raisonnement :

1) La force d'inertie centrifuge positive dans la direction OX et égale à $\rho V \omega^2 r$

2) Une force de poussée due au liquide entourant la particule ; de même nature physique que la poussée d'Archimède, elle est égale et de signe contraire à la force d'inertie centrifuge qui serait appliquée au volume de liquide déplacé et a donc pour valeur $-\rho' V \omega^2 r$.

La résultante dans la direction de OX est donc

$$F_h = (\rho - \rho') V \omega^2 r$$

Des expressions de F_v et F_h on peut déduire les conclusions suivantes :

Si $\rho < \rho'$ (particule moins dense que le liquide) :

F_v est positif et F_h est négatif ; la particule se déplace donc vers le haut et vers le centre du réservoir (cas des écrémeuses).

Si $\rho > \rho'$ (particule plus dense que le liquide) :

F_v est négatif et F_h est positif ; la particule se déplace donc vers le bas et vers la périphérie du réservoir (cas des épurateurs cyclones ou centrifuges).

III.4.2. Liquide pesant tournant autour d'un axe horizontal

Soit OY l'axe de rotation (fig. III.4.3). Cherchons les conditions d'équilibre du point M de masse unité dans le plan XOZ.

Les forces extérieures sont encore :

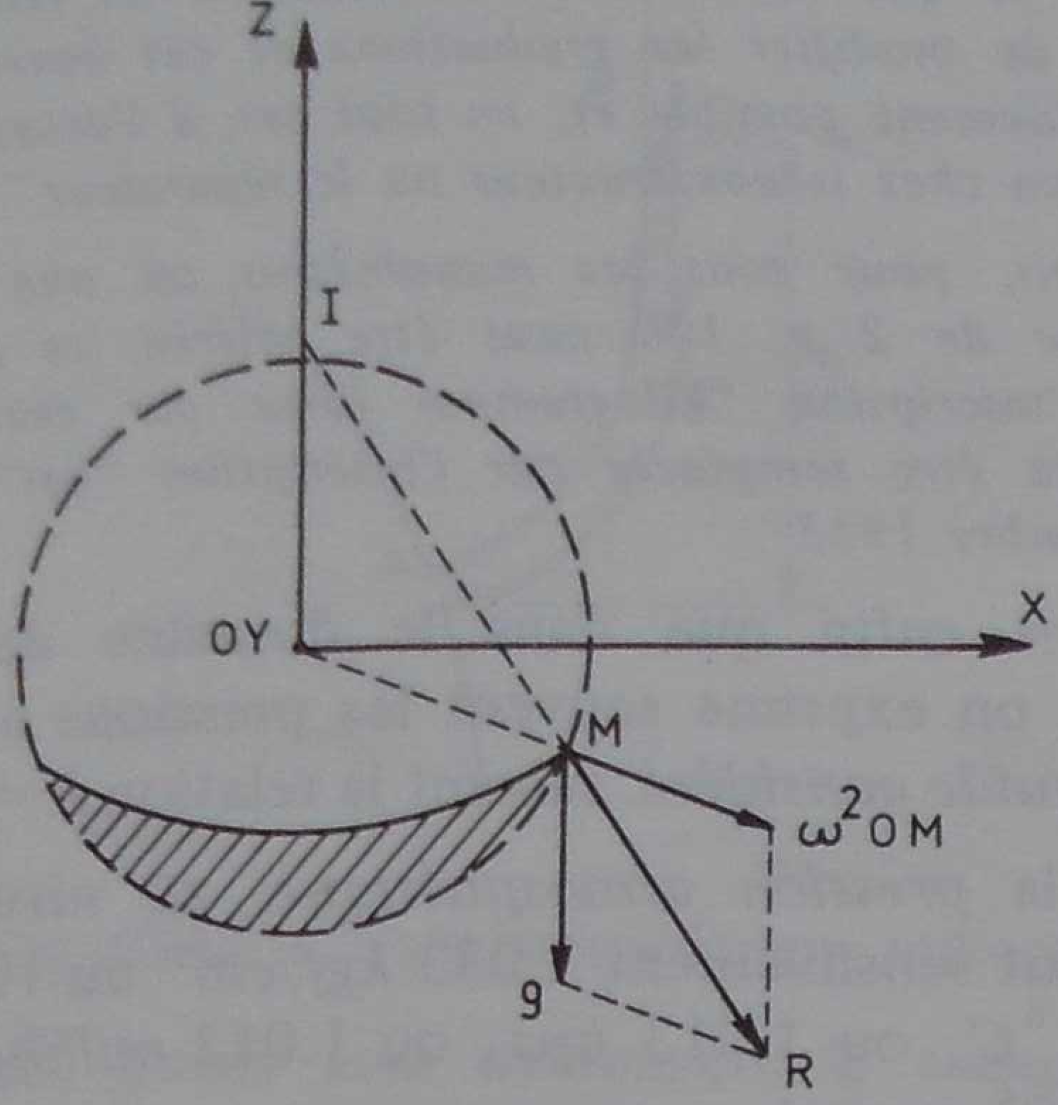


Fig. III.4.3 – (ω petit)

$$- g \quad \text{et} \quad \omega^2 OM.$$

La résultante R coupe OZ en I. Or :

$$\frac{OI}{g} = \frac{OM}{\omega^2 OM} = \frac{1}{\omega^2}$$

$$OI = \frac{g}{\omega^2} = C^{te}$$

Les surfaces de niveau, toujours perpendiculaires à R, sont des cylindres à génératrices horizontales, parallèles à OY et dont les directrices sont des cercles de centre I.

La distance OI étant inversement proportionnelle au carré de la vitesse de rotation, lorsque cette vitesse devient très grande, I se rapproche de O,

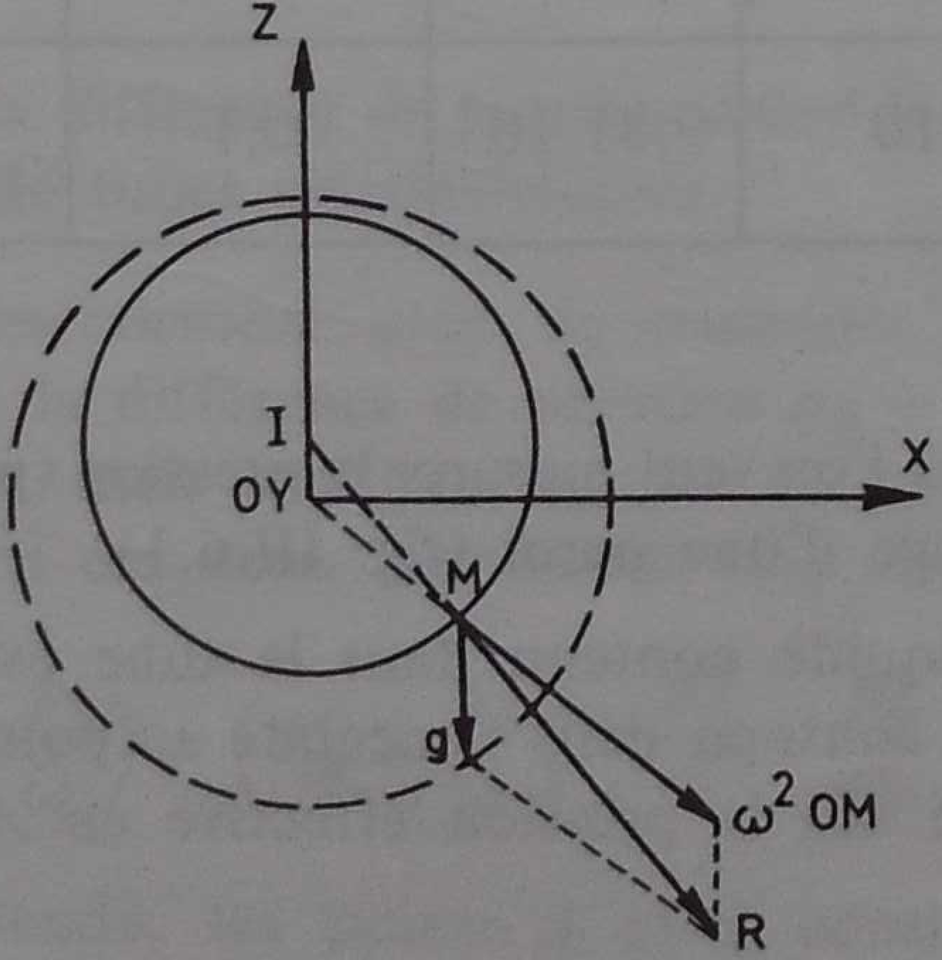


Fig. III.4.4 – (ω grand)

la force centrifuge prenant une importance de plus en plus grande par rapport au poids (fig. III.4.4).

C'est le principe du barattage et de la fabrication des canalisations de fonte par centrifugation.

En réalité, en raison de l'action de la pesanteur, on ne peut admettre ici que le liquide reste immobile par rapport au réservoir puisque, dans le cas de la figure III.4.3 par exemple, le volume de liquide correspondant à la surface hachurée ne tourne pas autour de OY. Il y a donc obligatoirement déplacement relatif du liquide par rapport au réservoir et les résultats obtenus ne traduisent qu'approximativement la réalité.

III.5. UNITÉS DE PRESSION

Une pression est homogène au quotient d'une force par une surface. Son équation aux dimensions est donc :

$$\frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}\,T^{-2}$$

Dans le système CGS les pressions sont donc évaluées en dyne par cm^2 ; cette unité porte le nom de *barye*.

Dans le système MTS les pressions sont évaluées en sthène par m^2 ; cette unité porte le nom de *pièze* dont le multiple le plus souvent utilisé est l'*hectopièze* ou *bar*.

Dans le système MKS les pressions sont évaluées en *kgf par m^2* ; on utilise plutôt le *kgf/cm^2*.

Enfin dans le *système international (S.I.)* obligatoire en France depuis le 1er Janvier 1962, les pressions sont évaluées en newton par m^2 ou *pascal*. Cette unité qui est égale à 0,102 10^{-4} *kgf/cm^2* (pour g = 9,81 *m/s/s*) soit sensiblement 10^{-5} *kgf/cm^2*, est beaucoup trop petite pour les besoins ordinaires de l'hydraulique. C'est la raison pour laquelle la circulaire du 29 Décembre 1961 relative à l'application du décret du 3 Mai 1961 concernant les unités de mesure, a prévu les *dispositions particulières* suivantes dans le domaine des pressions :

"a – *Le pascal étant une unité trop petite pour les besoins de la pratique des appareils à pression, on utilisera, à compter du 1er Janvier 1962, le* bar *et l'*hectobar *là où on utilisait l'hectopièze et la myriapièze. Les unités étant identiques, il n'y aura pas de changement des valeurs numériques.*

"Partout où elle est gravée ou inscrite en relief, la marque "hpz" sera conservée jusqu'à la destruction de l'appareil. Là où elle est peinte, elle sera conservée jusqu'à la prochaine réfection des inscriptions".

"Pour ne pas alourdir les inscriptions réglementaires, notamment dans le cas où elles sont poinçonnées, le mot "bar" sera considéré comme un symbole et restera invariable. Dans les textes, il prendra au contraire la marque du pluriel dans les conditions habituelles".

"b – *En application du paragraphe II "Dispositions communes" et dans les conditions de délai fixées au dit paragraphe, l'emploi du kilogramme force par millimètre carré ou du kilogramme force par centimètre carré restera toléré à titre transitoire".*

La circulaire précise, plus loin, les dispositions suivantes dans le domaine des *instruments de mesure :*

"a – *Les instruments de mesure livrés à compter du 1er Janvier 1962 devront, dans la mesure du possible, être gradués en unités légales. Pour les instruments livrés après le 31 Décembre 1963, la graduation en unités légales sera seule admise".*

"b – *En ce qui concerne les instruments en service, il conviendra de modifier les graduations de ces instruments le plus rapidement possible et, en tout cas, à l'occasion de toute révision chez le constructeur ou le réparateur".*

"Toutefois, pour tous les manomètres où une erreur systématique de 2 p. 100 peut être tolérée, ce qui est fréquent, l'inscription "kilogramme force par centimètre carré" devra être remplacée par l'inscription "bar" avant le 31 Décembre 1963".

Ajoutons enfin que dans le domaine de l'hydraulique, on exprime souvent les pressions en *hauteur du liquide considéré*, suivant la relation $h = p/\bar{\omega}$.

Ainsi, la *pression atmosphérique*, au niveau de la mer, vaut sensiblement 1,033 kgf/cm^2 ou 10,33 *m* d'eau à 4 °*C*, ou 1,013 *hpz*, ou 1.013 *millibars*, ou $1{,}013 \times 10^5$ *pascals.*

Le tableau ci-après donne la *correspondance des différentes unités de pression* (pour $g = 9{,}81\ m/s/s$) :

Une unité ci-dessous ↓ vaut →	CGS	MTS		MKS	SI	Unités usuelles en hydraulique	
	Barye $dyne/cm^2$	*Pièze* sn/m^2	*Hectopièze* ou *Bar*	kgf/m^2	*Pascal* N/m^2	kgf/cm^2	*m* d'eau (à 4 °C)
Barye $(dyne/cm^2)$	1	10^{-4}	10^{-6}	0,0102	0,1	$1{,}02.10^{-6}$	$1{,}02.10^{-5}$
Pièze (sn/m^2)	10^4	1	10^{-2}	102	10^3	$1{,}02.10^{-2}$	0,102
Hectopièze ou *Bar*	10^6	10^2	1	$1{,}02.10^4$	10^5	1,02	10,2
kgf/m^2	98,1	$9{,}81.10^{-3}$	$9{,}81.10^{-5}$	1	9,81	10^{-4}	10^{-3}
Pascal (N/m^2)	10	10^{-3}	10^{-5}	0,102	1	$1{,}02.10^{-5}$	$1{,}02.10^{-4}$
Unités usuelles en hydraulique: kgf/cm^2	$9{,}81.10^5$	98,1	0,98	10^4	$9{,}81.10^4$	1	10
Unités usuelles en hydraulique: *m d'eau à 4 °C*	$9{,}81.10^4$	9,81	$9{,}81.10^{-2}$	10^3	$9{,}81.10^3$	0,1	1

III.6. MESURE DES PRESSIONS

On utilise des *manomètres* dont le plus simple est le *tube piézométrique ordinaire* (généralement vertical) dont l'extrémité inférieure est placée au point *A* où l'on veut mesurer la pression (par exemple au voisinage d'une paroi (fig. III.6.1).

Si le liquide contenu dans le tube est le même que celui contenu dans l'enceinte au point *A* (poids volumique $\bar{\omega}$) la pression effective en *A* est égale à $\bar{\omega} h$.

Ce résultat n'est valable que si les points *A* et *M* appartiennent à la même masse liquide ; s'il y avait des bulles

Fig. III.6.1 – Tube piézométrique ordinaire

d'air assez grosses pour interrompre la colonne liquide entre A et M (en particulier dans le tube de communication entre A et le tube piézométrique proprement dit) les résultats pourraient être complètement faussées. Il est donc indispensable de purger soigneusement les tubes de l'air qu'ils peuvent renfermer.

Manomètres inclinés

Lorsque h est très petit, on peut augmenter la précision de la mesure en utilisant un tube incliné sur l'horizontale d'un angle α nettement plus petit que 90° (fig. III.6.2). On substitue ainsi au déplacement vertical h un déplacement, le long du tube, égal à $h/\sin\alpha$ d'autant plus grand que α est plus petit.

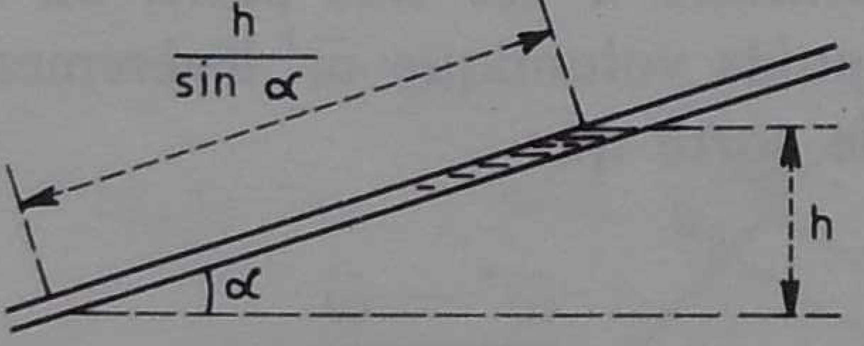


Fig. III.6.2 – Manomètre à tube incliné

Mesure de la différence de pression entre deux points au moyen de tubes piézométriques

Il est généralement utile de connaître, non pas simplement la différence de pression $p_A - p_B$ entre deux points, mais la *différence des hauteurs piézométriques* en ces deux points, soit (fig. III.6.3) :

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\overline{\omega}}\right) - \left(Z_B + \frac{p_B}{\overline{\omega}}\right) = \frac{p_A^*}{\overline{\omega}} - \frac{p_B^*}{\overline{\omega}} = h$$

Bien entendu, les points A et B considérés appartiennent alors à une masse liquide en mouvement, par exemple un liquide s'écoulant dans une canalisation (cas de la figure III.6.3). Si le liquide était au repos entre A et B, on aurait évidemment $h = 0$ (loi de l'hydrostatique).

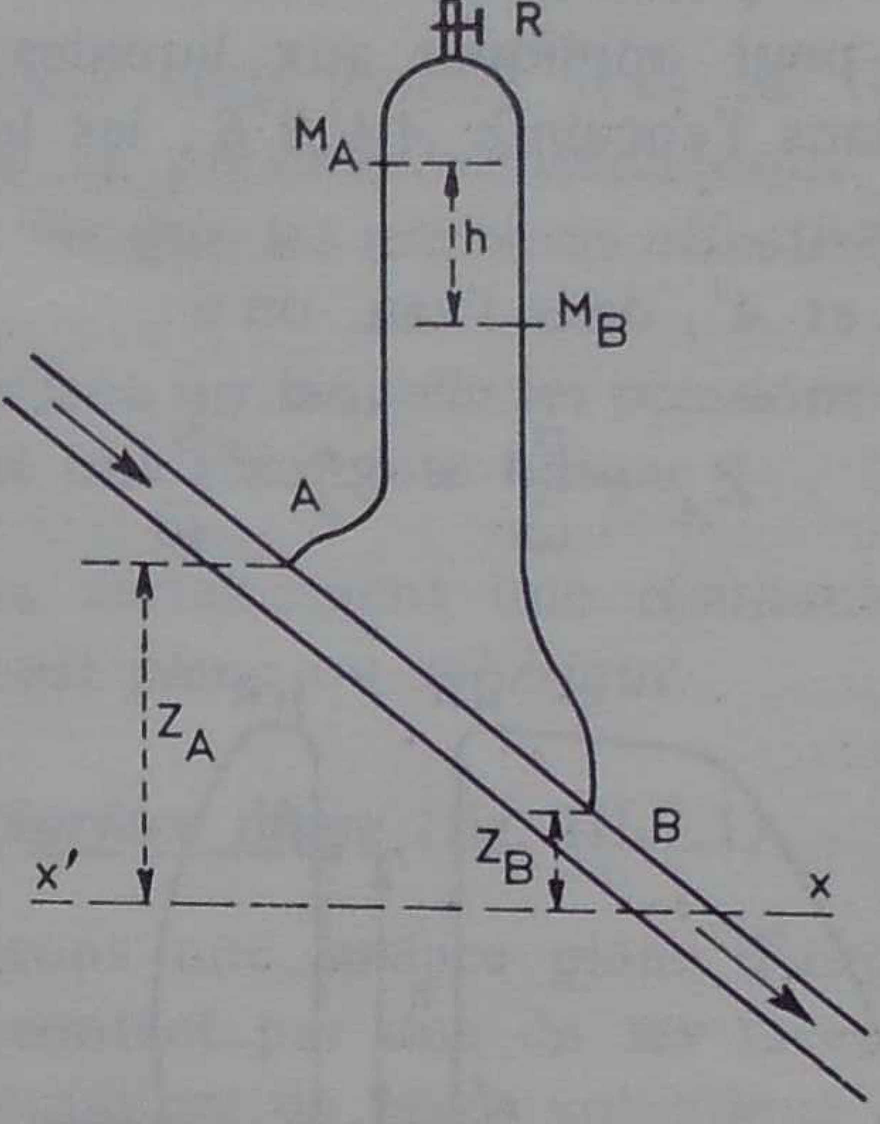


Fig. III.6.3

Pour mesurer h, on peut utiliser des tubes piézométriques ordinaires placés en A et B mais souvent les pressions p_A et p_B sont telles que les tubes devraient être trop longs ; par ailleurs, le procédé ne pourrait pas convenir si l'une des deux pressions était inférieure à la pression atmosphérique.

On réunit alors les deux tubes à leur extrémité supérieure et un robinet R permet la mise en communication des deux tubes avec une machine susceptible de comprimer ou de raréfier l'air situé en haut des tubes. On abaisse ou on élève ainsi les niveaux M_A et M_B de quantités égales dans chaque tube, de façon que ces niveaux apparaissent dans la partie visible des tubes, ce qui permet la mesure de h qui correspond simplement à la différence des cotes des niveaux M_A et M_B.

Manomètre différentiel à deux liquides (fig. III.6.4)

Lorsque h est très grand ou très petit, on utilise un manomètre différentiel à deux liquides constitué par un tube en U en verre dans lequel on place une quantité convenable d'un liquide de poids volumique $\overline{\omega}'$ différent du poids volumique $\overline{\omega}$ de l'eau et non miscible avec elle.

Les extrémités supérieures de l'U sont réunies aux points A et B par des tubes de communication que l'on purge soigneusement de toute trace

d'air, comme le manomètre lui-même (on dispose généralement à cet effet, des robinets R et R' à l'extrémité supérieure des branches de l'U).

Lorsque l'équilibre des niveaux A' et B' est établi, on peut appliquer aux liquides immobiles contenus dans l'enceinte $AA'B'B$, les lois de l'hydrostatique.

Entre A et A', dans l'eau, on a :

$$Z_A + \frac{p_A}{\bar{\omega}} = Z'_A + \frac{p'_A}{\bar{\omega}} \qquad [III.6.1]$$

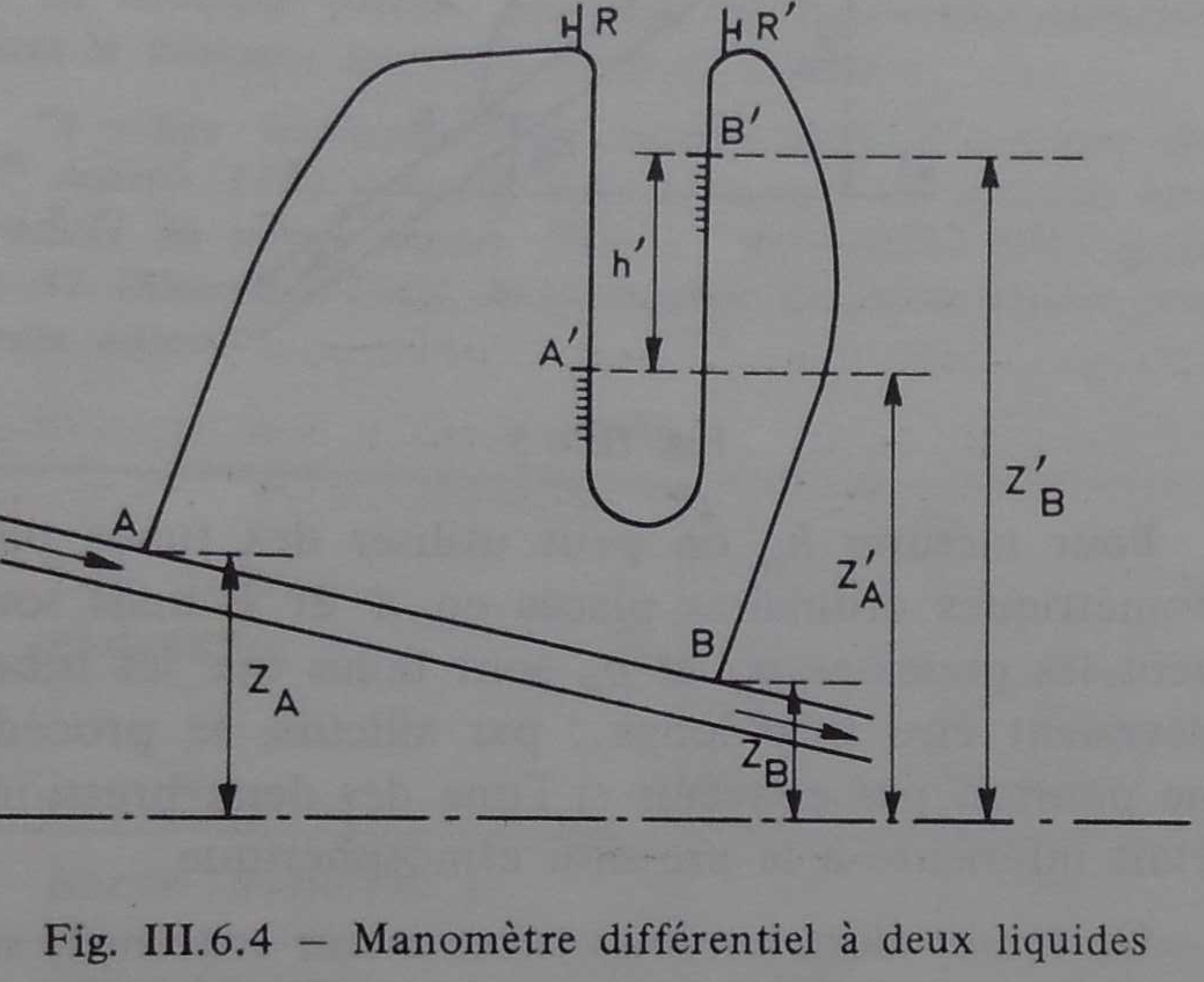


Fig. III.6.4 – Manomètre différentiel à deux liquides

Entre B et B', dans l'eau, on a :

$$Z_B + \frac{p_B}{\bar{\omega}} = Z'_B + \frac{p'_B}{\bar{\omega}} \qquad [III.6.2]$$

Entre A' et B', dans le liquide de poids volumique $\bar{\omega}'$, on a :

$$Z'_B + \frac{p'_B}{\bar{\omega}'} = Z'_A + \frac{p'_A}{\bar{\omega}'} \qquad [III.6.3]$$

En retranchant membre à membre [*III.6.1*] et [*III.6.2*], il vient :

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\bar{\omega}}\right) - \left(Z_B + \frac{p_B}{\bar{\omega}}\right) = \frac{p'_A - p'_B}{\bar{\omega}} + Z'_A - Z'_B \qquad [III.6.4]$$

De [*III.6.3*] on tire :

$$p'_A - p'_B = \bar{\omega}'(Z'_B - Z'_A)$$

En remplaçant dans [*III.6.4*] :

$$\left(Z_A + \frac{p_A}{\bar{\omega}}\right) - \left(Z_B + \frac{p_B}{\bar{\omega}}\right) = (Z'_B - Z'_A)\,\frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} + Z'_A - Z'_B$$

$$h = \left(\frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} - 1\right)(Z'_B - Z'_A)$$

La différence des hauteurs piézométriques en A et B a donc, en définitive, pour valeur, en hauteur d'eau :

$$\boxed{h = \frac{\bar{\omega}' - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}\, h'}$$

Si h est très grand (une dizaine de mètres d'eau par exemple) on utilisera, dans le manomètre, un liquide de poids volumique $\bar{\omega}'$ très supérieur à $\bar{\omega}$, par exemple du mercure ($\bar{\omega}' = 13{,}6\ kgf/dm^3$). On aura donc :

$$h = 12{,}6\ h'$$

h' sera 12,6 fois plus petit que h, donc facilement mesurable.

Si au contraire h est très petit, on utilisera un liquide de poids volumique $\bar{\omega}'$ légèrement supérieur à $\bar{\omega}$ de telle sorte que

$$\frac{\bar{\omega}' - \bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

soit une petite fraction de l'unité et h' sera donc très supérieur à h, ce qui améliore la précision relative de la mesure. On utilise ainsi parfois comme liquide auxiliaire $\bar{\omega}'$ le nitrobenzène, le chloroforme ou le tétrachlorure de carbone coloré à l'iodine ($\bar{\omega}' = 1{,}59\ kgf/dm^3$).

Il convient de choisir le liquide du manomètre de façon à obtenir une surface de séparation constituant un ménisque clair et net ; enfin rappelons la nécessité d'utiliser des tubes suffisamment gros (diamètre intérieur de l'ordre de 10 *mm*) pour éviter l'influence de la tension superficielle ; la lecture sur le tube doit correspondre au plan horizontal tangent à la base du ménisque.

Manomètres métalliques

Ces appareils sont utilisés pour la mesure de pressions assez élevées. Leur précision est nettement moins bonne que celle des manomètres à liquide. Par ailleurs, on doit vérifier souvent les caractéristiques de ces manomètres ent les étalonnant périodiquement à l'aide d'une presse à étalonner.

III.7. PRESSION EXERCÉE PAR UN LIQUIDE AU REPOS SUR UNE SURFACE SOLIDE EN CONTACT AVEC LUI

La pression totale sur un élément de la surface étant normale à cet élément, si la surface est quelconque, les pressions élémentaires n'ont pas obligatoirement une résultante unique.

Nous envisagerons donc deux cas :

III.7.1 – La surface est telle qu'il *y a obligatoirement une résultante unique* ;

III.7.2 – La surface est *quelconque.*

Dans toute cette étude, nous ne tiendrons pas compte de la pression atmosphérique et nous ne considérerons que les pressions effectives.

III.7.1. Surface sur laquelle les pressions élémentaires ont une résultante unique

On aura certainement une résultante unique si la surface est *plane* ou *sphérique.*

III.7.1.1. *Surface plane* (fig. III.7.1)

Considérons une surface plane d'aire Ω entièrement en contact par une de ses faces avec un liquide en équilibre de poids volumique $\bar{\omega}$.

Le plan de Ω coupe la surface libre du liquide suivant une droite que nous choisirons comme axe OX.

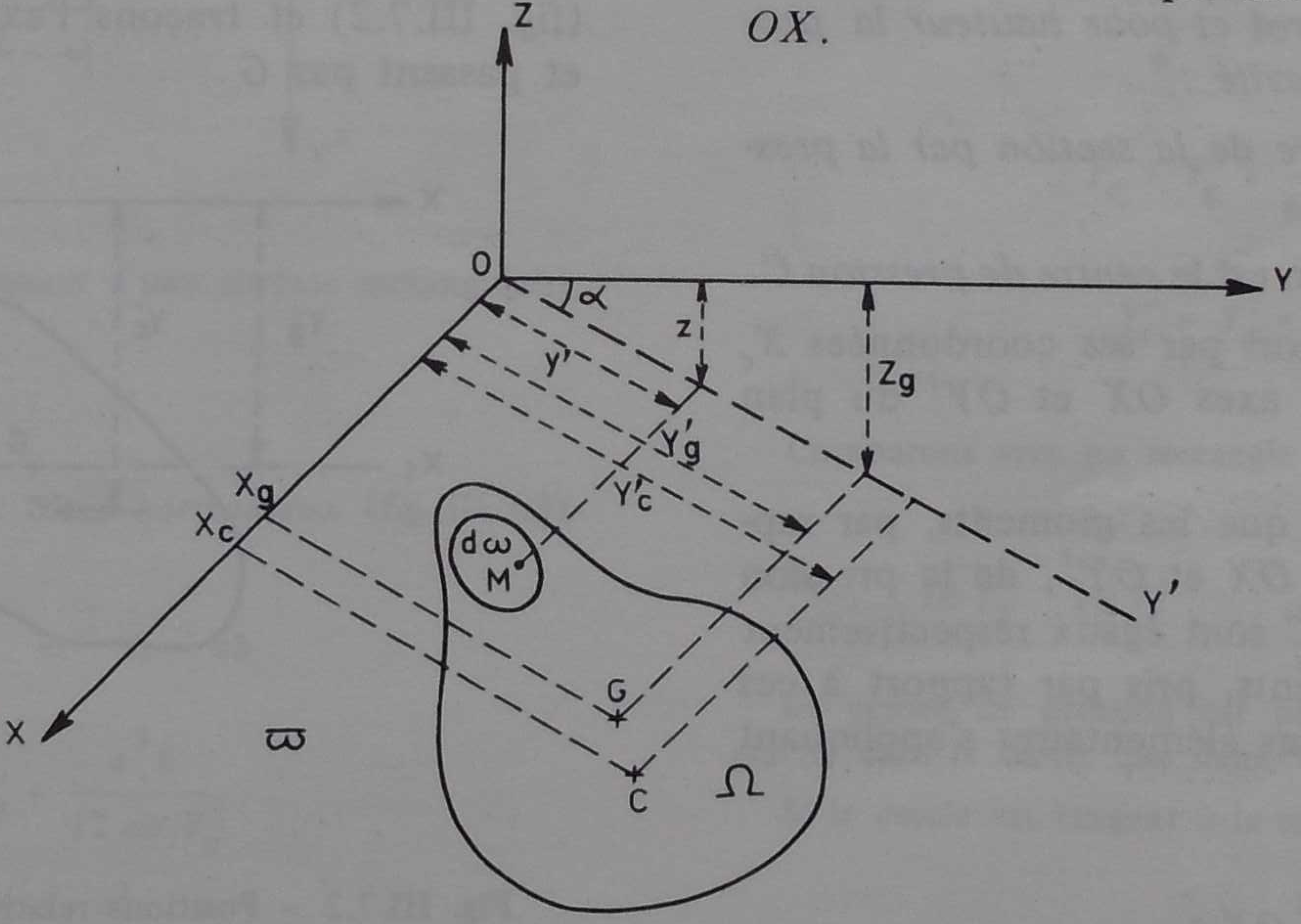


Fig. III.7.1 – Pression sur une surface plane

Dans le plan de la surface libre, traçons OY perpendiculaire à OX ; menons OZ perpendiculaire au plan de la surface libre. Le plan de Ω coupe le plan YOZ suivant la droite OY'.

Soit un point M quelconque de la paroi, de coordonnées x, y, z.

La pression effective au point M a pour expression :

$$p = \bar{\omega} z$$

Sur l'élément de surface $d\omega$ contenant le point M, la pression élémentaire est :

$$dp = \bar{\omega} z \, d\omega$$

Sur tous les éléments de surface $d\omega$ constituant la surface Ω, les pressions dp sont normales à

Ω, c'est-à-dire parallèles et leur somme constitue la *pression totale* sur la paroi, soit :

$$P = \int_\Omega \bar{\omega} z \, d\omega = \bar{\omega} \int_\Omega z \, d\omega$$

Soit G le centre de gravité de Ω et soit Z_g sa profondeur.

On sait que

$$\int_\Omega z \, d\omega = \Omega Z_g$$

(moment statique de Ω par rapport à la surface libre).

Donc :

$$\boxed{P = \bar{\omega} \Omega Z_g}$$

La pression totale sur une paroi plane immergée est égale :

a) *Au poids d'une colonne du liquide ayant pour section l'aire de la paroi et pour hauteur la profondeur du centre de gravité :*

b) *Au produit de l'aire de la section par la pression au centre de gravité.*

Son point d'application est le *centre de pression C*.

Déterminons sa position par ses coordonnées X_c et Y'_c par rapport aux axes OX et OY' du plan de Ω.

A cet effet, écrivons que les moments, par rapport à chacun des axes OX et OY', de la pression totale P appliquée en C sont égaux respectivement aux sommes des moments, pris par rapport à ces mêmes axes, des pressions élémentaires s'appliquant aux divers points de Ω

Moments par rapport à OX :

– Moment élémentaire $= \bar{\omega} z \, d\omega \, y' = \bar{\omega} y'^2 \sin\alpha \, d\omega$

– Moment de $P = PY'_c = \bar{\omega}\Omega Z_g Y'_c = \bar{\omega}\Omega Y'_g Y'_c \sin\alpha$

donc :

$$\bar{\omega}\Omega Y'_g Y'_c \sin\alpha = \int_\Omega \omega y'^2 \sin\alpha \, d\omega$$

$$\Omega Y'_g Y'_c = \int_\Omega y'^2 \, d\omega$$

$$Y'_c = \frac{\int_\Omega y'^2 \, d\omega}{\Omega Y'_g} \qquad [III.7.1]$$

Moments par rapport à OY' :

– Moment élémentaire $= \bar{\omega} z \, d\omega \, x = \bar{\omega} \, xy' \sin\alpha \, d\omega$

– Moment de $P = \bar{\omega}\Omega Z_g X_c = \bar{\omega}\Omega X_c X_g \sin\alpha$

donc :

$$\bar{\omega}\Omega X_c X_g \sin\alpha = \int_\Omega \bar{\omega} x \, y' \sin\alpha \, d\omega$$

$$\Omega X_c X_g = \int_\Omega xy' \, d\omega$$

$$X_c = \frac{\int_\Omega xy' \, d\omega}{\Omega X_g} \qquad [III.7.2]$$

Positions relatives du centre de gravité et du centre de pression :

La coordonnée Y'_c peut également s'écrire :

$$Y'_c = \frac{\int_\Omega y'^2 \, d\omega}{\Omega Y'_g} = \frac{I_x}{\Omega Y'_g}$$

en désignant par I_x le moment quadratique de la surface Ω par rapport à OX.

Représentons la surface Ω dans son plan XOY' (fig. III.7.2) et traçons l'axe $X_1 X'_1$ parallèle à OX et passant par G.

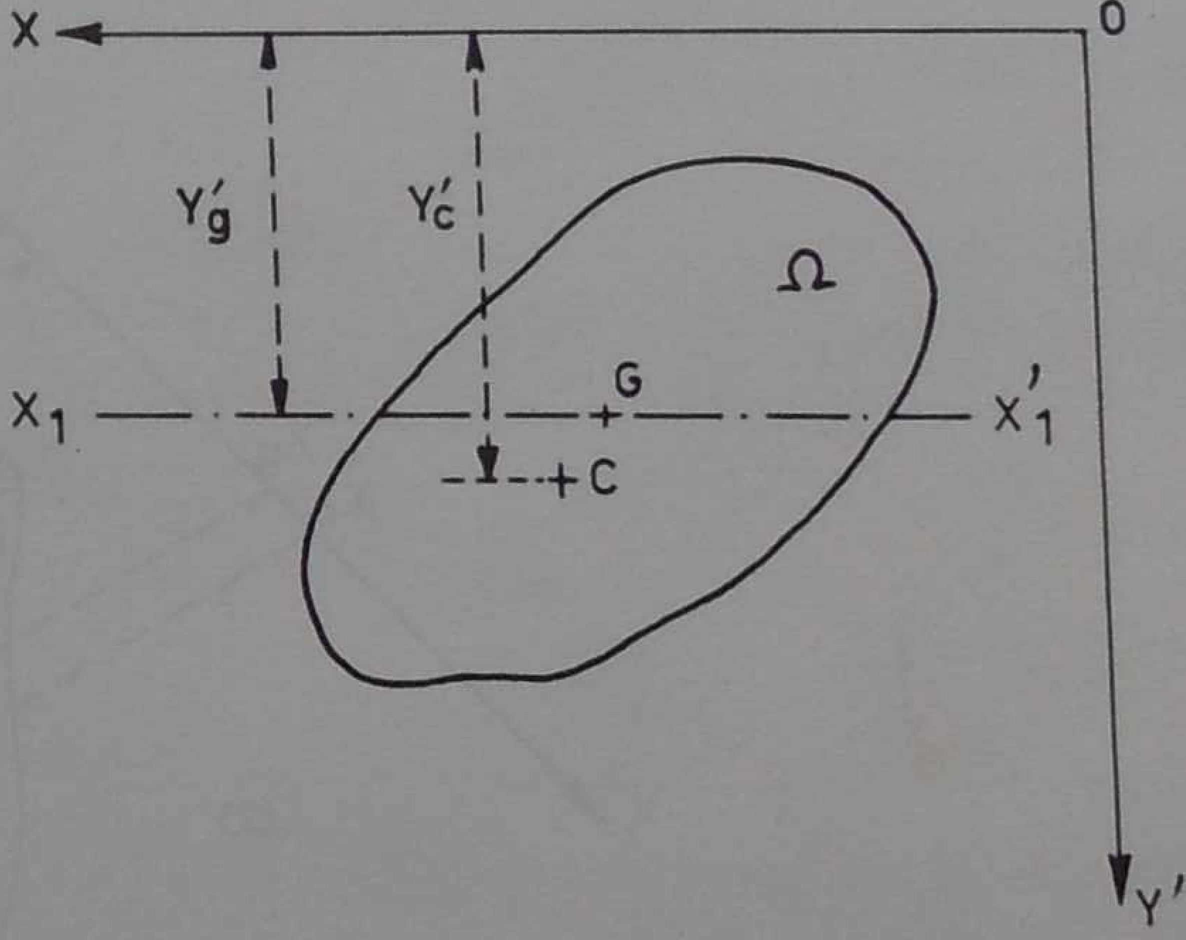


Fig. III.7.2 – Positions relatives du centre de gravité et du centre de pression d'une surface plane

Soit I_g le moment quadratique de la surface par rapport à $X_1 X'_1$.

On sait que (théorème d'Huyghens) :

$$I_x = I_g + \Omega Y'^2_g$$

Donc :

$$Y'_c = \frac{I_g + \Omega Y'^2_g}{\Omega Y'_g} = Y'_g + \frac{I_g}{\Omega Y'_g},$$

Il en résulte :

$$Y'_c > Y'_g$$

Le centre de pression est toujours au-dessous du centre de gravité.

Si la surface Ω possède un diamètre de ses cordes horizontales, le centre de pression se trouve nécessairement sur ce diamètre. Il suffit alors, pour déterminer sa position, de calculer Y'_c.

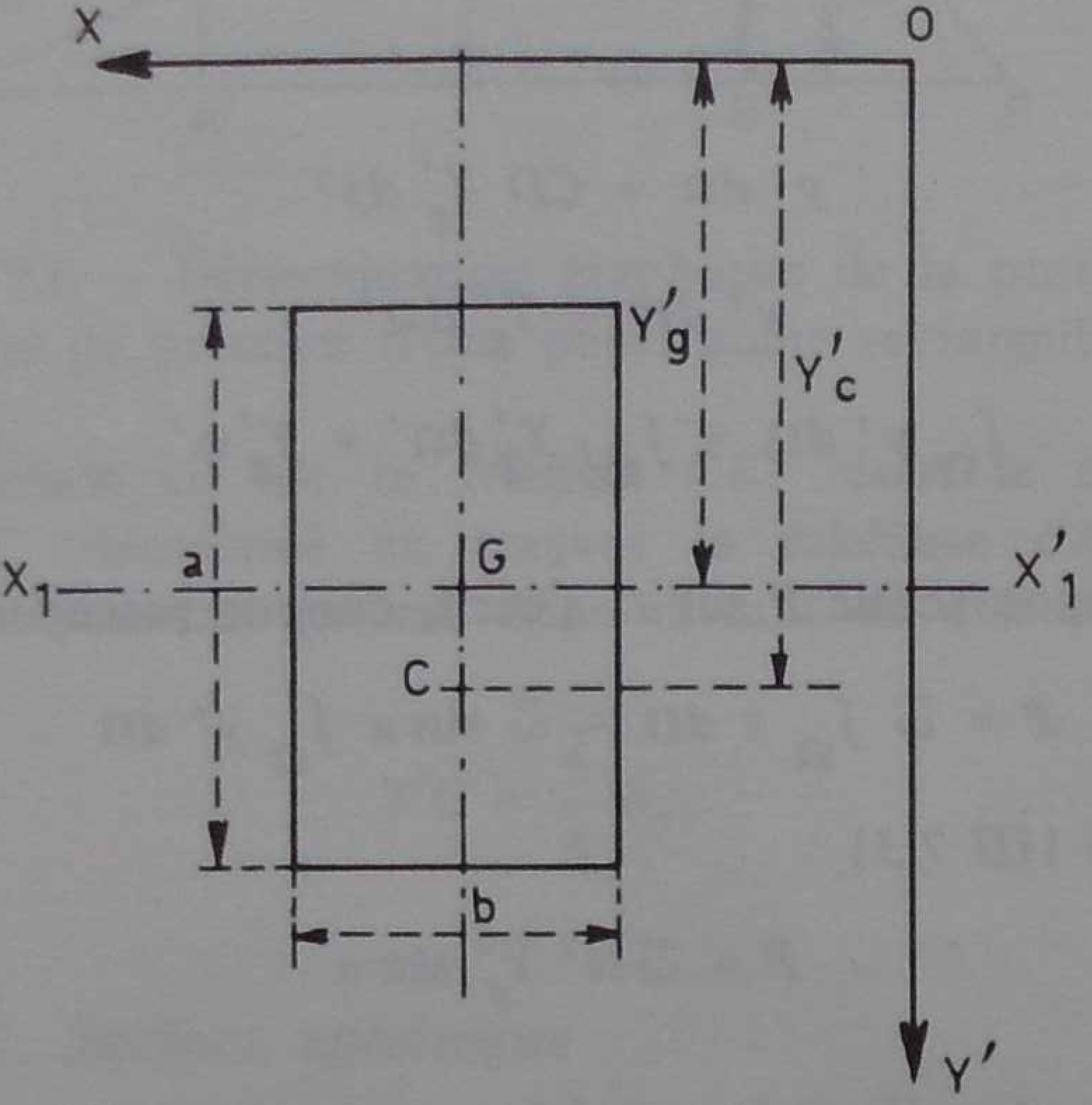


Fig. III.7.3 – Centre de pression d'une surface rectangulaire

Exemples :

1) *Rectangle ayant deux côtés horizontaux* (fig. III.7.3).

$$I_g = \frac{a^3 b}{12} \quad \text{et} \quad \Omega = ab$$

$$Y'_c = Y'_g + \frac{a^3 b}{12\, ab\, Y'_g}$$

$$Y'_c = Y'_g + \frac{a^2}{12\, Y'_g}$$

$$Y'_c - Y'_g = \frac{a^2}{12\, Y'_g}$$

La distance du centre de pression au centre de gravité est inversement proportionnelle à Y'_g, c'est-à-dire à la profondeur de la paroi.

Si le côté supérieur coïncide avec la surface libre :

$$Y'_g = \frac{a}{2}$$

$$Y'_c = \frac{a}{2} + \frac{a^2}{12\, a/2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{4\,a}{6} = \frac{2\,a}{3}$$

$$Y'_c - Y'_g = \frac{2\,a^2}{12\,a} = \frac{a}{6}$$

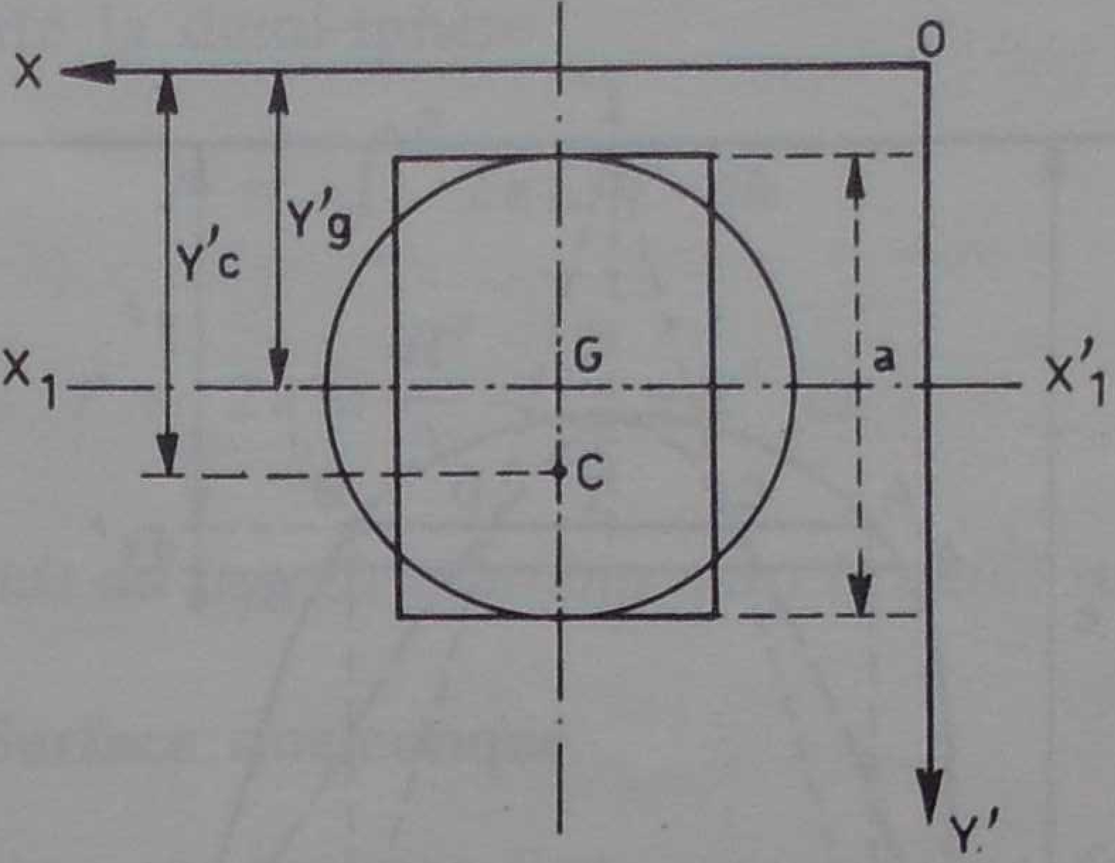


Fig. III.7.4 – Centre de pression d'une surface circulaire

2) *Cercle* (fig. III.7.4)

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{et} \quad I_g = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$Y'_c = Y'_g + \frac{\pi D^4\, 4}{64\, \pi D^2\, Y'_g}$$

$$Y'_c = Y'_g + \frac{D^2}{16\, Y'_g}$$

Comparons avec un rectangle de hauteur $a = D$:

$$\frac{D^2}{16\, Y'_g} = \frac{a^2}{16\, Y'_g} \; ; \quad \text{or} \quad \frac{a^2}{16\, Y'_g} < \frac{a^2}{12\, Y'_g}$$

Le centre de pression est plus rapproché du centre de gravité dans le cercle que dans le rectangle.

Si le cercle est tangent à la surface libre

$$Y'_g = \frac{D}{2}$$

$$Y'_c = \frac{D}{2} + \frac{D^2}{16\, D/2} = \frac{D}{2} + \frac{D}{8} = \frac{5\,D}{8}$$

Comparons avec le rectangle de hauteur a :

Pour le cercle :

$$\frac{5\,D}{8} = \frac{15\,a}{24} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{3}\,a = \frac{16\,a}{24}$$

pour le rectangle.

Détermination graphique de la position du centre de pression d'une paroi plane de forme quelconque

Si la surface plane est de forme quelconque et ne possède pas un diamètre de ses cordes horizontales, la détermination de la position du centre de pression peut être effectuée par la *méthode graphique* suivante (fig. III.7.5) :

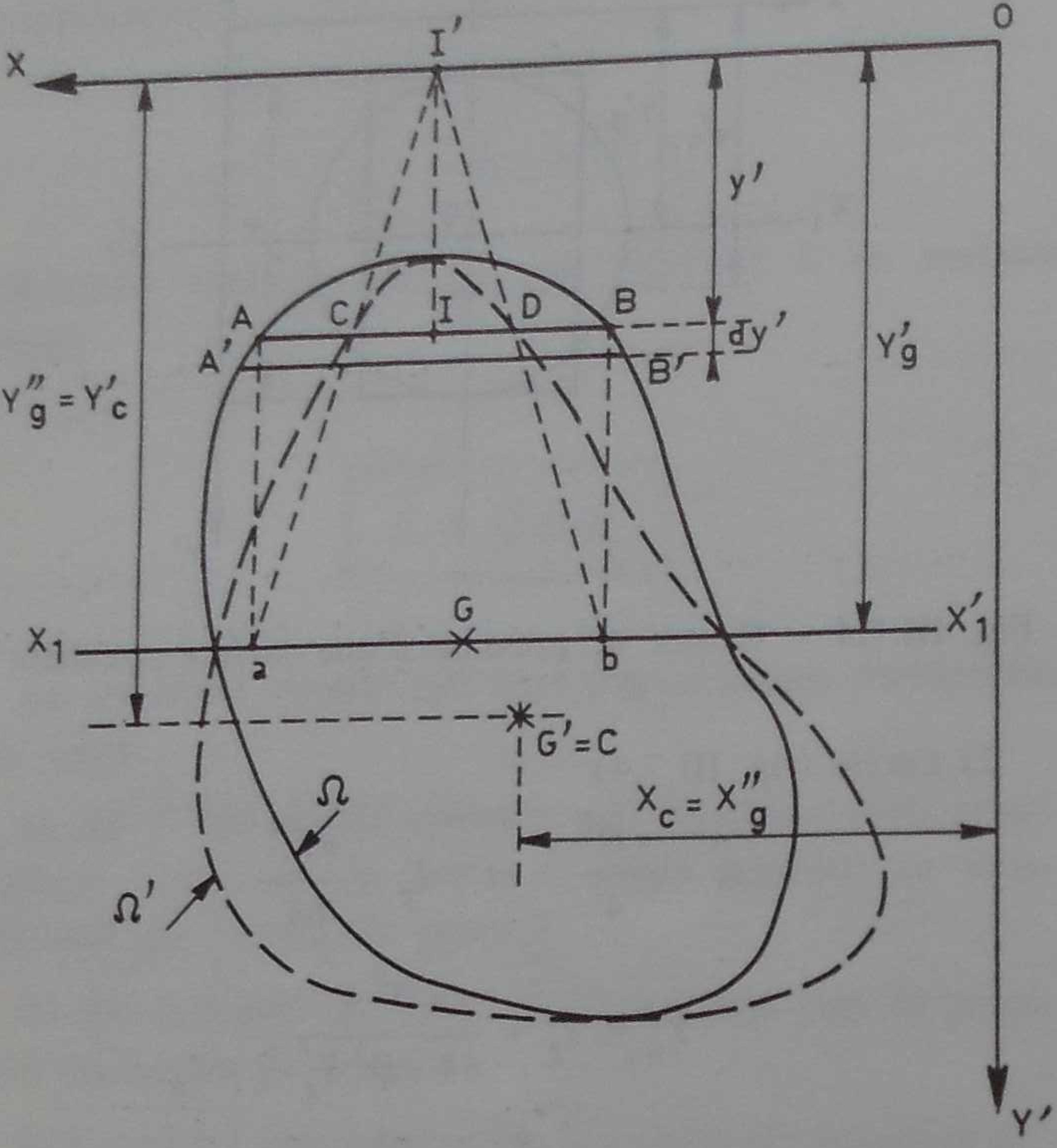


Fig. III.7.5 – Détermination graphique de la position du centre de pression d'une paroi plane de forme quelconque

Soient :

Ω la surface représentée dans son plan XOY',

$X_1 X'_1$ l'axe parallèle à OX (c'est-à-dire horizontal) passant par le centre de gravité G de la surface,

$AB\,A'B'$ une bande horizontale de la surface Ω de largeur dy' située à la distance y' de OX.

La surface $d\Omega$ de cette bande a pour expression :

$$d\Omega = AB\ dy'$$

Soit I le milieu de AB projeté en I' sur OX et soient a et b les projections respectives de A et B sur $X_1 X'_1$.

Joignons $I'a$ et $I'b$ qui coupent AB respectivement en C et D.

Les triangles semblables $I'CD$ et $I'ab$ permettent d'écrire :

$$\frac{CD}{ab} = \frac{I'I}{Y'_g}$$

ou

$$\frac{CD}{AB} = \frac{y'}{Y'_g}$$

$$AB = \frac{CD\ Y'_g}{y'}$$

et

$$d\Omega = \frac{CD\ Y'_g\ dy'}{y'}$$

ou

$$y'\ d\Omega = CD\ Y'_g\ dy'$$

Si on effectue la même construction graphique sur tous les segments horizontaux AB engendrant Ω, le segment CD engendre une surface Ω' dont le contour est tracé en pointillé sur la figure III.7.5.

Or

$$CD\ dy' = d\Omega'$$

et

$$y'\ d\Omega = CD\ Y'_g\ dy'$$

$$y'\ d\Omega = Y'_g\ d\Omega'$$

et

$$\int_\Omega y'\ d\Omega = \int_{\Omega'} Y'_g d\Omega' = Y'_g \Omega' \qquad [III.7.3]$$

La pression totale P sur Ω s'écrit, comme précédemment :

$$P = \bar{\omega} \int_\Omega z\ d\Omega = \bar{\omega} \sin\alpha \int_\Omega y'\ d\Omega$$

et, d'après [*III.7.3*] :

$$P = \bar{\omega}\,\Omega'\ Y'_g \sin\alpha$$

Les calculs effectués précédemment permettent d'écrire, en prenant les moment par rapport à OX :

$$PY'_c = \bar{\omega} \sin\alpha \int_\Omega y'^2\ d\Omega = \bar{\omega} \sin\alpha\ Y'_g \int_{\Omega'} y'\ d\Omega'$$

et

$$PY'_c = \bar{\omega}\,\Omega'\ Y'_g \sin\alpha\ Y'_c$$

d'où : $\quad \bar{\omega}\,\Omega'\ Y'_g \sin\alpha\ Y'_c = \bar{\omega} \sin\alpha\ Y'_g \int_{\Omega'} y'\ d\Omega'$

$$Y'_c = \frac{\int_{\Omega'} y'\ d\Omega'}{\Omega'}$$

Mais $\int_{\Omega'} y'\ d\Omega'$ est le moment statique de la surface Ω' par rapport à OX. Si Y''_g représente la distance à OX du centre de gravité G', de Ω', on sait que :

$$\int_{\Omega'} y'\ d\Omega' = \Omega'\ Y''_g$$

De sorte que

$$Y'_c = Y''_g$$

En prenant les moments par rapport à OY', on aurait de même :

$$X_c = X''_g$$

Ce qui montre que *le centre de pression cherché est le centre de gravité G' de la surface Ω'* ; on peut donc déterminer sa position en utilisant les méthodes classiques de détermination graphique du centre de gravité d'une surface.

Exemple : Cas d'une surface rectangulaire $AB\,A'B'$ dont un côté AB est dans la surface libre OX (fig. III.7.6).

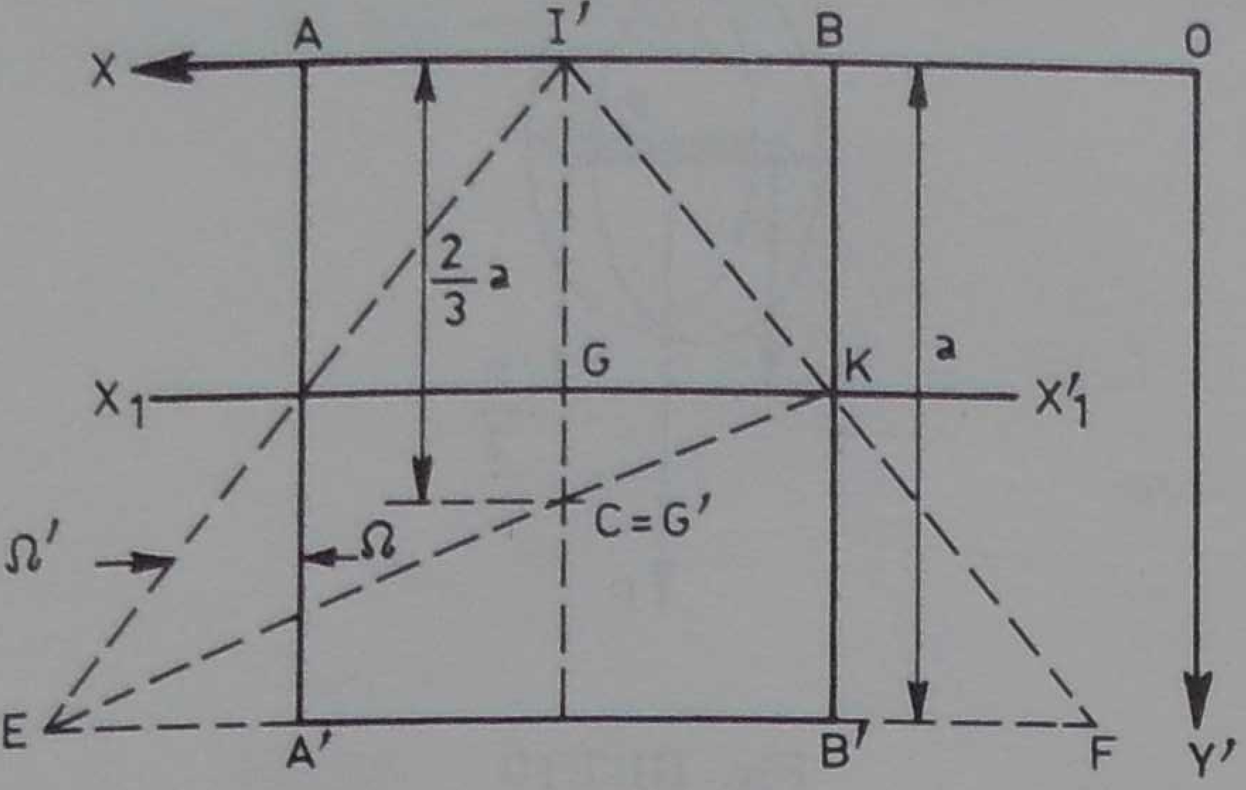


Fig. III.7.6 – Détermination graphique de la position du centre de pression d'une paroi plane rectangulaire

La surface Ω' est le triangle $I'EF$ dont le centre de gravité C (déterminé en traçant la médiane EK) est le centre de pression qui est donc distant de OX d'une longueur :

$$I'C = \frac{2}{3}\,a\,.$$

III.7.1.2. *Surface sphérique*

Considérons une demi-sphère de rayon R, pleine de liquide (fig. III.7.7).

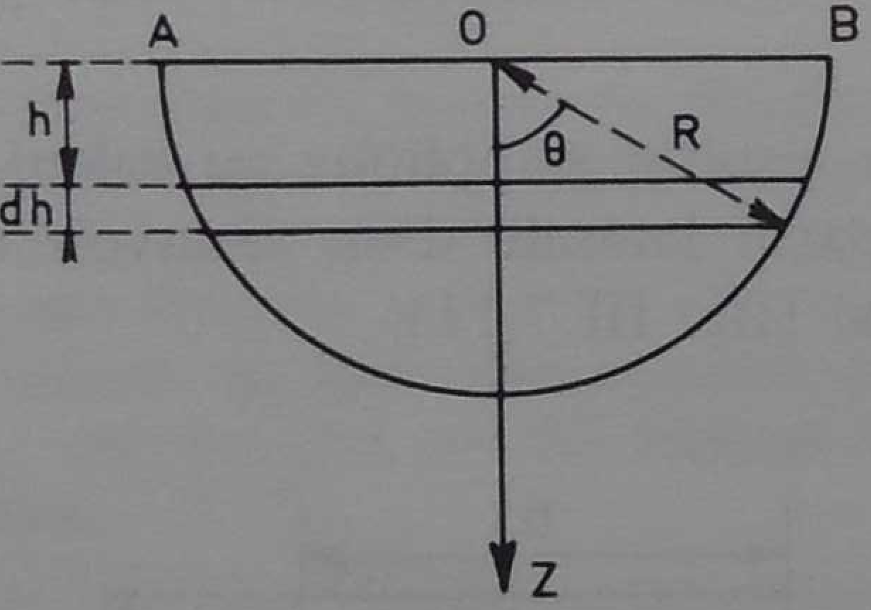


Fig. III.7.7 – Pression totale sur une paroi sphérique

AB étant horizontale, par raison de symétrie la résultante est verticale ; elle est dirigée suivant OZ supposé orienté positivement vers le bas.

Soit à la profondeur h une zone élémentaire de hauteur dh.

La surface de cette zone élémentaire est :

$$2\pi R\ dh$$

La projection sur OZ des pressions élémentaires qui s'exercent sur elle a donc pour valeur :

$$dP = 2\pi R\ dh\ \bar{\omega}\ h \cos\theta$$

Or :

$$R \cos\theta = h$$

donc :

$$dP = 2\pi\ \bar{\omega}\ h^2\ dh$$

et pour toute la demi-sphère

$$P = \int_0^R 2\pi\bar{\omega}h^2\ dh$$

$$P = 2\pi\bar{\omega}\,\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\,\pi R^3\ \bar{\omega}$$

C'est le poids du liquide contenu dans la demi-sphère.

III.7.2 – Surface quelconque

Supposons, en premier lieu, *une surface fermée soumise en chacun de ses points à une pression normale constante* p (fig. III.7.8).

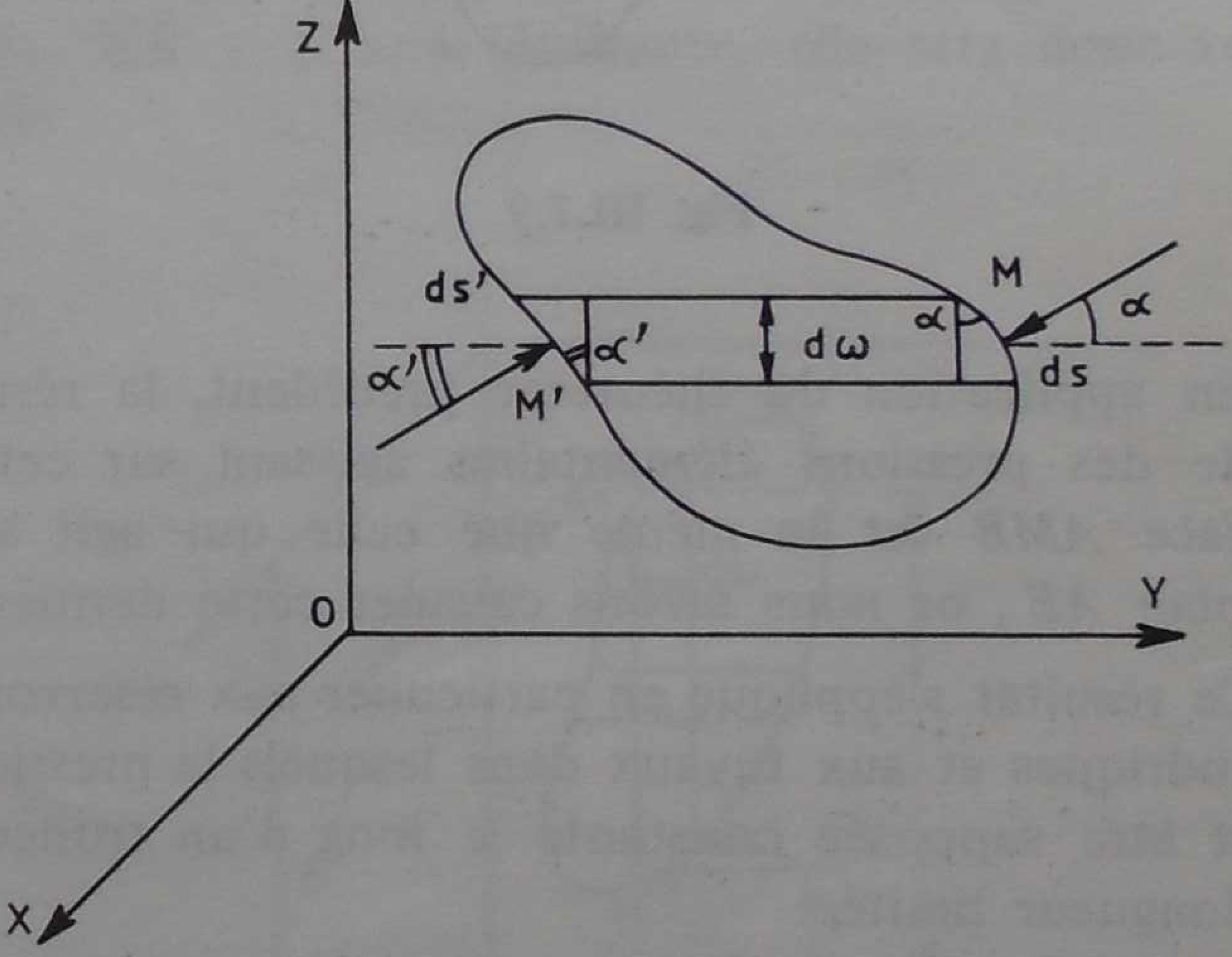


Fig. III.7.8

Rapportons-la à trois axes OX, OY, OZ et décomposons le volume délimité par la surface en prismes infiniment petits, parallèles à OY, de section droite $d\omega$. La projection sur OY de la pression agissant sur l'élément ds en M est :

$$-\,p\ ds\ \cos\alpha = -\,p\ d\omega$$

La projection sur OY de la pression agissant sur l'élément ds' en M' est :

$$p\ ds'\ \cos\alpha' = +\,p\ d\omega$$

Leur somme est nulle.

Il en est de même pour tous les petits prismes élémentaires parallèles à OY. Il en serait de même pour tous les petits prismes élémentaires parallèles à OX et à OZ, donc :

Quand une surface fermée est soumise en tous ses points à une pression normale constante, la résultante de toutes ces pressions élémentaires est nulle.

Ce théorème permet de déterminer la résultante des pressions élémentaires normales, constantes par unité de surface, agissant sur une surface irrégulière quelconque limitée à un plan.

Soit AMB la surface limitée au plan AB (fig. III.7.9).

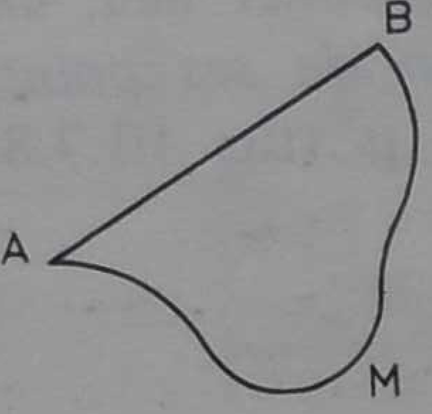


Fig. III.7.9

En application du théorème précédent, la résultante des pressions élémentaires agissant sur cette surface AMB est la même que celle qui agit sur le plan AB, or nous savons calculer cette dernière.

Ce résultat s'applique en particulier aux réservoirs cylindriques et aux tuyaux dans lesquels la pression peut être supposée constante le long d'un tronçon de longueur limitée.

Dans un anneau de longueur dl, l'effort d'arrachement qui s'exerce suivant une génératrice est égal à la moitié de la résultante de la pression agissant sur le plan diamétral (fig. III.7.10) :

$$\frac{P}{2} = \frac{pDdl}{2}$$

Si la paroi a une épaisseur e, la contrainte du matériau sera :

$$\sigma = \frac{pDdl}{2\,edl} = \frac{pD}{2e}$$

et la formule d'équarrissage impose, à la limite :

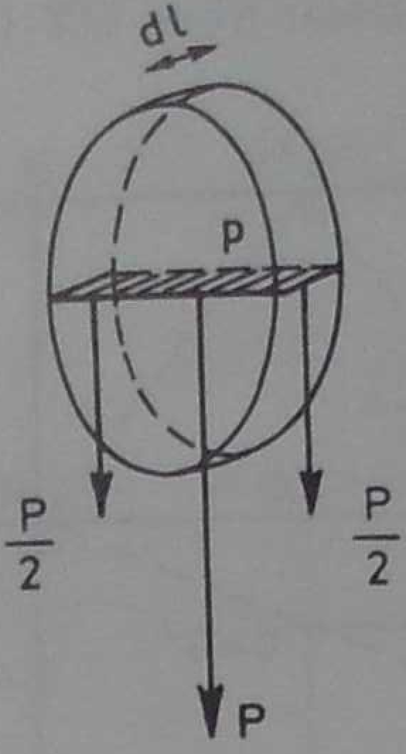


Fig. III.7.10

$$\sigma = R$$

R représentant la charge de sécurité à l'extension du matériau considéré.

Soit :

$$\frac{pD}{2e} = R$$

$e = \dfrac{pD}{2R}$ (formule dite "des chaudronniers" ou "formule du tube").

Remarquons que ce résultat est indépendant de l'orientation du plan diamétral considéré. La contrainte σ est donc constante en tout point de la paroi.

Le même résultat s'applique au calcul de l'épaisseur de la paroi latérale d'un réservoir cylindrique à axe vertical (fig. III.7.11).

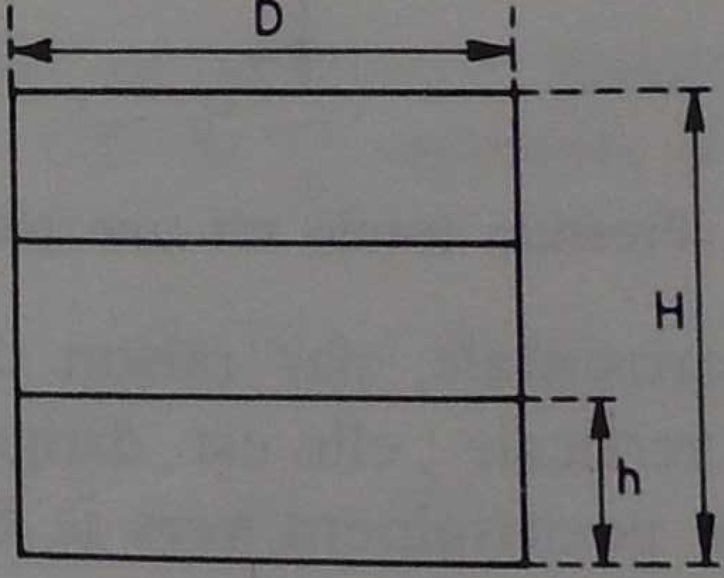


Fig. III.7.11

On décompose le réservoir en viroles horizontales ; pour une virole de hauteur h, on applique la formule précédente en prenant pratiquement pour p la valeur de la pression à la base de la virole considérée, soit $p = \bar{\omega} H$.

Application au calcul des barrages-voûtes

La formule du tube : $e = pD/2R$ s'applique également au calcul de l'épaisseur e de la voûte supposée cylindrique d'un barrage-voûte (fig. III.7.12).

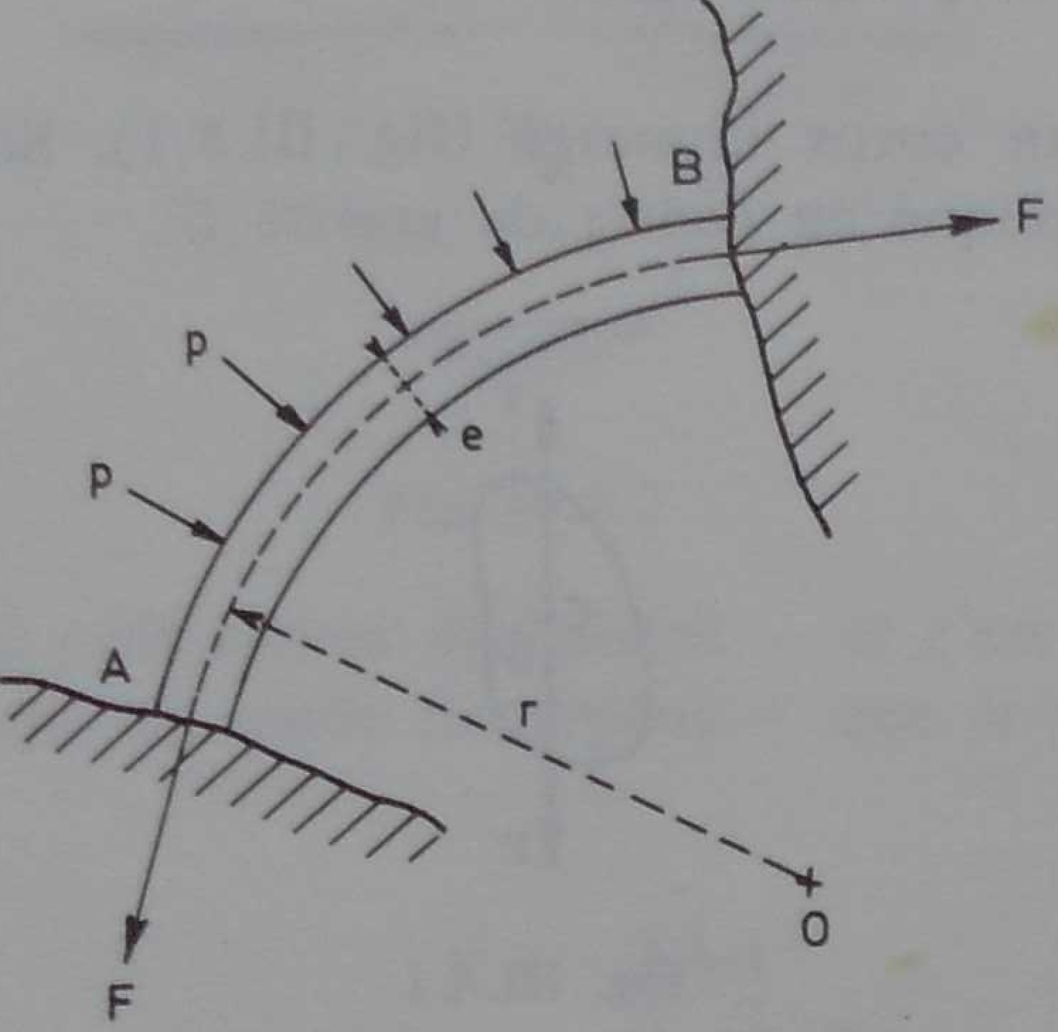


Fig. III.7.12 – Formule du tube appliquée au calcul d'un barrage-voûte

On découpe la voûte en tranches horizontales ou "anneaux" de rayon moyen r qu'on considère comme des arcs encastrés aux naissances A et B et indépendants les uns des autres ; on néglige ainsi l'effet de mur ou de console résultant de l'encastrement vertical et on ne tient pas compte du poids propre des anneaux pour résister à la poussée de l'eau.

Proposons-nous, dans ces conditions, de calculer l'épaisseur e d'un anneau de hauteur 1 m et dont la base est à la profondeur z au-dessous du niveau maximal de la retenue. En chaque point de l'extrados, la pression effective est $p = \varpi z$; on est donc ramené, au signe près, au calcul de la résultante des pressions, soit $F = P/2$ sur les sections d'extrémité A et B de l'anneau.

La formule du tube donne immédiatement le résultat cherché :

$$e = \frac{pD}{2R} = \frac{pr}{R} = \frac{\varpi z r}{R}$$

en désignant par R la charge de sécurité de la maçonnerie à la compression.

Comme nous l'avons souligné précédemment, le résultat obtenu est indépendant de l'orientation de la section diamétrale considérée et la résultante F (donc l'épaisseur e) conserve la même valeur dans toutes les sections verticales de l'anneau considéré.

Cette formule très simple a été utilisée, dans le passé, pour calculer plusieurs barrages-voûtes ; on peut l'employer, en première analyse, pour dégrossir le problème, en prenant pour R la moitié de la charge de sécurité de la maçonnerie à la compression, pour tenir compte de l'existence d'un moment de flexion dans les sections des naissances de l'arc, dû à l'encastrement. On affine ensuite le résultat par des méthodes plus poussées (méthode des voûtes actives de Résal, trial load method, éléments finis).

Cas d'un corps immergé.

Supposons maintenant que la surface fermée se trouve immergée dans un liquide de poids volumique ϖ (fig. III.7.13).

La pression s'exerçant en différents points de cette surface n'est plus constante ; elle varie avec la profondeur.

Comme nous l'avons fait précédemment, décomposons le volume limité par cette surface en prismes élémentaires dont les génératrices soient parallèles successivement à OX, OY et OZ (OZ vertical, positif vers le haut).

Chaque plan horizontal étant une surface de niveau du liquide, la somme des projections respectives des pressions élémentaires sur OX et OY est nulle. S'il y a une résultante, elle sera donc verticale.

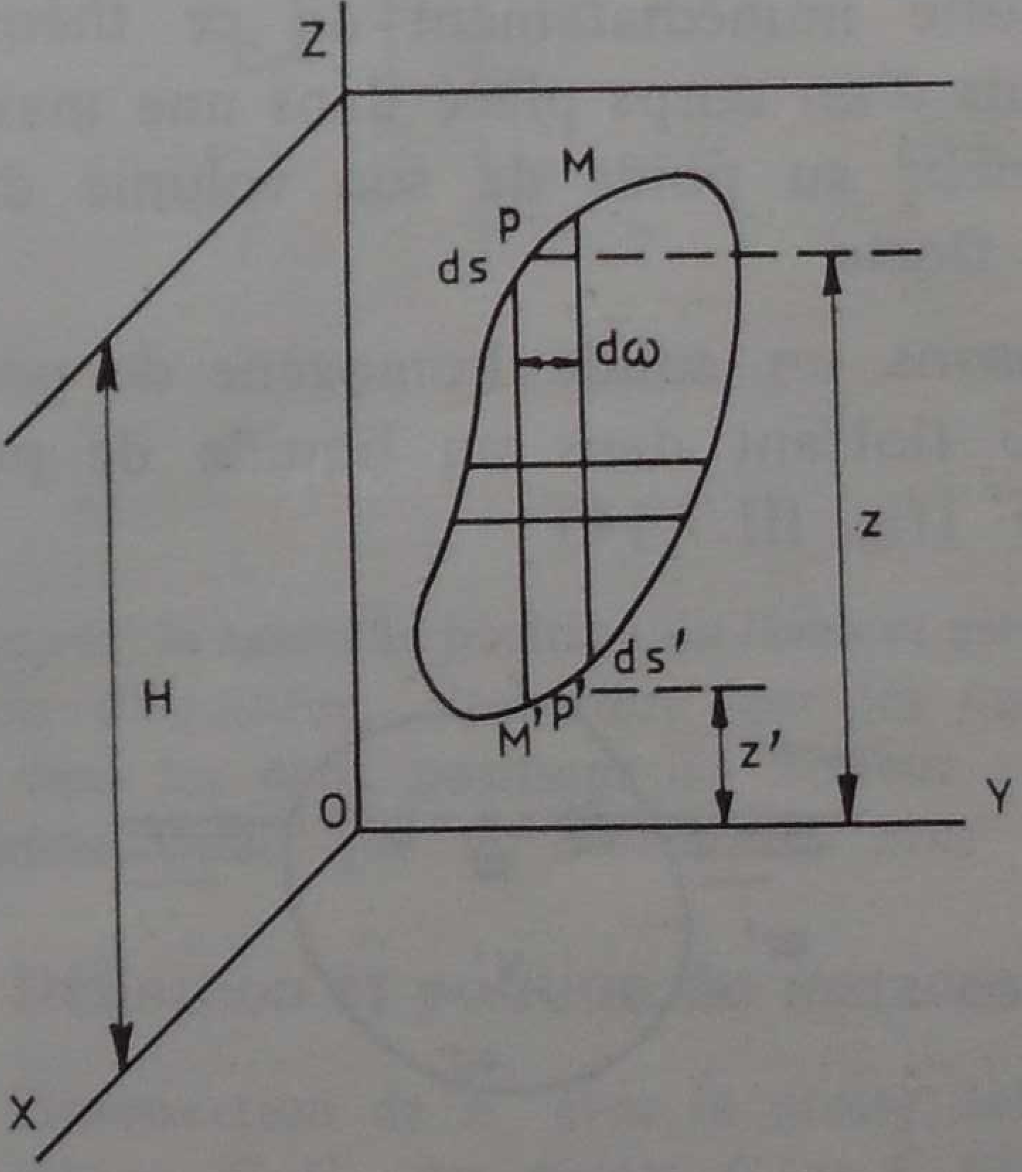


Fig. III.7.13

Considérons donc un prisme élémentaire vertical de section droite $d\omega$.

Les projections sur OZ des pressions élémentaires agissant sur les éléments ds et ds' en M et M' sont respectivement :

$$-\,p\,d\omega \quad \text{et} \quad +\,p'\,d\omega$$

soit, si H est la hauteur du plan de charge hydrostatique au-dessus du plan XOY :

$$- \overline{\omega}(H - z)\, d\omega \quad \text{et} \quad + \overline{\omega}(H - z')\, d\omega$$

Leur somme est donc :

$$- \overline{\omega}\, d\omega (z' - z) = \overline{\omega}\, d\omega (z - z') > 0$$

c'est-à-dire dirigée vers le haut.

Cette résultante élémentaire est égale au poids du liquide de poids volumique $\overline{\omega}$ qui serait contenu dans le prisme envisagé.

De même pour tous les autres prismes verticaux.

La résultante générale sera égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité du volume. On l'appelle la *poussée* du liquide.

C'est le *principe d'Archimède* qui s'énonce ainsi :

Un corps solide plongé dans un liquide en équilibre supporte, du fait des pressions exercées par le liquide sur sa surface, une poussée verticale dirigée de bas en haut, égale au poids du volume du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité de ce volume, appelé centre de carène.

Il résulte immédiatement de ce théorème que si le poids d'un corps placé dans une masse liquide est inférieur au poids de son volume du liquide, le corps flotte.

Supposons un solide homogène de poids volumique $\overline{\omega}$ flottant dans un liquide de poids volumique $\overline{\omega}'$ (fig. III.7.14)

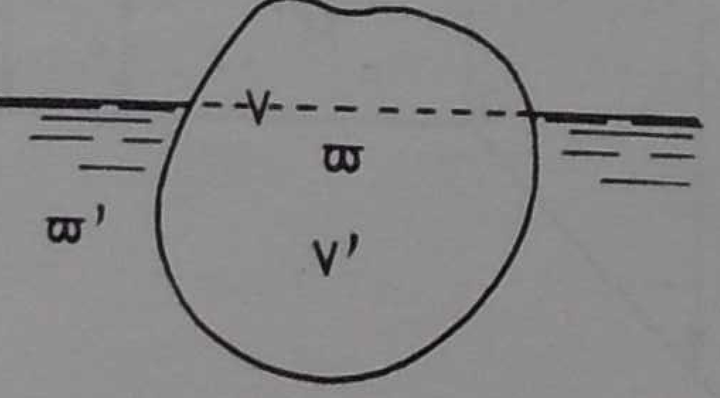


Fig. III.7.14

En appelant V le volume du solide et V' le volume de la partie immergée, la condition d'équilibre du corps flottant est :

$$\overline{\omega} V = \overline{\omega}' V'$$

ou :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\overline{\omega}'}{\overline{\omega}}$$

III.8. ÉQUILIBRE DES CORPS IMMERGÉS ET DES CORPS FLOTTANTS

III.8.1. Corps immergés

Soit un corps immergé (fig. III.8.1). Son poids P est appliqué au centre de gravité G.

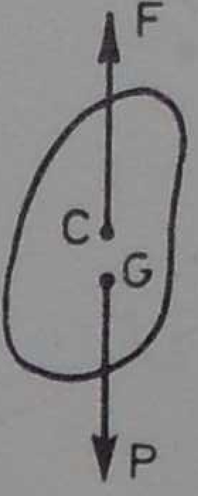


Fig. III.8.1

La poussée du liquide $\vec{F}$ est appliquée au centre de carène C, distinct de G si le corps n'est pas homogène.

Si le solide est homogène, G et C sont confondus, l'équilibre est indifférent.

Dans le cas contraire, G et C sont distincts et il y aura équilibre quand C et G seront sur une même verticale avec :

$$\vec{P} = - \vec{F}$$

La figure III.8.2 montre clairement que *pour que l'équilibre soit stable, il faut que le centre de gravité soit au-dessous du centre de carène.*

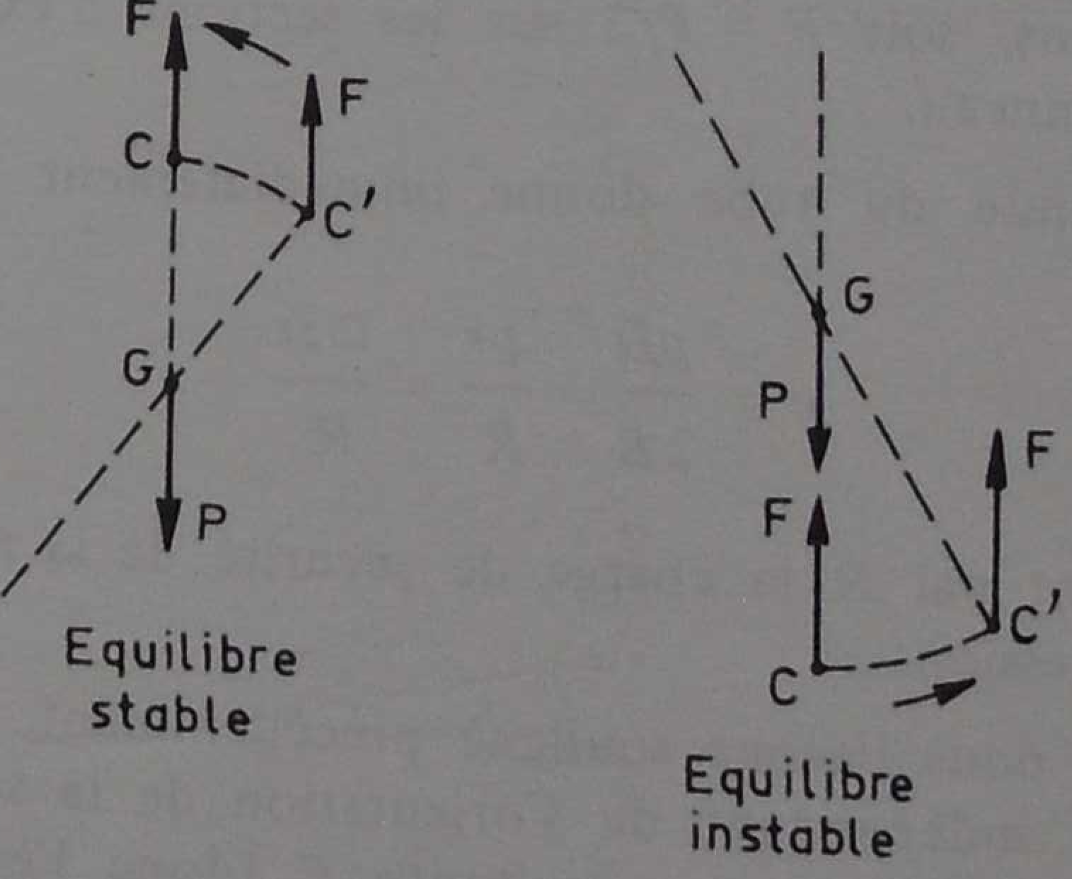


Fig. III.8.2 – Equilibre d'un corps immergé

III.8.2. Corps flottants

Bien entendu, dans le cas d'un corps flottant, si le centre de gravité du corps est au-dessous du

centre de carène, c'est-à-dire si la condition énoncée pour un solide immergé est réalisée, le corps flottant est en équilibre parfait (fig. III.8.3)

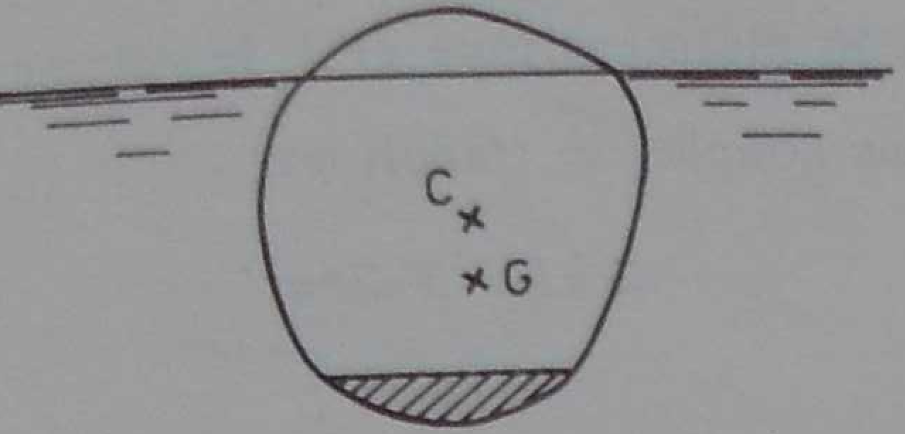


Fig. III.8.3

Mais il peut arriver également — et c'est toujours le cas pour un solide homogène — que le centre de gravité G soit au-dessus du centre de carène C et que, cependant, l'équilibre du corps flottant soit stable.

Cela tient à ce que, quand le corps solide se déplace, le volume immergé change de forme et le centre de carène se déplace à l'intérieur du solide considéré.

III.8.2.1. Flottaisons isocarènes

Considérons en effet un tel flotteur $ADEB$ dans sa position d'équilibre : G et C sont sur une même verticale (fig. III.8.4).

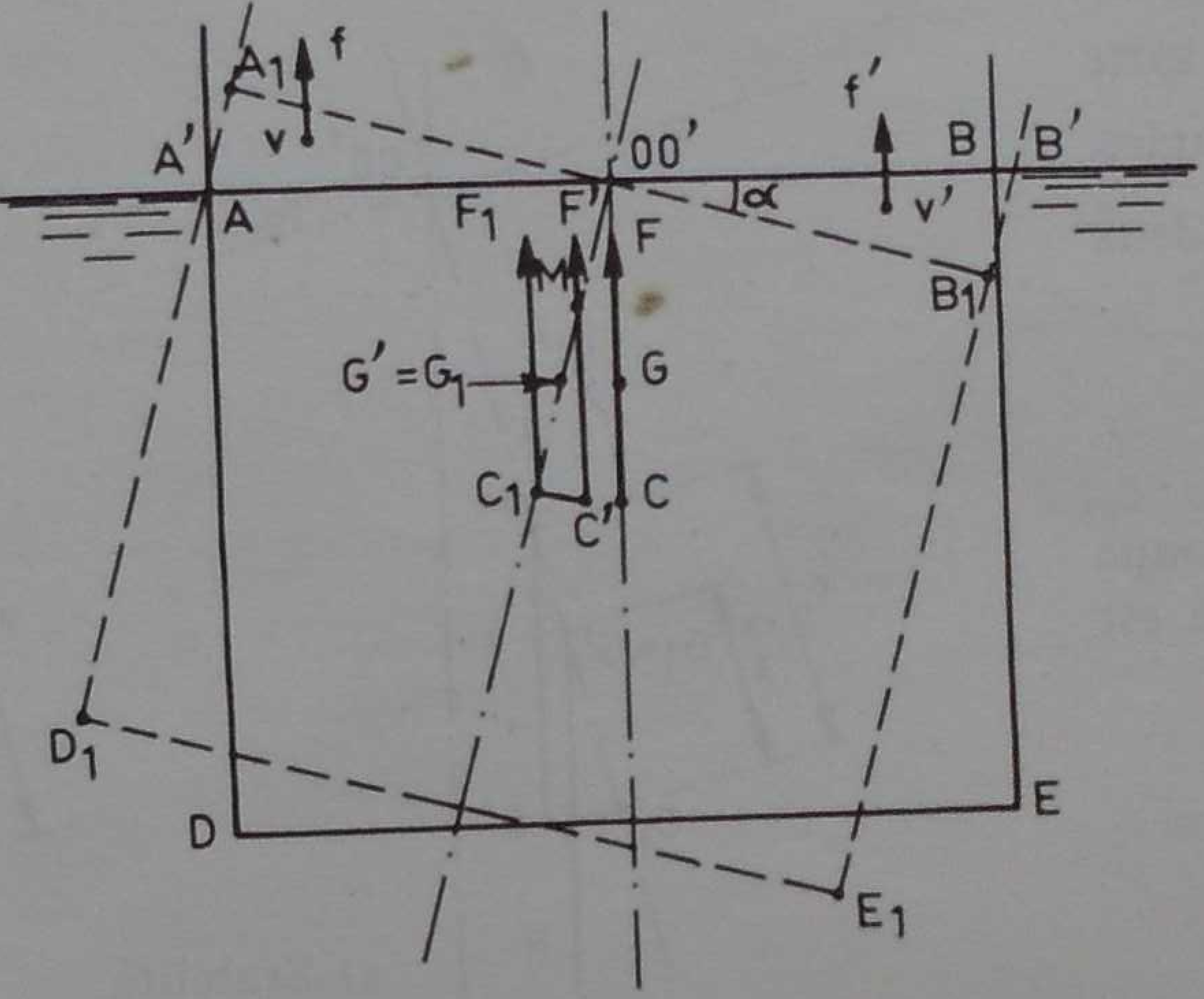


Fig. III.8.4

Supposons que le flotteur se déplace en basculant d'un petit angle α autour d'une droite OO' perpendiculaire au plan de la figure et qu'on appelle l'*axe d'inclinaison* ; il prend donc la position $A_1 D_1 E_1 B_1$. Le centre de carène C du premier équilibre, considéré comme appartenant au flotteur, vient en C_1 et la surface libre coupe maintenant le flotteur suivant $A'B'$.

Le volume immergé, qu'on appelle la *carène* s'est déformé de $ADEB$ (ou $A_1 D_1 E_1 B_1$) en $A'D_1 E_1 B'$ dont le centre de gravité est en C' qui constitue donc le nouveau centre de carène. Le centre de carène, considéré comme appartenant au flotteur, s'est donc déplacé, à l'intérieur du flotteur, suivant une courbe $C_1 C'$.

Les droites $A_1 B_1$ et $A'B'$, considérées comme appartenant au flotteur, représentent les sections de ce flotteur par le plan de la surface libre et sont appelées les *flottaisons*.

Quant à la poussée, elle passe de $\vec{F}$ verticale passant par C à $\vec{F'}$ verticale passant par C'.

Bien entendu, la nouvelle position du flotteur est également une position d'équilibre, c'est-à-dire que les carènes sont les mêmes dans les deux positions du flotteur ; cette propriété exprime donc que *les flottaisons sont isocarènes.*

III.8.2.2. Définition et position du métacentre

Soit M l'intersection de $\vec{F'}$ avec la droite définie par la nouvelle position $G_1 C_1$ des points G et C (fig. III.8.4). Pour un déplacement angulaire α infiniment petit, M est appelé le *métacentre,* c'est en somme le centre de courbure de la courbe $C_1 C'$ décrite, à l'intérieur du flotteur, par le centre de carène.

Proposons-nous de rechercher la position du métacentre qui pourra être définie, par exemple, par la distance

$$MC_1 = MC' = r$$

qu'on appelle le *rayon métacentrique* et qui est donc le rayon de courbure de la courbe $C_1 C'$ décrite à l'intérieur du flotteur par le centre de carène.

Dans la position $A'D_1 E_1 B'$ du flotteur, il est visible qu'il y a un onglet $A_1 A'OO'$ de volume v qui est émergé et un onglet $B_1 B'OO'$ de volume v' qui est immergé par rapport à la position initiale d'équilibre ; les flottaisons étant isocarènes, on a évidemment $v = v'$.

Soient $\vec{f}$ et $\vec{f'}$ les poussées d'Archimède correspondant respectivement aux volumes v et v' (on a donc $\vec{f} = \vec{f'}$).

La nouvelle poussée $\vec{F'}$ dans la position $A'D_1 E_1 B'$ est évidemment :

$$\vec{F'} = \vec{F_1} - \vec{f} + \vec{f'}$$

$\vec{F_1}$ étant la position de $\vec{F}$ dans le deuxième équilibre du flotteur.

Il en résulte :

$$\vec{F_1} - \vec{F'} = \vec{f} - \vec{f'}$$

Les poussées $\vec{F_1}$ et $\vec{f}$ sont respectivement égales en grandeur à $\vec{F'}$ et $\vec{f'}$ et leurs directions sont parallèles, de sorte que $\vec{F_1} - \vec{F'}$ et $\vec{f} - \vec{f'}$ forment respectivement deux couples.

Exprimons l'égalité des moments de chacun de ces deux couples :

1) *Moment du couple* $\vec{f} - \vec{f'}$

Pour un cylindre élémentaire de section droite $d\sigma$ découpé dans un des onglets v ou v' la poussée correspondante est (fig. III.8.5) :

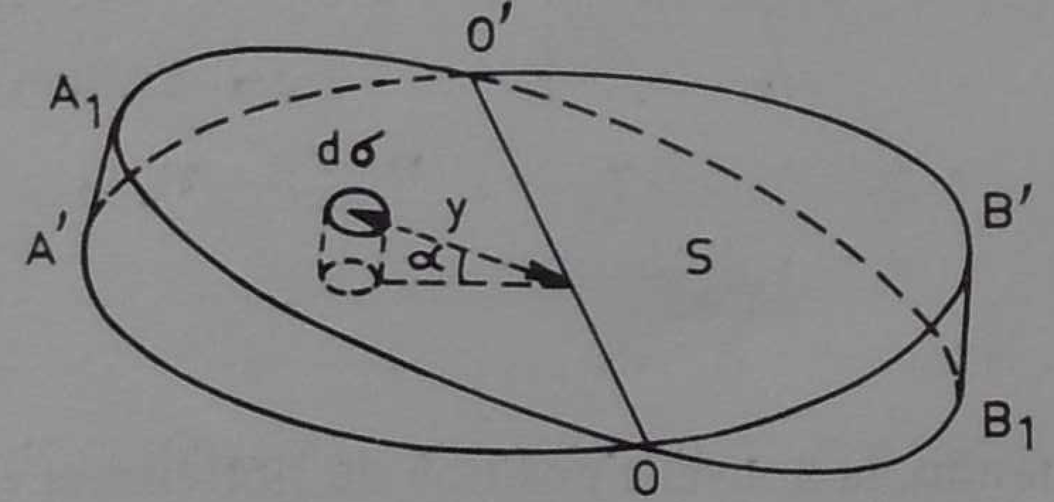


Fig. III.8.5

$$df = \bar{\omega} y \alpha \, d\sigma \quad (\alpha \text{ en radian})$$

Le moment de cette poussée élémentaire par rapport à l'axe d'inclinaison OO' est :

$$dM = \bar{\omega} y^2 \alpha \, d\sigma$$

Pour l'ensemble des deux onglets, le moment du couple $\vec{f} - \vec{f'}$ est donc :

$$M = \iint_S \bar{\omega} y^2 \alpha \, d\sigma$$

$$M = \bar{\omega} \alpha \iint_S y^2 \, d\sigma$$

$$M = \bar{\omega} \alpha I$$

I étant le moment quadratique de la surface du plan de flottaison S par rapport à l'axe d'inclinaison OO'.

2) *Moment du couple* $\vec{F_1} - \vec{F'}$

Le moment du couple des poussées $\vec{F_1} - \vec{F'}$ est (fig. III.8.4) :

$$F' \times C_1 C' = F' r \alpha = V \bar{\omega} r \alpha$$

r étant le rayon métacentrique et V le volume de la carène.

L'égalité des couples se traduit par :

$$\bar{\omega} \alpha I = V \bar{\omega} r \alpha$$

$$r = \frac{I\alpha}{V\alpha} = \frac{I}{V}$$

III.8.3.3. Condition de stabilité

Considérons le flotteur en position $A'D_1 E_1 B'$, c'est-à-dire incliné d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre (fig. III.8.6).

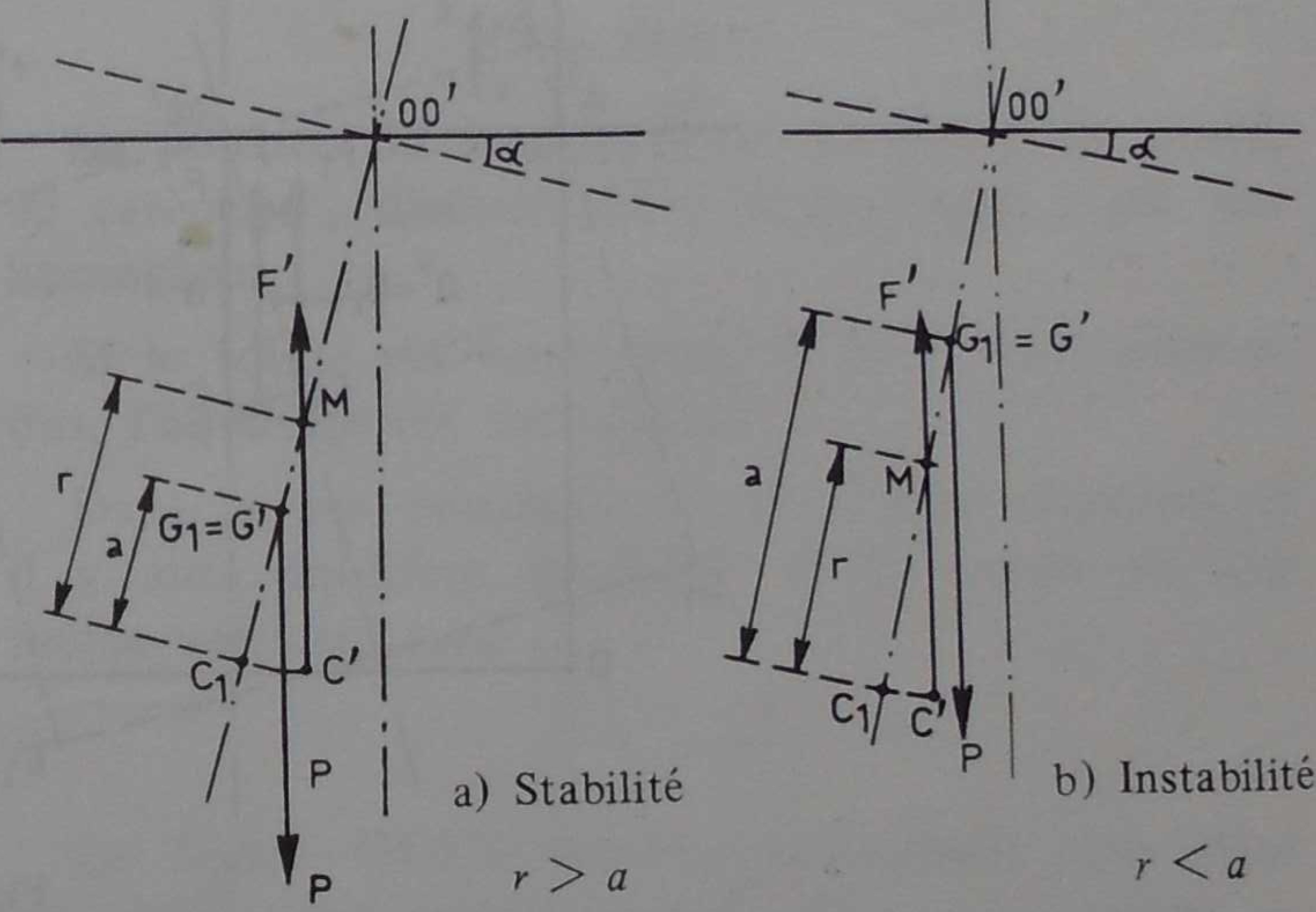


Fig. III.8.6 – Stabilité d'un flotteur

Il est soumis à un couple formé par deux forces :

– Le poids $\vec{P}$ appliqué en G_1 (ou G').

– La poussée $\vec{F'}$ verticale passant par C'.

Désignons par a la distance $G_1 C_1$.

Il est visible que ce couple tendra à ramener le flotteur dans sa position initiale, c'est-à-dire qu'il y aura stabilité si M est au-delà de G_1 par rapport à C_1, c'est-à-dire si :

$$r > a$$

ou

$$a < \frac{I}{V} \qquad \text{(fig. III.8.6 a)}$$

La stabilité sera d'autant meilleure que la longueur $r - a$ (qu'on appelle la *distance métacentrique*) sera plus grande, c'est-à-dire que $r = I/V$ sera plus grand et que a sera plus petit (G le plus bas possible)

Si au contraire, M est du même côté que C_1 par rapport à G_1, le couple tendra à écarter le flotteur de sa position initiale (équilibre instable) (fig. III.8.6 b).

Enfin, si G_1 et M sont confondus ($r = a$) l'équilibre est indifférent.

En définitive, pour que l'équilibre soit stable, il faut que la distance a du centre de carène au centre de gravité soit inférieure au quotient du plus petit moment quadratique de la surface du plan de flottaison (par rapport à tous les axes passant par son centre de gravité) par le volume de la carène. C'est d'ailleurs autour de l'axe d'inclinaison correspondant au plus petit moment quadratique que le flotteur oscillera, pour la même raison que dans le flambement d'une poutre, la section droite de la poutre tourne autour de l'axe de la section correspondant au plus petit moment quadratique.

On retrouve ici une manifestation du principe général de la mécanique généralement connu sous le terme de "principe du travail minimal".

Mesure statique de la distance métacentrique

Considérons un flotteur, par exemple un navire, de poids P (fig. III.8.7). Transportons un poids connu p d'un côté M du bateau à l'autre côté M' ; désignons par d la projection horizontale du déplacement MM'.

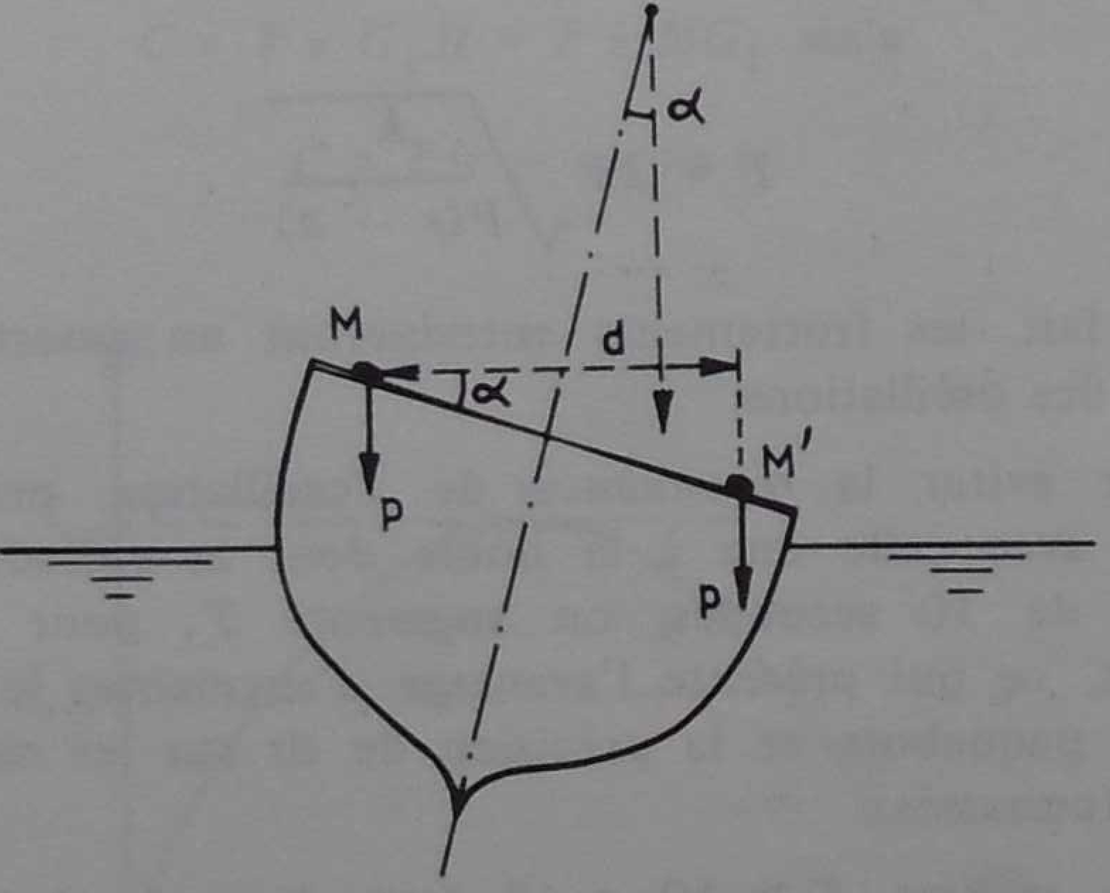


Fig. III.8.7 – Mesure statique de la distance métacentrique d'un flotteur

Entre les deux positions M et M' du poids p, le bateau s'incline d'un angle α sous l'action du couple pd.

La même inclinaison α, sans déplacement du poids p, aurait provoqué un couple de redressement $P(r - a)\,\alpha$ (fig. III.8.6. a).

Les deux couples sont donc égaux au signe près, soit

$$pd = P(r - a)\,\alpha$$

$$r - a = \frac{pd}{P\alpha}$$

On peut ainsi déduire la distance métacentrique $r - a$ de la mesure de p, d, P et α ; la mesure de α est effectuée à l'aide d'un fil à plomb accroché à l'un des mâts du navire.

Au cours du déplacement du poids p de M en M', il faut veiller à ce qu'aucune autre masse ne se déplace (cale sèche, équipage immobile, etc).

Rappel historique

Dès le début du 17ème siècle, le géomètre hollandais *Simon Stevin* (1548-1620), Directeur des digues de Hollande, avait montré que la stabilité d'un corps flottant était réalisée lorsque son centre de gravité était situé sur la même verticale que le centre de carène. *Stevin* pensait toutefois que le centre de gravité devait se trouver au-dessous du centre de carène.

Il fallut attendre le "Traité du navire" du célèbre mécanicien français *Pierre Bouguer* (1698-1758) pour que soit clairement démontré le rôle du métacentre dans l'équilibre du corps flottant.

Application au flottage de prismes de bois de différentes densités.

En appliquant les règles de stabilité ainsi établies à des prismes droits de section carrée et de masse volumique ρ flottant sur l'eau ($\rho' = 1$ kg/dm^3), on peut montrer que

1) Le prisme flottera avec sa face supérieure horizontale

si $\rho < 0{,}212$ (fig. III.8.8 a) (balsa)

ou si $\rho > 0{,}788$ (fig. III.8.8 f) (chêne dur, charme, gaïac)

2) Le prisme flottera avec ses faces inclinées à 45°

si $0{,}281 < \rho < 0{,}719$ (fig. III.8.8 c et d)

3) Si $0{,}212 < \rho < 0{,}281$

ou $0{,}719 < \rho < 0{,}788$

l'équilibre correspond à une position oblique du prisme variant graduellement de

$\alpha = 45°$ pour $\rho = 0{,}281$ (ou 0,719)

à

$\alpha = 90°$ pour $\rho = 0{,}212$ (ou 0,788) (fig. III.8.8 b et e)

On peut ainsi, au flottage, distinguer un bois léger d'un bois dense.

III.8.2.4. Petites oscillations d'un flotteur en eau calme

Supposons le flotteur écarté de sa position d'équilibre d'un petit angle α (fig. III.8.9).

Son poids P et la poussée F' forment un couple dont le moment est :

$$C = P(r - a)\,\alpha \quad (\alpha \text{ en radians})$$

Soit K le moment d'inertie du flotteur par rapport à l'axe horizontal passant par G et parallèle à l'axe d'inclinaison.

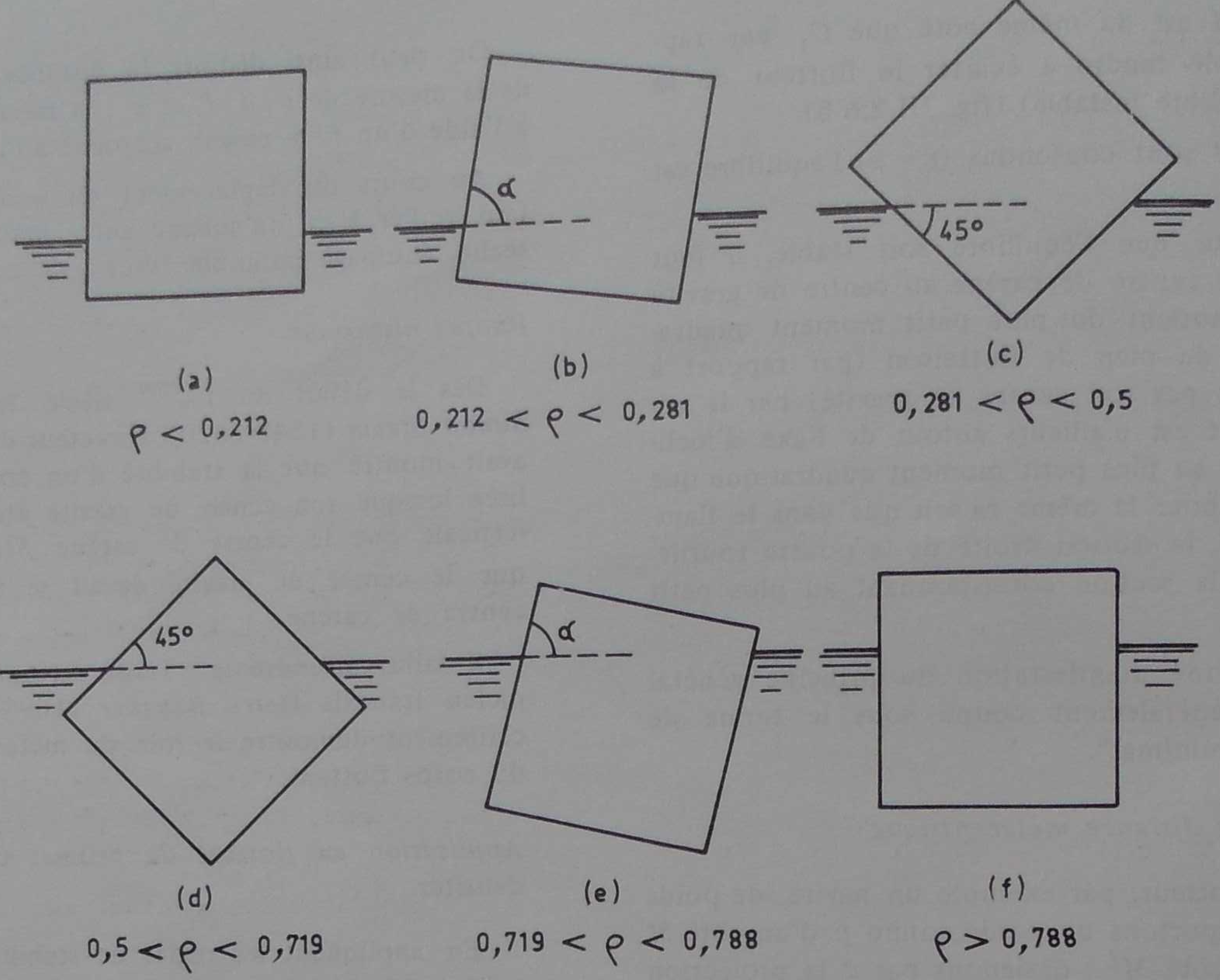


Fig. III.8.8 – Flottage de prismes de bois de différentes densités

En négligeant les frottements, l'équation du mouvement sera :

$$P(r-a)\,\alpha = -K\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{P(r-a)}{K}\,\alpha = 0$$

Le flotteur prendra donc un *mouvement oscillatoire* de période :

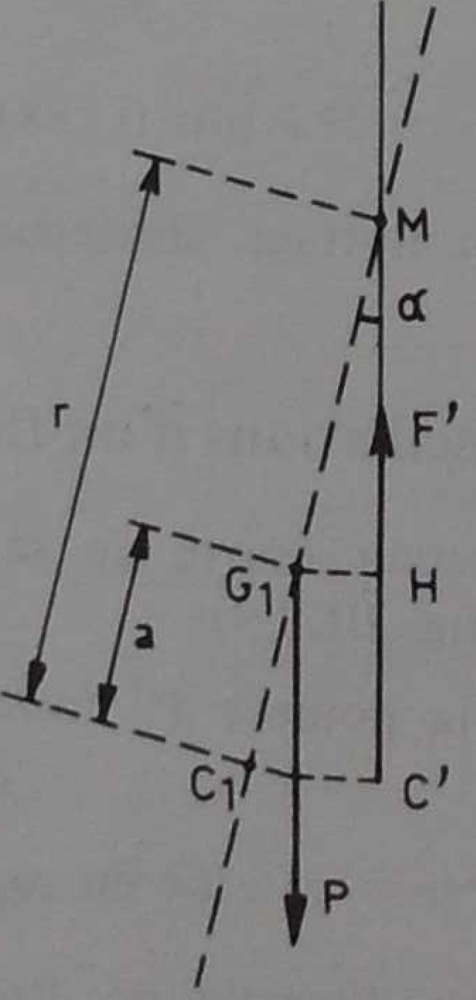


Fig. III.8.9

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{P(r-a)}}$$

En fait, les frottements entraîneront un amortissement rapide des oscillations.

Pour éviter la *résonnance* de l'oscillation propre des navires avec celle due à la houle dont la période est de l'ordre de 10 secondes, on augmente T, pour les gros bateaux, ce qui présente l'avantage d'augmenter le confort sur les paquebots et la précision de tir sur les navires de guerre (cuirassés).

Pour réaliser $T > 10$ s, il faut diminuer la distance métacentrique $(r-a)$ ce qui présente l'inconvénient de diminuer la stabilité du navire (cf. § III.8.2.3) et il faut augmenter K, ce qui conduit à augmenter la largeur du navire et à éloigner les poids élevés (canons et casemates) du plan longitudinal de symétrie du navire.

Remarquons enfin que le moment d'inertie du navire est de la forme :

$$K = \Sigma m r^2 = M\rho^2$$

avec

M masse totale du navire

ρ rayon de giration du navire par rapport à l'axe horizontal passant par G et parallèle à l'axe d'inclinaison.

La *période d'oscillation* est donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M\rho^2}{Mg(r-a)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2}{g(r-a)}}$$

Sur un modèle réduit du navire utilisé pour les essais en bassin des carènes, ρ, r et a varient comme les dimensions linéaires L et T varie donc comme

$$\sqrt{\frac{L^2}{gL}}, \text{ c'est-à-dire comme } \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Comme g est le même sur le modèle et sur le prototype, *la période d'oscillation du modèle varie comme* $\sqrt{L}$. Si, par exemple, le modèle est à l'échelle 1/100, la période de roulis ou de tangage du modèle sera 10 fois plus petite que celle du prototype.

Nous vérifierons plus loin que cette similitude correspond à la *loi de Reech-Froude* caractérisée par le fait que les forces de viscosité (frottement du liquide sur la coque) sont négligeables par rapport aux forces d'inertie et de pesanteur.

III.8.2.5. Stabilité statique et stabilité dynamique d'un flotteur

III.8.2.5.1. *Stabilité statique*

Pour une inclinaison *finie* α du flotteur, le couple de redressement a pour expression (fig. III.8.9).

$$C = P \times G_1H = P \times MG_1 \sin\alpha$$

$$C = P(r-a)\sin\alpha$$

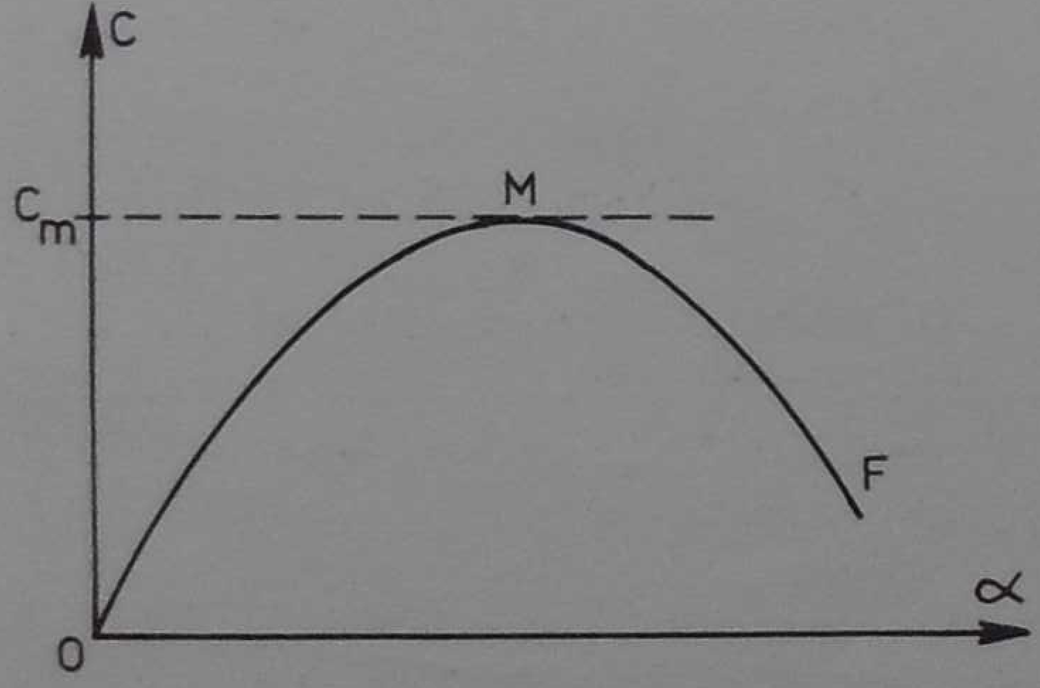


Fig. III.8.10 – Courbe de stabilité statique d'un flotteur

La variation de C en fonction de α est représentée par la courbe *OMF* qui est la courbe de *stabilité statique* du flotteur (fig. III.8.10).

Si un couple de chavirement C' est appliqué *progressivement* au flotteur, celui-ci s'inclinera suffisamment lentement pour que les phénomènes d'inertie soient négligeables. L'angle α d'inclinaison du flotteur sera celui pour lequel $C' = C$. Pour que le flotteur ne chavire pas, il suffit que $C' < C_m$, C_m représentant la valeur maximale du couple de stabilité C.

III.8.2.5.2. *Stabilité dynamique*

Supposons maintenant qu'on applique *brusquement* au flotteur un couple de chavirement C' variant légèrement avec α (lame, coup de vent, etc.) et représenté par la courbe (C') (fig. III.8.11). Le flotteur s'incline et est soumis à un couple moteur $C' - C$, de sorte qu'il prend une vitesse angulaire $d\alpha/dt$ croissante jusqu'au moment où il atteint l'inclinaison α_s pour laquelle $C = C'$ (équilibre statique). Mais, en raison de l'énergie cinétique qu'il possède alors, le flotteur ne s'arrêtera pas et s'inclinera d'un angle supérieur à α_s.

En négligeant les pertes par frottements et amortissements, l'énergie cinétique que possède le flotteur à cet instant est égale au travail développé par le couple moteur $C' - C$ entre 0 et α_s, c'est-à-dire à l'aire hachurée *OAB* ; au-delà de α_s, le couple de redressement C étant supérieur au couple de chavirement C', le couple résultant $C - C'$ est un couple de freinage qui entraîne un ralentissement progressif de la vitesse d'inclinaison $d\alpha/dt$; le flotteur s'inclinera donc de plus en plus lentement jusqu'au moment où $\alpha = \alpha_d$, valeur telle que : aire OAB = aire BED.

Puis le flotteur se redresse sous l'influence du couple $C - C'$.

Il est évident que ce redressement final n'est possible que si $C - C' > 0$ c'est-à-dire :

$$\alpha_d < \alpha_f$$

α_f représentant l'inclinaison pour laquelle les deux courbes (C) et (C') se croisent à nouveau (point F) ; dans le cas contraire, le flotteur chavire.

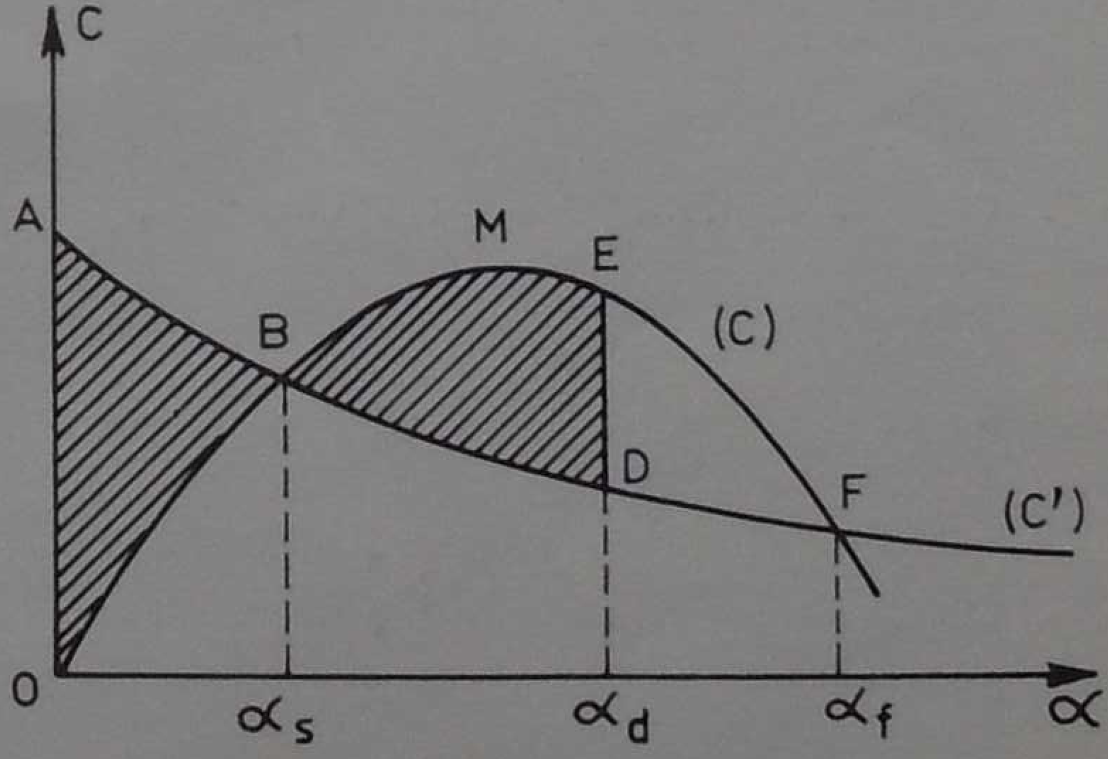


Fig. III.8.11 – Stabilité dynamique d'un flotteur

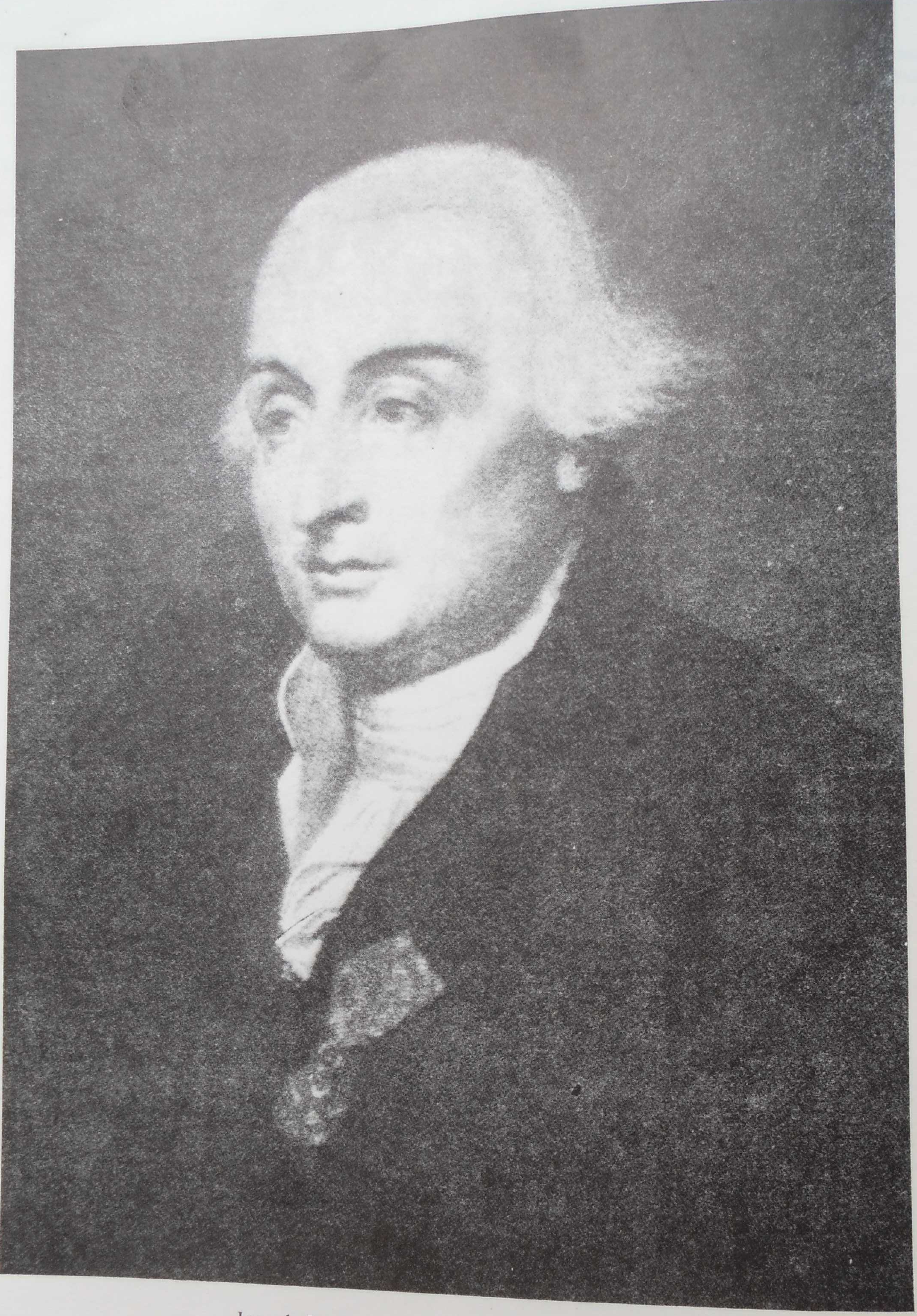
La condition $\alpha_d < \alpha_f$ revient à exprimer que l'aire *AOB* doit être inférieure à l'aire *BEFDB*.

Le couple C' correspondant à la limite, c'est-à-dire tel que ces deux aires soient égales, est le *couple limite de chavirement dynamique*.

BIBLIOGRAPHIE du chapitre III

JONES (L.E).– A new approach to hydrostatic thrust on plane surfaces (Nouvelle contribution à l'étude de la pression hydrostatique sur les surfaces planes) (*Water Power*, n° 7, Juillet 1963).

X . . . . .– Etude théorique approximative des pressions agissant sur une vanne de barrage mobile (*Bulletin du Centre de Recherches et d'essais scientifiques du Génie Civil*, tome X, 1959).



Joseph Louis de LAGRANGE (1736-1813)

La Houille Blanche

CHAPITRE IV

CINÉMATIQUE DES LIQUIDES

C'est l'étude du mouvement des liquides sans tenir compte des forces qui lui donnent naissance. On considère donc seulement les relations entre les positions des particules fluides et le temps.

IV.1. DÉFINITIONS

IV.1.1. Système de référence

Pour étudier le mouvement d'un fluide quelconque, on peut employer deux méthodes :

IV.1.1.1. ***La méthode de Lagrange*** qui consiste à individualiser une particule déterminée du fluide et à la suivre dans ses mouvements.

On procède donc comme pour la cinématique d'un système matériel, c'est-à-dire qu'on exprime les coordonnées d'un point M de la masse fluide en fonction du temps et de la position initiale du point considéré.

$$M \begin{cases} x = f\,(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = \varphi\,(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = \psi\,(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

x, y et z sont les *variables de Lagrange.*

IV.1.1.2. ***La méthode d'Euler*** qui consiste à considérer un point fixe de l'espace et à étudier, en fonction du temps, ce qui se passe en ce point.

On déterminera donc, en fonction du temps, la vitesse des particules fluides qui viennent successivement passer par ce point. La vitesse $\vec{V}$ étant déterminée par ses trois composantes u, v, w sur trois axes OX, OY et OZ, on disposera donc des trois équations suivantes :

$$\vec{V} \begin{cases} u = f\,(x, y, z, t) \\ v = \varphi\,(x, y, z, t) \\ w = \psi\,(x, y, z, t) \end{cases}$$

u, v et w sont les *variables d'Euler.*

IV.1.2. Lignes de courant ; Surfaces et tubes de courant ; Trajectoires ; Lignes d'émission

Les deux systèmes de Lagrange et d'Euler permettent de définir, dans la masse en mouvement, plusieurs types de lignes :

1 — Le système d'Euler définit, à chaque instant t, un vecteur vitesse en un point et un champ de vitesse dans la masse fluide ; le faisceau des enveloppes de ce champ de vitesse constitue les *lignes de courant.*

Dans le cas le plus général d'un mouvement quelconque, le faisceau des lignes de courant diffère d'un instant à l'autre ; le faisceau correspondant à un instant t est équivalent à une photographie instantanée de l'écoulement à cet instant.

Les *équations différentielles des lignes de courant* s'écrivent en exprimant que le vecteur vitesse $\vec{V}(u, v, w)$ est tangent à la ligne de courant, soit :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

On appelle *surface de courant* la surface constituée par l'infinité des lignes de courant qui s'ap-

puient, à un instant donné, sur une courbe donnée *C*. La vitesse en un point quelconque de cette surface est évidemment située, à l'instant considéré, dans le plan tangent, de telle sorte que si :

$$F(x\,,y\,,z\,,t) = K$$

est l'équation de cette surface de courant, on a :

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

C'est l'équation différentielle des surfaces de courant passant, à l'instant considéré, par le point où la vitesse est $u\,,v,w$; aux différentes valeurs de K correspondent les diverses surfaces de courant passant par ce point.

Lorsque la courbe C est fermée, la surface devient un *tube de courant*, le volume fluide situé à l'intérieur du tube constituant, lui-même, un *filet de courant*.

2 — Le système de Lagrange permet de définir, pour une particule déterminée, une courbe qui représente les positions successives de cette particule aux différents instants. C'est la *trajectoire* de la particule.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre les trois équations définies au § IV.1.1.1.

3 — Enfin une *ligne d'émission* est constituée par l'ensemble des positions occupées, à un instant donné, par les particules passées en un point donné aux instants successifs antérieurs.

IV.1.2.1. *Cas général de l'écoulement non permanent ; Matérialisation des différentes lignes*

Les trois lignes que nous venons de définir peuvent être matérialisées de la manière suivante, dans le cas général d'un écoulement non permanent :

— *Lignes de courant* : On pourra les "visualiser" en photographiant, avec un faible temps de pose, l'écoulement dans lequel on aura mis en suspension un grand nombre de particules solides brillantes de densité voisine de celle du fluide (par exemple de la poudre d'aluminium). Chaque petit trait obtenu sur la photographie correspond au petit parcours d'une particule pendant la durée de la pose et l'ensemble donnera une bonne image du champ des vitesses dont les enveloppes constituent les lignes de courant.

— *Trajectoire* : Considérons une seule des particules et photographions-la avec un long temps de pose ou en instantanés successifs pendant un temps suffisamment long : on obtiendra la trajectoire de cette particule.

— *Ligne d'émission* : En un point de l'écoulement, émettons un filet coloré, par exemple en dissolvant, en ce point, une particule de permanganate de potassium. La photographie instantanée de ce filet coloré prise un instant fini après le début de son émission fournira l'image d'une ligne d'émission.

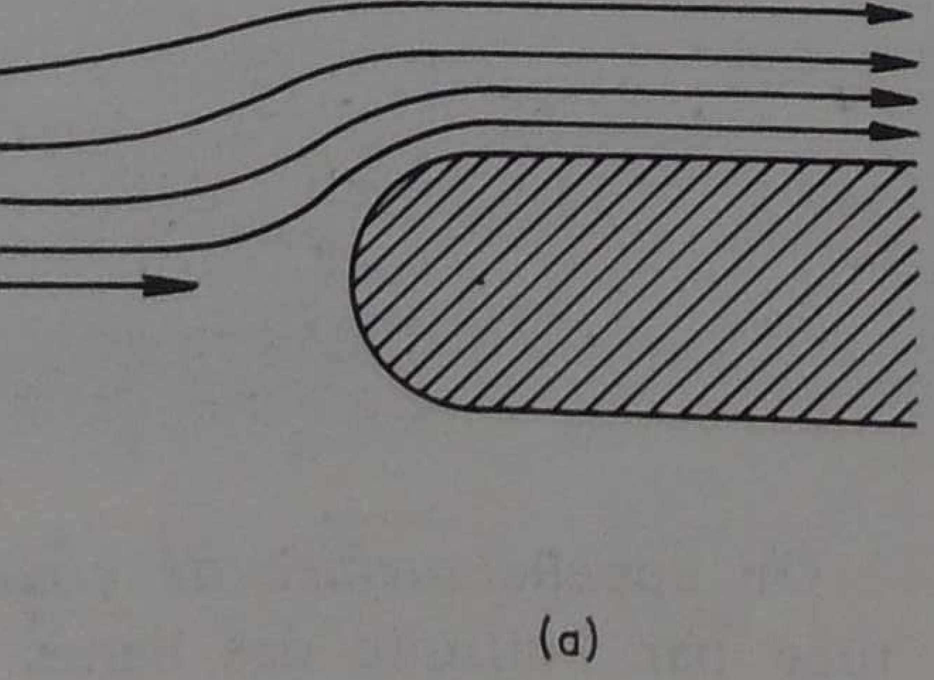
IV.1.2.2. *Cas particulier de l'écoulement permanent*

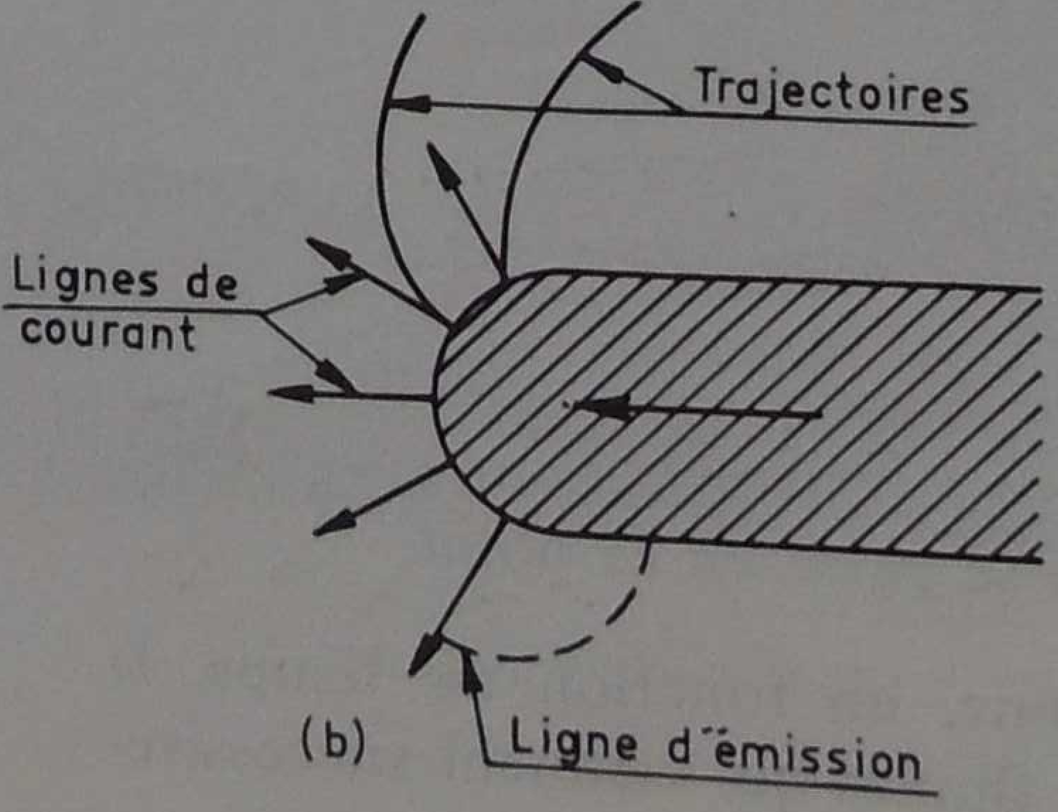
En cinématique des fluides, *un écoulement est dit permanent lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse $\vec{V}$ est indépendant du temps.*

1^er^ *EXEMPLE* : Considérons (fig. IV.1.1) deux cas analogues de déplacement d'un obstacle par rapport à l'eau.

1^er^ Cas (a) : L'obstacle est fixe et l'écoulement est supposé permanent. Les trois systèmes de lignes coïncident.

2^ème^ Cas (b) : L'obstacle est mobile dans une nappe d'eau immobile. Le mouvement n'est plus permanent et les trois systèmes de lignes sont différents et indiqués sur la figure.


(a)



(b)

2ème *EXEMPLE* : Considérons (fig. IV.1.2) une cheminée qui fume.

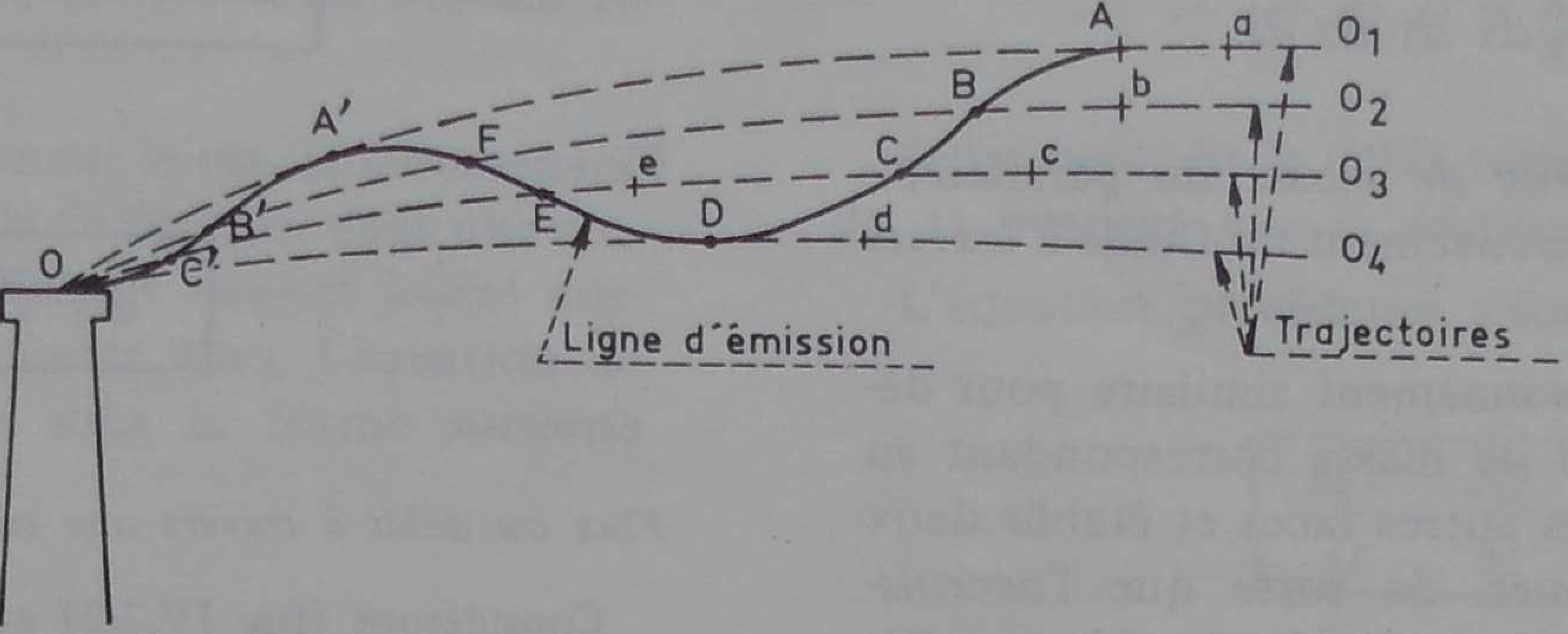


Fig. IV.1.2

Au voisinage de son sommet on observe généralement (régime d'écoulement non permanent) un mouvement oscillatoire à peu près périodique du panache de fumée émise.

Soient OO_1, OO_2, OO_3, OO_4, les *trajectoires* des particules d'air qui passent successivement en 0, sommet de la cheminée.

Les particules de fumée émises par la cheminée depuis l'instant initial t_0 seront, à l'instant t, aux points A, B, C, D, E, F, A', B', C'.... La ligne correspondante est une *ligne d'émission* qui est matérialisée par le filet de fumée émis par la cheminée.

Quant aux *lignes de courant à* l'instant t, elles sont représentées par les segments Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, ... tangents aux trajectoires.

Si l'écoulement de l'air est permanent, les trois systèmes de lignes coïncident.

Ces définitions fondamentales étant posées, l'étude de la cinématique des liquides résulte

— d'une part de l'*équation dite "de continuité"*

— d'autre part de l'expression analytique des *déformations d'un volume élémentaire de fluide*.

Nous procéderons à cette étude en utilisant la *méthode d'Euler*.

IV.2. ÉQUATION DE CONTINUITÉ

Elle exprime que le fluide est continu, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir dans aucune partie du fluide ni apport extérieur, ni prélèvement de matière. La masse se conserve au cours de l'écoulement (sauf cas particulier de la cavitation que nous excluons ici).

Pour établir cette équation, considérons (fig. IV.2.1) un parallélépipède élémentaire de fluide de volume $dx\ dy\ dz$.

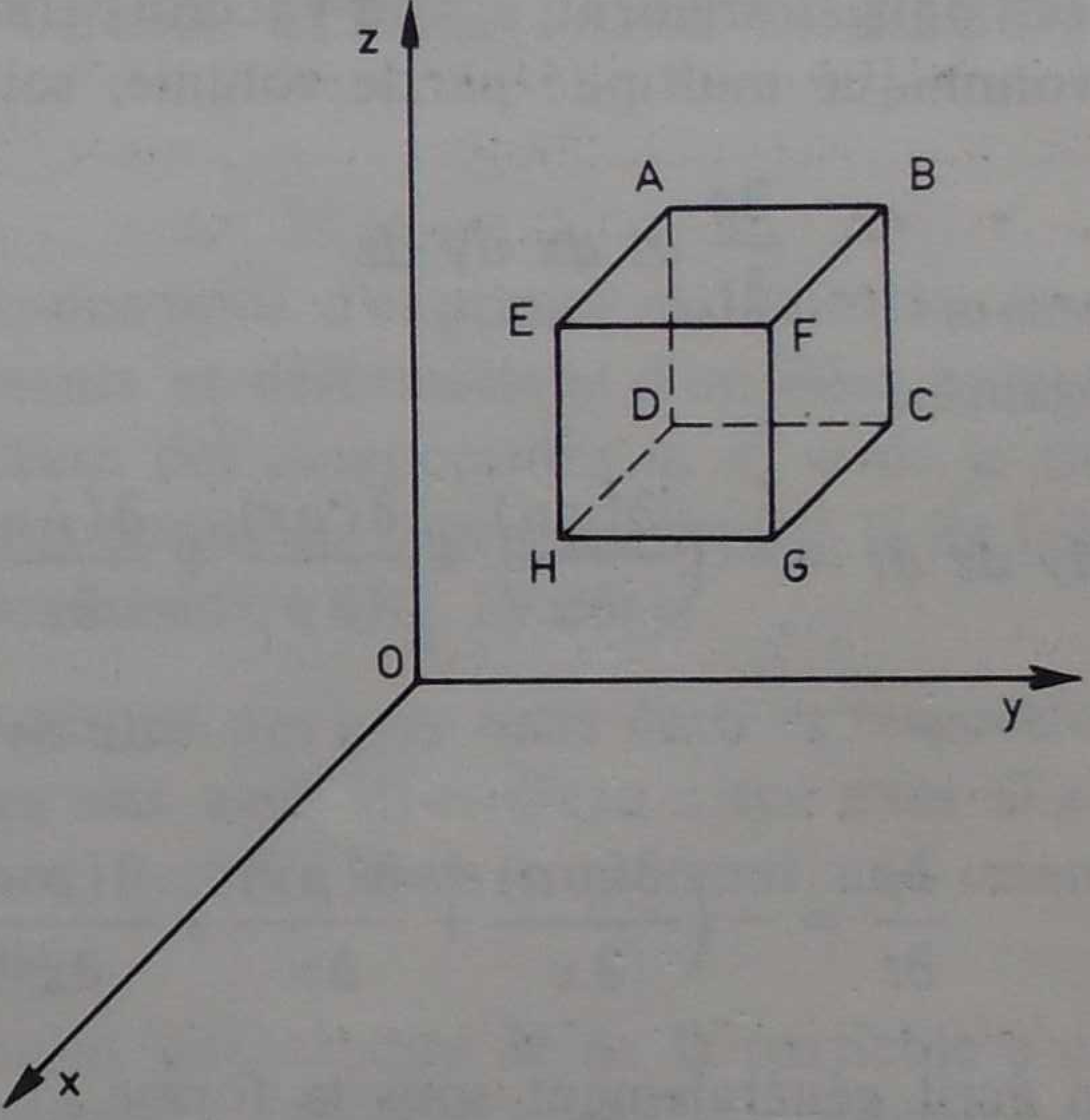


Fig. IV.2.1

Pendant le temps dt il *entre* par la face $ABCD$ une masse de fluide égale à :

$$dy\ dz\ u\rho\ dt = \rho u\ dy\ dz\ dt$$

Pendant le même temps, il *sort* par la face $EFGH$ une masse de fluide égale à celle qui est entrée, augmentée de sa différentielle partielle par rapport à x. Or, seuls u et ρ peuvent varier par rapport à x. La masse qui sort est donc :

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx\right) dy\ dz\ dt$$

La différence de ces deux expressions, soit :

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

représente l'*accroissement de masse* du parallélépipède correspondant au mouvement du fluide à travers les deux faces envisagées.

On peut faire un raisonnement similaire pour déterminer l'accroissement de masse correspondant au mouvement à travers les autres faces et établir deux autres formules analogues, de sorte que l'*accroissement total de la masse* de fluide dans le parallélépipède pendant le temps dt est en définitive :

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

Puisque la masse du parallélépipède est restée constante pendant le temps dt, cet accroissement de masse est obligatoirement égal à l'accroissement de masse volumique multiplié par le volume, soit :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt\,dx\,dy\,dz$$

d'où l'égalité :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt=-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)\times dx\,dy\,dz\,dt$$

ou

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)$$

que l'on écrit généralement sous la forme :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \quad [IV.2.1]$$

C'est l'équation de continuité pour un *fluide parfait.*

On peut associer à ce résultat l'*équation caractéristique du fluide* ou "équation complémentaire". Pour un liquide, ce sera

$$\rho = \text{constante}$$

qui exprime que le liquide est incompressible.

Dans ces conditions, l'équation de continuité devient *pour un liquide incompressible* :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0} \quad [IV.2.2]$$

ou :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V}=0}$$

Flux ou débit à travers une surface

Considérons (fig. IV.2.2) au sein de la masse fluide, une surface S limitée par une courbe fermée C. Soit dS un élément de surface infiniment petit entourant un point $M(x, y, z)$.

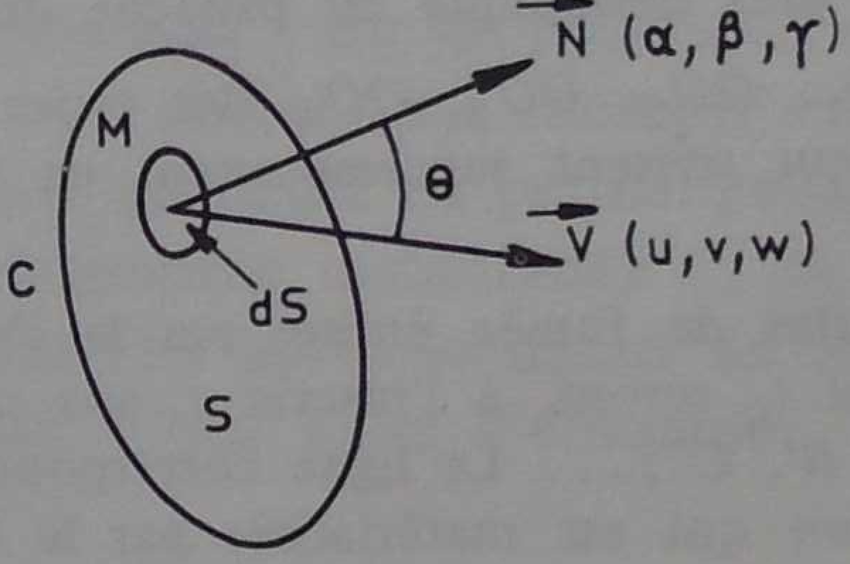


Fig. IV.2.2

Le *débit* à travers la surface S est le flux du vecteur vitesse $\vec{V}$ à travers cette surface, soit :

$$Q=\iint_S \vec{V}\cos\theta\,dS \quad \text{(il s'agit du débit volumique)}$$

ou

$$Q=\iint_S(\alpha u+\beta v+\gamma w)\,dS$$

α, β, γ, désignant les cosinus directeurs de la normale à dS au point M.

Si la surface S est fermée et limite un volume W, une autre expression du débit Q à travers cette surface sera donnée par la *formule de Green* :

$$Q=\iint_S V\cos\theta\,dS=\iiint_W \operatorname{div}\vec{V}\,dW$$

La divergence du vecteur $\vec{V}$ apparaît donc comme la différence entre le flux entrant et le flux sortant du volume W considéré.

Dans le cas d'un fluide incompressible, le flux ou débit total Q à travers une telle surface fermée est évidemment nul, le volume fluide W limité par cette surface étant immuable.

On a donc : $\operatorname{div}\vec{V}=0$ et on retrouve ainsi l'équation de continuité pour un fluide incompressible.

Forme particulière de l'équation de continuité dans un écoulement liquide où toutes les vitesses sont normales à une section transversale plane du courant et égales entre elles

Si, comme c'est fréquemment le cas, le mouvement du liquide s'effectue de telle façon que, dans une section transversale plane, toutes les vitesses soient normales à ce plan et égales entre elles, l'équation de continuité peut se mettre sous la forme suivante (fig. IV.2.3) :

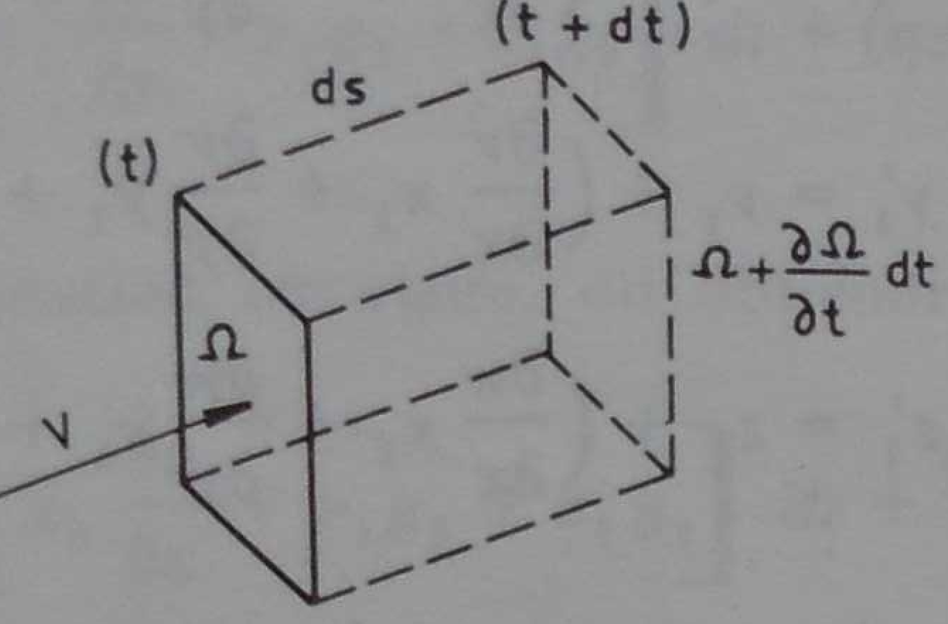


Fig. IV.2.3

Soit $\vec{V}$ la vitesse commune des molécules traversant, au temps t, la section plane dont l'aire, à cet instant, a pour valeur Ω.

Introduisons le débit Q à travers la section Ω, c'est-à-dire le volume de liquide qui traverse cette section dans l'unité de temps :

$$Q = V\Omega$$

Le volume qui *entre* dans la section Ω pendant le temps dt est donc égal à $Q\,dt$.

Celui qui, pendant le même temps, *sort* par la section infiniment voisine et distante de la première de ds est :

$$Q\,dt + \frac{\partial Q}{\partial s}\,ds\,dt$$

La différence de ces deux expressions, soit :

$$-\frac{\partial Q}{\partial s}\,ds\,dt$$

représente l'accroissement de volume entre les deux sections.

Puisque la masse volumique ρ est supposée constante, cet accroissement de volume ne peut être égal qu'au produit de ds par l'accroissement de section pendant le temps dt, ce qui donne la relation :

$$-\frac{\partial Q}{\partial s}\,ds\,dt = \frac{\partial \Omega}{\partial t}\,dt\,ds$$

Autrement dit le débit varie dans l'espace (le long de s) pendant que la section varie dans le temps.

L'équation précédente s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0} \qquad [IV.2.3]$$

qui est, dans ce cas, l'autre forme cherchée de l'équation de continuité.

IV.3. MOUVEMENTS ET DÉFORMATIONS D'UN VOLUME ÉLÉMENTAIRE DE FLUIDE

Proposons-nous d'exprimer mathématiquement les mouvements et déformations d'un élément de fluide en fonction des composantes u, v, w de la vitesse à un instant donné au centre de gravité G de l'élément de fluide considéré (fig. IV.3.1).

Considérons des axes issus de G et respectivement parallèles aux axes fixes $Oxyz$; ces axes $G\,x_1 y_1 z_1$ sont donc mobiles mais conservent une orientation invariable.

Un point quelconque M de la particule a une position définie à l'instant t, par ses coordonnées infiniment petites x_1, y_1, z_1 par rapport au trièdre mobile de sommet G.

La vitesse $\vec{V}_1$ de M a pour composantes u_1, v_1, w_1 par rapport aux axes fixes $Oxyz$. Ces composantes ont donc pour valeur :

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

mais, compte tenu de nos notations :

$$dx = x_1$$
$$dy = y_1$$
$$dz = z_1$$

Donc :

$$\vec{V}_1 \begin{cases} u_1 = u + \dfrac{\partial u}{\partial x} x_1 + \dfrac{\partial u}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial u}{\partial z} z_1 \\ v_1 = v + \dfrac{\partial v}{\partial x} x_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial v}{\partial z} z_1 \\ w_1 = w + \dfrac{\partial w}{\partial x} x_1 + \dfrac{\partial w}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial w}{\partial z} z_1 \end{cases}$$

A l'instant $t + dt$, le point G vient en G', de coordonnées :

$$\overrightarrow{OG'} \begin{cases} x + u\, dt \\ y + v\, dt \\ z + w\, dt \end{cases}$$

Ces coordonnées sont obtenues en projetant sur les axes fixes l'égalité vectorielle

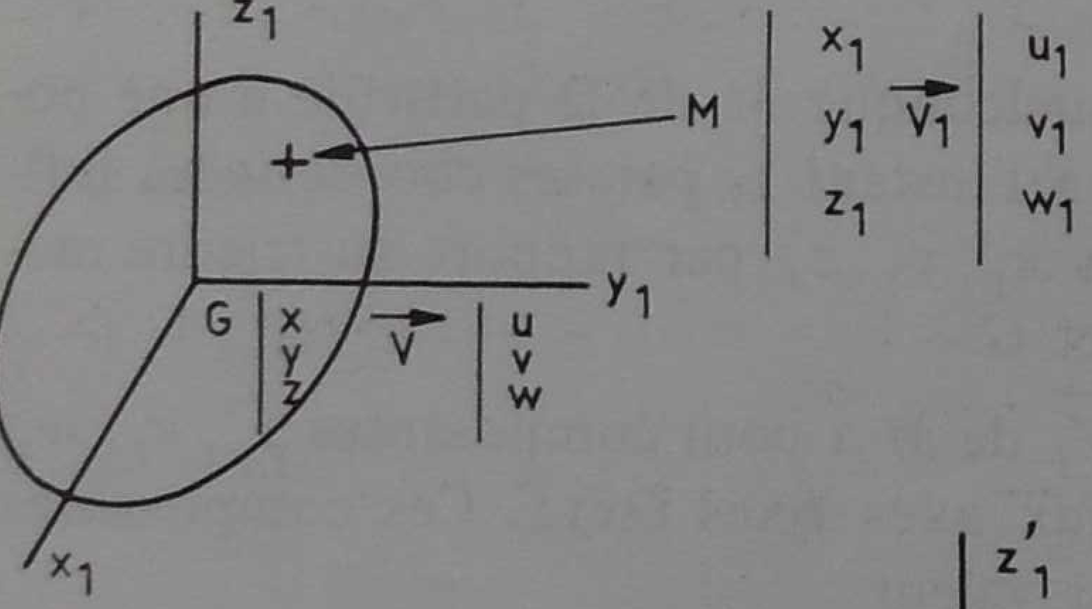
$$\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GG'}$$

Au même instant $t + dt$, le point M est en M' dont les coordonnées, prises par rapport aux axes fixes, sont obtenues en projetant sur ces axes l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MM'}$$

soit

$$\overrightarrow{OM'} \begin{cases} x + x_1 + u_1\, dt \\ y + y_1 + v_1\, dt \\ z + z_1 + w_1\, dt \end{cases}$$



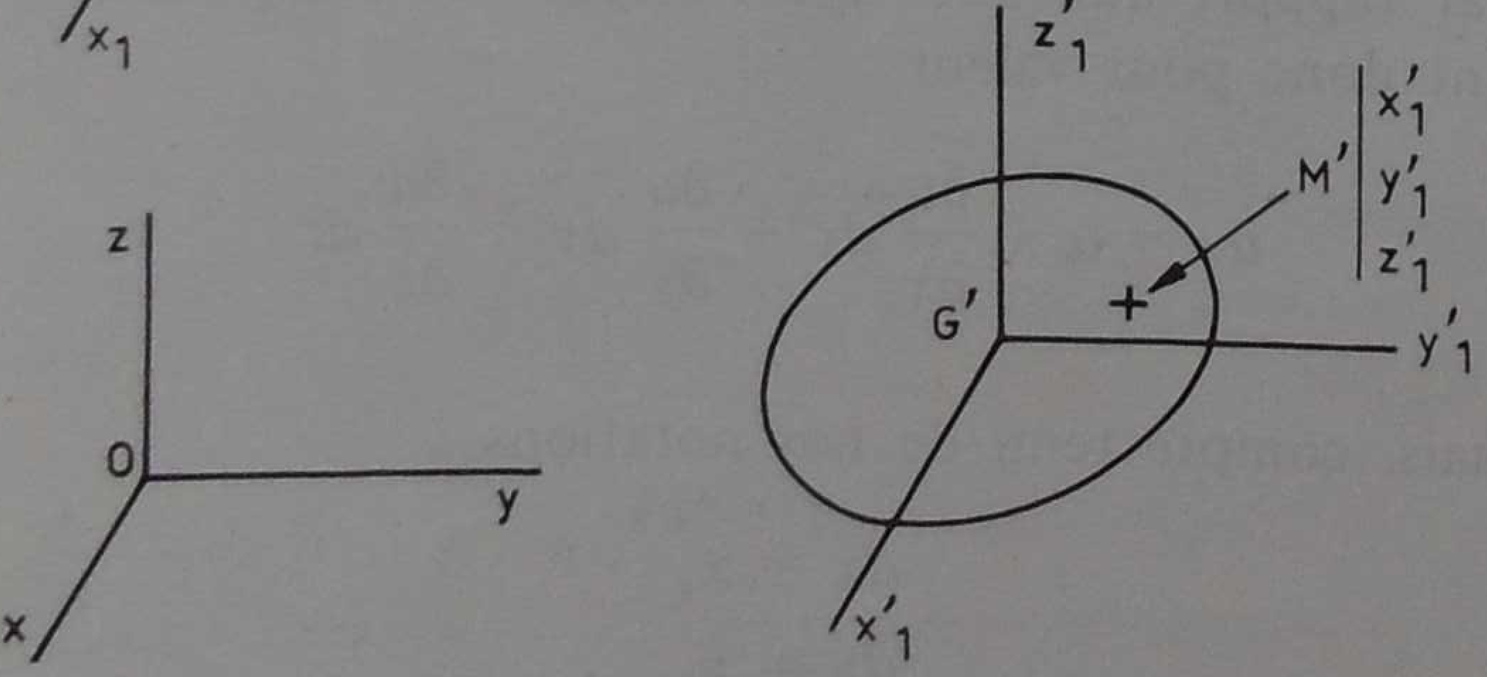


Fig. IV.3.1

Les coordonnées de M' par rapport aux axes $G'x'_1y'_1z'_1$, c'est-à-dire par rapport à la position des axes mobiles au même instant $t + dt$ s'obtiendront en projetant sur les axes considérés l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{G'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OG'}$$

soit

$$x'_1 = x + x_1 + u_1\, dt - (x + u\, dt)$$
$$x'_1 = x_1 + (u_1 - u)\, dt$$

$$\overrightarrow{G'M'} \begin{cases} x'_1 = x_1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} x_1 + \dfrac{\partial u}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial u}{\partial z} z_1\right) dt \\ y'_1 = y_1 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} x_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial v}{\partial z} z_1\right) dt \\ z'_1 = z_1 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} x_1 + \dfrac{\partial w}{\partial y} y_1 + \dfrac{\partial w}{\partial z} z_1\right) dt \end{cases}$$

Posons :

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ g_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ g_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [IV.3.1]$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad [IV.3.2]$$

ces six valeurs sont obtenues par permutation circulaire en dérivant le tableau des composantes suivant le schéma ci-dessous :

$$\begin{matrix} x & y & z \\ u & v & w \end{matrix}$$

Eliminons $\partial u/\partial y$ et $\partial u/\partial z$ de l'expression de x'_1 en écrivant

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g_3 - \zeta$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = g_2 + \eta$$

et en remplaçant dans x_1' qui s'écrit ainsi :

$$x_1' = x_1 + \left[\frac{\partial u}{\partial x} x_1 + y_1(g_3 - \zeta) + z_1(g_2 + \eta)\right] dt$$

ou :

$$x_1' = x_1 + \left[x_1 \frac{\partial u}{\partial x} + y_1 g_3 + z_1 g_2\right] dt + (\eta z_1 - \zeta y_1)\, dt\,.$$

Par permutation circulaire, on obtiendra, en définitive :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \left[x_1 \frac{\partial u}{\partial x} + y_1 g_3 + z_1 g_2\right] dt + (\eta z_1 - \zeta y_1)\, dt \\ y_1' &= y_1 + \left[y_1 \frac{\partial v}{\partial y} + z_1 g_1 + x_1 g_3\right] dt + (\zeta x_1 + \xi z_1)\, dt \\ z_1' &= z_1 + \left[z_1 \frac{\partial w}{\partial z} + x_1 g_2 + y_1 g_1\right] dt + (\xi y_1 + \eta x_1)\, dt \end{aligned}\right\} \quad [IV.3.3]$$

Posons :

$$2\Phi(x_1, y_1, z_1) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} x_1^2 + \frac{\partial v}{\partial y} y_1^2 + \frac{\partial w}{\partial z} z_1^2 + 2g_1 y_1 z_1 + 2g_2 z_1 x_1 + 2g_3 x_1 y_1$$

qui est l'équation d'une quadrique rapportée à son centre. C'est la *quadrique des déformations.*

On en déduit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} x_1 + g_2 z_1 + g_3 y_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{\partial v}{\partial y} y_1 + g_1 z_1 + g_3 x_1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = \frac{\partial w}{\partial z} z_1 + g_1 y_1 + g_2 x_1$$

Les équations [*IV.3.3*] s'écrivent alors :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dt + (\eta z_1 - \zeta y_1)\, dt \\ y_1' &= y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dt + (\zeta x_1 - \xi z_1)\, dt \\ z_1' &= z_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} dt + (\xi y_1 - \eta x_1)\, dt \end{aligned}\right\} \quad [IV.3.4]$$

Ces expressions montrent clairement *comment peut se décomposer le mouvement et les déformations élémentaires d'une particule fluide.*

1 — Les *premiers termes* du second membre : x_1, y_1, z_1 s'ils existent seuls montreraient qu'il n'y a pas de mouvement relatif de M' par rapport à M. A ces termes correspond donc pour la particule, un mouvement de *translation* de vitesse u, v, w égale à celle de G, soit $\vec{V}_1 = \vec{V}$.

2 — Les *seconds termes* :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dt \;,\; \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} dt \;,\; \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} dt$$

correspondent à un mouvement dont la vitesse a pour composantes suivant les axes $G x_1 y_1 z_1$ (ou les axes parallèles $Oxyz$) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \;,\; \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \;,\; \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}$$

Ces vitesses dérivent donc d'un potentiel représenté par la fonction Φ définie précédemment et qui est appelée la *fonction de déformation*, soit $\vec{V}_2 = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$.

Analysons plus en détail cette déformation particulière qu'on appelle une *distorsion.*

Dans l'expression de x_1', (équation [*IV.3.4*]), le terme correspondant est

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} x_1 + g_2 z_1 + g_3 y_1$$

Il comprend deux parties :

1) $\frac{\partial u}{\partial x} x_1$ $\left(\text{et les termes analogues } \frac{\partial v}{\partial y} y_1 \text{ et } \frac{\partial w}{\partial z} z_1\right)$ sont des *vitesses de déformation linéaire* ou *vitesses de dilatation.* Si, par exemple, à l'instant t la face $ABCD$ d'un parallélépipède élémentaire de fluide est dans le plan xOy,

(fig. IV.3.2), à l'instant $t + dt$ elle est venue en $A'B'C'D'$;

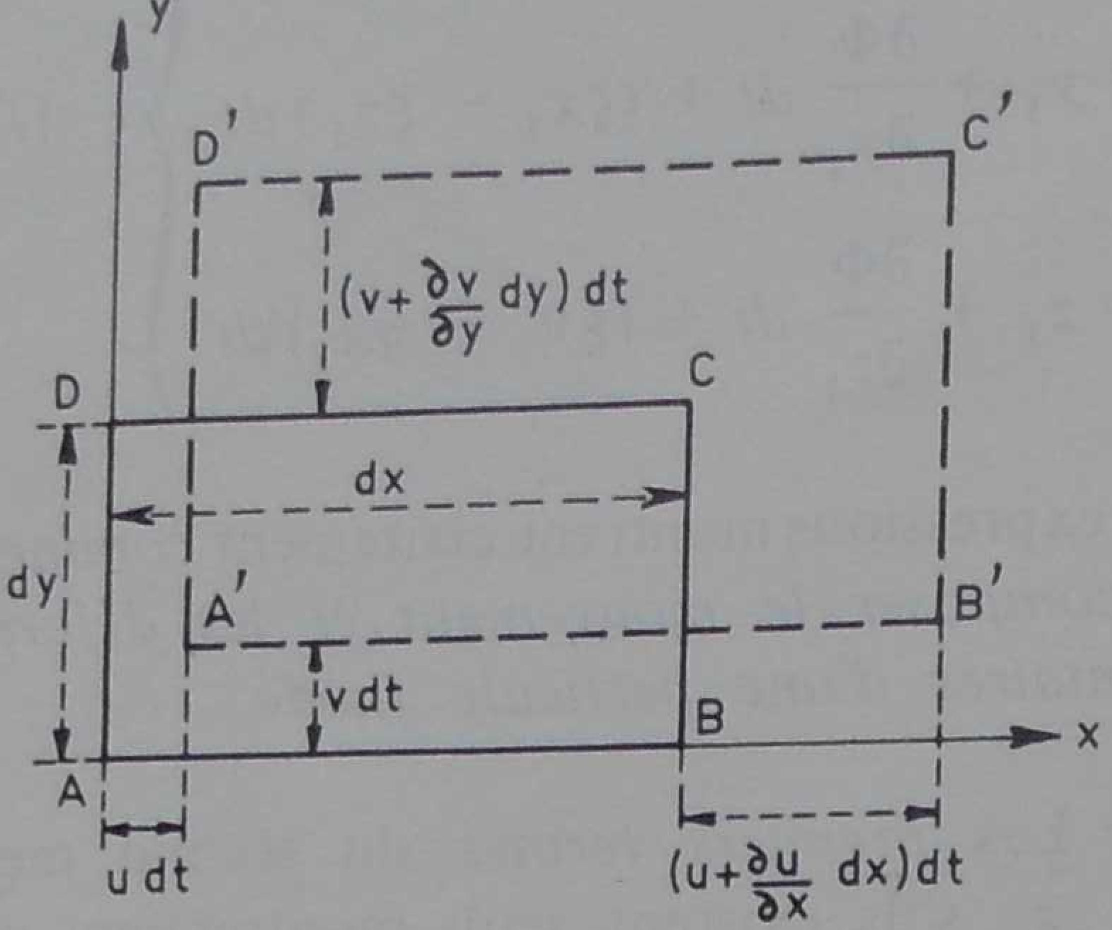


Fig. IV.3.2

la face AB parallèle à Ox a subi un allongement

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dt$$

dans la direction Ox et la face AD parallèle à Oy a subi un allongement

$$\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\,dt$$

dans la direction Oy. Les termes

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \frac{\partial u}{\partial x}\,x_1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \frac{\partial v}{\partial y}\,y_1$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial z}\,dz = \frac{\partial w}{\partial z}\,z_1$$

sont donc des vitesses de dilatation ou de déformation linéaire.

2) Les termes $g_2 z_1$ et $g_3 y_1$ sont des *vitesses de déformation angulaire*. La face $ABCD$ du parallélépipède élémentaire de fluide se déforme en $A''B''C''D''$ (fig. IV.3.3) ; l'angle

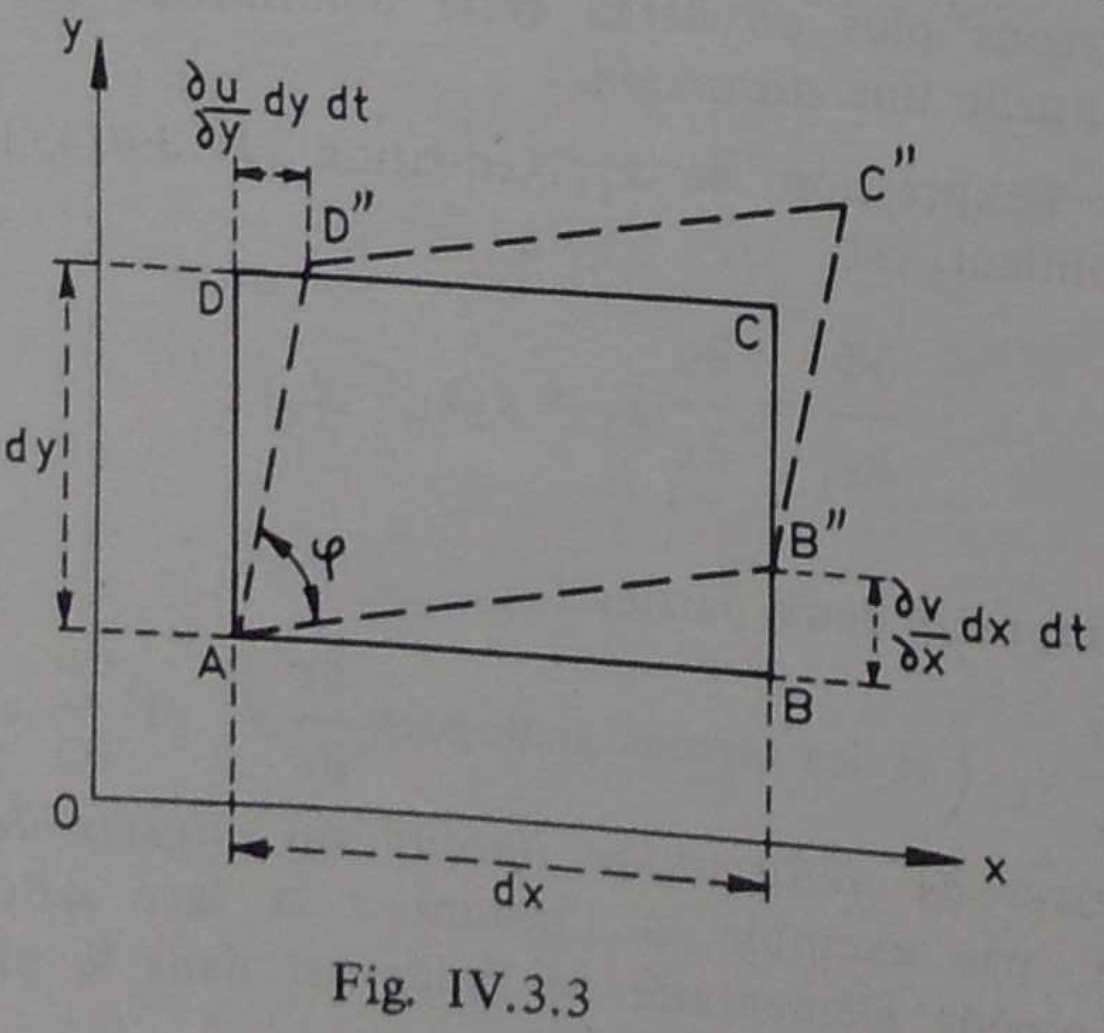


Fig. IV.3.3

droit $\widehat{BAD}$ devient $\widehat{B''A''D''} = \varphi$ et la vitesse de variation de l'angle droit, qu'on peut appeler *vitesse de déformation angulaire* ou *vitesse de glissement* est donc

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

L'angle droit a varié de

$$\epsilon = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dt = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dt = 2\,g_3\,dt$$

Les termes g_1, g_2 et g_3 correspondent donc à des vitesses de demi-glissement ou de variation du demi-angle droit.

En notation tensorielle, le terme $\overrightarrow{\text{grad}}\ \Phi$ peut donc s'exprimer par un tenseur symétrique $\bar{\bar{t}}_d$ appelé *"tenseur de la déformation"* :

$$\bar{\bar{t}}_d = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & g_3 & g_2 \\ g_3 & \frac{\partial v}{\partial y} & g_1 \\ g_2 & g_1 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{matrix} \right\|$$

et le vecteur $\vec{H} = \bar{\bar{t}}_s \,.\, \overrightarrow{GM}$ correspond à une déformation pure ou *distorsion*. Cette déformation conserve le parallélisme des droites : par exemple, un parallélépipède rectangle se transformera en un autre parallélépipède d'angle différent, une sphère se transformera en ellipsoïde.

3 — Les *derniers termes* du second membre des équations $[IV.3.4]$ correspondent à un mouvement dont la vitesse a pour composantes :

$$\vec{V}_3 \begin{cases} \eta z_1 - \zeta y_1 \\ \zeta x_1 - \xi z_1 \\ \xi y_1 - \eta x_1 \end{cases}$$

soit $\vec{V}_3 = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$.

Il s'agit donc d'un mouvement de *rotation en bloc* de la particule autour d'un axe passant par G avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)$.

Ce vecteur $\vec{\Omega}$ est appelé le *vecteur tourbillon* au point considéré. On vérifie aisément qu'il est égal à la moitié du rotationnel :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\text{rot}\,\vec{V}$$

Le vecteur tourbillon est donc le vecteur de la rotation instantanée que prendrait la particule fluide considérée si, à cet instant, elle était brusquement solidifiée, la masse de fluide qui l'entoure étant anéantie.

En définitive, si on désigne par $\vec{V}'$ la vitesse du point M', les équations [*IV.3.4*] peuvent, suivant Helmoltz, se condenser en une équation vectorielle unique :

$$\boxed{\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\text{grad}}.\ \Phi + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}}$$

ou

$$\boxed{\vec{V}' = \vec{V} + \bar{\bar{t}}_d\ .\ \vec{GM} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}}$$

Remarques :

1 — Comme nous l'avons souligné, la déformation d'une particule liquide autour d'un point est caractérisée par la fonction de déformation Φ. On doit noter ici une *différence fondamentale entre les liquides supposés incompressibles et les gaz.*

Pour un liquide incompressible, div. $\vec{V} = 0$ et les trois composantes de l'extension suivant les trois axes issus du centre de la particule et parallèles aux axes de coordonnées ne peuvent, en aucun cas, être de même signe.

Pour un gaz, au contraire, les trois extensions peuvent être de même signe ; en particulier, il peut y avoir extension du gaz dans toutes les directions.

2 — On notera la *correspondance des notations* utilisées ici en *Mécanique des liquides* avec les notations indicielles utilisées en *Mécanique des matériaux* dans la théorie de l'élasticité :

Mécanique des liquides

Composantes du *vecteur vitesse* en un point :

$$u\ ,\ v,\ w$$

Composantes du *tenseur de la déformation* :

$$\bar{\bar{t}}_d = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & g_3 & g_2 \\ g_3 & \dfrac{\partial v}{\partial y} & g_1 \\ g_2 & g_1 & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

(tenseur symétrique)

Composante du *vecteur tourbillon* $\vec{\Omega}$:

$$\xi\ ,\ \eta\ ,\ \zeta$$

Mécanique des matériaux

Composantes du *déplacement* d'un point :

$$u_i (i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3)$$

Composantes du *tenseur de la déformation* :

$$\begin{Vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{Vmatrix}$$

avec $e_{ij} = e_{ji}$

$$(i\ ,\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3)$$

(tenseur symétrique)

Composantes de la *rotation* en un point :

$$p_{ij} = -\ p_{ji} \qquad (i\ ,\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3)$$

(tenseur anti-symétrique)

Ce double système de notations, conformes aux prescriptions de l'AFNOR, n'est toutefois pas équivalent puisqu'en Mécanique des liquides u, v et w représentent les composantes de la vitesse, alors qu'en Mécanique des matériaux $u_i\ (i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3)$ représentent les composantes du déplacement infinitésimal d'un point.

3 — *Circulation — Théorème de Stokes*

Rappelons que la circulation Γ de la vitesse $\vec{V}$ le long d'un contour quelconque C tracé dans le fluide est, par définition :

$$\Gamma = \int_C \vec{V}\ .\ \vec{dl}$$

$$\Gamma = \int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz)\ .$$

On sait que la circulation Γ varie avec le chemin suivi, mais que si l'expression $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est une différentielle totale exacte, Γ ne dépend plus que des points extrêmes et non du chemin suivi entre ceux-ci. Dans ce cas, la circulation Γ le long d'un contour fermé est nulle.

Rappelons que la *formule de Stokes* permet d'écrire, le long d'un contour fermé C limitant une surface S sur laquelle u, v et w ont partout des dérivées continues en $x\ ,\ y\ ,\ z$:

$$\int_C (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

$$= \iint_S \left[\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\sigma$$

α, β et γ représentant les cosinus directeurs de la normale $\vec{N}$ à l'élément de surface $d\sigma$ découpé sur la surface S limitant le contour C (fig. IV.3.4).

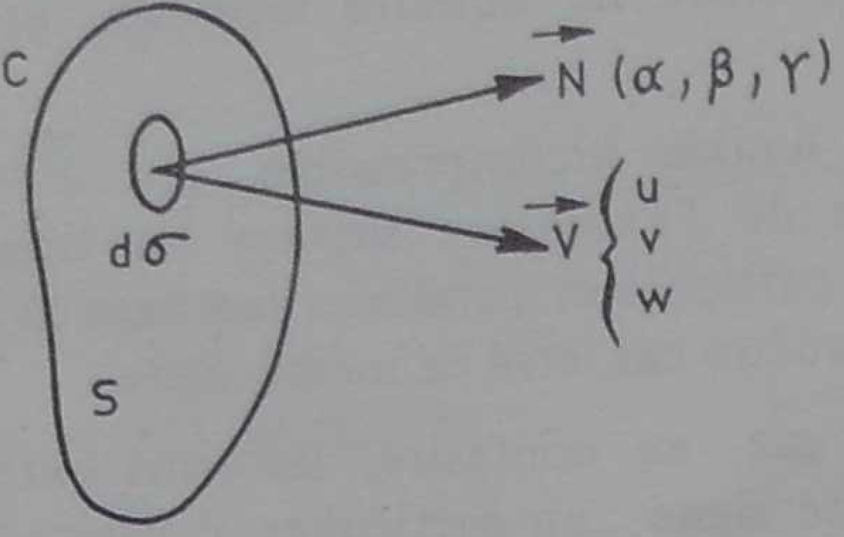


Fig. IV.3.4

Compte tenu des expressions des composantes ξ, η, ζ, la formule de Stokes s'écrit encore :

$$\Gamma = 2 \iint_S (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\sigma$$

Il en résulte le *théorème de Stokes* : La circulation des vitesses le long d'un contour fermé est égale au double du flux du vecteur tourbillon à travers ce contour.

Les vecteurs tourbillon $\vec{\Omega}$ en chaque point de l'espace définissent un champ composé de lignes de vortex, tangentes en chaque point au vecteur tourbillon. Ces lignes de vortex jouent donc, vis-à-vis des vecteurs tourbillon, le même rôle que les lignes de courant vis-à-vis des vecteurs vitesse. L'analogie se poursuit en définissant des filaments de vortex (homologues des tubes de courant) et la circulation élémentaire $2\Gamma\Delta\omega$ (homologue du débit d'un tube de courant de section $\Delta\omega$).

IV.4. ÉCOULEMENTS ROTATIONNELS ET IRROTATIONNELS

L'existence du vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ permet de définir deux grandes catégories d'écoulements :

1 — Les écoulements *rotationnels* pour lesquels le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ n'est pas nul, ou rot $\vec{V} \neq 0$.

2 — Les écoulements *irrotationnels* pour lesquels le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul en tous les points de de l'écoulement, ou rot $\vec{V} = 0$.

Exemples d'écoulements plans rotationnels et irrotationnels

1) *Ecoulement rectiligne*

Supposons, sur toute la largeur du courant, une distribution uniforme des vitesses (fig. IV.4.1).

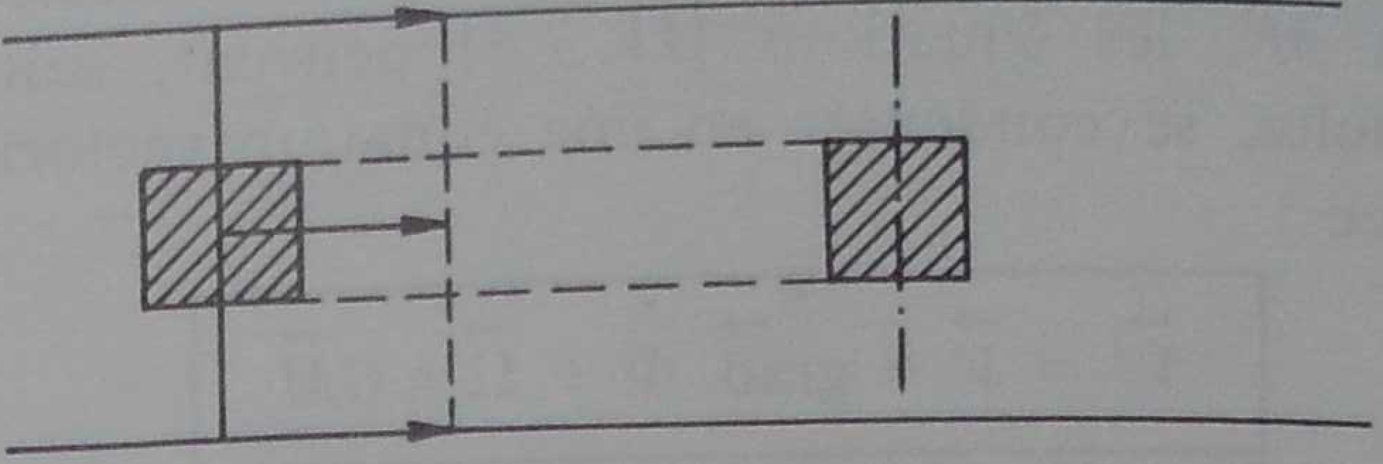


Fig. IV.4.1 – Ecoulement plan rectiligne irrotationnel

On voit nettement qu'une particule de forme rectangulaire reste rectangulaire durant l'écoulement, on a donc affaire à un pur mouvement de translation et l'écoulement est *irrotationnel*.

Si maintenant on suppose une distribution inégale des vitesses dans une section transversale du courant (canal, canalisation, etc. . .) (fig. IV.4.2) il est visible que la particule rectangulaire va subir une rotation d'ensemble. L'écoulement est donc *rotationnel*.

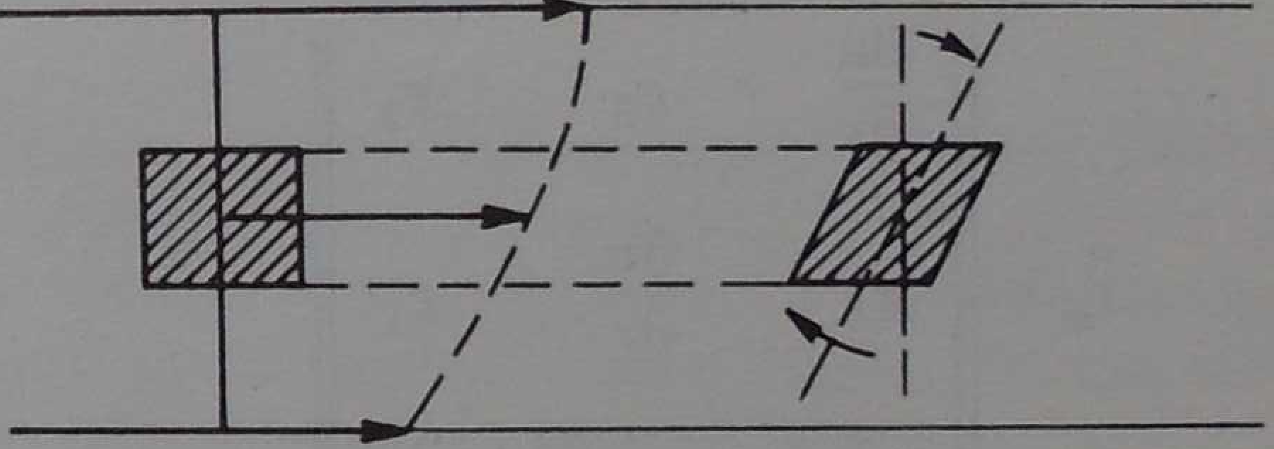


Fig. IV.4.2 – Ecoulement plan rectiligne rotationnel

2) *Ecoulement curviligne*

Supposons des trajectoires circulaires et concentriques autour de O.

Dans le premier cas (fig. IV.4.3) supposons que les vitesses varient en raison directe de la distance à O, soit :

$$V = Kr = \omega r$$

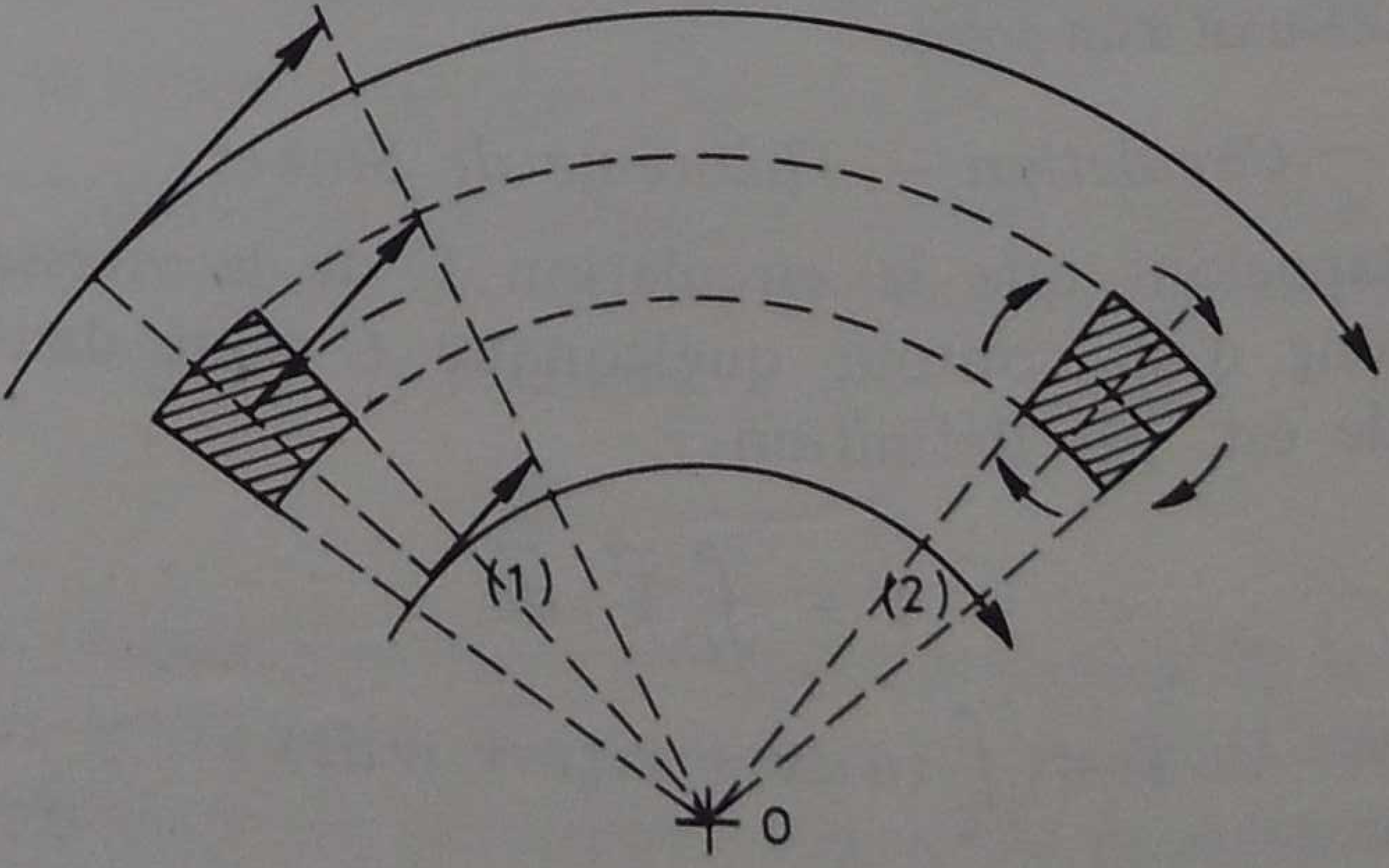


Fig. IV.4.3 – Ecoulement curviligne plan rotationnel

On a alors affaire à un mouvement de rotation en bloc et la particule en position (2) à la même forme qu'en (1) mais tous ses côtés ont pivoté dans le même sens, ce qui caractérise la rotation élémentaire que nous avons analysée plus haut ; on a donc affaire à un écoulement *rotationnel*.

Supposons maintenant (fig. IV.4.4) que la distribution des vitesses le long d'un rayon vecteur soit l'inverse du cas précédent, les plus fortes vitesses se rencontrant du côté intérieur de la courbe.

Au cours de son déplacement de (1) en (2) une particule limitée en (1) par deux lignes de courant et deux normales aux lignes de courant se déforme, mais il y a rotation de sens opposé pour les côtés parallèles et normaux aux vitesses ; le côté le plus proche du centre de rotation avance plus vite que l'autre, la particule est devenue un losange et, pour une distribution convenable des vitesses, on conçoit que les diagonales de la particule restent parallèles au cours du déplacement de (1) en (2). On n'a plus affaire à une rotation de la particule sur elle-même mais à une déformation angulaire ou *distorsion*. L'écoulement considéré peut donc être *irrotationnel*, sous réserve d'une distribution convenable des vitesses, comme nous le montrerons plus loin (§ IV.6.4).

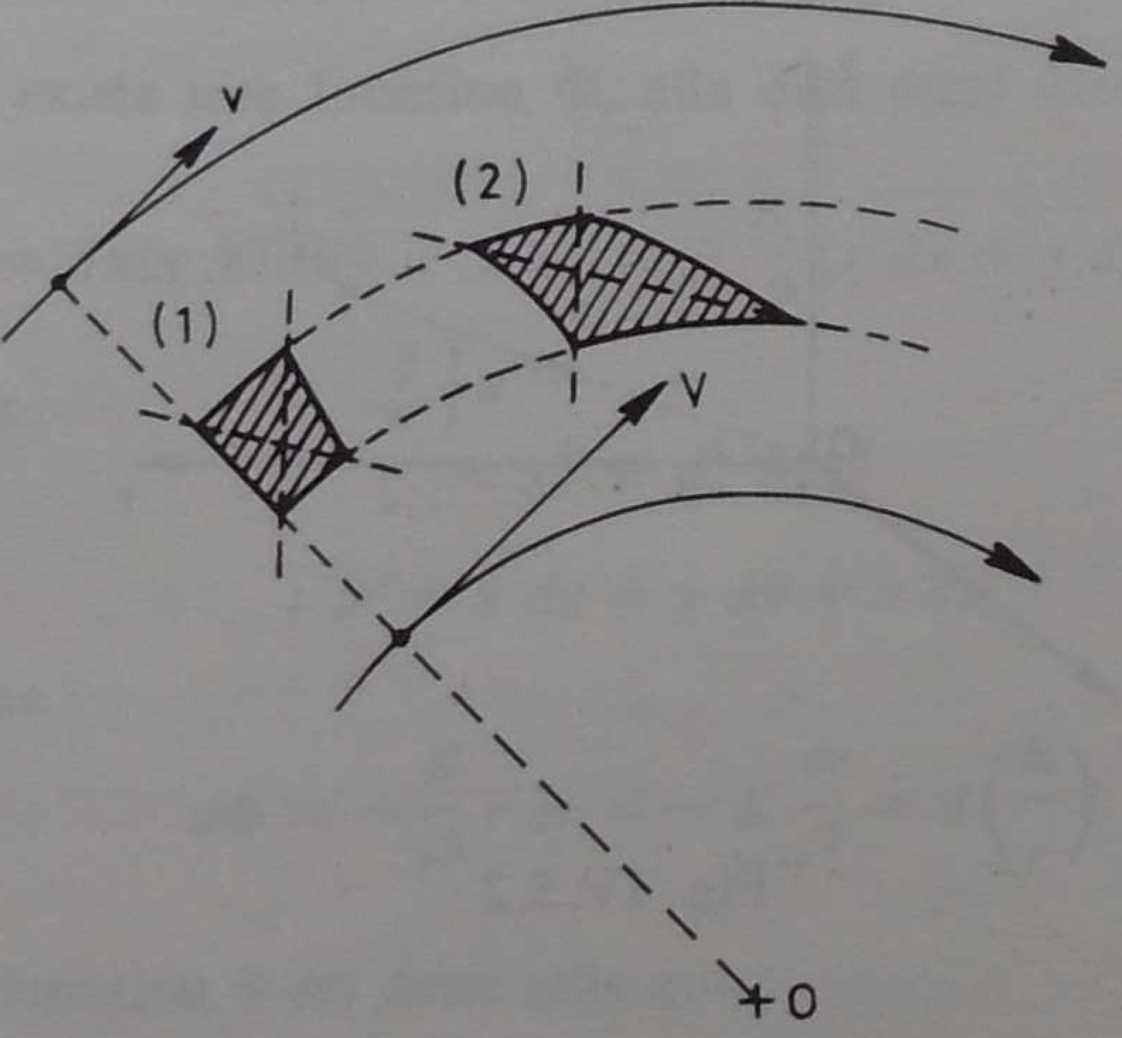


Fig. IV.4.4 – Ecoulement curviligne plan irrotationnel

En somme, on peut très bien voir quelque chose tourner sans que le mouvement soit rotationnel pour autant. Ainsi les nacelles suspendues aux grandes roues des fêtes foraines ne tournent pas par rapport au sol ni par rapport aux nacelles voisines, bien que la roue porteuse tourne effectivement.

Les *écoulements irrotationnels* présentent une grande importance en hydraulique. En effet, nous démontrerons plus loin que ces écoulements s'effectuent sans aucun échange d'énergie entre les particules liquides (nous les appellerons, pour cette raison, des *écoulements conservatifs*). On conçoit d'ailleurs qu'un échange d'énergie entre des particules situées sur des trajectoires voisines ne puisse se réaliser que si des forces excentrées (frottements ou forces d'inertie) produisent un travail ; simultanément, de telles forces provoqueront une rotation élémentaire des particules.

Cette rotation élémentaire, caractérisée par le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$, se rencontrera donc chaque fois que l'écoulement considéré entraînera une dissipation d'énergie (perte de charge) ou une transformation de l'énergie de la veine liquide en énergie mécanique ou inversement (turbines, hélices, pompes). Au contraire on cherchera à réaliser un écoulement irrotationnel ($\vec{\Omega} = 0$) lorsqu'on désirera conduire le liquide avec des pertes nulles ou les plus faibles possibles, ce qui impliquera, notamment, que les forces de viscosité seront négligeables.

En raison de l'importance des écoulements irrotationnels, nous les étudierons de manière plus approfondie.

IV.5. ÉTUDE DES ÉCOULEMENTS IRROTATIONNELS

IV.5.1. Existence d'un potentiel des vitesses

L'écoulement considéré étant irrotationnel, $\vec{\Omega} = 0$, c'est-à-dire $\xi = \eta = \zeta = 0$.

Les équations [*IV.3.2*] montrent qu'on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

Ces relations expriment que les composantes u, v et w du vecteur $\vec{V}$ sont les dérivées partielles par rap-

port à x, y et z d'une fonction $\Phi(x, y, z)$ appelée *potentiel des vitesses*(1).

On a donc :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ w = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}$$

ou

$$\boxed{\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}.\ \Phi} \qquad [IV.5.1]$$

L'écoulement comporte donc un potentiel des vitesses, d'où l'expression *"écoulement à potentiel des vitesses"* ou *"écoulement potentiel"* qui est fréquemment adoptée pour désigner un écoulement irrotationnel.

Les *surfaces équipotentielles* sont telles que la fonction Φ conserve la même valeur en tous les points de chacune d'elles ; leur équation est donc :

$$\Phi(x, y, z) = C^{te} \qquad [IV.5.2]$$

La comparaison des équations [*IV.5.1*] et [*IV.5.2*] montre que la vitesse en un point est dirigée suivant la normale à la surface équipotentielle passant par ce point.

Les *lignes de courant*, tangentes au vecteur vitesse, sont donc les trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles.

Les écoulements irrotationnels ou à potentiel des vitesses sont étudiés suivant trois catégories de méthodes :

— Méthodes analytiques

— Méthodes graphiques

— Méthodes analogiques

Nous les examinerons successivement.

IV.5.2. Etude analytique des écoulements irrotationnels

En faisant intervenir l'équation de continuité pour un liquide incompressible :

$$\text{div}\ \vec{V} = 0$$

il vient : $\text{div}\ (\overrightarrow{\text{grad}}.\ \Phi) = 0$ ou $\Delta\Phi = 0$.

C'est l'équation de Laplace sans second membre.

La fonction potentielle Φ est donc une *fonction harmonique* et l'étude des écoulements à potentiel des vitesses des liquides incompressibles se ramène donc à l'étude analytique des fonctions harmoniques.

Nous distinguerons deux cas :

— Cas général des écoulements à trois dimensions,

— Cas particulier des écoulements plans.

IV.5.2.1. *Cas général des écoulements à trois dimensions*

Le traitement analytique de l'équation de Laplace à trois variables n'est possible que dans certains cas particuliers. A titre d'exemple, nous étudierons l'*écoulement par un orifice percé dans la paroi d'un réservoir de grandes dimensions* (fig. IV.5.2).

Soit xOy le plan de la paroi et O le centre de l'orifice. Si nous négligeons les frottements, nous pouvons admettre que l'appel de l'orifice se fait de manière uniforme dans toute la masse liquide, les trajectoires étant des droites passant par O et les surfaces d'égale vitesse des demi-sphères de centre O.

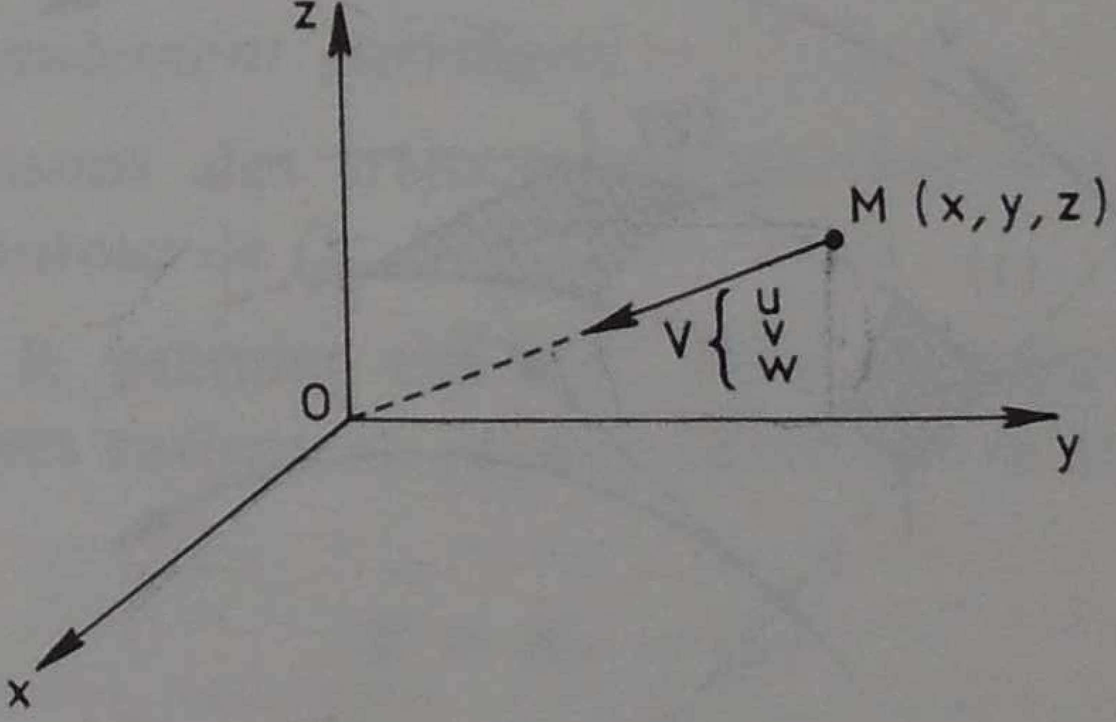


Fig. IV.5.2

Cette dernière condition donne la relation suivante pour les points M situés à la distance r de O :

$$2\pi r^2 V = Q$$

$$V = \frac{Q}{2\pi r^2} = \frac{K}{r^2}$$

en posant :

$$\frac{Q}{2\pi} = K = C^{te} \quad \text{(régime permanent).}$$

---

(1) La fonction Φ potentiel des vitesses n'a évidemment aucun rapport avec la fonction de déformation Φ introduite au § IV.3.

Les vitesses varient donc en raison inverse du carré de la distance à l'orifice O à l'intérieur de la masse liquide[1].

Cherchons si l'écoulement considéré est à potentiel des vitesses, c'est-à-dire s'il existe une fonction Φ (fonction potentielle) telle que :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

avec
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = u \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = v \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = w \end{array}\right.$$

donc
$$d\Phi = u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

Les cosinus directeurs de $\vec{V}$ étant $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}$, ses composantes ont pour expression :

$$u = -\frac{x}{r}\frac{K}{r^2} = -K\frac{x}{r^3}$$

$$v = -K\frac{y}{r^3}$$

$$w = -K\frac{z}{r^3}$$

S'il existe une fonction Φ, elle doit donc être telle que :

$$d\Phi = u\,dx + v\,dy + w\,dz = -\frac{K}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$$

Mais :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

Donc :

$$d\Phi = -\frac{K}{r^3} r\,dr = -K\frac{dr}{r^2} = d\left(\frac{K}{r}\right)$$

La fonction Φ est donc telle que :

$$d\Phi = u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\left(\frac{K}{r}\right)$$

$$\Phi = \frac{K}{r} + C^{te}.$$

Le mouvement considéré est donc un mouvement à potentiel des vitesses, ce potentiel a pour expression :

$$\Phi = \frac{K}{r} + C^{te}.$$

Les surfaces équipotentielles Φ = constante (soit $r = C^{te}$) sont des demi-sphères de centre O.

IV.5.2.2. *Cas particulier des écoulements plans — Fonction de courant*

On a très souvent affaire, dans la pratique, à des écoulements à deux dimensions appelés encore *écoulements plans*.

Considérons, par exemple, un courant liquide animé à l'infini d'une vitesse uniforme $\vec{V}_0$ parallèle au plan xOy, attaquant un obstacle immobile constitué par une surface cylindrique dont la directrice est la courbe C contenue dans le plan xOy et dont les génératrices sont perpendiculaires à ce plan (fig. IV.5.2.1.1)

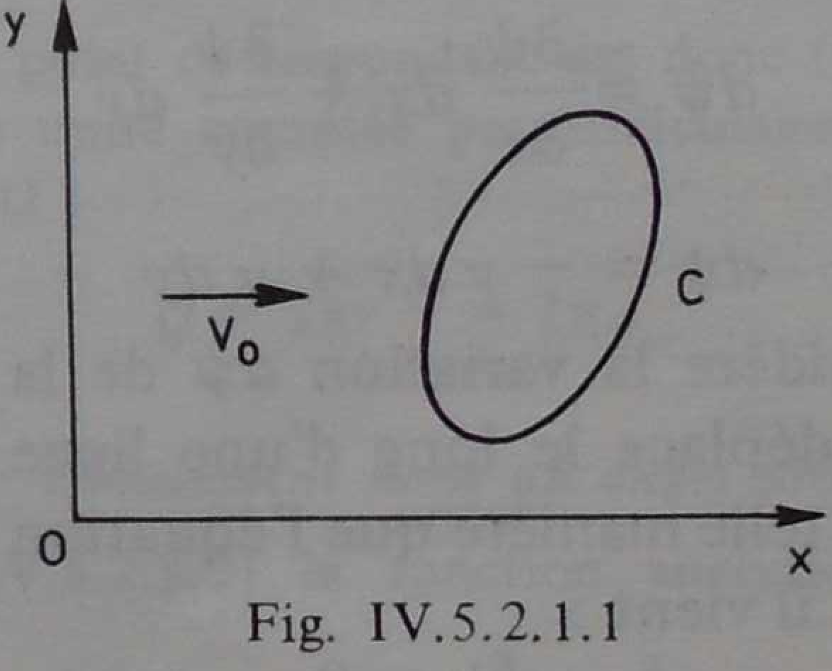


Fig. IV.5.2.1.1

Par raison de symétrie, les vitesses en tous les points du fluide sont parallèles au plan xOy et, dans tous les plans parallèles à xOy, le mouvement s'effectue de manière identique. On a donc affaire à un écoulement plan et il suffit d'étudier le mouvement à deux dimensions x, y, qui s'effectue dans le plan xOy.

Il n'y a plus que deux variables et l'étude analytique de l'équation de Laplace sans second membre est alors plus facile.

On a, en effet

$$w = 0$$

et l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Considérons alors un *déplacement infiniment petit* $MM' = ds$ le long d'une ligne de courant (fig.

---

(1) On peut rapprocher cet écoulement de celui qu'on réalise lors de l'évacuation des eaux chargées à l'aide d'orifices de dévasement ou de vannes de fond percés à la base d'un barrage afin de lutter contre l'engravement de la retenue. La remarque précédente montre que l'efficacité du système est assez médiocre en raison de la rapide diminution de la vitesse d'entraînement des vases dès qu'on s'éloigne de l'orifice vers l'amont.

IV.5.2.1.2). Les composantes de ds seront donc dx et dy.

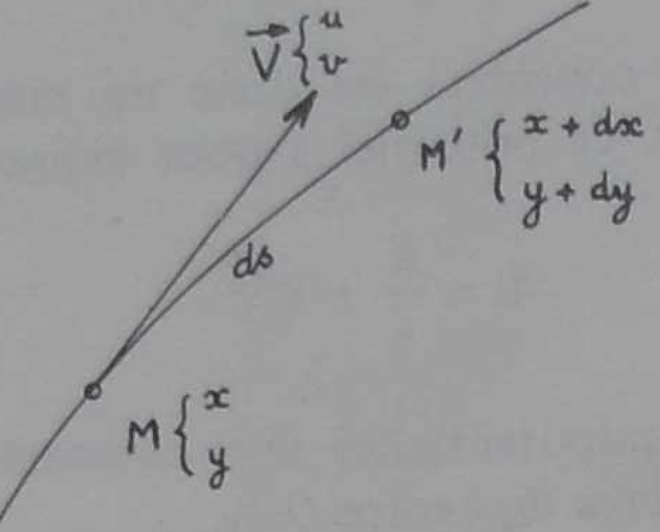


Fig. IV.5.2.1.2

La vitesse étant tangente à la ligne de courant, l'équation différentielle de la ligne de courant sera :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

ou :

$$u\,dy - v\,dx = 0 \qquad [IV.5.2.1.1]$$

Soit $\psi(x, y)$ une fonction telle que :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

d'où :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy$$

Si on considère la variation $d\psi$ de la fonction ψ lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de courant, c'est-à-dire de telle manière que l'équation [*IV.5.2.1.1*] soit satisfaite, il vient :

$$d\psi = 0$$

$$\psi(x, y) = C^{te}$$

La fonction ψ ainsi définie est la *fonction de courant* parce qu'elle reste constante le long d'une ligne de courant de l'écoulement.

Notons que la fonction de courant est également une *fonction harmonique*. En effet, on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Mais en introduisant la fonction Φ (potentiel des vitesses) on peut écrire aussi :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} \quad \text{car} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} \quad \text{car} \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = 0$$

ou :

$$\Delta \psi = 0$$

La fonction de courant ψ est donc une fonction harmonique comme la fonction potentielle.

En résumé :

A — Un écoulement plan à potentiel des vitesses est caractérisé par deux réseaux de courbes :

1 — Les *lignes de courant* le long de chacune desquelles la fonction de courant ψ reste constante.

2 — Les *lignes équipotentielles* le long de chacune desquelles le potentiel Φ reste constant.

B — Les fonctions ψ et Φ sont des *fonctions harmoniques.*

C — Ce double réseau a la propriété d'être *orthogonal* puisque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

(équations de Cauchy-Riemann)

IV.5.2.3. *Fonction analytique d'une variable complexe*

Considérons une fonction $f(\bar{z})$ de la variable complexe $\bar{z} = x + iy$.

En groupant les termes réels et imaginaires, on peut mettre la fonction $f(\bar{z})$ sous la forme

$$f(\bar{z}) = \Phi(x, y) + i \quad \psi(x, y)$$

La fonction $f(\bar{z})$ est analytique si la limite du rapport $\Delta f(\bar{z})/\Delta \bar{z}$ est indépendant de la façon dont $\Delta \bar{z}$ tend vers 0.

Il est donc nécessaire que

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{i\,dy} = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]$$

ou, en identifiant les seconds membres :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{i}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad [IV.5.2.3.1]$$

et

$$i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

ou

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\,\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad [IV.5.2.3.2]$$

Les équations [*IV.5.2.3.1*] et [*IV.5.2.3.2*] sont les équations de Cauchy-Riemann qui expriment précisément que Φ et ψ sont respectivement la fonction potentiel des vitesses et la fonction de courant d'un écoulement plan à potentiel des vitesses.

En conclusion, *la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique quelconque de la variable complexe $\overline{z} = x + iy$ sont deux fonctions harmoniques dont l'une peut être considérée comme le potentiel des vitesses et l'autre comme la fonction de courant d'un écoulement plan à potentiel des vitesses.*

La fonction $f(\overline{z})$ s'appelle le *potentiel analytique* ou *potentiel complexe* dont dérive l'écoulement considéré.

Voici quelques exemples de l'utilisation de ces propriétés pour l'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses :

1^er^ exemple : Source ou puits

Considérons (fig. IV.5.2.3.1) la fonction analytique complexe, en coordonnées polaires :

$$f = A\,(\mathcal{L}r + i\theta) \qquad A \text{ étant réel}$$

$$f = A\mathcal{L}r + iA\theta\,.$$

$$= \Phi + i\psi$$

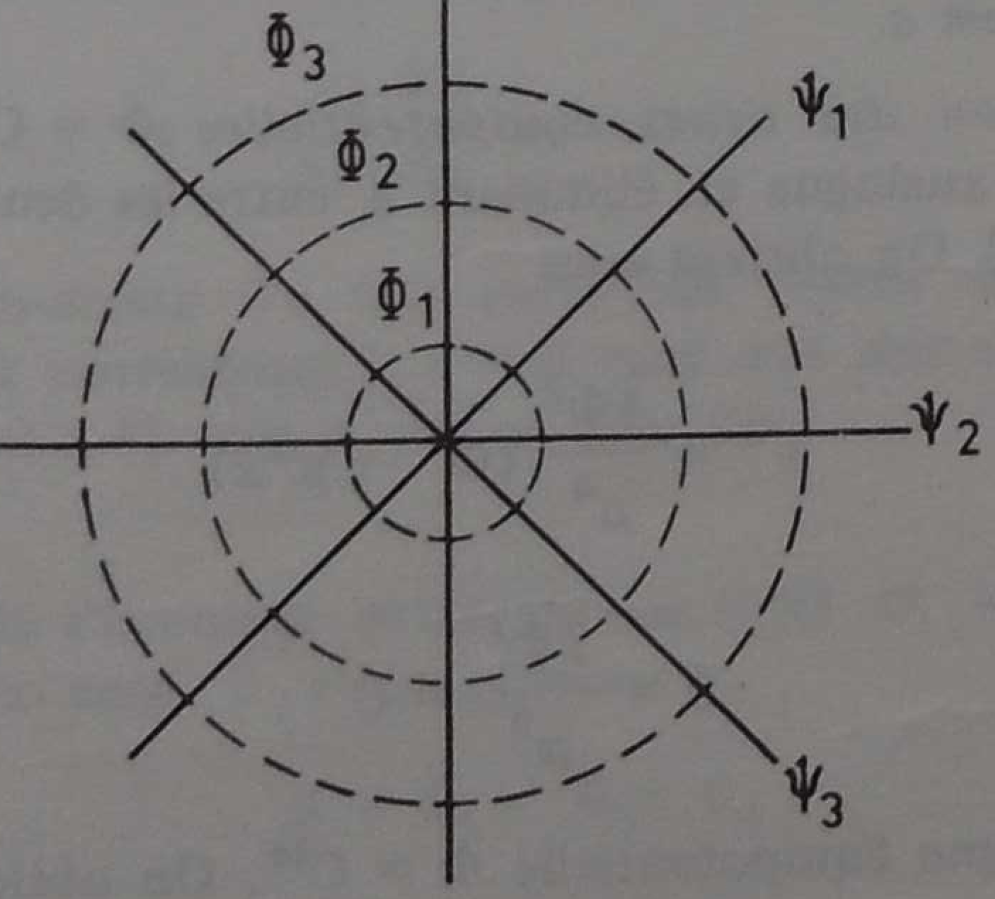


Fig. IV.5.2.3.1 – Source ou puits

On a donc :

$$\Phi = A\mathcal{L}r$$

$$\psi = A\theta$$

Les *lignes de courant* sont définies par l'équation :

$$\psi = C^{te}$$

c'est-à-dire

$$\theta = C^{te}$$

Ce sont des droites issues de l'origine.

Les *lignes équipotentielles* sont définies par l'équation :

$$\Phi = C^{te}$$

c'est-à-dire

$$r = C^{te}$$

Ce sont des cercles ayant leur centre à l'origine.

L'écoulement se produit donc par rayons convergents ou divergents vers l'origine, c'est le cas d'un point puits (rayons convergents) ou point source (rayons divergents).

La *vitesse* du liquide en un point distant de r de la source ou du puits est :

$$V = v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

Elle varie en raison inverse de la distance à l'origine.

Le *débit* au point correspondant est donc (pour une section de largeur unité comptée perpendiculairement au plan de l'écoulement) :

$$Q = 2\pi r\,\frac{A}{r} = 2\pi A$$

2^ème^ exemple : Ecoulement dans un angle droit

Soit (fig. IV.5.2.3.2) la fonction analytique complexe

$$f = \frac{1}{2}\,(x + iy)^2 = \frac{x^2 - y^2}{2} + i\,xy$$

$$f = \Phi + i\psi$$

On a immédiatement :

$$\Phi = \frac{x^2 - y^2}{2}$$

$$\psi = xy$$

L'équation des *lignes de courant* est donc :

$$\psi = A = C^{te}$$

ou

$$xy = C^{te}$$

Ce sont des hyperboles équilatères (ψ_1, ψ_2, ...).

L'équation des *lignes équipotentielles* est :

$$\Phi = B = C^{te}$$

ou :

$$x^2 - y^2 = C^{te}$$

Elles constituent donc un second faisceau d'hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les bissectrices des axes Ox et Oy et pour axes les axes de coordonnées (Φ_1, Φ_2, etc...).

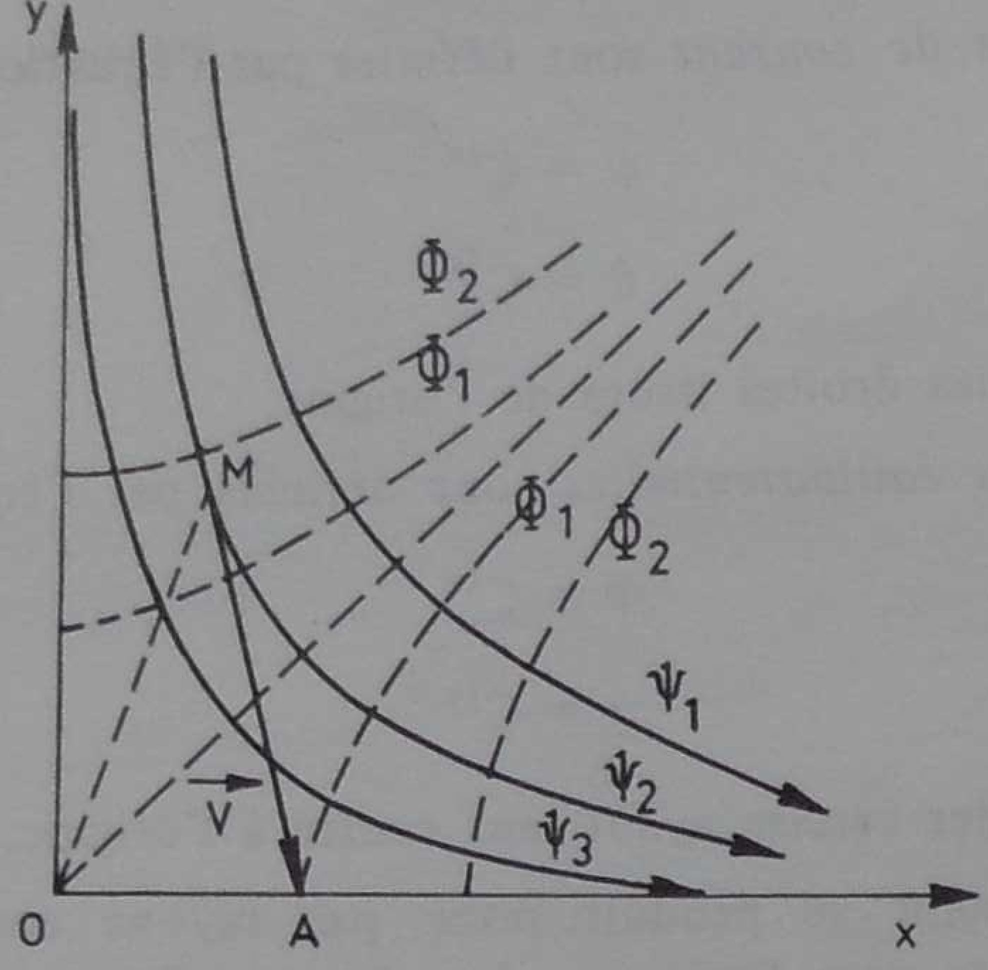


Fig. IV.5.2.3.2 – Ecoulement dans un angle droit

L'écoulement considéré correspond donc à un changement de direction de 90° dans le mouvement de l'eau ; c'est le problème du coude. Dans le cas d'une conduite à section droite rectangulaire, l'épaisseur étant constante, on obtiendrait la forme du coude en limitant la conduite par deux lignes de courant. Les canalisations ayant généralement une section droite circulaire, pour raccorder le coude aux éléments rectilignes situés à l'amont et à l'aval, il faudrait donner au coude une série de sections elliptiques graduellement variables, ce qui éloigne quelque peu des conditions d'un écoulement plan.

En pratique, on se rapproche plus ou moins de cette forme pour les diffuseurs coudés de certaines turbines Francis ou Kaplan.

Les composantes u et v de la *vitesse* en un point M sont :

$$\vec{V} \begin{cases} u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = + \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = x \\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = - y \end{cases}$$

le vecteur $\vec{V}$ a donc pour composantes x et $-y$. En un point M le vecteur vitesse $\vec{V} = \overrightarrow{MA}$ et son extrémité A est sur l'axe des x.

On a

$$V^2 = \overline{MA}^2 = x^2 + y^2 = \overline{OM}^2$$

$$|V| = |OM|$$

Le lieu des points d'égale vitesse est donc constitué par des circonférences de centre O.

3ème *exemple : Ecoulement autour d'un écran rectiligne semi-indéfini* (fig. IV.5.2.3.3)

Considérons la fonction analytique

$$f(\bar{z}) = \mu \sqrt{\bar{z}} \qquad \mu \text{ étant un coefficient réel}$$

$$f(\bar{z}) = \Phi + i\psi$$

Pour obtenir les expressions de $\Phi(x, y)$ et $\psi(x, y)$, cherchons à séparer les parties réelles et imaginaires de $f(\bar{z})$; à cet effet, élevons au carré ; il vient :

$$\mu^2 \bar{z} = (\Phi + i\psi)^2$$

$$\bar{z} = x + iy = \frac{1}{\mu^2} (\Phi^2 - \psi^2 + 2i\Phi\psi)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\Phi^2 - \psi^2}{\mu^2} \\ y &= \frac{2\Phi\psi}{\mu^2} \end{aligned} \right\} \qquad [IV.5.2.3.3]$$

L'équation des lignes de courant $\psi = C^{te}$ s'obtient en éliminant Φ entre les deux équations [*IV.5.2.3.3*], soit

$$x\mu^2 = \Phi^2 - \psi^2$$

$$\Phi = \frac{\mu^2}{2\psi} y$$

d'où

$$x\mu^2 = \frac{\mu^4}{4\psi^2} y^2 - \psi^2$$

$$y^2 = \frac{4\psi^2}{\mu^2} x + \frac{4\psi^4}{\mu^4}$$

Posons $a = \dfrac{2\psi^2}{\mu^2} = C^{te}$ pour une ligne de courant $\psi = C^{te}$.

Il vient ainsi :

$$y^2 = 2ax + a^2 \qquad [IV.5.2.3.4]$$

Ce sont des *paraboles homofocales* d'axe Ox dont le foyer commun est O et dont le paramètre (distance du foyer à la directrice) est a.

L'équation des lignes équipotentielles $\Phi = C^{te}$ s'obtient de manière analogue en éliminant ψ entre les deux équations [*IV.5.2.3.3*]. On obtient ainsi :

$$y^2 = \frac{4\Phi^2}{\mu^4} (\Phi^2 - \mu^2 x)$$

Posons

$$b = \frac{2\Phi^2}{\mu^2} = C^{te}$$

pour une ligne équipotentielle $\Phi = C^{te}$. On obtient

$$y^2 = b^2 - 2bx \qquad [IV.5.2.3.5]$$

Ce sont des *paraboles homofocales* d'axe Ox dont le foyer commun est O, de paramètre b, mais dont la concavité est tournée vers les x négatifs (fig. IV.5.2.3.3).

On vérifie facilement que les deux familles de paraboles

$$\psi = C^{te}, \quad \text{soit} \quad y^2 = 2ax + a^2 \qquad [IV.5.2.3.4]$$

et

$$\Phi = C^{te}, \quad \text{soit} \quad y^2 = b^2 - 2bx \qquad [IV.5.2.3.5]$$

sont orthogonales.

L'écoulement considéré est donc un écoulement plan à potentiel des vitesses autour d'un écran plan semi-indéfini de trace Ox.

Débit circulant entre deux lignes de courant (fig. IV.5.2.3.3).

Traçons le segment M_1M_2 parallèle à Oy et s'appuyant sur deux lignes de courant $\psi = \psi_1$ et $\psi = \psi_2$.

Pour une tranche de l'écoulement considéré d'épaisseur unité comptée perpendiculairement au plan de la figure et pour un élément de longueur dy du segment M_1M_2, le débit élémentaire est

$$dq = u\,dy = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy$$

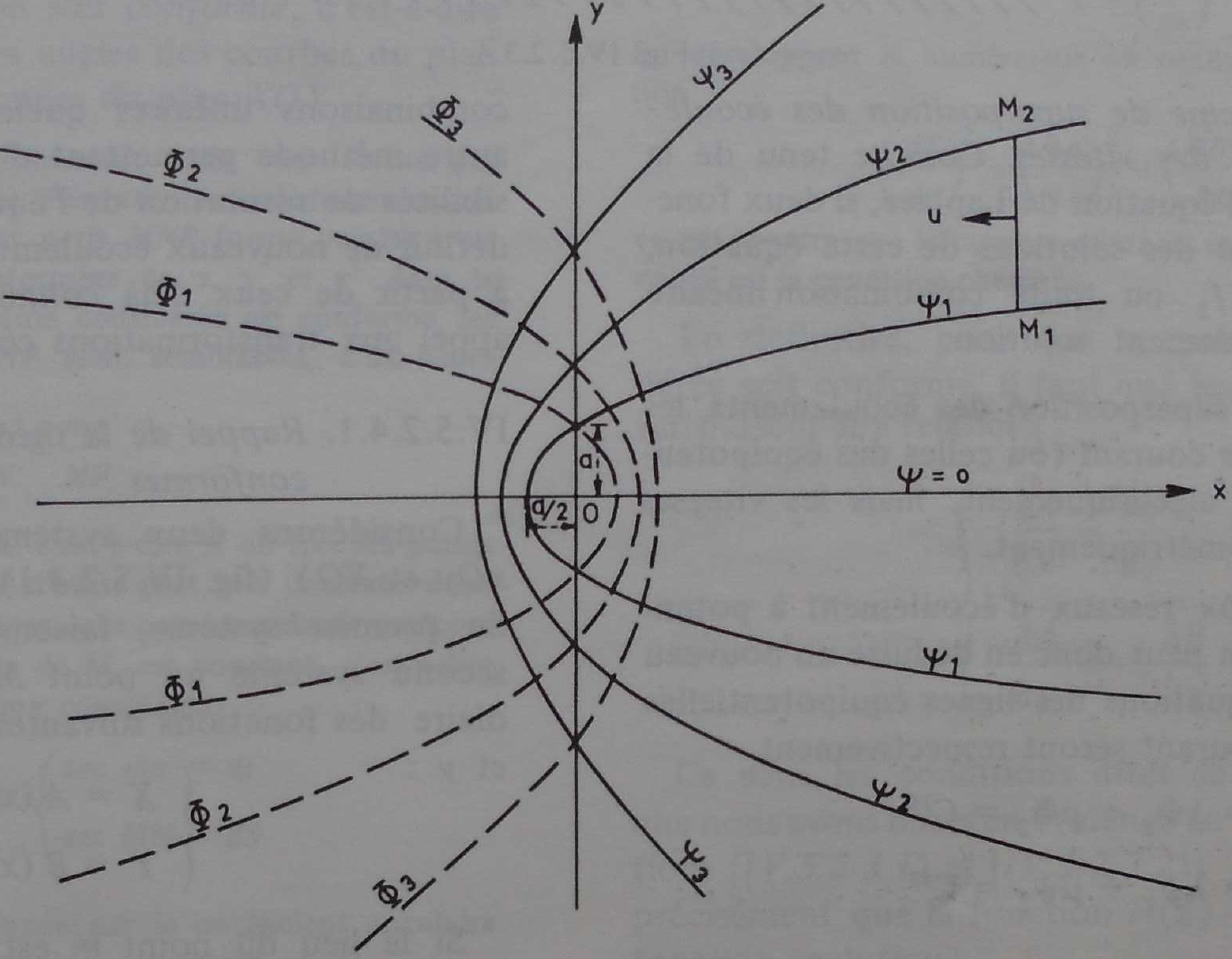


Fig. IV.5.2.3.3 – Ecoulement autour d'un écran rectiligne semi-indéfini

Le débit total de la tranche d'écoulement considérée comprise entre les deux lignes de courant ψ_1 et ψ_2 sera donc

$$q = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = \psi_2 - \psi_1$$

La demi-droite Ox fait partie du réseau des paraboles $\psi = C^{te}$ et correspond à $y = 0$ quel que soit x dans l'équation [*IV.5.2.3.4*], soit $a = 0$ et $\psi = 0$.

Le débit s'écoulant entre Ox ($\psi = 0$) et une ligne de courant de cote ψ_1 sera donc

$$q = \psi_1 - 0 = \psi_1$$

L'exemple pratique d'un tel écoulement est fourni par le réseau d'infiltration à travers un massif de terre indéfini, homogène et perméable occupant la moitié supérieure de la figure IV.5.2.3.3, reposant sur un substratum imperméable horizontal occupant la moitié inférieure de la figure et comportant un tapis filtrant suivant la demi-droite Ox' (fig. IV.5.2.3.4). La nappe phréatique du massif perméable sera drainée par le tapis et les filets liquides s'écouleront suivant les paraboles homofocales

$$\psi = C^{te} \quad \text{ou} \quad y^2 = 2ax + a^2 .$$

Le foyer commun de ces paraboles sera le point O extrémité du tapis.

Nous aurons précisément l'occasion d'appliquer ces résultats à l'étude du réseau d'infiltration à travers une digue ou un barrage en terre (1).

- - - - - - - - - - - - -

(1) Voir chapitre XII : Hydraulique souterraine.

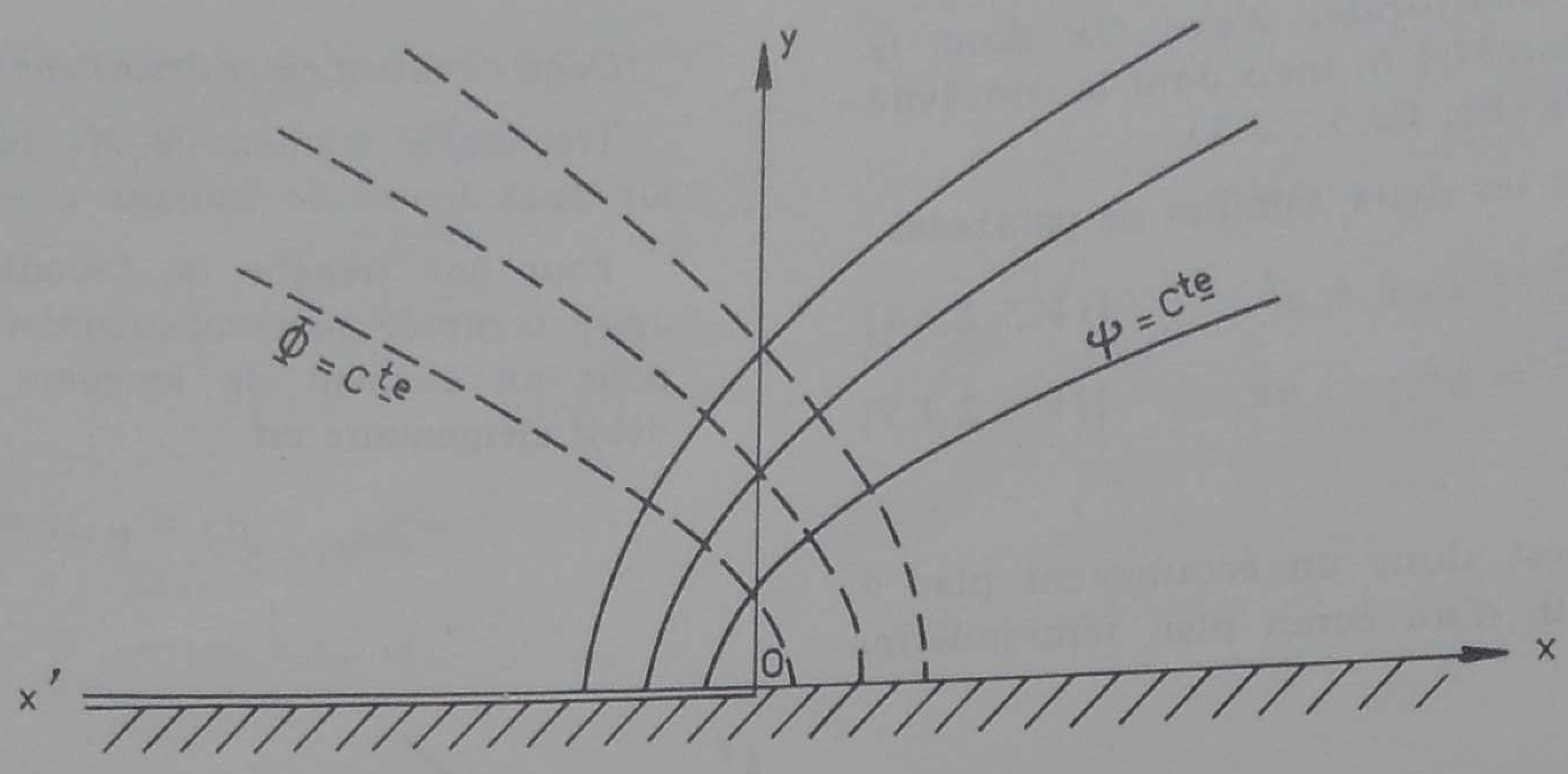


Fig. IV.5.2.3.4

Remarque : Principe de superposition des écoulements à potentiel des vitesses. Compte tenu de la forme linéaire de l'équation de Laplace, si deux fonctions f_1 et f_2 sont des solutions de cette équation, la fonction $f_1 + f_2$ ou toute combinaison linéaire $\lambda f_1 + \mu f_2$ est également solution.

Dans une telle superposition des écoulements, les cotes des lignes de courant (ou celles des équipotentielles) s'ajoutent algébriquement, mais les viteeses se composent géométriquement.

Connaissant deux réseaux d'écoulement à potentiel des vitesses, on peut donc en déduire un nouveau réseau dont les équations des lignes équipotentielles et des lignes de courant seront respectivement

$$\Phi = \lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2 = C^{te}$$

$$\psi = \lambda\psi_1 + \mu\psi_2 = C^{te}$$

IV.5.2.4. *Méthode des transformations conformes*

Nous venons de montrer que si on connaît deux solutions de l'équation de Laplace, on peut en trouver de nouvelles en formant entre ces deux solutions des combinaisons linéaires quelconques. Il existe une autre méthode permettant d'étendre encore les possibilités de résolution de l'équation de Laplace et de définir de nouveaux écoulements plans irrotationnels à partir de ceux déjà connus. Cette méthode fait appel aux transformations conformes.

IV.5.2.4.1. *Rappel de la théorie des transformations conformes :*

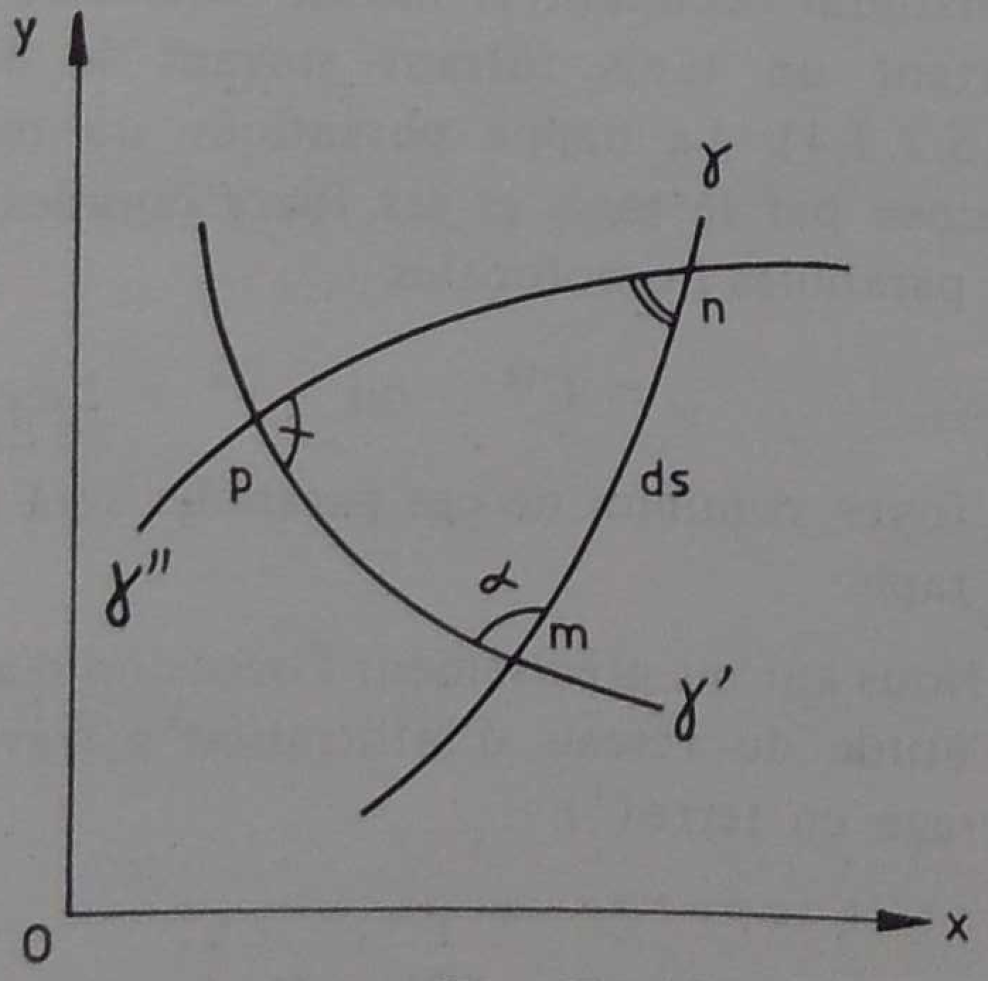
Considérons deux systèmes d'axes orthonormés xOy et XOY (fig. IV.5.2.4.1). A tout point $m(x, y)$ du premier système, faisons correspondre dans le second système un point $M(X, Y)$ par l'intermédiaire des fonctions suivantes des variables réelles x et y :

$$\begin{cases} X = A(x, y) \\ Y = B(x, y) \end{cases}$$

Si le lieu du point m est une courbe γ du plan xOy, le lieu du point M sera une courbe Γ du plan XOY ; la courbe Γ est la transformée de la courbe γ.

En notations complexes le vecteur $\overrightarrow{Om}$ s'écrit :

$$\overline{z} = x + iy$$



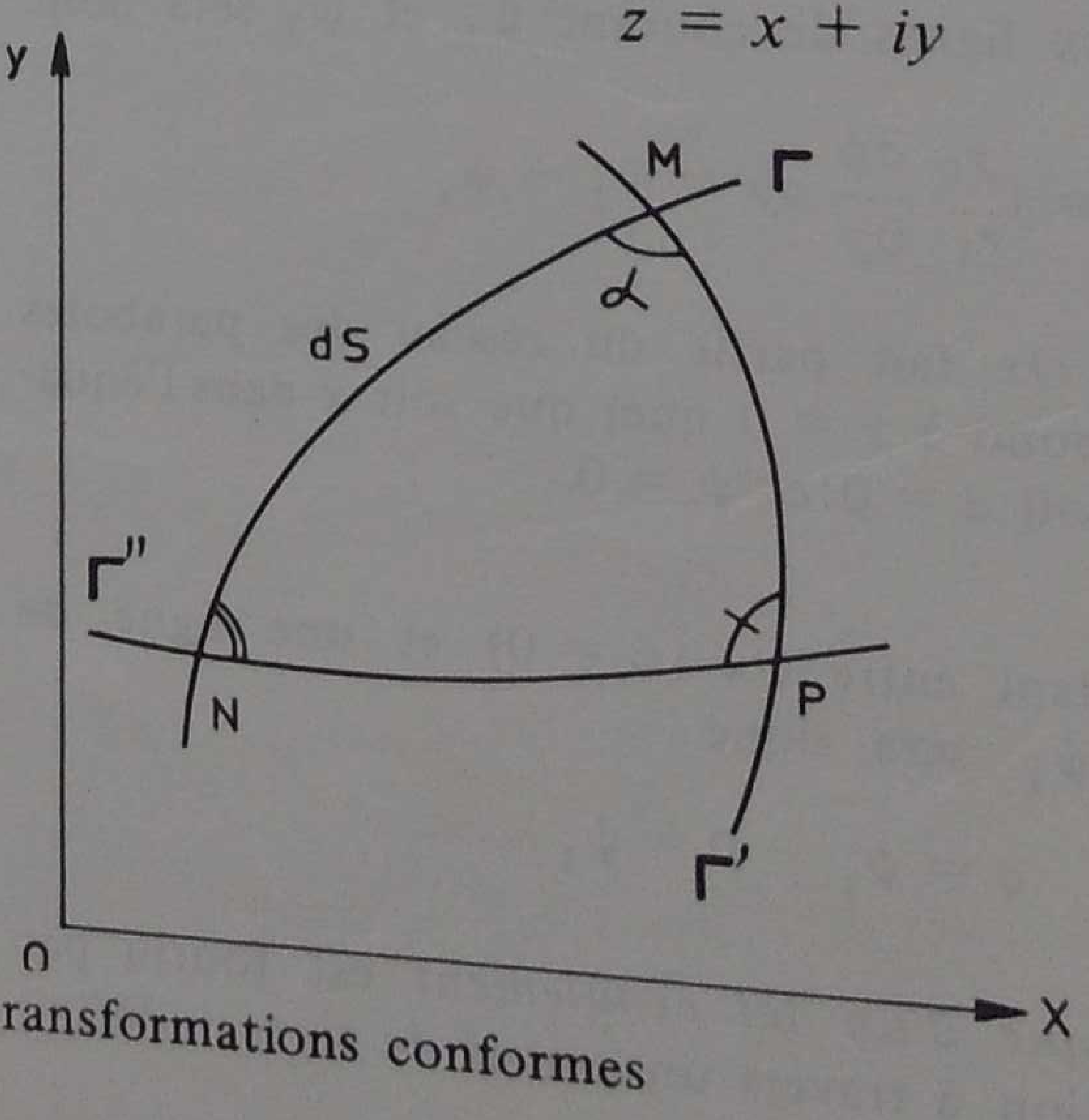


Fig. IV.5.2.4.1 – Principe des transformations conformes

Il lui correspond, dans le plan XOY, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui s'écrit en notations complexes :

$$\overline{Z} = X + iY = A(x , y) + iB(x , y)$$

A tout vecteur $\overline{z}$ du plan xOy correspond donc un vecteur $\overline{Z}$ du plan XOY qui est fonction de $\overline{z}$, soit

$$\overline{Z} = F(\overline{z}) = A(x , y) + iB(x , y)$$

Proposons-nous de rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions A et B pour que cette transformation soit *conforme*, c'est-à-dire pour qu'elle conserve les angles des courbes du plan xOy et de leurs transformées du plan XOY.

Un triangle curviligne infiniment petit mnp formé par trois courbes γ, γ' et γ'' du plan xOy se transforme en un triangle curviligne infiniment petit MNP formé par les trois courbes Γ, Γ' et Γ'' transformées de γ, γ' et γ'' dans le plan XOY. Si la transformation considérée est conforme, les deux triangles mnp et MNP sont semblables, c'est-à-dire

$$\frac{mn}{MN} = \frac{mp}{MP}$$

Si le rapport mp/MP est fixé, c'est-à-dire si on fixe les points m et M d'une part et p et P d'autre part, on constate donc que le rapport mn/MN de deux arcs correspondants quelconques issus, l'un de m, l'autre de M, est constant, c'est-à-dire indépendant de la direction mn considérée.

$$\text{Posons alors} \quad \begin{cases} \text{arc } mn = ds \\ \text{arc } MN = dS \end{cases}$$

La direction de mn est donnée par le coefficient angulaire dy/dx de la tangente à la courbe γ au point m.

La propriété énoncée précédemment revient donc à dire que x et y étant donnés (ce qui fixe le point m), le rapport ds/dS des arcs homologues mn et MN est indépendant de dy/dx.

Or, on peut écrire :

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{dx^2 + dy^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right)^2}{dx^2 + dy^2}$$

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Si les fonctions A et B satisfont aux conditions

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial x}$$

l'expression précédente s'écrit :

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dy}{dx}\right)^2}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

En développant le numérateur on obtient, après simplification :

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2$$

ce qui montre que le rapport dS/ds est indépendant de dy/dx, ce qui est la condition cherchée.

En définitive, pour que la transformation considérée soit conforme, il faut que les fonctions A et B satisfassent aux relations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x} = \dfrac{\partial B}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial y} = -\dfrac{\partial B}{\partial x} \end{cases}$$

Ce sont les conditions dites de Cauchy-Riemann que nous avons mises en évidence au § IV.5.2.3 (équations [*IV.5.2.3.1*] et [*IV.5.2.3.2*]) et qui expriment précisément que la fonction $F(\overline{z}) = A + iB$ est une fonction analytique.

A toute fonction analytique $F(\overline{z}) = A + iB$ de la variable complexe $\overline{z} = x + iy$ correspond donc une transformation conforme définie par

$$\begin{cases} X = A(x , y) \\ Y = B(x , y) \end{cases}$$

IV.5.2.4.2. *Application à l'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses*

Considérons un écoulement plan à potentiel des vitesses admettant comme potentiel complexe la fonction

$$f(\overline{z}) = f(x + iy) = \varphi(x , y) + i\psi(x , y)$$

On sait que les lignes équipotentielles $\varphi(x , y) = C^{te}$ et les lignes de courant $\psi(x , y) = C^{te}$ forment un réseau quadratique dans le plan xOy.

Considérons alors une fonction analytique quelconque de la variable complexe $\overline{z} = x + iy$, soit $F(\overline{z})$ qu'on peut écrire, en séparant les parties réelle et complexe :

$$F(\overline{z}) = A(x, y) + iB(x, y)$$

Nous avons montré que les relations

$$\begin{cases} X = A(x, y) \\ Y = B(x, y) \end{cases}$$

définissent une transformation conforme plane faisant correspondre le vecteur $\overline{Z} = X + iY$ du plan XOY au vecteur $\overline{z} = x + iy$ du plan xOy. Autrement dit, à toute fonction analytique $F(\overline{z})$ correspond une transformation conforme $\overline{Z} = F(\overline{z})$.

En particulier, les courbes $\varphi = C^{te}$ et $\psi = C^{te}$ du réseau quadratique du plan xOy seront transformées, dans le plan XOY, en courbes $\Phi = C^{te}$ et $\Psi = C^{te}$ orthogonales entre elles et susceptibles, par conséquent, de constituer le réseau quadratique d'un nouvel écoulement à potentiel des vitesses. Dans cette transformation, le potentiel complexe $f(\overline{z})$ du réseau initial est transformé en $F[f(\overline{z})]$ qui est le potentiel complexe dont dérive le nouvel écoulement.

Si donc on connaît un écoulement plan à potentiel dans le domaine (x, y) on peut en déduire, par une transformation conforme appropriée, un nouvel écoulement plan à potentiel dans le domaine (X, Y). Connaissant, par exemple, l'écoulement autour d'un profil simple (cercle, plan etc .), on peut en déduire l'écoulement autour d'un profil plus compliqué déduit du premier par une transformation conforme quelconque.

Il existe ainsi des catalogues des transformations conformes qui fournissent pour chaque transformation :

— les transformées dans le plan XOY des courbes du plan xOy,

— les domaines correspondants dans les deux plans.

La méthode des transformations conformes est surtout utilisée en aérodynamique pour le calcul des profils d'ailes et en hydrodynamique pour le calcul des profils d'aubes des turbo-machines.

Nous en donnerons ci-après quelques applications simples.

1^er exemple : Translation

Considérons la fonction analytique

$$F(\overline{z}) = \overline{z} + \overline{h}$$

avec $\overline{h} = a + ib$ (a et b réels)

Elle s'écrit, en développant :

$$F(\overline{z}) = x + iy + a + ib$$

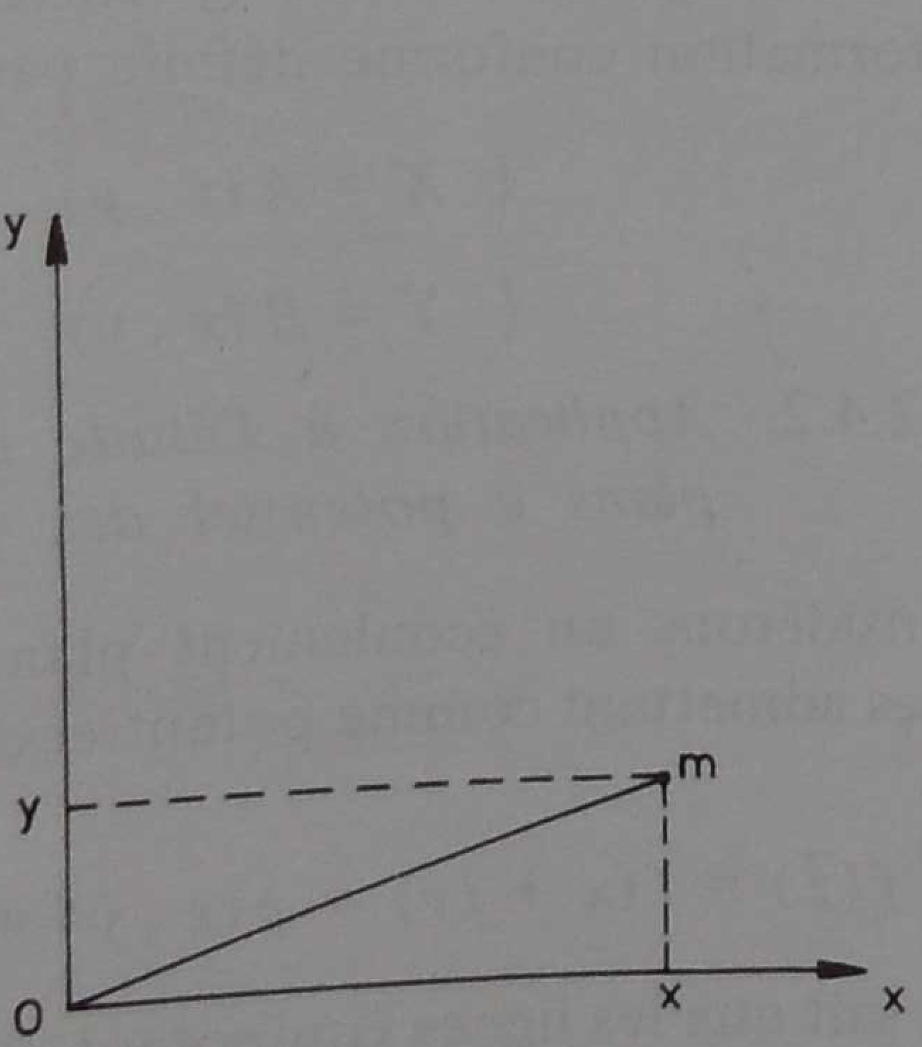
$$F(\overline{z}) = (x + a) + i(y + b)$$

$$F(\overline{z}) = A + iB$$

avec

$$A = X = x + a$$

$$B = Y = y + b$$



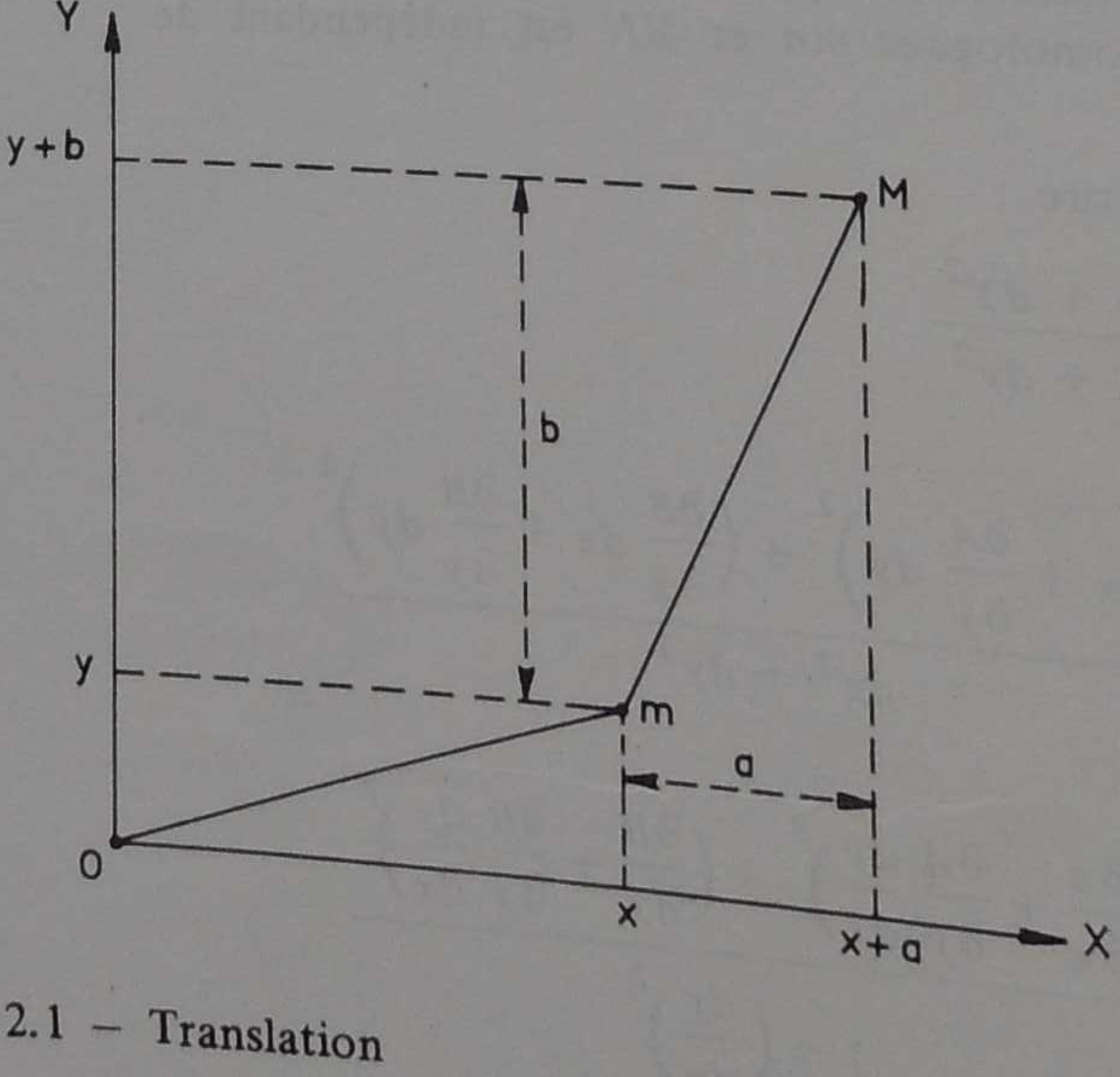


Fig. IV.5.2.4.2.1 – Translation

Au point m du plan xOy correspond donc le point M du plan XOY de coordonnées $X = x + a$ et $Y = y + b$ (fig. IV.5.2.4.2.1). Le point M se déduit de m par une translation définie par le vecteur $\overrightarrow{mM} = a + ib = \overline{h}$.

La transformation considérée est donc une translation parallèle à $\vec{h} = a + ib$

2ème exemple : Rotation

Considérons la fonction analytique

$$F(\overline{z}) = \overline{z}e^{i\alpha} \qquad (\alpha \text{ réel})$$

Les coordonnées polaires ρ et θ du point m du plan xOy sont telles que

$$\overline{z} = \rho e^{i\theta}$$

Dans le plan XOY il y correspond le point M tel que

$$\overline{Z} = F(\overline{z}) = \rho e^{i\theta} \times e^{i\alpha}$$

$$\overline{Z} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$$

ce qui montre que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ du plan XOY se déduit du vecteur $\overrightarrow{Om}$ du plan xOy par une rotation de centre O et d'angle α (fig. IV.5.2.4.2.2).

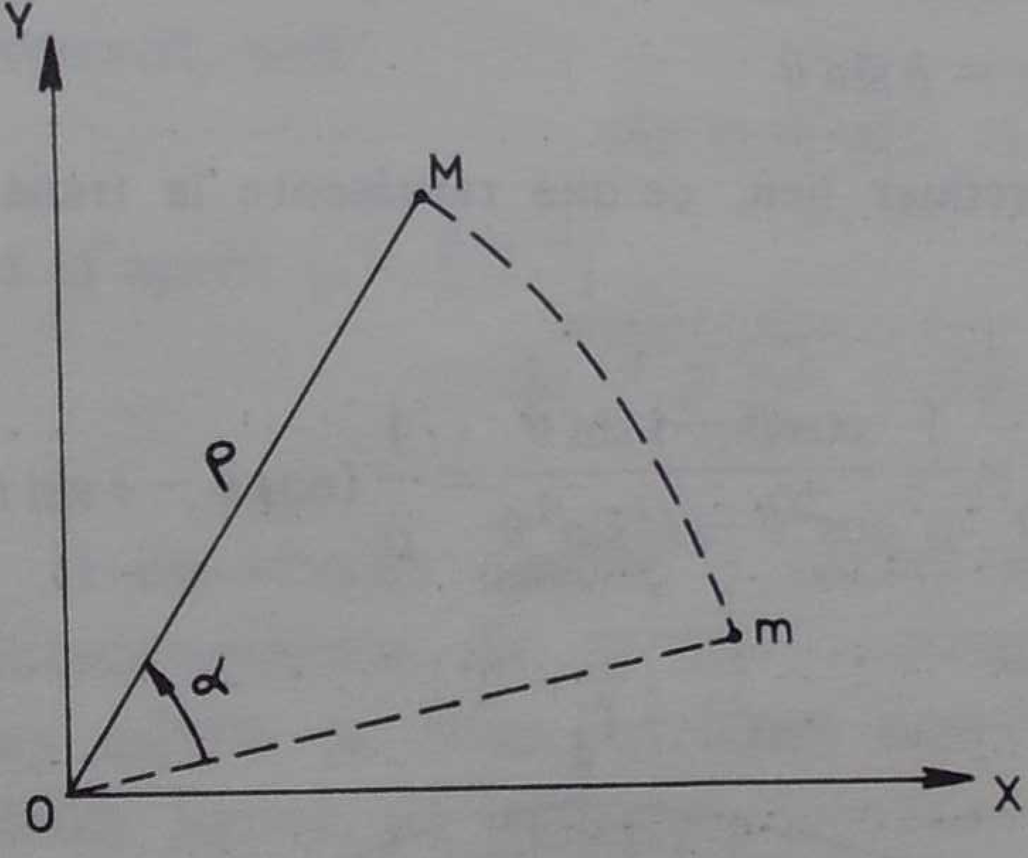


Fig. IV.5.2.4.2.2 – Rotation

3ème exemple : Transformation dite "en éventail"

Considérons la fonction analytique

$$\overline{Z} = F(\overline{z}) = \overline{z}^n$$

n étant un nombre réel, entier ou fractionnaire.

Considérons, comme précédemment, les vecteurs $\overline{Om} = \overline{z}$ du plan xOy et $\overline{OM} = \overline{Z}$ du plan XOY (fig. IV.5.2.4.2.3).

En coordonnées polaires, ces vecteurs s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \overline{z} = \rho e^{i\theta} \\ \overline{Z} = re^{i\omega} \end{cases}$$

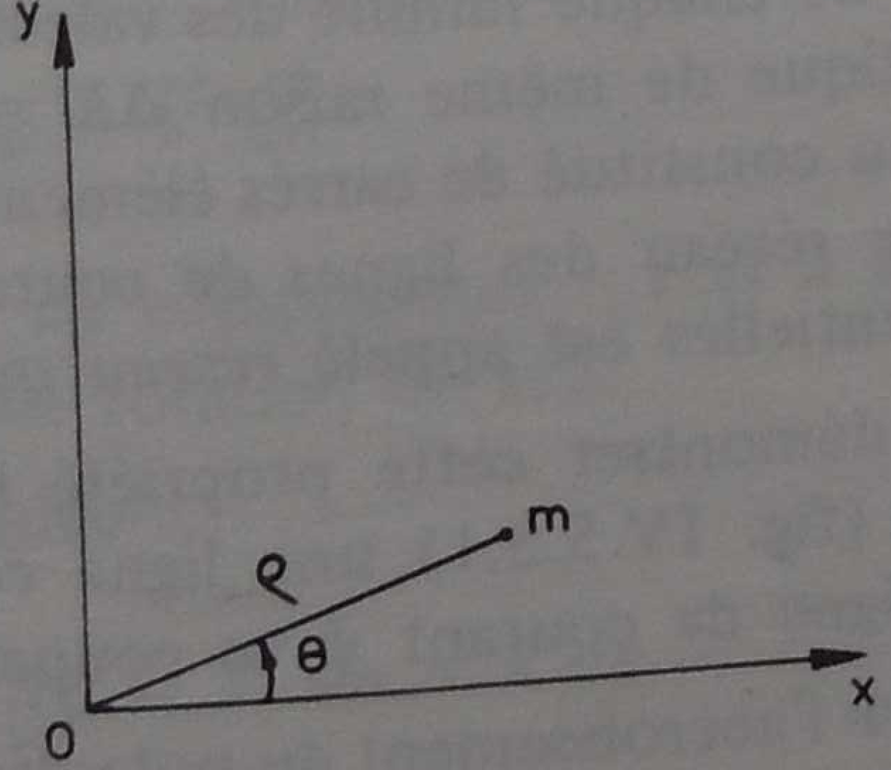
On a donc

$$\overline{Z} = \overline{z}^n = \rho^n e^{in\theta}$$

d'où il résulte

$$r = \rho^n$$

$$\omega = n\theta$$



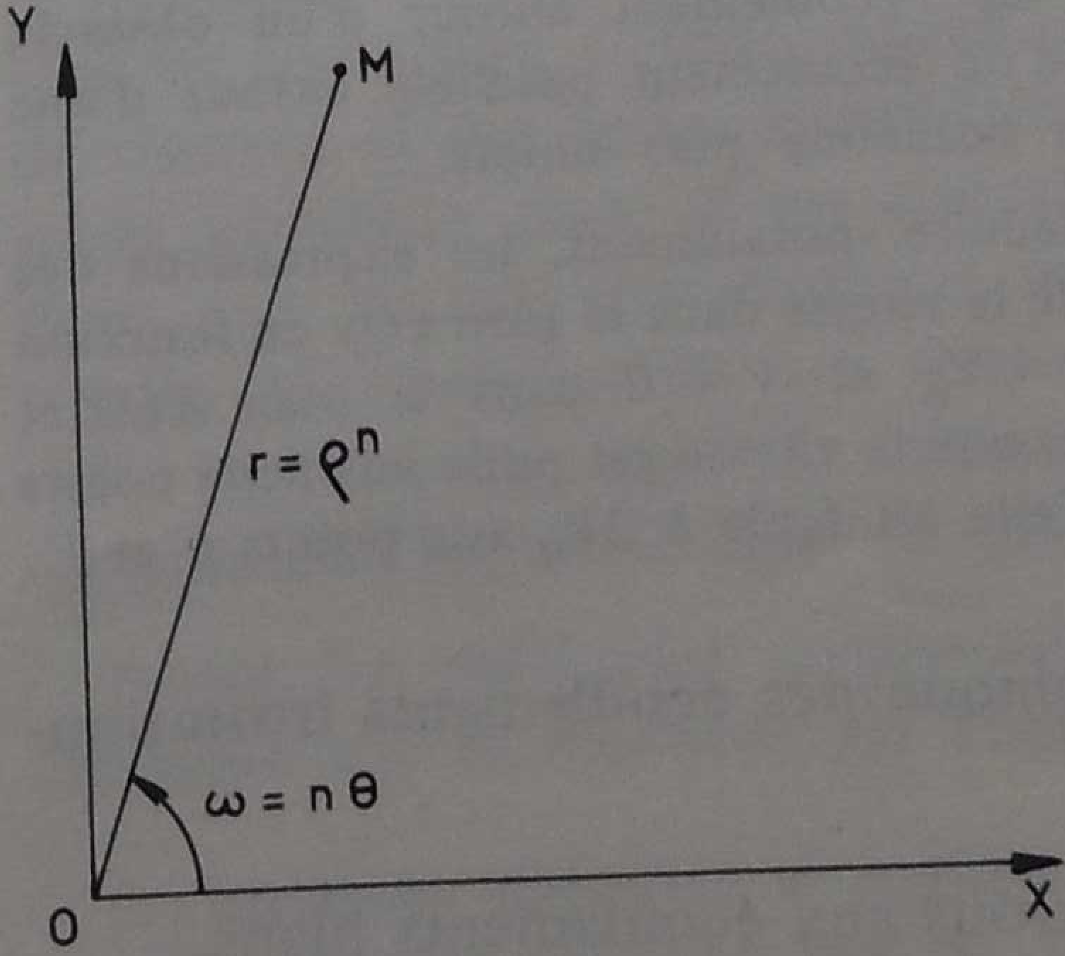


Fig. IV.5.2.4.2.3 – Transformation en éventail

Dans la transformation considérée, l'angle polaire ω est un multiple (ou une fraction) constant de l'angle polaire θ, d'où l'expression de "transformation en éventail".

4ème exemple : Transformation de Joukowsky

Elle correspond à la fonction analytique

$$\overline{Z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$$

Dans le plan xOy (fig. IV.5.2.4.2.4) un point m est défini par ses coordonnées polaires ρ et θ et on a :

$$\overline{z} = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$$

avec
$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$

Cherchons, en premier lieu, ce que représente la transformation $1/\overline{z}$, soit

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta - i^2\sin^2\theta} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Le point M' représentatif de $1/\overline{z}$ se déduit donc de m par une inversion par rapport au cercle de rayon unité (correspondant à $1/\rho$) ce qui donne le point M'', suivie d'une symétrie par rapport à l'axe Ox (correspondant à $\cos\theta - i\sin\theta$).

Dans le plan XOY le point M correspondant à m dans la transformation

$$\overline{Z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$$

sera donc obtenu en faisant la somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{Om}$ (correspondant à $\overline{z}$) et $\overrightarrow{OM'}$ (correspondant à $1/\overline{z}$).

Si on applique cette transformation aux points du cercle de rayon unité du plan xOy, on obtient tous les points du segment AB $(-2, +2)$ de l'axe OX du plan XOY. Si on trace dans le plan XOY un quadrillage régulier représentant le réseau des équipotentielles et des lignes de courant d'un écoulement plan à filets parallèles le long d'une plaque de trace AB, il y correspondra, dans le plan xOy, un quadrillage curviligne équivalent qui pourra représenter le réseau des lignes équipotentielles et des lignes de courant d'un écoulement plan à potentiel autour d'un cylindre placé dans un courant à filets parallèles.

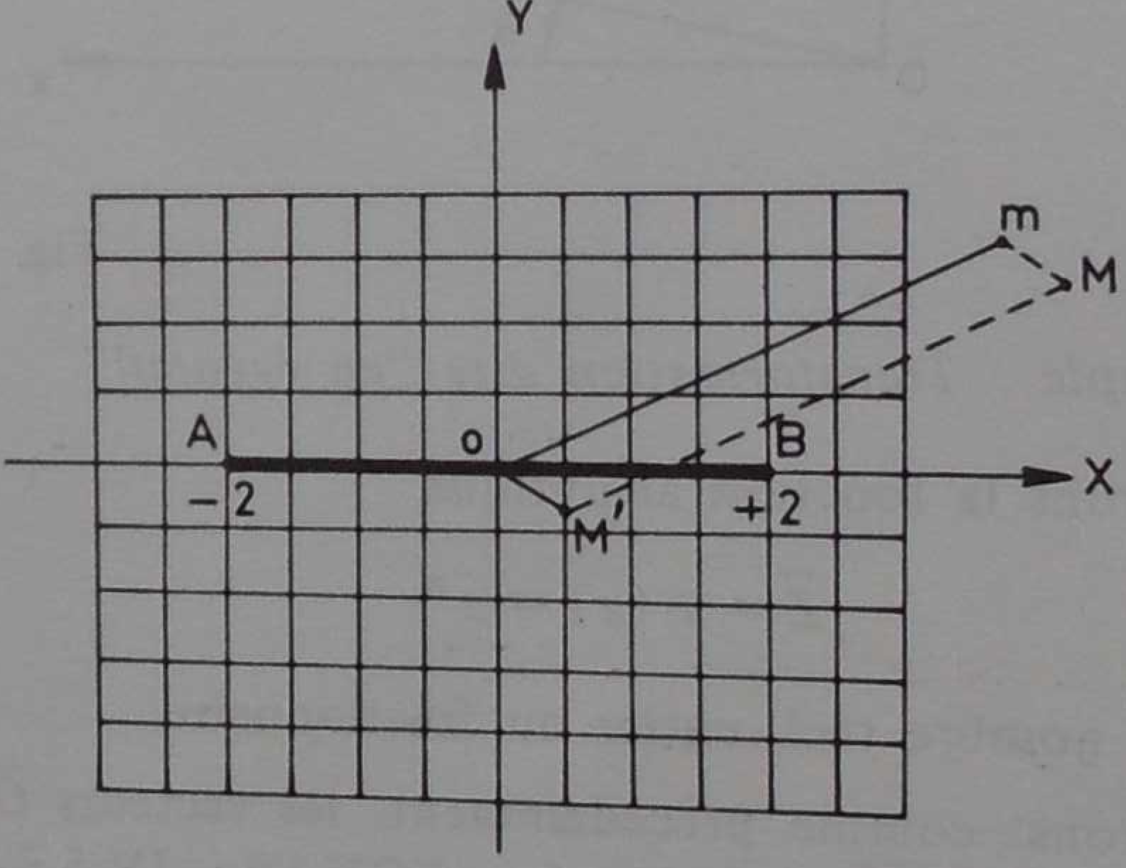


Fig. IV.5.2.4.2.4 – Transformation de Joukowsky

La transformation conforme de Joukowsky permet donc de ramener l'étude de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique à celui d'un écoulement parallèle autour d'une plaque plane qui est beaucoup plus simple.

On pourrait en déduire, notamment, les expressions des composantes u et v de la vitesse dans le plan xOy en fonction des composantes $U = V_0$ et $V = 0$ dans le plan XOY et montrer, par exemple, que la vitesse est nulle aux deux points d'arrêt C et D et qu'elle est égale à $2V_0$ aux points E et F.

IV.5.3. Etude graphique des écoulements irrotationnels

Nous nous limiterons aux écoulements plans.

Nous avons démontré (§ IV.5.2.2) que le réseau des lignes de courant ($\psi = C^{te} = K$) et des lignes équipotentielles ($\Phi = C^{te} = H$) est constitué de deux familles de courbes orthogonales.

Si on donne aux constantes K et H définissant les courbes de chaque famille des valeurs en progression arithmétique de même raison $\Delta K = \Delta H$, on obtient un réseau constitué de carrés élémentaires ; pour cette raison le réseau des lignes de courant et des lignes équipotentielles est appelé *réseau quadratique*.

Pour démontrer cette propriété importante, considérons (fig. IV.5.3.1) une ligne équipotentielle Φ et une ligne de courant ψ se coupant en M.

Soit $d\Phi$ l'accroissement du potentiel correspondant à un déplacement élémentaire $MM'' = ds$ (composantes dx et dy) en suivant la ligne de courant ψ c'est-à-

dire parallèlement au vecteur vitesse $\vec{V}$ (composantes u et v).

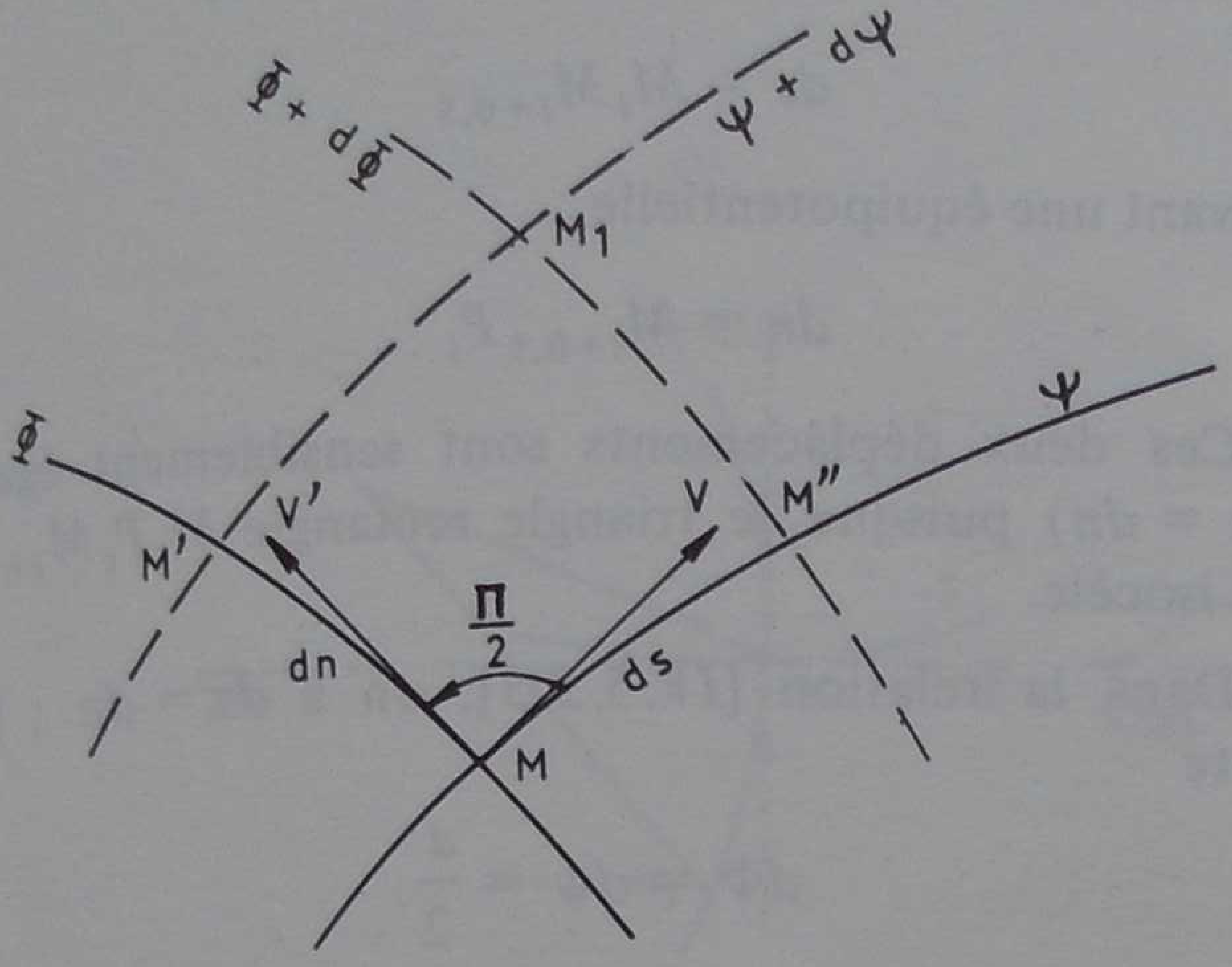


Fig. IV.5.3.1 – Réseau quadratique

On a :

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = u\,dx + v\,dy$$

ou

$$d\Phi = \vec{V}\,\vec{ds}$$

et, en valeur absolue :

$$ds = \frac{d\Phi}{V} \qquad [IV.5.3.1]$$

Le même raisonnement appliqué à l'étude de la variation $d\psi$ correspondant à un déplacement élémentaire $MM' = dn$ (composantes dx et dy) en suivant la ligne équipotentielle Φ, c'est-à-dire perpendiculairement au vecteur vitesse $\vec{V}$, permet d'écrire :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$d\psi = -\,v\,dx + u\,dy$$

$$d\psi = \vec{V}'\,\vec{dn}$$

le vecteur $\vec{V}'$ de composantes $-v$ et u étant déduit de $\vec{V}$ par une rotation de $\pi/2$.

En valeur absolue :

$$d\psi = V'\,dn = V\,dn$$

$$dn = \frac{d\psi}{V} \qquad [IV.5.3.2]$$

En divisant membre à membre les équations [IV.5.3.1] et [IV.5.3.2], il vient :

$$\frac{ds}{dn} = \frac{d\Phi}{d\psi} \qquad [IV.5.3.3]$$

Si donc on donne aux fonctions Φ et ψ des accroissements égaux $d\Phi = d\psi$, on obtient une figure $MM'M_1M''$ qui est un carré élémentaire, ce qui démontre la propriété énoncée précédemment.

Remarquons enfin que le *débit* d'un filet liquide d'épaisseur unité et limité par deux lignes de courant ψ et $\psi + d\psi$ est égal au produit de la vitesse moyenne V par l'écartement dn des deux lignes de courant, soit :

$$dq = V\,dn$$

et d'après [IV.5.3.2] :

$$dq = V\frac{d\psi}{V} = d\psi$$

Il en résulte que si le réseau est établi avec des accroissements de ψ en progression arithmétique, les débits de tous les filets liquides compris entre deux lignes de courant consécutives seront égaux.

Des relations

$$dn = \frac{d\psi}{V} \quad \text{et} \quad ds = \frac{d\Phi}{V}$$

on tire :

$$V = \frac{d\psi}{dn} = \frac{d\Phi}{ds}$$

Les accroissements $d\psi$ et $d\Phi$ étant égaux, la vitesse V est inversement proportionnelle à l'écartement des lignes de courant et des lignes équipotentielles, ce qui donne, à la simple observation du réseau, une idée de la répartition des vitesses dans l'écoulement.

Les propriétés qui viennent d'être établies permettent de construire graphiquement le réseau des lignes de courant et des lignes équipotentielles d'un écoulement potentiel plan, si on connaît certaines conditions aux limites (par exemple les deux limites latérales de l'écoulement qui sont des lignes de courant, ou bien une ligne de courant et la répartition du potentiel sur cette ligne de courant).

Parmi les méthodes graphiques utilisées, la plus classique est la méthode de Prasil(1)

(1) Signalons également la méthode dite "des petits carreaux" proposée en 1935 par M. l'Ingénieur général du Génie Maritime Barillon (*Revue générale d'Hydraulique* – Mars-Avril 1936).

Méthode de Prasil. Elle permet la construction graphique du réseau des lignes de courant et des équipotentielles correspondant à un mouvement plan à potentiel des vitesses, à partir d'une ligne de courant le long de laquelle la répartition du potentiel est connue.

Supposons donc connue la ligne de courant $\psi = K$ et, sur cette ligne, la position des points M_1, $M_2, \ldots M_n$ correspondant à une série de valeurs du potentiel Φ :

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$$

en progression arithmétique de raison a (fig. IV.5.3.2) ; a est choisi suffisamment petit pour que, à l'échelle du dessin, les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ soient suffisamment rapprochés.

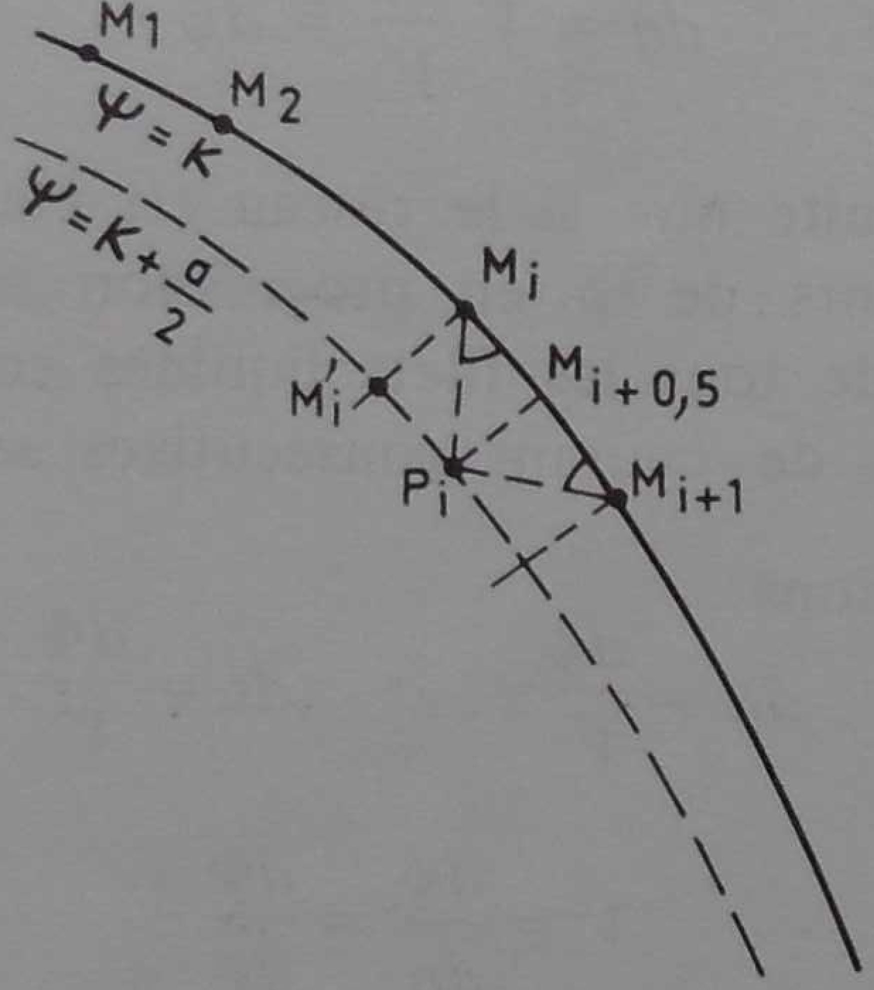


Fig. IV.5.3.2 – Méthode de Prasil

Par deux points consécutifs M_i et M_{i+1}, menons deux demi-droites inclinées à 45° sur les demi-normales respectives en M_i et M_{i+1} à la ligne $\psi = K$.

Soit P_i leur intersection. Le triangle élémentaire $P_i M_i M_{i+1}$ est rectangle isocèle ; la hauteur issue de P_i se confond avec la médiane et son pied $M_{i+0,5}$ est sensiblement le milieu du segment curviligne $M_i M_{i+1}$. Le potentiel en ce point $M_{i+0,5}$ a très sensiblement pour valeur $\Phi_i + a/2$ et c'est également la valeur du potentiel en P_i puisque l'élément de droite $P_i M_{i+0,5}$, perpendiculaire à la ligne de courant $M_i M_{i+1}$, peut être assimilé à un élément de ligne équipotentielle.

Lorsqu'on passe de M_i à P_i la variation du potentiel est donc :

$$d\Phi = \frac{a}{2}$$

Le passage de M_i à P_i est réalisé au moyen de deux déplacements élémentaires infiniment petits,

suivant une ligne de courant :

$$ds = M_i M_{i+0,5}$$

suivant une équipotentielle :

$$dn = M_{i+0,5} P_i$$

Ces deux déplacements sont sensiblement égaux ($ds = dn$) puisque le triangle rectangle $M_i P_i M_{i+0,5}$ est isocèle.

Dans la relation [*IV.5.3.3*], on a $ds = dn$; par suite

$$d\Phi = d\psi = \frac{a}{2}$$

Donc le point P_i appartient à la ligne de courant

$$\psi = K + \frac{a}{2}$$

On peut ainsi tracer, par points, cette ligne de courant de cote

$$\psi = K + \frac{a}{2}$$

En abaissant des divers points M_i des perpendiculaires $M_i M'_i$ sur la ligne

$$\psi = K + \frac{a}{2},$$

les éléments de perpendiculaires obtenus peuvent être assimilés à des éléments de lignes équipotentielles.

A partir de la nouvelle ligne de courant

$$\psi = K + \frac{a}{2}$$

et des points $M'_1, M'_2 \ldots M'_i \ldots M'_n$, on obtiendra la ligne de courant :

$$\psi = K + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = K + a$$

par une construction identique.

Remarque :

Pour améliorer la précision de la méthode, on peut utiliser les *propriétés des rayons de courbure des réseaux orthogo-*

gonaux isothermes, suivant la remarque signalée par M. l'Ingénieur Général Barillon[1].

A partir d'un point O (fig. IV.5.3.3) traçons un vecteur $\overrightarrow{Om}$ parallèle et égal à la vitesse $\vec{V}$ au point M du champ de l'écoulement considéré.

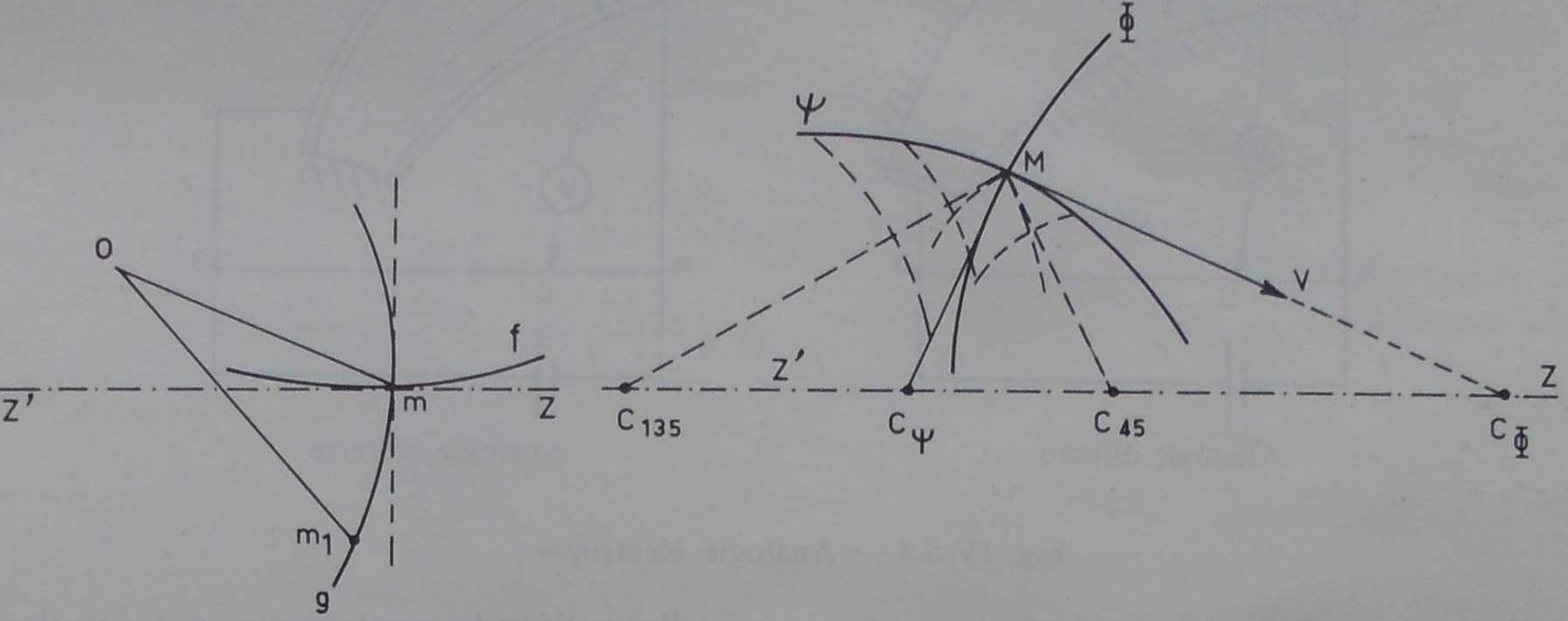


Fig. IV.5.3.3 – Propriétés des rayons de courbure des réseaux orthogonaux isothermes

Quand M décrit une ligne de courant ψ, le point m décrit une courbe g ; quand M décrit une ligne équipotentielle Φ, m décrit une courbe f. Le réseau des courbes orthogonales g et f constitue *l'hodographe* de l'écoulement considéré.

On démontre que les centres de courbure C_ψ et C_Φ de la ligne de courant ψ et de l'équipotentielle Φ sont alignés avec ceux C_{45} et C_{135} des lignes diagonales de la construction de Prasil ; la direction de la droite $Z'Z$ correspondante est la perpendiculaire $z'z$ en m à la courbe g de l'hodographe.

Si donc on connait une ligne de courant $\psi = C^{te}$ et la loi de variation des vitesses c'est-à-dire la répartition du potentiel le long de cette ligne de courant (cas de l'exemple traité précédemment), on peut en déduire la courbe g de l'hodographe ; on détermine le centre de courbure C_ψ de la ligne de courant et on trace par ce point la droite $Z'Z$ perpendiculaire à la tangente à la courbe g au point correspondant. On sait que les centres de courbure C_{45} et C_{135} des lignes à $45°$ de la construction de Prasil sont situés sur $Z'Z$. Le tracé du réseau des courbes $\psi = C^{te}$ et $\Phi = C^{te}$ se trouve ainsi facilité, dans la mesure toutefois où le centre de courbure C_ψ peut être déterminé avec quelque précision.

La méthode de Prasil nécessite donc de connaître au préalable une ligne de courant et la répartition du potentiel sur cette ligne ; dans la pratique on connaît fréquemment une ligne de courant, par exemple une des parois limitant latéralement l'écoulement. Mais la connaissance de la distribution du potentiel sur cette ligne fait intervenir des conditions d'ordre dynamique résultant de l'action des forces appliquées à la masse liquide considérée. C'est la raison pour laquelle les exemples d'application de la méthode de Prasil seront donnés ultérieurement, en Hydrodynamique (cf. § V.1.7.5).

IV.5.4. Etude analogique des écoulements irrotationnels

Nous nous limiterons à *l'analogie électrique* qui est la plus employée.

La distribution du potentiel électrique Φ dans un conducteur de résistivité uniforme satisfait également à l'équation de Laplace :

$$\Delta\Phi = 0$$

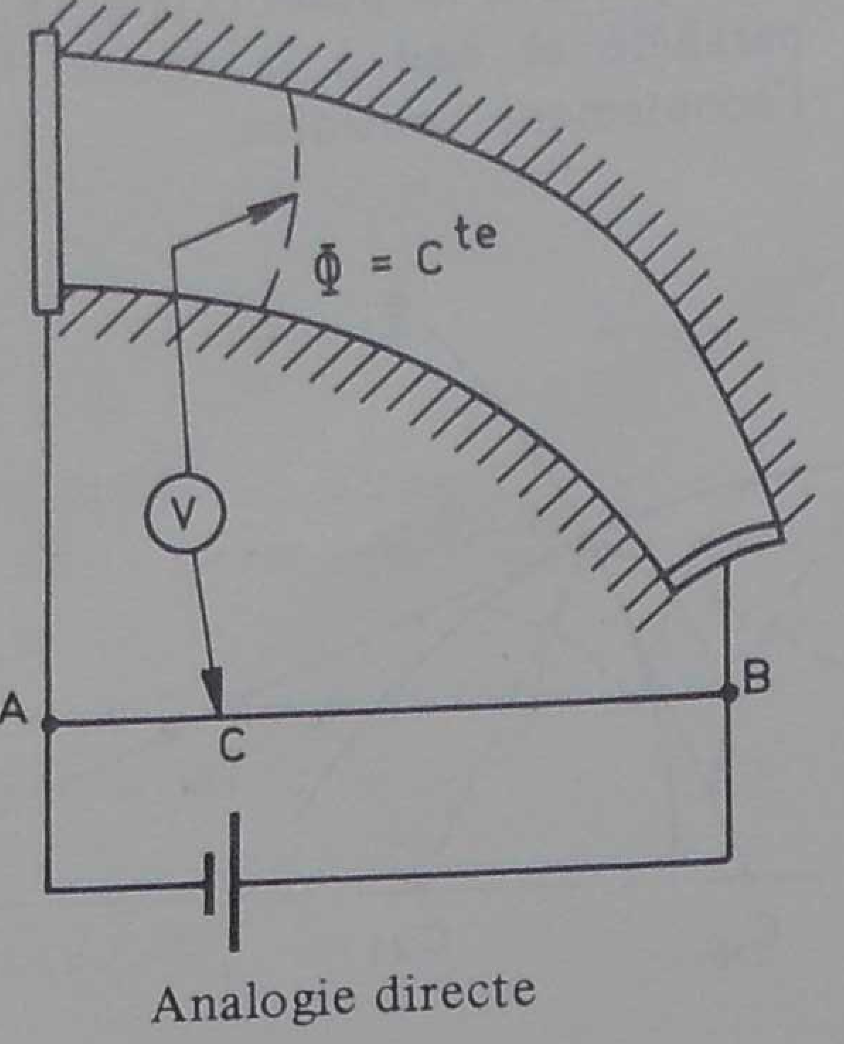
Il existe donc une *analogie directe* entre la distribution du potentiel électrique dans un tel conducteur et celle du potentiel des vitesses d'un écoulement irrotationnel limité par une paroi de même forme que les contours extérieurs du conducteur.

La fonction de courant ψ étant également une fonction harmonique, il existe aussi une analogie entre la distribution du potentiel électrique et celle de la fonction de courant ; c'est ce qu'on appelle *l'analogie inverse*.

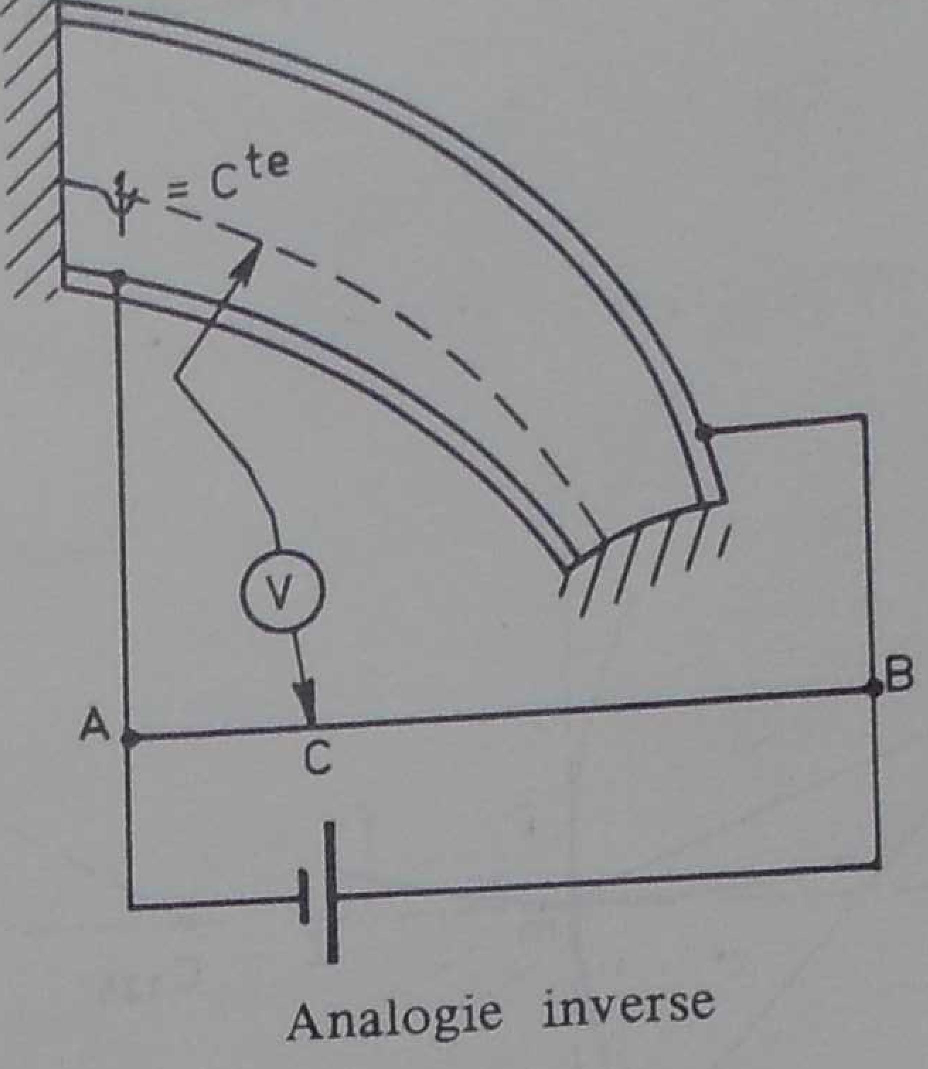
Pour étudier par cette méthode analogique un écoulement plan à potentiel des vitesses, on utilise une cuve dont le fond, non conducteur, a la forme de la région de l'écoulement à étudier (fig. IV.5.4).

----

(1) Communication du 12 Avril 1935 à la Société Hydrotechnique de France.



Analogie directe



Analogie inverse

Fig. IV.5.4 – Analogie électrique

Les parois de la cuve sont constituées latéralement par un matériau imperméable et non conducteur, elles ont la forme des limites latérales de l'écoulement. Les parois d'extrémité qui représentent deux sections transversales (amont et aval) de l'écoulement, sont constituées d'un matériau conducteur et sont reliées entre elles par l'intermédiaire d'une source de courant. La cuve est remplie d'une solution électrolytique.

On réalise ainsi l'analogie directe.

La différence de potentiel maintenue entre les deux parois d'extrémité crée, dans l'électrolyte, un champ électrique dont on détermine les lignes équipotentielles en recherchant, avec un voltmètre et une électrode mobile, les points où la différence de potentiel entre une des plaques d'extrémité et l'électrode mobile reste constante. On peut utiliser le montage en pont de Wheatstone.

Il convient de noter que la forme des plaques d'extrémité n'est pas quelconque. Les lignes correspondantes représentant deux équipotentielles de l'écoulement, il est nécessaire de connaître ces deux lignes pour déterminer la forme de la cuve.

On peut également placer les électrodes sur les limites latérales de l'écoulement (lignes de courant) et matérialiser les plaques d'extrémité (équipotentielles) en matériau isolant. On réalise ainsi l'analogie inverse (fig. IV.5.4) qui permet de déterminer, par points, le tracé des lignes de courant.

La cuve électrique peut servir également à l'étude des écoulements à trois dimensions.

Pour l'étude analogique des écoulements à deux dimensions, on peut remplacer la cuve par une feuille de papier spécial conducteur (cf. § XIII.5.5.1).

IV.6. ÉTUDE CINÉMATIQUE DES ÉCOULEMENTS GIRATOIRES

IV.6.1. Définition

Un écoulement giratoire est un écoulement entre des parois de révolution et qui présente les mêmes propriétés dans tous les plans méridiens passant par l'axe de révolution ; il est donc indépendant de l'azimut considéré qui ne doit donc pas apparaître explicitement dans l'expression de la vitesse et de ses dérivées.

Un tel écoulement se rencontre constamment dans les turbo-machines (turbines, pompes centrifuges, hélices).

Pour étudier ces écoulements giratoires, il est avantageux d'utiliser des coordonnées cylindriques que nous commencerons tout d'abord par définir.

IV.6.2. Coordonnées cylindriques

Un point quelconque A de l'écoulement sera déterminé par ses coordonnées z, r et θ définies comme suit (fig. IV.6.2) :

z = cote prise par rapport à un plan de référence perpendiculaire à l'axe de rotation Oz

r et θ = coordonnées polaires dans le plan de cote z.

Les composantes de la vitesse $\vec{V}$ du point A seront alors :

$\vec{V}_z = \dfrac{dz}{dt}$ suivant l'axe Oz

$\vec{V}_r = \dfrac{dr}{dt}$ suivant le rayon vecteur du point A

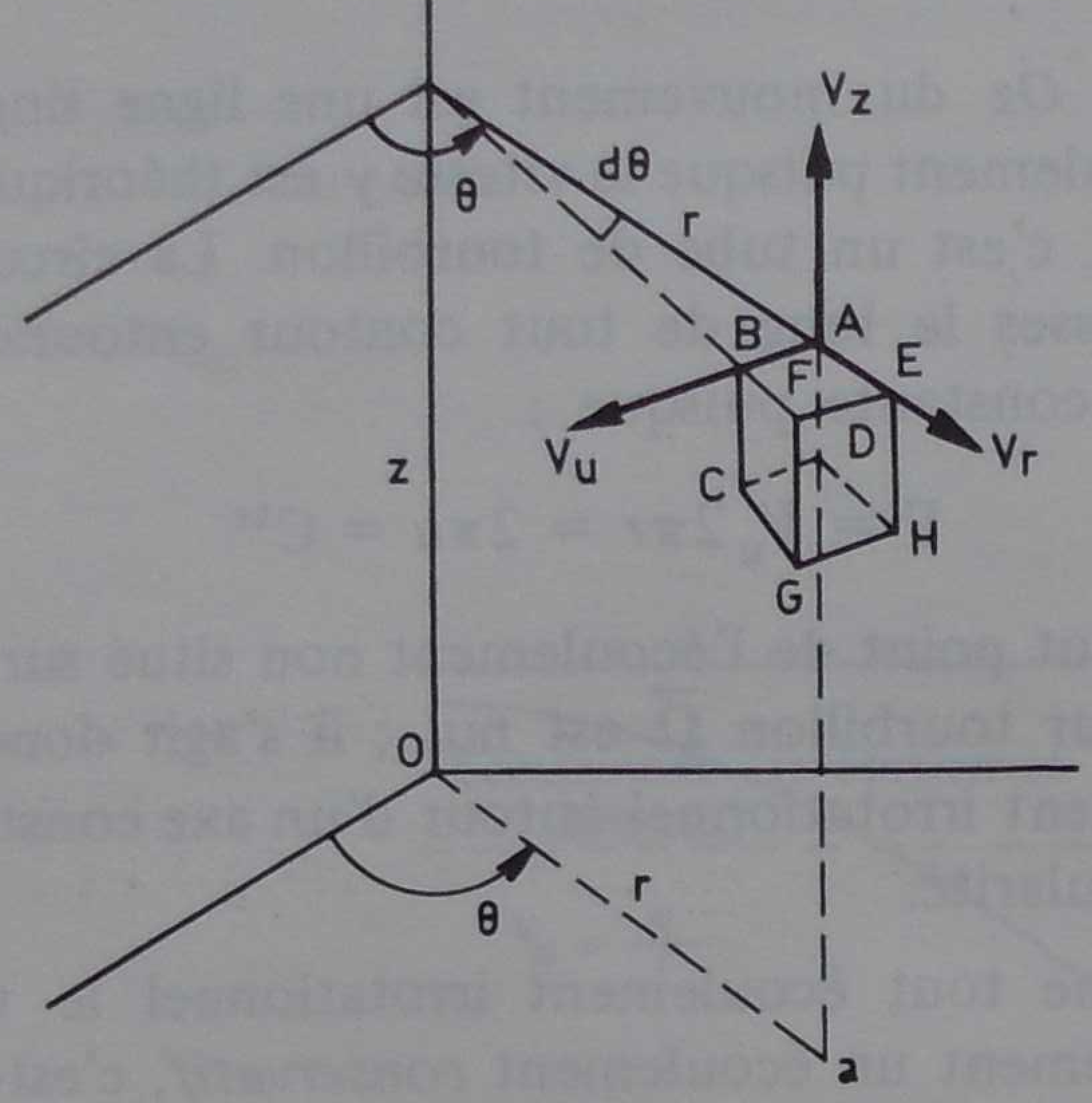


Fig. IV.6.2 – Coordonnées cylindriques

$\vec{V}_u = r\,\dfrac{d\theta}{dt}$ suivant la perpendiculaire au plan méridien de A, c'est-à-dire suivant la tangente au parallèle de A.

IV. 6.3. Equation de continuité

Pour établir cette équation, nous procèderons de la même manière que pour les coordonnées rectangulaires en considérant la masse du volume élémentaire $ABCDEFGH$ de dimensions :

dr suivant la direction de V_r

$r d\theta$ suivant la direction de V_u

dz suivant la direction de V_z

Pendant le temps dt il *entre* par la face $ABCD$, normale au rayon r, une masse de fluide égale à :

$$\rho V_r \, at \, r \, d\theta \, dz$$

Pendant le même temps, il *sort* par la face opposée $EFGH$ une masse de fluide égale à celle qui est entrée, augmentée de sa différentielle partielle par rapport à r.

Or seuls ρ, V_r et r peuvent varier par rapport à r. La masse qui sort est donc :

$$\left[\rho V_r r + \frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r)\, dr\right] dt\, d\theta\, dz$$

La différence de ces deux expressions, soit :

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\rho V_r r)\, dr\, dt\, d\theta\, dz$$

représente l'accroissement de masse du volume élémentaire correspondant au mouvement du fluide à travers les deux faces envisagées.

Un raisonnement similaire montrerait que l'accroissement de masse à travers les autres faces a pour expression :

$$-\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_u)\, dt\, dz\, dr\, d\theta$$

à travers les faces radiales $ADHE$ et $BCGF$, et

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z)\, r\, dt\, dr\, d\theta\, dz$$

à travers les faces transversales $CDHG$ et $BAEF$.

L'accroissement total de la masse de fluide dans le volume considéré pendant le temps dt est donc :

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_u) + r\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z)\right] dt\, dr\, d\theta\, dz$$

La fluide étant continu, cet accroissement de masse est égal au produit du volume par l'accroissement de masse volumique, soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt\, dr\, dz\, r\, d\theta\, .$$

D'où l'équation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt\, dr\, dz\, r\, d\theta = -\left[\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_u) + r\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z)\right] dt\, dr\, d\theta\, dz$$

ou :

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_u) + r\frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0$$

Pour un mouvement permanent le premier terme disparaît. Pour un fluide *incompressible* en mouvement permanent ρ est constant et l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{\partial V_u}{\partial \theta} + r\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Enfin si, en outre, *le mouvement est giratoire*, c'est-à-dire indépendant de θ, le deuxième terme est nul et l'équation de continuité s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + r\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

ou :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0$$

Si l'écoulement est irrotationnel, il existe un *potentiel des vitesses* Φ et les composantes de la vitesse sont :

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad ; \quad V_u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad ; \quad V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

L'équation de continuité s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

IV.6.4. Exemple d'un écoulement giratoire et irrotationnel : le vortex

Le potentiel Φ de cet écoulement a pour expression :

$$\Phi = \Phi_1(r, z) + a\theta$$

a étant une constante.

Donc :

$$V_u = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{a}{r} \qquad \text{indépendant de } \theta$$

$$rV_u = a$$

La vitesse tangentielle en un point est inversement proportionnelle à la distance de ce point à l'axe.

La constante $rV_u = a$ s'appelle la *constante giratoire.* Les deux autres composantes de la vitesse sont :

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \qquad \text{indépendant de } \theta$$

$$V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \qquad \text{indépendant de } \theta$$

Les trois composantes de la vitesse V_u, V_r et V_z sont donc indépendantes de l'azimut θ, ce qui caractérise un écoulement giratoire.

La vitesse méridienne $\vec{V}_m$ est la composante de $\vec{V}$ située dans le plan méridien, elle est donc définie par l'égalité vectorielle :

$$\vec{V}_m = \vec{V}_r + \vec{V}_z$$

V_m comme V_r et V_z dérive donc d'un potentiel Φ_1 indépendant de θ. Autrement dit, les particules qui, à un instant donné, se trouvent sur un même parallèle (c'est-à-dire ayant mêmes coordonnées r et z) restent pendant tout leur mouvement sur une même surface de révolution qui ne dépend ni de a, ni de V_u.

La section méridienne de cette surface est appelée *fonction de courant* ; ce n'est pas une ligne de courant mais la trace, sur un plan méridien, de la surface de révolution sur laquelle se trouvent situées toutes les lignes de courant coupant un parallèle donné.

L'axe Oz du mouvement est une ligne singulière de l'écoulement puisque la vitesse y est théoriquement infinie ; c'est un tube de tourbillon. La circulation des vitesses le long de tout contour entourant cet axe est constante puisque :

$$\Gamma = V_u 2\pi r = 2\pi a = C^{te}$$

En tout point de l'écoulement non situé sur l'axe, le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ est nul ; il s'agit donc d'un écoulement irrotationnel autour d'un axe constituant une singularité.

Comme tout écoulement irrotationnel le vortex est également un écoulement *conservatif*, c'est-à-dire le long duquel l'énergie se conserve, ainsi que nous le démontrerons plus loin (cf. § V.1.7). Dans les turbo-machines on cherche à diminuer la constante giratoire entre l'entrée et la sortie de la machine dans le cas d'une turbine (et inversement dans le cas d'une pompe centrifuge) car c'est précisément à la variation $d(rV_u)$ de la constante giratoire que correspond l'échange d'énergie entre la roue et la veine liquide qui la traverse. Autrement dit, la nécessité d'opérer ce transfert d'énergie impose de réaliser un écoulement rotationnel.

On peut observer la formation d'un vortex[1] lors de l'écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir cylindrique à axe vertical dont le fond horizontal est percé, en son centre, d'un orifice. La dissymétrie des forces de frottement résultant de l'accélération de Coriolis due à la rotation de la terre explique que le sens de rotation du vortex s'inverse

(1) Nous rappellerons également ici la belle description du vortex qu'on peut lire sous la plume de Maurice Genevoix dans "Raboliot" : "Cela faisait à la surface de l'eau un entonnoir aux parois luisantes, un tourbillon tranquille et fort, si continûment régulier qu'il apparaissait immobile. Mais, par instants, quelque feuille morte, quelque brindille de jonc desséchée approchait avec lenteur, aspirée d'un attrait invincible, accélérait son glissement peu à peu, et, basculant soudain, s'engouffrait en chute vertigineuse".

en passant de l'hémisphère Nord à l'hémisphère Sud. Par ailleurs, la viscosité du liquide provoque, dans la partie axiale de l'écoulement où le gradient radial des vitesses est élevé, la production d'un noyau à axe vertical tournant en bloc, c'est-à-dire qu'à une distance r de l'axe la vitesse est $V_u = Kr$.

On a donc affaire, dans cette zone centrale, à un écoulement rotationnel et non plus giratoire (fig. IV.6.3).

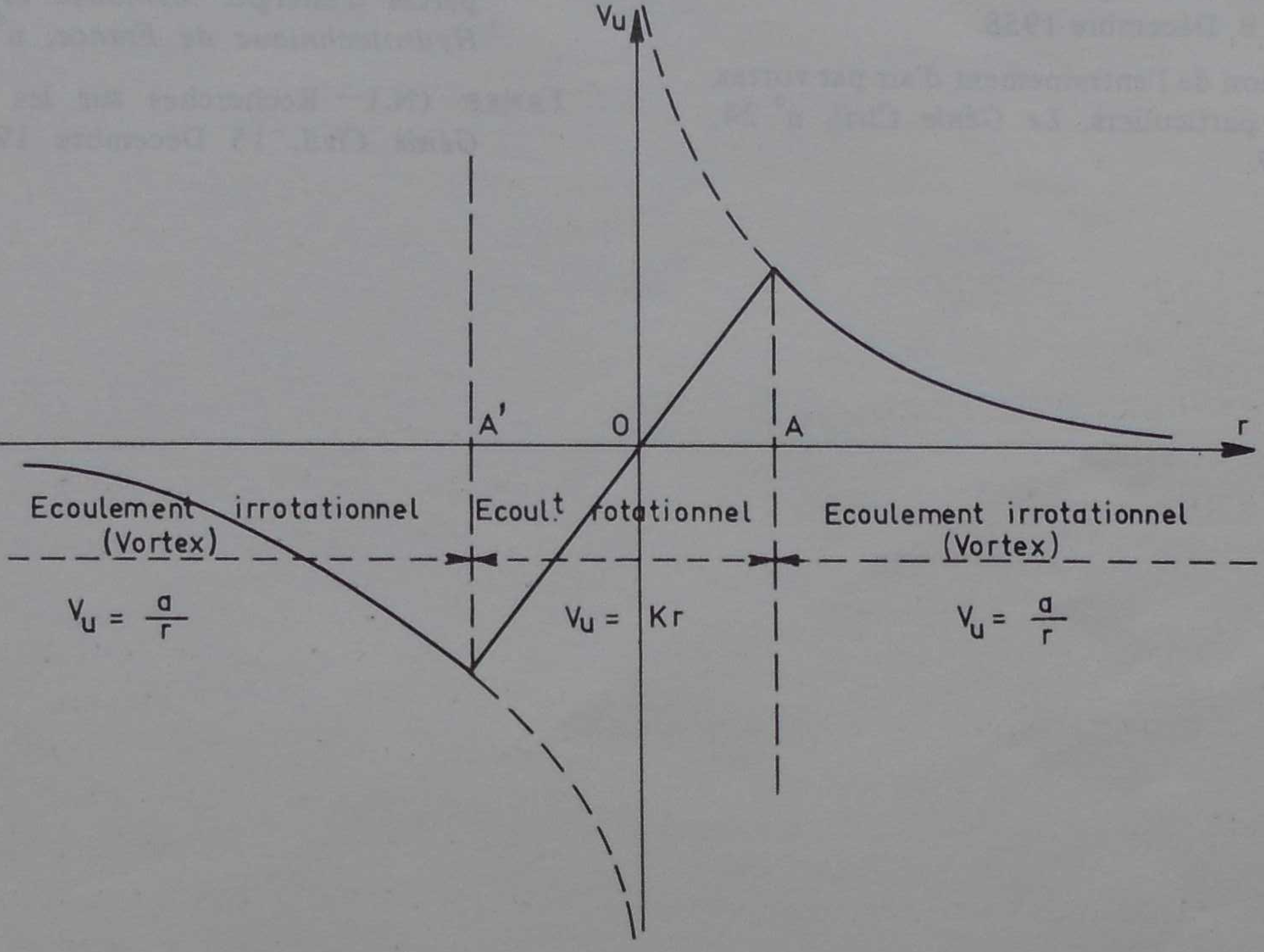


Fig. IV.6.3

Dans les turbo-machines, on évite précisément la formation de ce noyau rotationnel en plaçant dans l'axe de l'écoulement un noyau solide de révolution dont les génératrices coïncident avec une fonction de courant de l'écoulement irrotationnel, de telle manière que les vitesses tangentielles sur la paroi extérieure de ce noyau soient réduites à des valeurs compatibles avec le maintien de l'écoulement irrotationnel.

Les écoulements giratoires irrotationnels peuvent être étudiés par la *méthode d'analogie électrique*; en inclinant légèrement la cuve, on matérialise un onglet de la masse en écoulement compris entre deux plans méridiens voisins et on peut procéder au tracé, par points, du réseau des équipotentielles et des lignes de courant (fig. IV.6.4).

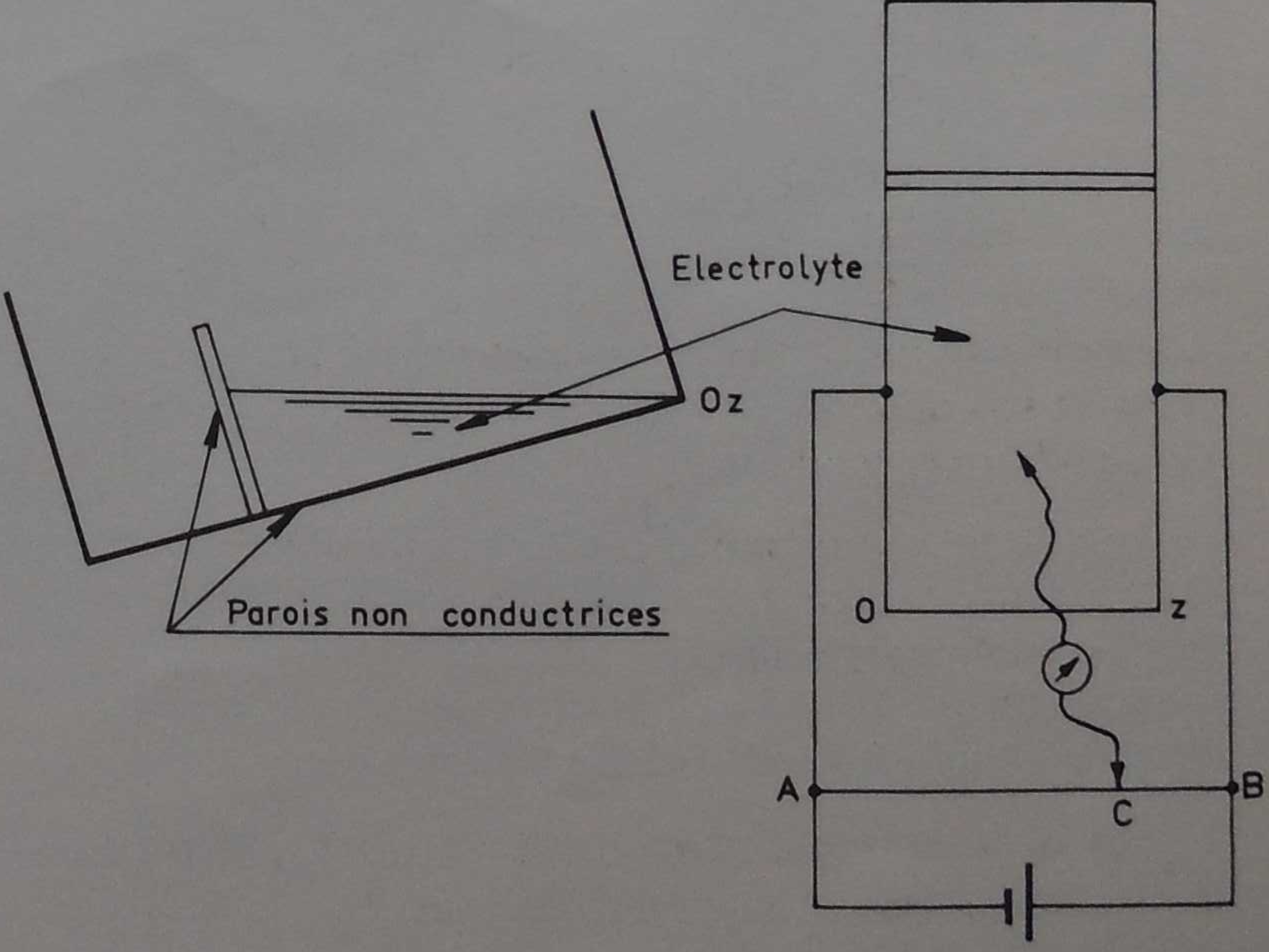


Fig. IV.6.4 – Analogie électrique pour l'étude des écoulements giratoires

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre IV

BERGE (J.P.).— Enquête sur la formation du vortex et autres anomalies dans une enceinte avec ou sans surface libre. *La Houille Blanche*, n° 1, 1966.

BERGE (J.P.) et LABETOULLE (J.).— Suppression des vortex dans les chambres d'aspiration des pompes de circulation de la centrale thermique de Creil-St-Leu. *La Houille Blanche*, n° B, Décembre 1958.

BERGE (J.P.).— Suppression de l'entrainement d'air par vortex dans quelques cas particuliers. *Le Génie Civil*, n° 24, 15 Décembre 1959.

BERGE (J.P.).— Etude des phénomènes de vortex dans un liquide à surface libre. Méthodes optiques expérimentales d'étude. *Bulletin du Centre de Recherches et d'essais de Chatou*, n° 13, Octobre 1965.

HOLTORFF (G.).— La surface libre et les conditions de similitude du vortex. *La Houille Blanche*, n° 3, 1964.

MEYER (R.).— Méthode de tracé des écoulements réels à faibles pertes d'énergie. *Mémoires et Travaux de la Société Hydrotechnique de France*, n° 1, 1957.

TANER (N.).— Recherches sur les vortex d'aspiration. *Le Génie Civil*, 15 Décembre 1968.



Leonhard EULER (1707-1783)

CHAPITRE V

HYDRODYNAMIQUE

L'hydrodynamique étudie le mouvement des liquides en tenant compte des forces qui lui donnent naissance.

On se propose donc d'établir les relations entre les positions des particules fluides, le temps et les forces qui interviennent.

Comme en cinématique on peut utiliser, à cet effet, la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler ; la seconde permet d'établir des équations plus faciles à intégrer, c'est donc celle que nous utiliserons.

Cette méthode consiste à déterminer, en fonction du temps et des forces agissantes et pour chaque point de la masse fluide, *la vitesse* $\vec{V}$, *la pression* p *et la masse volumique* ρ des particules fluides qui viennent successivement passer par ce point.

Comme la vitesse $\vec{V}$ d'une particule est entièrement définie par ses trois composantes u, v et w, on devra donc disposer de cinq équations permettant d'obtenir u, v, w, p et ρ en fonction de x, y, z, t et des composantes des forces agissant sur la particule considérée.

Parmi les forces en cause, les forces de viscosité n'interviennent que pour les liquides réels et non pour les liquides parfaits.

Cette remarque nous conduit donc à étudier successivement :

l'Hydrodynamique du liquide parfait

l'Hydrodynamique du liquide réel.

V.1. HYDRODYNAMIQUE DU LIQUIDE PARFAIT

Les cinq équations à établir et qui ont été définies plus haut se classent ainsi :

1 — Un système de trois équations générales du mouvement qu'on appelle les équations d'Euler.

2 — Une équation caractéristique du fluide.

3 — L'équation de continuité.

V.1.1. Equations générales du mouvement (équations d'Euler)

Le liquide étant supposé parfait, la pression en chaque point a une valeur unique et parfaitement définie ; en effet, comme il n'y a pas de frottements intérieurs, il n'y a pas de composante tangentielle de la pression sur un élément plan, composante tangentielle qui varierait avec l'orientation de l'élément plan et ferait, en définitive, varier la pression en un point avec sa direction autour de ce point. La pression est donc constante dans toutes les directions autour d'un point comme nous l'avons démontré au § II.2.2.

En hydrostatique, nous avons établi les équations d'équilibre d'un parallélépipède élémentaire pris dans une masse liquide au repos, c'est-à-dire soumis à l'action :

a) des forces extérieures (forces de volume)

b) des pressions latérales (forces de surface)

En considérant la force extérieure $\vec{F}$ de composantes X, Y, Z, agissant sur l'unité de masse du liquide, l'équation d'équilibre hydrostatique s'écrit (cf. § III.1) :

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}\,p} = \vec{F}$$

En hydrodynamique il suffit donc d'ajouter, au second membre, la force d'inertie par unité de masse,

c'est-à-dire, au signe près, l'accélération absolue, soit $-\vec{\gamma}$, ce qui conduit à l'équation fondamentale

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}\,p} = \vec{F} - \vec{\gamma}} \qquad [V.1.1.1]$$

Cette équation vectorielle projetée sur les axes fournit les trois équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t}\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t}\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \qquad [V.1.1.2]$$

Ce sont les équations générales du mouvement, appelées plus communément *équations d'Euler*.

Remarque : Les expressions développées suivantes :

$$\vec{\gamma}\left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right.$$

peuvent se condenser dans l'équation vectorielle :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad.}}\,\frac{V^2}{2} + 2\vec{\Omega}_\wedge\vec{V} \qquad [V.1.1.3]$$

On peut rapprocher de cette équation celle qui donne la loi de composition des accélérations dite *formule de Coriolis* (1835) :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + 2\vec{\omega}_\wedge\vec{V}_r \qquad [V.1.1.4]$$

dans laquelle :

$\vec{\gamma}_a$ est l'accélération absolue

$\vec{\gamma}_r$ est l'accélération relative (par rapport aux axes mobiles)

$\vec{\gamma}_e$ est l'accélération du point coïncidant (accélération d'entraînement)

$\vec{V}_r$ est la vitesse relative

$\vec{\omega}$ est le vecteur de la rotation instantanée qui fait coïncider les axes fixes avec les axes mobiles.

Le terme $2\vec{\omega}_\wedge\vec{V}_r$ est *l'accélération complémentaire* ou *accélération de Coriolis.*

Si les axes mobiles sont animés par rapport au trièdre de référence de la vitesse de translation $\vec{V}$, l'accélération relative est $\vec{\gamma}_r = \partial\vec{V}/\partial t$. Si, en outre, le vecteur de la rotation instantanée $\vec{\omega}$ est égal au vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$, l'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e$ est l'accélération centrifuge, soit

$$\vec{\gamma}_e = \overrightarrow{\text{grad}}\,(V^2/2)$$

et l'accélération de Coriolis s'écrit $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega}_\wedge\vec{V}_r = 2\vec{\Omega}_\wedge\vec{V}$.

La formule [*V.1.1.4*] s'écrit alors

$$\vec{\gamma}_a = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \text{grad.}\,\frac{V^2}{2} + 2\vec{\Omega}_\wedge\vec{V}$$

qui est identique à la formule [*V.1.1.3*].

V.1.2. Equation caractéristique

(On l'appelle aussi parfois "*équation complémentaire*").

Comme nous l'avons établi en hydrostatique, pour un liquide supposé incompressible, cette équation s'écrit :

$$\rho = \text{Constante}\,. \qquad [V.1.2]$$

V.1.3. Equation de continuité

C'est celle qui a été établie en cinématique et qui exprime que le fluide reste continu, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir ni apport extérieur, ni prélèvement de matière ; la masse se conserve au cours de l'écoulement.

Pour un fluide parfait, nous retrouvons donc l'équation établie en cinématique (cf. § IV.2) :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Pour un liquide, compte tenu de l'équation caractéristique ($\rho = C^{te}$), l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou :

$$\text{div}\,\vec{V} = 0 \qquad [V.1.3.1]$$

Dans le cas particulier fréquent d'un écoulement liquide où toutes les vitesses sont normales à une section transversale plane du courant et égales entre elles, l'équation de continuité peut se mettre sous

la forme suivante, comme nous l'avons montré en cinématique (§ IV.2) :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \qquad [V.1.3.2]$$

En définitive, pour un liquide parfait supposé incompressible, les cinq équations cherchées sont :

– les trois équations d'Euler [*V.1.1.1*] ou [*V.1.1.2*]

– l'équation caractéristique [*V.1.2*]

– l'équation de continuité [*V.1.3.1*] ou [*V.1.3.2*]

V.1.4. Equation du mouvement le long de la trajectoire

Reprenons les équations d'Euler :

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad.}\, p} = \vec{F} - \vec{\gamma} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{d^2 x}{dt^2} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{d^2 y}{dt^2} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

et proposons-nous d'établir la relation existant entre $X, Y, Z, x, y, z, p, \rho$ et t *le long de la trajectoire* d'une molécule liquide.

A cet effet, considérons les coordonnées de deux points M et M' infiniment voisins situés sur la trajectoire de la molécule liquide qui passe en M au temps t et en M' au temps $t + dt$.

Soient :

$x \;,\; y \;,\; z$, les coordonnées de M

$x + dx \;,\; y + dy \;,\; z + dz$, les coordonnées de M'

Multiplions la première équation du système précédent par dx, la seconde par dy, la troisième par dz et additionnons. Il vient ainsi :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) - \left(\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dt}dz\right)$$

Le premier membre de cette équation est égal à

$$\frac{1}{\rho}\left(dp - \frac{\partial p}{\partial t}dt\right)$$

D'après le choix que nous avons fait de dx, dy, dz, nous avons

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

Le deuxième terme du second membre devient donc :

$$u\,du + v\,dv + w\,dw\,.$$

Or, si V est la vitesse de la molécule qui passe en $M(x\,,y\,,z)$ au temps t, on a :

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

donc :

$$V\,dV = u\,du + v\,dv + w\,dw\,.$$

En définitive l'équation obtenue s'écrit encore :

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\left(dp - \frac{\partial p}{\partial t}dt\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - V\,dV \qquad [V.1.4]}$$

Cette équation est d'ailleurs l'homologue de celle qui a été établie en hydrostatique (cf. § III.1) :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = X\,dx + Y\,dz + Z\,dz \qquad [III.1.3]$$

C'est l'équation fondamentale que nous utiliserons en hydraulique ; rappelons qu'elle n'est applicable à une molécule liquide, d'après l'hypothèse faite sur dx, dy, dz, *que le long de sa trajectoire.*

V.1.5. Répartition des pressions dans une section droite d'une masse liquide en mouvement dont les trajectoires des molécules liquides sont des droites parallèles ou des courbes parallèles à grand rayon de courbure

Un tel mouvement est très fréquent et il est utile de savoir comment varie la pression dans la section droite considérée.

Choisissons l'axe OX parallèle aux trajectoires qui sont supposées des droites parallèles ou des courbes à grand rayon de courbure assimilables à des droites parallèles.

Reprenons les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{dw}{dt} \end{cases}$$

Multiplions les deux dernières équations respectivement par dy et dz et additionnons-les, il vient :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) = Y\,dy + Z\,dz - \left(\frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz\right)$$

Appliquons cette équation dans une section transversale parallèle au plan YOZ.

Le deuxième facteur du premier membre représente la variation de la pression sur une longueur infiniment petite le long d'une ligne normale à OX.

Les deux derniers termes du second membre peuvent s'écrire :

$$\frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz = v\,dv + w\,dw$$

Compte-tenu de l'hypothèse faite, v et w sont négligeables. Donc le second membre se réduit à la valeur hydrostatique :

$$Y\,dy + Z\,dz$$

D'où cet énoncé :

Le long de toute ligne qui coupe normalement des trajectoires liquides sensiblement rectilignes et parallèles, la pression varie conformément à la loi de l'hydrostatique.

Ce théorème permet donc d'appliquer les lois de l'hydrostatique dans une section transversale plane d'un écoulement dont les vitesses sont sensiblement rectilignes et parallèles.

V.1.6. Cas particulier du mouvement permanent

V.1.6.1. *Définition*

Le mouvement d'un fluide est permanent quand, en un point quelconque de la masse en mouvement, les molécules qui se succèdent en ce point sont toutes animées de la même vitesse, sont soumises à la même pression et ont la même masse volumique.

Un tel mouvement est très fréquent en hydraulique (écoulement dans une conduite ou un canal en dehors des circonstances exceptionnelles comme lors de l'ouverture ou de la fermeture brusque d'un robinet ou d'une vanne, écoulement dans une rivière en dehors des périodes d'étiages ou de crues, écoulement à travers les orifices, ajutages ou déversoirs sous charge constante, écoulement dans les machines hydrauliques sous charge constante et à vitesse et débit constants, etc . . .).

Si, par contre, les paramètres V, p et ρ varient en un point en fonction du temps, le régime est dit *"variable"*.

Il ne faut pas confondre le régime permanent avec le régime uniforme ; dans le premier, la vitesse peut en effet varier tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide, alors qu'elle reste constante dans le second. Le régime permanent exprime en quelque sorte une constance dans le *temps* alors que le régime uniforme exprime une constance dans *l'espace*.

V.1.6.2. *Equation générale du mouvement permanent*

Si le mouvement est permanent, $\partial p/\partial t = 0$ et l'équation [*V.1.4*] devient

$$\frac{1}{\rho} dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - V\,dV \qquad [V.1.6.1]$$

Pour résoudre les problèmes courants, il faudra associer à cette équation l'équation caractéristique du fluide.

V.1.6.2.1. *Cas d'un fluide élastique dans le champ de la pesanteur – Formule de Navier*

Considérons un fluide élastique *soumis à la seule action de la pesanteur.*

Si p est sa pression et θ sa température, son équation caractéristique sera

$$\rho = \frac{kp}{1 + \alpha\theta}$$

Supposons la température constante (écoulement isotherme) :

$$\rho = kp$$

Si l'axe Oz est vertical et orienté positivement vers le haut, on a

$$X = Y = 0$$

$$Z = -g$$

L'équation [*V.1.6.1*] devient donc :

$$\frac{1}{kp} dp = -g\,dz - V\,dV$$

Intégrons entre deux points de cotes z_0 et z_1 où les pressions sont p_0 et p_1 et les vitesses V_0 et V_1. Il vient :

$$\frac{1}{k} \mathcal{L} \frac{p_1}{p_0} + g(z_1 - z_0) = -\frac{1}{2}(V_1^2 - V_0^2)$$

qui est la *formule de l'écoulement isotherme des gaz parfaits*. On la met généralement sous la forme suivante en supposant $V_0 = 0$:

$$V_1^2 = -2\frac{1}{k}\mathcal{L}\frac{p_1}{p_0} - 2g(z_1 - z_0)$$

Posons $z_1 - z_0 = h$

$$V_1^2 = 2\left(\frac{1}{k}\mathcal{L}\frac{p_0}{p_1} - gh\right)$$

Or gh est généralement négligeable devant le premier terme du second membre, ce qui revient à considérer la vitesse due à la hauteur de chute $\sqrt{2gh}$ comme négligeable par rapport à la vitesse de détente due à la variation de pression.

L'équation devient alors :

$$V_1^2 = \frac{1}{k}\mathcal{L}\frac{p_0}{p_1}$$

L'équation caractéristique $\rho = kp$ permet d'écrire :

$$\rho_0 = kp_0$$

$$\frac{1}{k} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

et l'équation devient, en définitive :

$$V_1 = \sqrt{2\frac{p_0}{\rho_0}\mathcal{L}\frac{p_0}{p_1}}$$

C'est la *formule de Navier* qui donne la vitesse de détente isotherme d'un gaz parfait.

V.1.6.2.2. *Cas d'un liquide incompressible dans le champ de la pesanteur – Théorème de Daniel Bernoulli*

Examinons tout d'abord le cas particulier et fréquent d'un écoulement liquide où toutes les vitesses sont normales à une section transversale plane du courant et égales entre elles ; l'équation de continuité s'écrit alors pour un liquide supposé incompressible :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \qquad [V.1.3.2]$$

Le régime étant permanent,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

Il en résulte :

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$$Q(s) = C^{te}$$

Le débit est donc constant tout le long du courant liquide considéré.

La permanence du mouvement qui est une constance dans le *temps*, entraîne, ici, la constance du débit dans l'*espace*.

Revenons maintenant au cas d'un écoulement quelconque en régime permanent d'un liquide supposé incompressible dans le champ de la pesanteur.

Son équation caractéristique est $\rho = C^{te}$.

Examinons ce que devient l'équation générale du mouvement permanent (équation [*V.1.6.1*]).

Le liquide en mouvement *étant supposé soumis à la seule action de la pesanteur*, on a :

$$X = Y = 0$$

$$Z = -g.$$

L'équation [*V.1.6.1*] s'écrit ainsi :

$$\frac{1}{\rho}dp = -g\,dz - V\,dV$$

Intégrons :

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = C^{te}$$

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = C^{te} \quad \text{ou} \quad \frac{p^*}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = C^{te}$$

Cette équation est analogue à celle obtenue en hydrostatique :

$$z + \frac{p}{\varpi} = C^{te} \quad \text{ou} \quad \frac{p^*}{\varpi} = C^{te}$$

Il s'est ajouté le terme $V^2/2g$ homogène à une longueur, qui est la *hauteur représentative de la vitesse*. C'est la hauteur de laquelle devrait tomber la molécule liquide, en chute libre dans le vide, pour acquérir la vitesse V.

La constante est donc homogène à une longueur H.

On a donc, tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide :

$$\boxed{z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = H = C^{te}} \qquad [V.1.6.2.2]$$

ou

$$\frac{p^*}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = H$$

avec

$$p^* = p + \overline{\omega} z$$

Cette équation reste applicable si, au lieu de considérer la trajectoire d'une molécule, on considère un *filet liquide* dont nous donnons ci-après la définition.

Filet liquide :

Soit MN la trajectoire d'une molécule liquide prise dans une masse liquide de fluidité parfaite en mouvement permanent (fig. V.1.6.1).

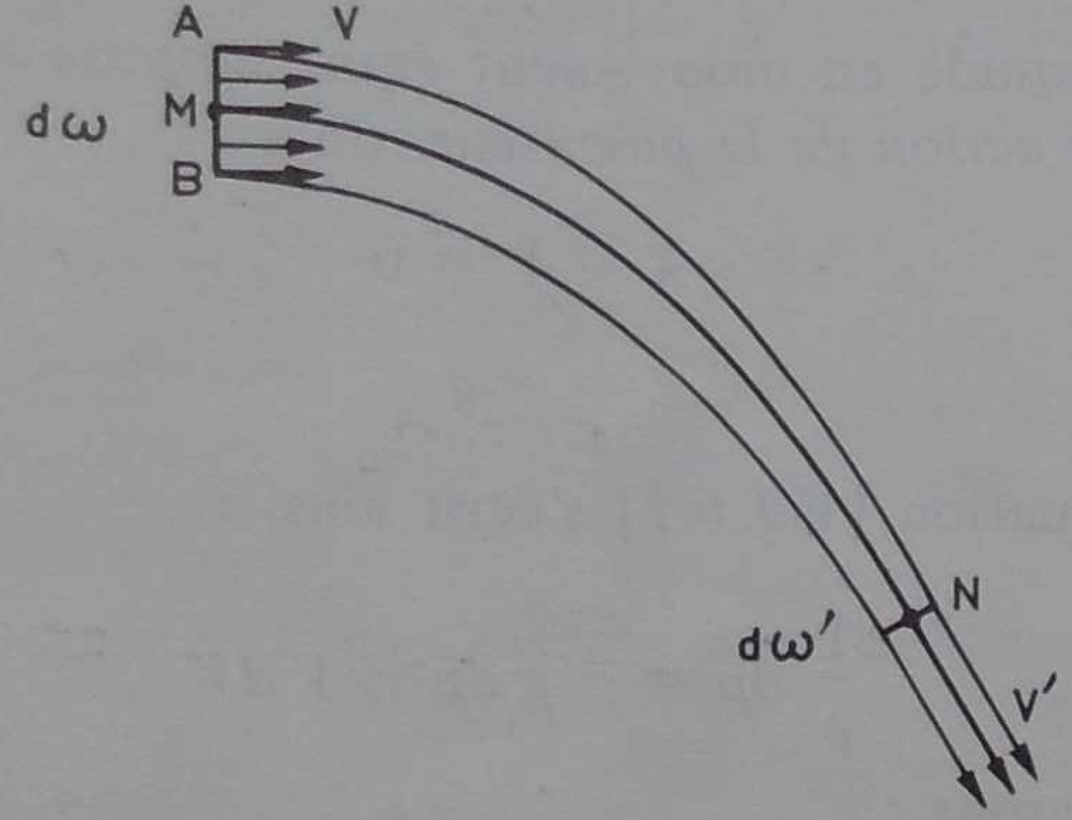


Fig. V.1.6.1 – Filet liquide

Considérons une surface AB infiniment petite, de centre de gravité M, normale à MN en M et telle que toutes les molécules qui s'y trouvent ont des vitesses instantanées normales à AB, égales à celle de la molécule M et des trajectoires s'écartant très peu de MN. L'ensemble de ces trajectoires forme une sorte de tube à section transversale infiniment petite et dont l'axe est la ligne MN. Le liquide contenu dans ce tube constitue un *filet liquide*. Bien entendu, en régime permanent non uniforme, la section du filet peut varier si la vitesse varie, la seule condition étant celle de la constance du débit $dq = V\,d\omega = C^{te}$.

On désignera par *courant liquide* ou *veine liquide*, le volume de liquide en écoulement constitué par plusieurs filets liquides juxtaposés.

Si on introduit dans l'équation [*V.1.6.2.2*] la vitesse supposée constante dans une section d'un filet liquide, cette équation devient l'expression mathématique du théorème de Daniel Bernoulli qui s'énonce ainsi :

Théorème de Daniel Bernoulli : En tout point d'un filet liquide pris dans une masse liquide de fluidité parfaite en mouvement permanent et soumis à la seule action de la pesanteur, la cote, la hauteur représentative de la pression et la hauteur représentative de la vitesse forment une somme constante.

Remarques :

1 – Le théorème de Bernoulli peut s'établir également en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à un déplacement élémentaire du filet liquide, compte tenu du caractère permanent de l'écoulement et en introduisant les travaux des pressions sur les sections d'extrémité du filet liquide et le travail de la pesanteur.

2 – Si on considère une particule de poids unité, les termes

$$z + \frac{p}{\overline{\omega}} = \frac{p^*}{\overline{\omega}}$$

représentent l'énergie potentielle (énergie "position" : z et énergie "pression" : $p/\overline{\omega}$) et le terme $V^2/2g$ représente l'énergie cinétique. Leur somme H représente donc *l'énergie mécanique totale* par unité de poids du liquide considéré.

Le théorème de Bernoulli exprime donc que tout le long d'un filet liquide de fluidité parfaite en mouvement permanent, soumis à la seule action de la pesanteur, *l'énergie mécanique totale par unité de poids du liquide se conserve.*

C'est d'ailleurs sous cette forme que Daniel Bernoulli avait établi cette proposition dans son traité "Hydrodynamica" en 1738, en écrivant l'égalité "*inter descensum actualem ascensumque potentialem*". Ce sont les commentateurs de son oeuvre (notamment Euler) qui en déduisirent l'équation classique :

$$z + \frac{p}{\overline{\omega}} + \frac{V^2}{2g} = H = C^{te}$$

Tout le long d'un filet liquide en mouvement permanent, il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement.

3 – *Représentation graphique du théorème de Bernoulli* (fig. V.1.6.2)

En chaque point A du filet liquide MN portons verticalement, à partir d'un plan horizontal de comparaison $H'H$:

– la cote $z = aA$ du point considéré,

– la hauteur représentative de la pression $AB = p/\overline{\omega}$

– la hauteur représentative de la vitesse $BC = V^2/2g$

Le lieu du point A est la *trajectoire* (axe du filet liquide) ; elle est confondue avec la *ligne de courant* puisque le régime est permanent.

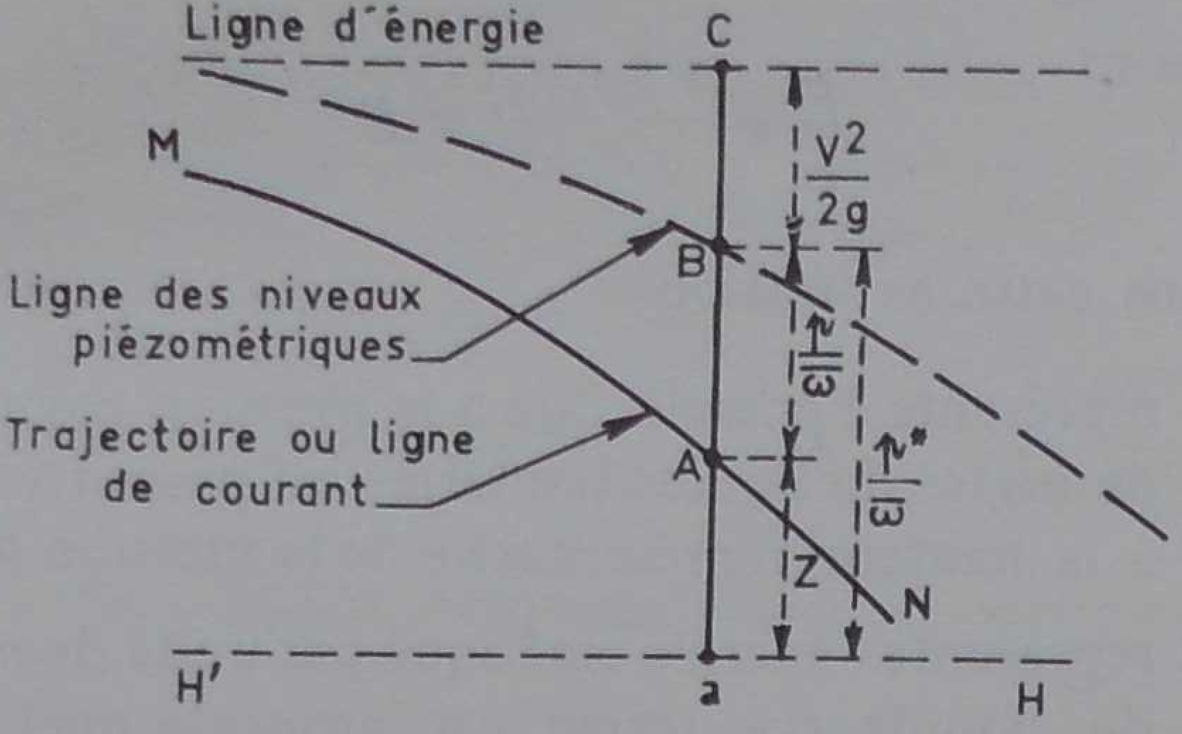


Fig. V.1.6.2 – Représentation graphique du théorème de Bernoulli

Le lieu du point B est la *ligne des niveaux piézométriques.*

Le lieu du point C est la *ligne d'énergie* qui, pour un liquide de fluidité parfaite, est horizontale, ainsi que le montre l'équation de Bernoulli.

Dans le cas particulier d'un écoulement à surface libre en contact avec l'atmosphère, si nous prenons comme origine des pressions la pression atmosphéririque, c'est-à-dire si nous ne considérons que les pressions effectives et si nous appliquons le théorème de Bernoulli à un filet liquide situé dans la surface libre, la ligne piézométrique sera confondue avec cette surface libre.

Si on considère (fig. V.1.6.3) un filet liquide situé dans le corps de la masse liquide et passant en N à une profondeur h, dans le cas général d'un écoulement quelconque, la vitesse en N étant différente de celle en M, la ligne d'énergie du filet considéré sera différente de celle du filet liquide passant en surface.

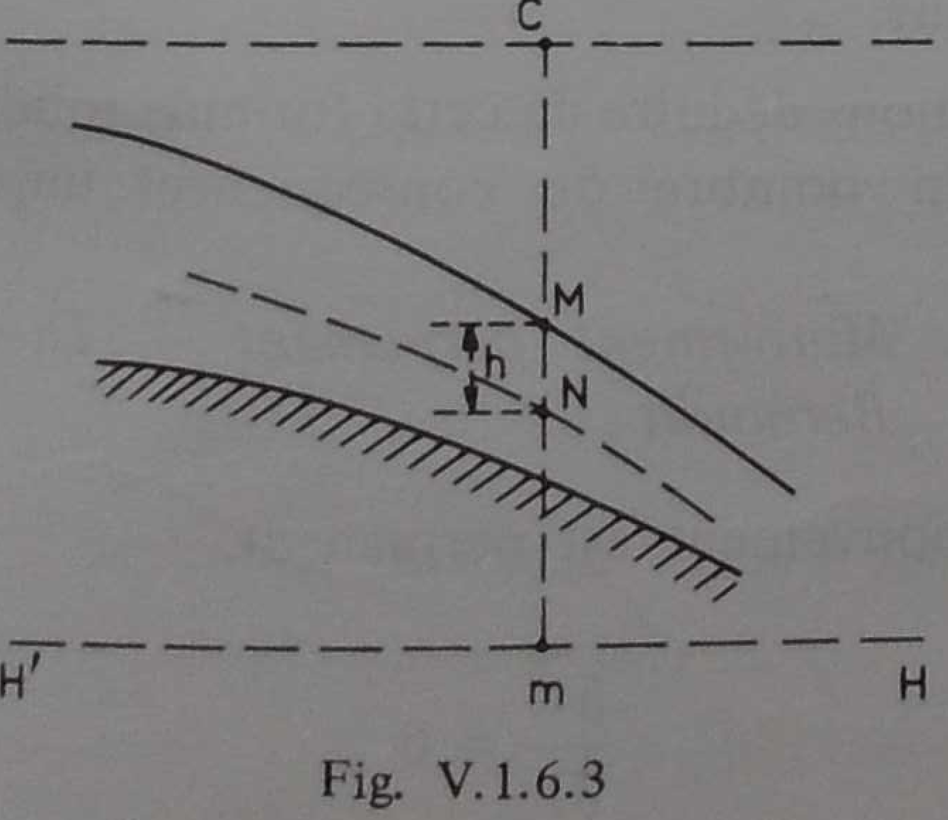


Fig. V.1.6.3

Nous démontrerons plus loin que pour que tous les points de la masse liquide en écoulement possèdent la même ligne d'énergie, il faut que l'écoulement considéré soit irrotationnel c'est-à-dire dépende d'un potentiel des vitesses ; ce serait, par exemple, le cas d'un écoulement en bloc, c'est-à-dire tel que les vitesses des filets liquides traversant au même instant une section transversale de l'écoulement soient parallèles et égales.

4 — *Charge entre deux points d'un filet liquide*

Par définition, la charge entre deux points d'un filet liquide est la différence de cote de la ligne piézométrique en ces deux points, soit :

$$h = \left(z + \frac{p}{\varpi}\right) - \left(z' + \frac{p'}{\varpi}\right) \qquad [V.1.6.2.3]$$

ou

$$h = \frac{p^* - p'^*}{\varpi}$$

Si la fluidité est parfaite, on a également (fig. V.1.6.4) :

$$h = \frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} \qquad [V.1.6.2.4]$$

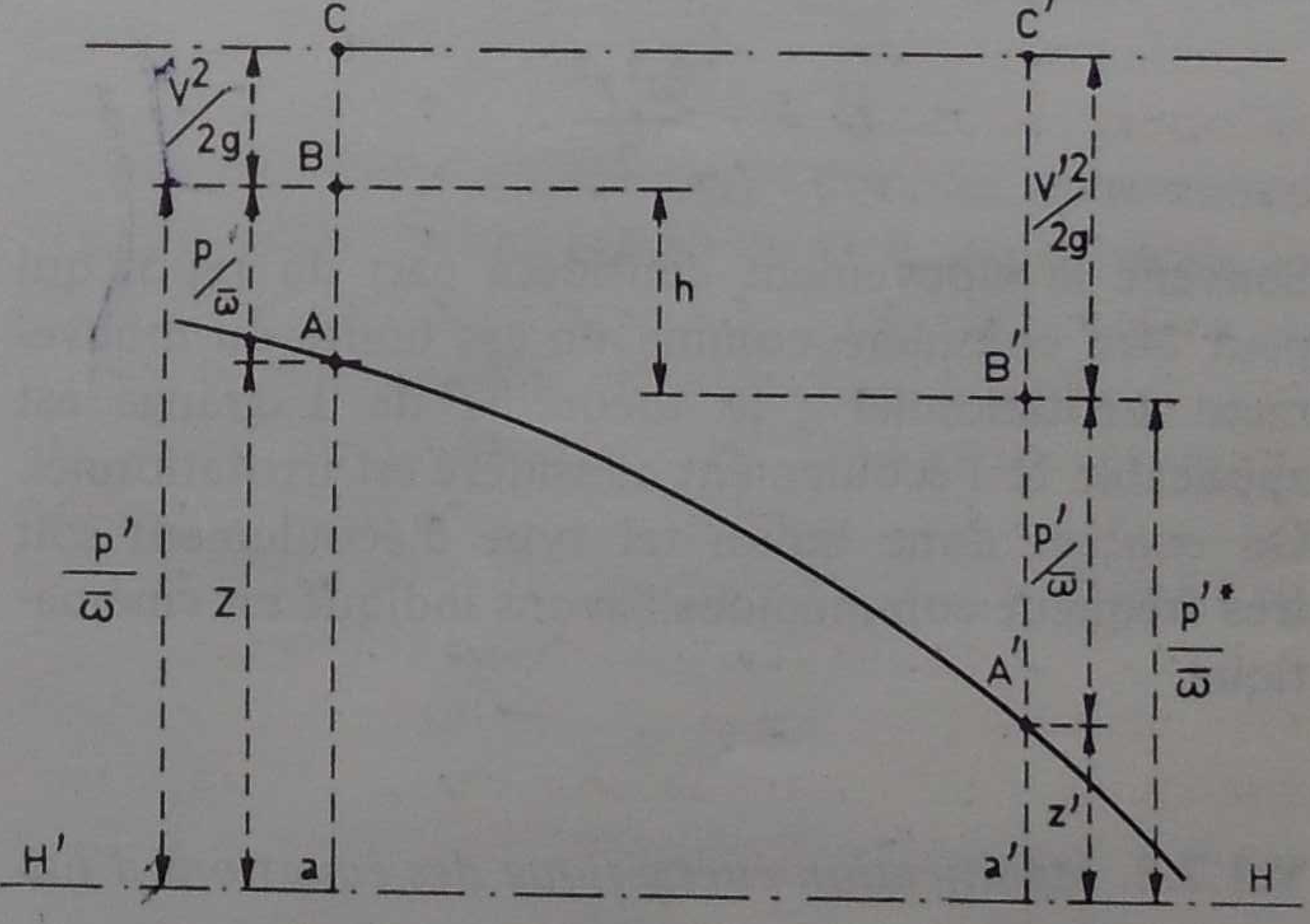


Fig. V.1.6.4 – Charge entre deux points d'un filet liquide

V.1.7. Ecoulements potentiels et écoulements conservatifs

V.1.7.1. *Mouvement à potentiel des accélérations – Théorème de Lagrange*

Reprenons l'équation d'Euler

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}}\, p = \vec{F} - \vec{\gamma} \qquad [V.1.1.1]$$

Si les forces de volume $\vec{F}$ dérivent d'un potentiel U et si le fluide est incompressible ($\rho = C^{te}$), cette équation peut s'écrire :

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}}\,p = \overrightarrow{\text{grad.}}\,U - \vec{\gamma}$$

$$\vec{\gamma} = \overrightarrow{\text{grad.}}\left(U - \frac{p}{\rho}\right)$$

$\vec{\gamma}$ dérive donc d'un potentiel $\Gamma = U - \dfrac{p}{\rho} + C^{te}$

L'existence d'un potentiel pour les forces de volume entraîne l'existence d'un potentiel pour l'accélération même si le mouvement n'est pas permanent.

Il en résulte le *théorème de Lagrange* : si un mouvement provoqué par des forces qui dérivent d'un potentiel est irrotationnel à un instant donné, il le reste toujours.

Or dans la pratique on se trouvera fréquemment en présence d'écoulements régis par des forces dérivant d'un potentiel ; c'est le cas par exemple des forces de *pesanteur* dont le potentiel est $U = -gz$, de la force *centrifuge* dont le potentiel est

$$U = -\frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Souvent le mouvement considéré part du repos qui peut être considéré comme un cas limite du mouvement irrotationnel ; le théorème de Lagrange est applicable et l'écoulement considéré est irrotationnel. On conçoit donc qu'un tel type d'écoulement soit très fréquent comme nous l'avons indiqué en cinématique.

V.1.7.2. *Signification énergétique des équations d'Euler*

Dans l'équation d'Euler, remplaçons $\vec{\gamma}$ par son expression vectorielle [*V.1.1.3*]. Il vient :

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}}\,p = \vec{F} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad.}}\,\frac{V^2}{2} - 2\vec{\Omega}_\wedge \vec{V}$$

Si les forces de volume $\vec{F}$ dérivent d'un potentiel U, et si $\rho = C^{te}$, on a :

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}}\,p = \overrightarrow{\text{grad.}}\,U - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad.}}\,\frac{V^2}{2} - 2\vec{\Omega}_\wedge \vec{V}$$

Groupons tous les termes sous le signe $\overrightarrow{\text{gradient}}$:

$$\overrightarrow{\text{grad.}}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U\right) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -2\vec{\Omega}_\wedge \vec{V}$$

Posons

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U = E$$

Dans cette expression :

p/ρ représente l'énergie due à la pression par unité de *masse* du liquide (ce terme est proportionnel à la hauteur représentative de la pression $p/\bar{\omega}$).

$V^2/2$ représente l'énergie cinétique par unité de *masse* du liquide (ce terme est proportionnel à la hauteur représentative de la vitesse $V^2/2g$).

$-U$ représente l'énergie potentielle par unité de *masse* du liquide (fonction potentielle des forces ; si, par exemple, l'écoulement s'effectue dans le champ de la pesanteur, $U = -gz$ et $-U = gz$ représente l'énergie position par unité de masse du liquide)

La somme

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U$$

représente donc *l'énergie mécanique totale par unité de masse du fluide* et l'équation devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad.}}\,E + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -2\vec{\Omega}_\wedge \vec{V}} \qquad [V.1.7.1]$$

Cette équation relie le mouvement d'une masse fluide (cinématique) à l'échange d'énergie qui en résulte (énergétique). Le vecteur tourbillon qui figure précisément dans cette relation fondamentale joue donc un rôle essentiel dans l'aspect énergétique de l'écoulement comme nous l'avions laissé entendre en cinématique.

Nous allons déduire de cette formule fondamentale un certain nombre de conséquences importantes.

V.1.7.2.1. *Mouvement permanent – Théorème de Bernoulli*

Si le mouvement est permanent,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

et l'équation [*V.1.7.1*] devient :

$$\overrightarrow{\text{grad.}}\, E = -\, 2\vec{\Omega}_{\wedge}\vec{V} \qquad [V.1.7.2]$$

On constate donc que dans le cas considéré d'un liquide parfait incompressible en mouvement permanent, *l'énergie E d'une particule du liquide ne peut rester constante dans l'espace au voisinage d'un point qu'aux seuls points où le vecteur tourbillon est nul ou parallèle à la vitesse* ($\vec{\Omega}_{\wedge}\vec{V} = 0$).

Mais l'énergie peut rester constante, même si $\vec{\Omega}$ n'est pas nul, à condition d'intégrer l'équation [*V.1.7.2*] le long d'une ligne où le vecteur $\vec{\Omega}_{\wedge}\vec{V}$ n'effectue aucun travail. (L'équation [*V.1.7.1*] montre en effet que ce vecteur $\vec{\Omega}_{\wedge}\vec{V}$ a les dimensions d'une accélération ou d'une force par unité de masse).

Ce vecteur $\vec{\Omega}_{\wedge}\vec{V}$ est perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}$. Si donc on intègre l'équation [*V.1.7.2*] le long de la trajectoire d'une molécule ou le long d'un filet liquide, le travail du vecteur $\vec{\Omega}_{\wedge}\vec{V}$ est nul et l'intégration donne :

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - U = C^{te}$$

On retrouve ainsi le théorème de Bernoulli.

Dans le cas d'un écoulement constitué par un ensemble de filets liquides dont les vitesses ne sont généralement pas parallèles, la constante d'intégration change d'un filet à l'autre. Pour qu'elle soit la même pour tous les filets liquides constituant la masse en écoulement, il faut que $\vec{\Omega} = 0$, c'est-à-dire que l'écoulement considéré soit irrotationnel. L'énergie mécanique est alors constante dans tout l'écoulement. Nous démontrons ainsi cette propriété importante que nous avions annoncée précédemment (§ V.1.6.2.2).

V.1.7.2.2. *Mouvement irrotationnel non permanent*

Reprenons l'équation [*V.1.7.1*] et supposons l'écoulement irrotationnel. On a alors $\vec{\Omega} = 0$ et $\vec{V}$ dérive d'un potentiel Φ :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad.}}\, \Phi$$

et

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\, \overrightarrow{\text{grad.}}\, \Phi = \overrightarrow{\text{grad.}}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

L'équation [*V.1.7.1*] devient ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad.}}\, E + \overrightarrow{\text{grad.}}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{grad.}} \left(E + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0$$

$$E + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C^{te} = K(t)$$

La constante $K(t)$ est la même pour tout l'écoulement mais varie avec le temps.

V.1.7.3. ***Gradient transversal des pressions – Influence de la courbure de la trajectoire***

Supposons le mouvement permanent sous l'action de forces dérivant d'un potentiel U (par exemple la pesanteur : $U = -\, gz$). L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\frac{1}{\rho}\, \overrightarrow{\text{grad.}}\, p = \overrightarrow{\text{grad.}}\, U - \vec{\gamma}$$

Projetons cette équation sur la normale principale $\vec{n}$ à la trajectoire au point considéré, cette normale étant orientée positivement vers le centre de courbure. Soit *R le rayon de courbure principal* au point considéré. Il vient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{V^2}{R}$$

Dans le cas où l'écoulement est régi uniquement par des *forces de pesanteur* ($U = -\, gz$), il vient :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -\, g\, \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{V^2}{R}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\, \rho\, \frac{V^2}{R} \qquad [V.1.7.3]$$

avec

$$p^* = p + \overline{\omega} z$$

ce qui montre qu'au gradient de pression

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = 0$$

résultant de la loi hydrostatique s'ajoute, dans la direction normale à la trajectoire, *un gradient dû à la courbure de la trajectoire*, soit

$$-\, \rho\, \frac{V^2}{R}\, .$$

Comme ce gradient de pression est négatif cela signifie que la pression diminue quand on se rapproche du centre de courbure de la trajectoire et inversement.

Si $R = \infty$, l'équation devient :

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = 0$$

ou

$$p^* = C^{te} \text{ dans la direction } \vec{n}$$

$$\frac{p^*}{\overline{\omega}} = C^{te} \text{ dans la direction } \vec{n}$$

ce qui traduit la loi de l'hydrostatique et confirme le résultat déjà indiqué précédemment (§ V.1.5) : dans une direction normale aux trajectoires d'un écoulement parallèle ou de courbure négligeable ($R = \infty$) la pression suit la loi de l'hydrostatique.

V.1.7.4. *Gradient transversal des vitesses*

Reprenons l'équation de Bernoulli :

$$\frac{p^*}{\overline{\omega}} + \frac{V^2}{2g} = H$$

et dérivons-la *dans le sens transversal*, c'est-à-dire par rapport à la variable $\vec{n}$ normale à la trajectoire et comptée positivement vers le centre de courbure. Il vient :

$$\frac{1}{\overline{\omega}} \frac{\partial p^*}{\partial n} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n}$$

En tenant compte de [*V.1.7.3*] :

$$\frac{1}{\overline{\omega}} \left(- \rho \frac{V^2}{R}\right) + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial H}{\partial n}$$

$$V \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{V^2}{R} = g \frac{\partial H}{\partial n}$$

Si l'écoulement est irrotationnel $H = C^{te}$ dans toute la masse liquide en écoulement et on obtient :

$$V \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R}$$

S'il s'agit d'un *écoulement giratoire plan et irrotationnel*, le centre de courbure des filets liquides est sur l'axe de rotation et $dn = - dR$; de plus V devient la vitesse circonférentielle V_u qui ne peut varier qu'avec R puisque l'écoulement est plan :

$$\frac{\partial V_u}{\partial z} = 0$$

et giratoire :

$$\frac{\partial V_u}{\partial \theta} = 0 \quad ,$$

donc

$$\frac{\partial V_u}{\partial R} = \frac{d V_u}{dR}$$

L'équation s'écrit donc

$$- \frac{d V_u}{dR} = \frac{V_u}{R}$$

$$R\, dV_u + V_u\, dR = 0$$

$$R V_u = C^{te}$$

On retrouve le résultat obtenu lors de l'étude du vortex (§ IV.6.4), à savoir que *la constante giratoire* RV_u *est la même en tous les points de l'écoulement considéré.*

Les propriétés fondamentales ainsi établies permettent de relier les écoulements potentiels étudiés en cinématique aux écoulements dans lesquels l'énergie est constante en tous points et qu'on appelle, pour cette raison, *écoulements conservatifs.*

L'application aux écoulements conservatifs des méthodes d'étude des écoulements potentiels permettra alors de raisonner sur les forces et, en particulier, de déterminer la répartition des pressions dans l'écoulement considéré, ce qui est très utile dans la pratique.

Nous allons le montrer sur l'exemple suivant :

V.1.7.5. *Application à l'écoulement sur un barrage-déversoir*

Les principaux types de déversoirs seront étudiés au chapitre X. Précisons simplement ici qu'un barrage-déversoir est un ouvrage de retenue dont la forme est étudiée spécialement de manière à permettre à la lame déversante de le franchir sans dégâts (évacuateur de crue) (fig. V.1.7.5.1).

Les frottements étant supposés négligeables sur la courte distance considérée, la ligne d'énergie sera la droite horizontale tangente à la surface libre en un point A situé suffisamment loin à l'amont pour que l'énergie cinétique $V^2/2g$ puisse y être considérée comme négligeable. De plus l'expérience montre que dans la plupart des cas de ce genre, l'écoulement considéré est *conservatif et à potentiel des vitesses.* La ligne d'énergie est donc commune à tous les points de la masse liquide dans le plan longitudinal considéré.

Fig. V.1.7.5.1

Par ailleurs, supposons que l'écoulement reste identique à lui-même dans tous les plans verticaux normaux à l'arête du déversoir, nous avons donc affaire à un *écoulement plan*.

Considérons une verticale quelconque coupant la ligne d'énergie en B, la surface libre de la lame déversante en C et la paroi du déversoir en D.

Comme la pression effective en C est nulle, la distance CB est égale à $V^2/2g$, V représentant la vitesse au point C.

Supposons que nous connaissions la répartition des vitesses sur la verticale CD ; nous allons en déduire facilement la répartition des pressions. A cet effet, reportons horizontalement en DE la longueur DB et joignons BE.

Pour un point M quelconque situé sur BD à l'intérieur de la nappe déversante, la longueur $MB = MF$ représente $p/\overline{\omega} + V^2/2g$. En retranchant de cette longueur un segment $FN = V^2/2g$ (V étant la vitesse en M, supposée connue) on obtient $MN = p/\overline{\omega}$.

Le lieu des points N ainsi obtenus donne la courbe de distribution des pressions MN sur la verticale CD (courbe tracée en tireté, sur laquelle les pressions effectives sont mesurées horizontalement à partir de CD et positivement vers la gauche). Cette courbe passe évidemment par le point C où la pression est égale à la pression atmosphérique.

Dans l'hypothèse d'un écoulement à filets sensiblement rectilignes et parallèles et en supposant une répartition hydrostatique des pressions sur la verticale CD, la courbe serait la droite CE' parallèle à BE.

En définitive, si nous connaissons la distribution des vitesses au sein de la lame déversante nous pourrons en déduire la répartition des pressions.

Nous sommes donc ramenés à rechercher la répartition des vitesses dans l'écoulement considéré qui est un écoulement plan à potentiel des vitesses. Nous pourrons donc résoudre le problème en utilisant les méthodes classiques d'étude de ces écoulements telles qu'elles ont été précisées en cinématique. En particulier nous savons que la *méthode graphique* de tracé du réseau des équipotentielles et des lignes de courant peut être utilisée à condition de connaître au moins une des limites matérielles de l'écoulement et la répartition du potentiel sur cette limite.

Il pourrait paraître plus simple de choisir la directrice du parement aval du radier comme ligne de courant pour démarrer la méthode graphique de Prasil ; en fait, on se réserve cette ligne de courant comme vérification finale du tracé ; d'autre part on ne connaît pas la répartition du potentiel le long du radier.

Nous allons donc chercher à déterminer, au moins approximativement, la forme de la surface libre qui constituera la limite matérielle (ligne de courant) à partir de laquelle sera effectué le tracé graphique du réseau.

Considérons à cet effet (fig. V.1.7.5.2), la normale en un point I de la paroi du barrage. Nous supposerons, en première approximation, que la pression en I est égale à la pression atmosphérique. On en déduit la vitesse en ce point, soit V_i telle que :

Fig. V.1.7.5.2

$$V_i = \sqrt{2gh_i}$$

Le débit q par unité de largeur du seuil étant connu, on en déduit l'épaisseur IJ_1 de la lame déversante en I :

$$IJ_1 = \frac{q}{V_i}$$

En fait, la vitesse moyenne V_m dans la tranche d'épaisseur IJ_1 est vraisemblablement plus proche de celle qui correspondrait au point M_1 situé au milieu de IJ_1, soit $V_2 = \sqrt{2gh_2}$ d'où une nouvelle valeur de l'épaisseur $IJ_2 = q/V_2$ qui donnera, après deux ou trois tâtonnements, une épaisseur IJ plus probable.

Partant du tracé ainsi obtenu pour la surface libre, on appliquera la méthode de Prasil (fig. V.1.7.5.3) en divisant le profil de la surface libre en petits tronçons a_1a_2 dont la longueur sera inversement proportionnelle à la vitesse au point moyen du tronçon de façon à conserver un $\Delta\Phi$ constant le long de la ligne de courant, puisque

$$\Delta\Phi = V\Delta s \qquad \text{(cf. § IV.5.3)}$$

$$\Delta\Phi = a_1a_2\sqrt{2gh_1}$$

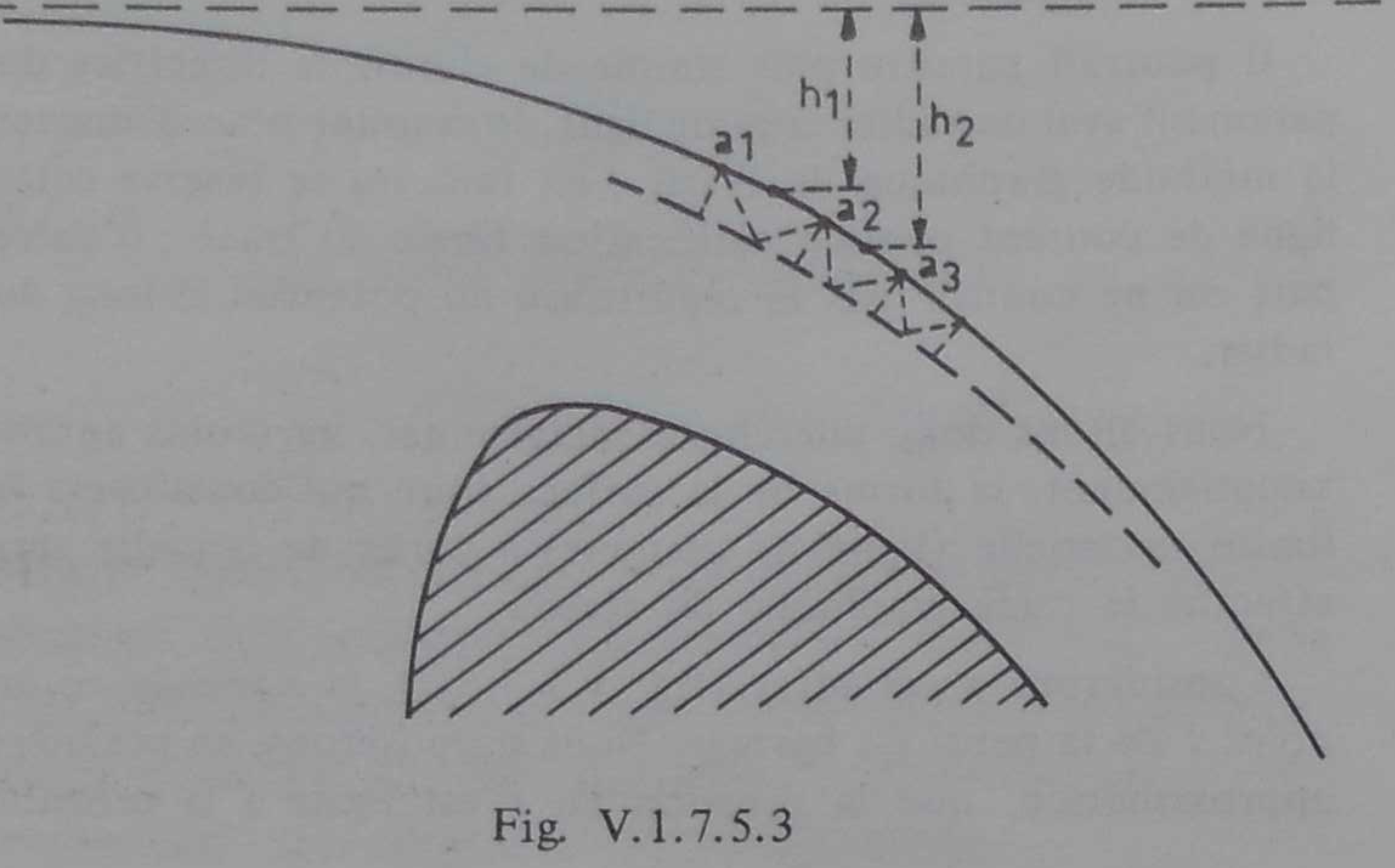


Fig. V.1.7.5.3

Le point suivant a_3 sera déterminé de façon que

$$a_2 a_3 \sqrt{2gh_2} = a_1 a_2 \sqrt{2gh_1} = \Delta\Phi$$

Pour cela on estimera d'abord h_2, d'où on déduira $a_2 a_3$ ce qui permettra de mesurer la hauteur h_2 correspondante ; cette valeur donnera une nouvelle longueur $a_2 a_3$, etc . . .

Pratiquement, ces opérations sont facilitées en construisant les courbes $V(s)$ et $\Phi(s)$ donnant respectivement la vitesse V et le potentiel $\Phi = \int V\,ds$ en fonction de l'abscisse curviligne s du profil de la surface libre.

A partir de la ligne de courant (surface libre) le long de laquelle on dispose de points a_1, a_2, a_3 . . correspondant à des accroissements égaux du potentiel Φ, on applique la construction de Prasil de façon à obtenir :

— une dernière ligne de courant qui coïncide avec le parement aval du barrage,

— un débit $n\Delta\psi = q$ (n étant le nombre de lignes de courant et $\Delta\psi$ le débit correspondant à l'intervalle entre deux lignes de courant consécutives ; on a $\Delta\psi = \Delta\Phi$ puisqu'on a choisi des variations de Φ et ψ en progression arithmétique de même raison).

Il est rare que ces conditions soient réalisées à la première tentative. Il faudra donc corriger par tâtonnements le tracé de la surface libre ; lorsque le tracé correct est obtenu, on peut déduire de la répartition des vitesses, la répartition des pressions, ainsi que nous l'avons montré précédemment ; il peut arriver, notamment, que la pression sur le parement aval du barrage soit inférieure à la pression atmosphérique, condition intéressante à connaître, du point de vue du risque de décollement de la nappe déversante.

La méthode d'analogie électrique peut être également utilisée pour la résolution de ce problème ; il est très facile dans la cuve rhéoélectrique de faire varier la forme du profil du barrage et de dégrossir rapidement la forme du réseau, quitte à affiner ensuite le résultat par la méthode graphique plus précise.

S'agissant d'un écoulement plan, on peut également utiliser la méthode du papier conducteur.

V.2. HYDRODYNAMIQUE DU LIQUIDE RÉEL

Comme nous l'avons indiqué au § II.1, un liquide naturel possède une propriété qui est en quelque sorte l'imperfection de la fluidité et qu'on appelle la *viscosité*.

Nous commencerons par définir cette nouvelle propriété et nous préciserons ensuite comment elle intervient dans les équations générales du mouvement.

V.2.1. Notions générales sur la viscosité des liquides

V.2.1.1. *Expérience de Couette*

Cette expérience qui met en évidence la viscosité et permet également de la mesurer consiste à faire tourner deux cylindres coaxiaux l'un par rapport à l'autre. L'intervalle entre les deux cylindres est occupé par le fluide étudié (fig. V.2.1.1).

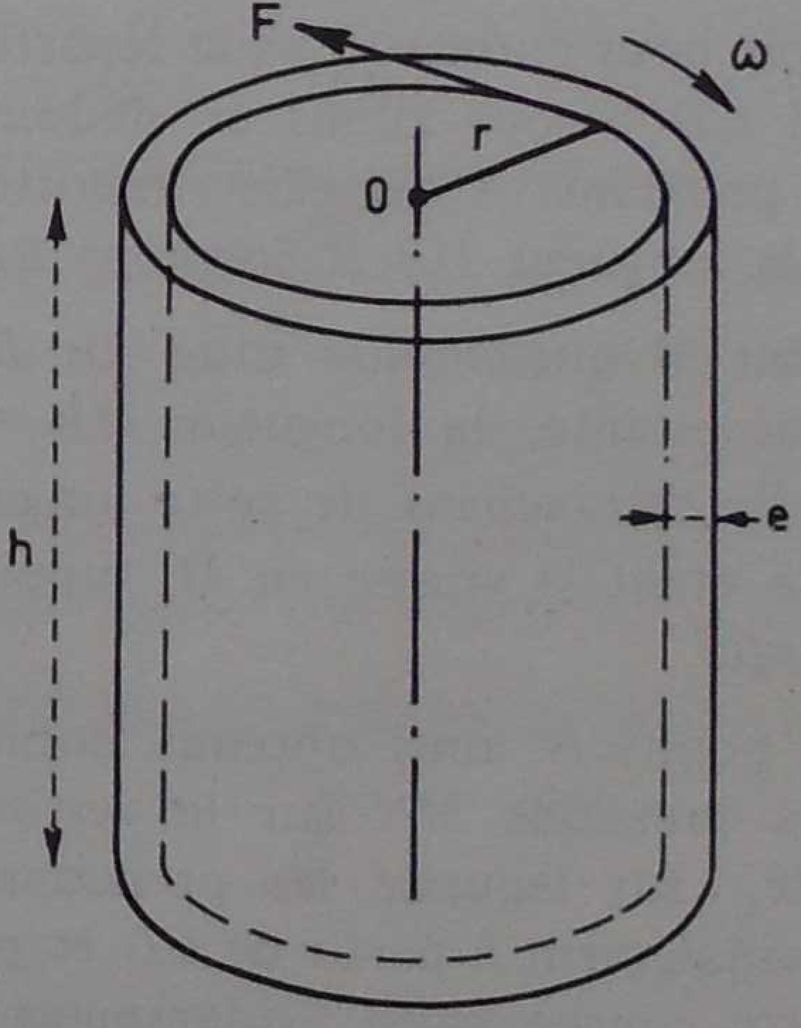


Fig. V.2.1.1 – Viscosimètre de Couette

Si on fait tourner le cylindre extérieur à une vitesse angulaire ω, le cylindre intérieur est entraîné et pour le maintenir fixe il faut exercer un couple C de sens contraire au mouvement du cylindre extérieur.

La distance e entre les deux cylindres étant très petite par rapport à leur rayon r, tout se passe comme si on avait deux plaques planes P et P' de surface $2\pi rh$ et distantes de e. L'expérience montre donc l'existence de tensions tangentielles au contact des couches successives de fluide. Quand on fait varier la vitesse tangentielle $V = \omega r$, la surface $S = 2\pi rh$ des plaques et leur distance e, on constate que

la force $F = C/r$ nécessaire pour maintenir fixe le cylindre intérieur est de la forme :

$$F = \mu \frac{SV}{e}$$

μ étant un coefficient qui sera défini plus loin.

D'une manière plus générale, la force de frottement dF qui s'exerce sur un élément $d\omega$ de la surface de contact de deux couches liquides animées de vitesses parallèles V et $V + dV$ est donnée par l'expression

$$dF = -\mu\, d\omega \frac{dV}{dn} \quad \text{(fig. V.2.1.2)}$$

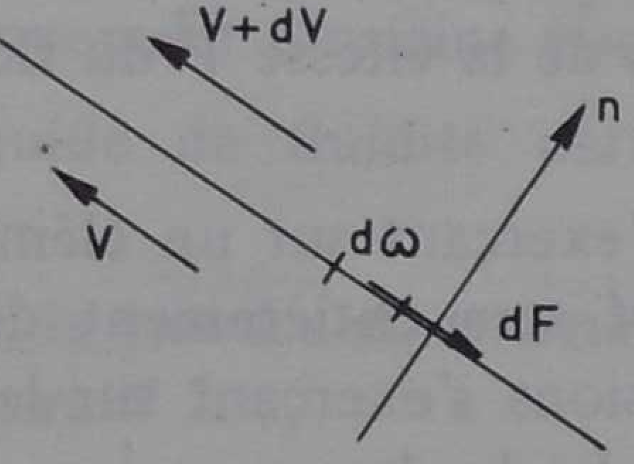


Fig. V.2.1.2

L'effort unitaire ou tension tangentielle due à la viscosité est donc

$$\frac{dF}{d\omega} = -\mu \frac{dV}{dn} \quad \text{ou} \quad \vec{\tau} = -\mu\, \overrightarrow{\text{grad.}}\, V$$

Le signe moins exprime que dF s'oppose au mouvement et est donc orientée en sens inverse de la vitesse.

Cette formule est généralement connue sous le nom de *formule de Newton*. En réalité, elle a peut-être été découverte par Stokes.

V.2.1.2. *Coefficients de viscosité*

Le coefficient μ de la formule de Newton et de la formule déduite de l'expérience de Couette est appelé *coefficient de viscosité dynamique*.

De la formule déduite de l'expérience de Couette, on tire :

$$\mu = \frac{Fe}{SV} = \frac{Ce}{2\pi h r^3 \omega}$$

Le viscosimètre de Couette permet de mesurer C, e, h, r et ω d'où on déduit μ.

Les dimensions de μ sont donc :

$$\mu = \frac{MLT^{-2}L}{L^2 LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

L'unité de viscosité dans le système CGS est la *poise* (Po) (du nom du médecin français Poiseuille dont nous citerons plus loin les travaux).

Dans le système international (SI) ou dans le système MKSA l'unité de viscosité dynamique est la *décapoise* (*da* Po) qui est celle d'un fluide opposant une résistance de 1 newton par mètre carré au glissement, dans son plan au sein du fluide, d'un élément plan animé d'un mouvement uniforme, la variation de vitesse des couches fluides parallèles au plan de l'élément étant de 1 mètre par seconde par mètre d'épaisseur du fluide suivant une direction perpendiculaire à ce plan.

Pour de l'eau à 15°C, $\mu = 0{,}01$ poise ; μ décroît d'environ 4×10^{-4} poise lorsque la température augmente de 1°C.

On définit également le *coefficient de viscosité cinématique :*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\mu g}{\varpi}$$

Les dimensions de ν sont donc

$$\frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}$$

Dans le système CGS, ν s'exprimera donc en cm^2/s ou *stokes* (*Sk*).

Dans le système international (SI) ou dans le système MKSA, l'unité de viscosité cinématique est le *myriastokes* (*ma Sk*) qui est la viscosité cinématique d'un fluide dont la viscosité dynamique vaut 1 décapoise et la masse volumique 1 kilogramme par mètre cube.

Pour l'eau à 20°C, on a très sensiblement :

$\nu = 0{,}01$ stokes ou 1 centistokes ($10^{-6}\, m^2/s$ ou *ma Sk*)

A titre de comparaison, voici les valeurs de ν pour quelques autres fluides :

Mercure à 0° : $\nu = 0{,}00125$ stokes
Glycérine à 20° : $\nu = 0{,}245$ »
Air à 0° et 760 mm de Hg : $\nu = 0{,}133$ stokes
Air à 100° et 760 mm de Hg : $\nu = 0{,}245$ stokes
Air à 0° et 7,6 mm de Hg : $\nu = 13{,}3$ stokes

Huile de graissage SAE 10 à 50°C : $\nu = 0{,}6$ stokes
Huile de graissage SAE 30 à 50°C : $\nu = 5$ stokes

V.2.1.3. *Nature physique de la viscosité des fluides*

La théorie cinétique des gaz permet de calculer leur coefficient de viscosité.

Pour les liquides dont les molécules sont liées, l'application de la théorie cinétique par chocs indépendants conduit à des résultats valables pour des températures voisines de l'ébullition ; dans ces conditions particulières, les viscosités de différents liquides sont assez voisines.

Par contre les formules ne s'appliquent plus aux liquides à basse température où les coefficients de viscosité sont très différents les uns des autres.

On pourrait alors distinguer une viscosité *thermique* qui apparaît à haute température et, à basse température, une viscosité *d'association* due à une organisation moléculaire préparatoire à l'état solide.

V.2.2. Intervention de la viscosité dans les équations générales du mouvement des fluides parfaits

L'expérience de Couette montre que le déplacement relatif des molécules liquides absorbe une énergie provenant de l'existence dans un fluide visqueux de forces internes ou *tensions visqueuses* qui vont intervenir dans les équations générales du mouvement, au même titre que les forces extérieures.

Nous nous proposons donc, en premier lieu, de préciser l'expression analytique de ces tensions et nous examinerons ensuite comment il est possible de les faire intervenir dans les équations générales du mouvement.

V.2.2.1. *Détermination des tensions visqueuses*

Considérons en un point $M(x, y, z)$ du fluide, un parallélépipède infiniment petit dont les arêtes dx, dy, dz sont parallèles aux axes. Soient u, v, w, les composantes de la vitesse $\vec{V}$ du fluide au point M (fig. V.2.2.1).

La tension s'exerçant sur un élément de surface dS de centre M sera entièrement déterminée si on connaît les tensions s'exerçant sur les trois faces du parallélépipède $dx\ dy\ dz$.

Désignons respectivement par $p + \sigma_i$ et par τ_i les composantes normale et tangentielle de la tension

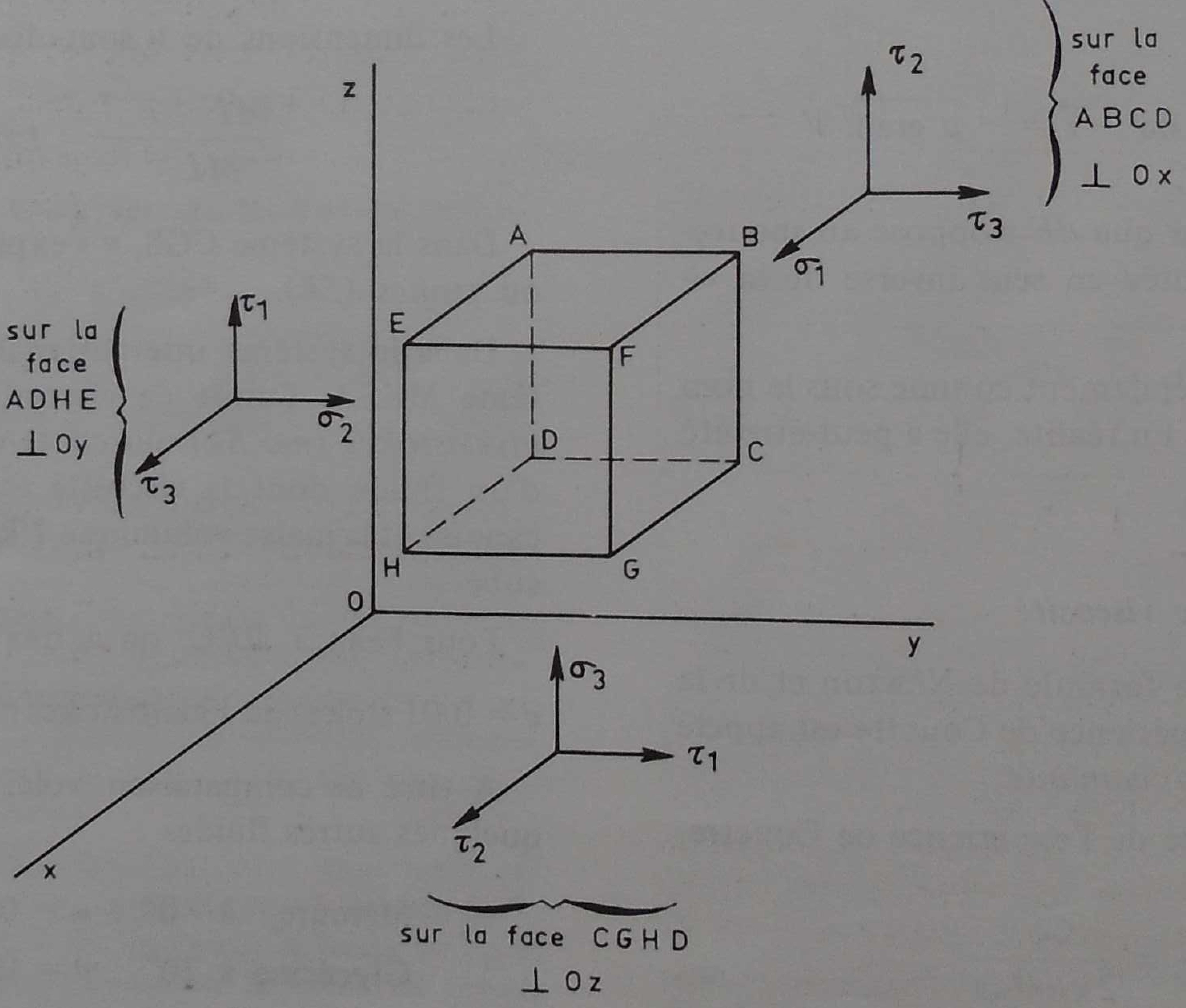


Fig. V.2.2.1 – Matrice du tenseur des contraintes

s'exerçant sur la face i ($i = 1, 2, 3$). Pour un fluide homogène et isotrope, l'application du théorème du moment cinétique par rapport à un axe parallèle à l'un des axes de coordonnées et passant par le

centre du parallèlépipède montre, comme dans la théorie de l'élasticité du solide homogène et isotrope, que la matrice des contraintes est symétrique ; c'est ce qui constitue le *principe de la réciprocité des contraintes.*

La matrice du tenseur des contraintes s'écrit ainsi :

$$\begin{Vmatrix} \sigma_1 + p & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 + p & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 + p \end{Vmatrix}$$

On met ainsi en évidence la *pression p*, quantité scalaire indépendante de l'orientation de l'élément de surface *dS* autour de *M*, alors que les composantes σ et τ sont uniquement d'origine visqueuse.

Pour un liquide de fluidité parfaite, on aurait $\sigma_i = \tau_i \doteq 0$.

En définitive, la *matrice du tenseur des contraintes de viscosité* s'écrira :

$$\overline{\overline{t}}_\mu = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{Vmatrix} \qquad [V.2.2.1.1]$$

ce qui correspond au tableau suivant (fig. V.2.2.1) :

Contraintes s'exerçant sur les faces perpendiculaires à	Contraintes parallèles à		
	Ox	*Oy*	*Oz*
Ox	σ_1	τ_3	τ_2
Oy	τ_3	σ_2	τ_1
Oz	τ_2	τ_1	σ_3

Pour lier ces tensions visqueuses aux déformations de la particule liquide, rappelons que l'analyse des déformations élémentaires d'une particule fluide (§.IV.3) a montré que cette déformation pouvait être considérée comme la composition d'une translation, d'une rotation en bloc de la particule sur elle-même et d'une *déformation* pure ou *distorsion.* Dans la translation et la rotation, la particule se déplace en bloc, comme un corps solide ; les tensions visqueuses liées aux caractéristiques propres du liquide ne peuvent donc intervenir que dans la déformation de la particule. Rappelons également (§ IV.3) que cette déformation se décompose elle-même

— en une *vitesse de déformation linéaire* ou vitesse de *dilatation* dont les composantes correspondent aux termes

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

— et une *vitesse de déformation angulaire* ou vitesse de *glissement* dont les composantes correspondent aux termes g_1, g_2 et g_3.

Le *tenseur de la déformation* s'écrit ainsi :

$$\overline{\overline{t}}_d = \begin{Vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & g_3 & g_2 \\ g_3 & \frac{\partial v}{\partial y} & g_1 \\ g_2 & g_1 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Vmatrix} \qquad [V.2.2.1.2]$$

Ces résultats étant rappelés, dans l'hypothèse d'un fluide homogène et isotrope et pour de faibles vitesses de déformations on peut développer les relations en série de Taylor et ne conserver que les premiers termes ; on est ainsi conduit à des fonctions linéaires et homogènes qui se traduisent par les deux hypothèses suivantes de Stokes et Newton, analogues à celle de Hooke dans la théorie de l'élasticité :

1 — *Les contraintes tangentielles τ_i sont proportionnelles aux vitesses de déformation angulaire,* soit

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= -\,2\mu g_1 \\ \tau_2 &= -\,2\mu g_2 \\ \tau_3 &= -\,2\mu g_3 \end{aligned}\right\} \qquad [V.2.2.1.3]$$

Les déformations angulaires correspondent donc à des glissements à l'intérieur de la particule.

2 — *Les contraintes normales σ_i sont des fonctions linéaires des vitesses de déformation linéaire,* soit, en ne considérant que la contrainte visqueuse parallèle à *Ox* :

$$\sigma_1 = a\,\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

La forme du second terme du second membre résulte de l'isotropie du fluide.

Cette expression s'écrit également

$$\sigma_1 = (a + \lambda)\,\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Si on pose

$$a + \lambda = -2\mu$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta \quad \text{(dilatation cubique)}$$

il vient :

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\mu \dfrac{\partial u}{\partial x} - \lambda\theta \\ \sigma_2 = -2\mu \dfrac{\partial v}{\partial y} - \lambda\theta \\ \sigma_3 = -2\mu \dfrac{\partial w}{\partial z} - \lambda\theta \end{cases}$$

μ et λ sont des grandeurs caractéristiques du fluide et dépendent de l'état thermodynamique local ; on les considère généralement comme constantes ; elles correspondent aux *coefficients de Lamé* définis dans la théorie de l'élasticité.

μ est le *coefficient de viscosité dynamique* du fluide.

Pour un liquide supposé incompressible, l'équation de continuité impose

$$\theta = \text{div}\, \vec{V} = 0$$

et il reste

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_2 &= -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_3 &= -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad [V.2.2.1.4]$$

Rapprochant les matrices du tenseur des contraintes de viscosité [*V.2.2.1.1*] et du tenseur de la déformation [*V.2.2.1.2*], les expressions [*V.2.2.1.3*] et [*V.2.2.1.4*] montrent que les coordonnées du tenseur des contraintes sont des fonctions linéaires des coordonnées du tenseur des déformations ; cette propriété résulte des hypothèses admises concernant l'homogénéité et l'isotropie du liquide ; elles caractérisent un fluide newtonien.

Rappelons enfin que ces résultats ne sont valables que pour de faibles vitesses de déformations.

Remarque : Analogie avec les résultats de la théorie de l'élasticité du solide élastique.

Le raisonnement précédent est tout à fait analogue à celui effectué dans la théorie de l'élasticité à partir de l'hypothèse de Hooke, pour exprimer les composantes normales et tangentielles des contraintes à l'intérieur d'un solide élastique homogène et isotrope.

On doit toutefois souligner une différence essentielle : dans la théorie de l'élasticité, les composantes u_i ($i = 1, 2, 3$) représentent des longueurs, alors qu'en hydrodynamique leurs homologues u, v, w représentent des vitesses.

C'est pour souligner cette différence que nous avons utilisé des notations différentes résumées dans le *tableau de correspondance* ci-après :

Mécanique des matériaux (Théorie de l'élasticité ; solide élastique homogène et isotrope)	Mécanique des liquides (Hydrodynamique du liquide visqueux homogène et isotrope)
Composantes du déplacement d'un point : u_1, u_2, u_3	Composantes de la vitesse en un point : u, v, w
Matrice des composantes du tenseur des contraintes : $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$ avec $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} (i, j = 1, 2, 3)$	Matrice des composantes du tenseur des contraintes : $\begin{vmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{vmatrix}$
Matrice des composantes du tenseur des déformations : $\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}$ avec $e_{ij} = e_{ji} (i, j = 1, 2, 3)$	Matrice des composantes du tenseur des déformations : $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & g_3 & g_2 \\ g_3 & \frac{\partial v}{\partial y} & g_1 \\ g_2 & g_1 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$

V.2.2.2. *Equations générales du mouvement d'un liquide réel : Equations de Navier-Stokes*

Ces équations s'obtiendront en adjoignant les forces de viscosité aux autres forces s'exerçant sur un parallélépipède élémentaire dx, dy, dz. Autrement dit, nous devons écrire l'équilibre du système de forces suivantes :

— forces extérieures
— pressions normales
— force d'inertie
— forces de viscosité

En considérant les forces correspondantes s'exerçant sur l'unité de masse du liquide, les trois premières catégories de forces ont conduit aux équations d'Euler :

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad.}}\,p = \vec{F} - \vec{\gamma}$$

Il suffit d'ajouter à chacune de ces équations les composantes sur l'axe correspondant des forces de viscosité par unité de masse.

Considérons les projections sur l'axe Ox (fig. V.2.2.1) :

a) *Composante* σ_1 :

Sur la face *ABCD* :

$$\sigma_1\, dy\, dz$$

Sur la face *EFGH* :

$$-\left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz$$

b) *Composante* τ_2 :

Sur la face *CGHD* :

$$\tau_2\, dx\, dy$$

Sur la face *ABFE* :

$$-\left(\tau_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial z}\, dz\right) dx\, dy$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \tau_2}{\partial z}\, dz\, dx\, dy$$

c) *Composante* τ_3 :

Sur la face *ADHE* :

$$\tau_3\, dx\, dz$$

Sur la face *BCGF* :

$$-\left(\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y}\, dy\right) dx\, dz$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \tau_3}{\partial y}\, dy\, dx\, dz$$

Les autres composantes $\sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2$ et τ_3 sont perpendiculaires à Ox et leur projection est donc nulle.

En définitive, la résultante des forces de viscosité projetée sur l'axe Ox a pour expression :

$$-\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

En remplaçant σ_1, τ_3 et τ_2 par leurs valeurs tirées des relations [*V.2.2.1.3*] et [*V.2.2.1.4*] et en tenant compte des expressions de g_1, g_2 et g_3 (cf. relations [*IV.3.1*]), il vient :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} =$$

$$= -2\mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \mu\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= -\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \mu\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Or :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}\,\vec{V} = 0 \text{ (équation de continuité)}$$

Par ailleurs :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Donc la résultante des forces de viscosité projetée sur l'axe Ox, s'écrira :

$$-\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \mu\, \Delta u\, dx\, dy\, dz$$

Il suffit donc d'adjoindre cette valeur à celles figurant au deuxième membre de la première équation d'Euler en remarquant que, pour conserver l'homogénéité de l'équation, il convient de ramener cette force à l'unité de masse du fluide c'est-à-dire que son expression est, en définitive :

$$\frac{\mu}{\rho}\,\Delta u = \nu\,\Delta u$$

On obtient ainsi la première des trois équations suivantes, les deux autres s'en déduisant facilement :

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{du}{dt} + \nu\,\Delta u\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{dv}{dt} + \nu\,\Delta v\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{dw}{dt} + \nu\,\Delta w\end{aligned}\right\} \quad [V.2.2.2.1]$$

Ces équations qui peuvent se condenser en une équation vectorielle unique :

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad.}}\, p = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu\,\Delta\vec{V}} \quad [V.2.2.2.2]$$

ont été présentées en 1822 par Navier à l'Académie des Sciences. Elles sont généralement appelées les *équations de Navier-Stokes.*

Sous sa forme vectorielle [*V.2.2.2.2*] l'équation de Navier-Stokes exprime la relation entre les différentes forces s'exerçant sur la particule liquide de masse unité :

$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad.}}\, p$ = force de pression

$\vec{F}$ = force extérieure

$-\vec{\gamma}$ = force d'inertie résultant du mouvement

$\nu\,\Delta\vec{V}$ = force de viscosité.

Si on savait intégrer les équations de Navier-Stokes, compte-tenu des conditions aux limites exprimées en fonction du temps, en particulier en tenant compte des forces de paroi, on pourrait résoudre analytiquement les problèmes d'hydrodynamique.

Mais l'intégration de ces équations se heurte à des difficultés inextricables dès que les termes relatifs à la viscosité ($\nu\,\Delta\vec{V}$) et les termes relatifs à l'accélération ($\vec{\gamma}$) sont du même ordre de grandeur ; or c'est précisément ce qui se produit au voisinage des parois dans la plupart des écoulements que l'on rencontre dans la pratique.

On est donc le plus souvent obligé d'avoir recours à l'expérience pour faciliter l'étude des conditions de l'écoulement ; c'est la justification de l'hydraulique expérimentale.

V.2.2.3. ***Cas particuliers de simplification des équations de Navier-Stokes***

1 — Si $\nu = 0$ on retrouve les équations d'Euler des liquides parfaits

2 — Si $\nu = 0$ et $\vec{\gamma} = 0$, on retrouve les équations de l'hydrostatique

3 — Si le mouvement est rectiligne et uniforme, $\vec{\gamma} = 0$ et $\Delta\vec{V} = 0$, on retrouve les équations de l'hydrostatique et la pression dans toute la masse liquide varie suivant la loi hydrostatique

4 — Dans un tube de courant de *courbure négligeable* considérons le plan xOy normal au vecteur vitesse $\vec{V}$ et au vecteur accélération $\vec{\gamma}$. En projection sur les axes Ox et Oy les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{du}{dt} + \nu\,\Delta u\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{dv}{dt} + \nu\,\Delta v\end{aligned}\right.$$

Mais, par hypothèse, $u = v = 0$ et $\Delta u = \Delta v = 0$.

Il en résulte :

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y\end{aligned}\right.$$

Dans la section considérée, c'est-à-dire dans une direction normale au vecteur vitesse d'un tube de courant de courbure négligeable, la pression varie selon la loi de l'hydrostatique.

5 — *Si l'écoulement est à potentiel des vitesses,* on peut écrire

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad.}}\ \Phi$$

et

$$\Delta\vec{V} = \Delta\,\overrightarrow{\text{grad.}}\ \Phi = \overrightarrow{\text{grad.}}\ \Delta\Phi = 0$$

Les équations de Navier-Stokes se ramènent alors aux équations d'Euler applicables aux liquides parfaits, autrement dit la viscosité n'intervient plus. L'écoulement d'un liquide visqueux à potentiel des vitesses est donc conservatif comme nous l'avons démontré pour un liquide parfait (§ V.1.7.2.1).

Cette conclusion est importante car elle permet d'étudier les écoulements à potentiel des vitesses des liquides réels sans tenir compte de leur viscosité en utilisant, notamment, les méthodes d'étude des écoulements à potentiel telles qu'elles ont été exposées au § IV.5.

V.2.3. Cas particulier du régime permanent – Extension du théorème de Bernoulli au cas d'un liquide réel

Dans le cas d'un fluide parfait, nous avons déduit des équations d'Euler l'équation suivante applicable tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide (§ V.1.4) :

$$\frac{1}{\rho}\left(dp - \frac{\partial p}{\partial t}dt\right) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - V\,dV \qquad [V.1.4]$$

En régime permanent (§ V.1.6.2) cette équation devenait :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - V\,dV \qquad [V.1.6.1]$$

Si on effectue exactement les mêmes calculs à partir des équations de Navier-Stokes, on obtient facilement l'équation suivante applicable tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide en régime permanent en tenant compte des forces de viscosité :

$$\frac{1}{\rho}\,dp = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - V\,dV + \nu\,(\Delta u\,dx + \Delta v\,dy + \Delta w\,dz)$$

Appliquons cette équation à une particule d'un liquide incompressible soumise à la seule action de la pesanteur ($X = Y = 0$; $Z = -g$). Il vient :

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + V\,dV - \nu(\Delta u\,dx + \Delta v\,dy + \Delta w\,dz) = 0$$

Intégrons tout le long de la trajectoire de la particule liquide considérée :

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} - \nu\int(\Delta u\,dx + \Delta v\,dy + \Delta w\,dz) = C^{te}$$

ou, en divisant par g :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} - \frac{\nu}{g}\int(\Delta u\,dx + \Delta v\,dy + \Delta w\,dz) = C^{te} = H$$

Le laplacien de la vitesse a les mêmes dimensions que $\partial^2\vec{V}/\partial x^2$; or $\partial^2\vec{V}$ est un accroissement du deuxième ordre de la vitesse et a donc les dimensions d'une vitesse, soit LT^{-1} ; ∂x^2 a pour dimensions L^2 ; donc $\Delta\vec{V}$ a pour dimensions $L^{-1}T^{-1}$.

Compte tenu des équations aux dimensions de $\nu(L^2T^{-1})$, $g(LT^{-2})$ et $dx\,(L)$, il est facile de montrer que le terme

$$-\frac{\nu}{g}\int(\Delta u\,dx + \Delta v\,dy + \Delta w\,dz)$$

a les dimensions d'une longueur.

Il représente ce qu'on appelle la *perte de charge* depuis l'origine du mouvement jusqu'au point considéré ; on le désigne par j

$$j = -\frac{\nu}{g}\int(\Delta u\,dx + \Delta v\,dy + \Delta w\,dz)$$

L'équation susvisée s'écrit alors :

$$\boxed{z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} + j = C^{te} = H} \qquad [V.2.3.1]$$

ou

$$\boxed{\frac{p^*}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} + j = H} \qquad [V.2.3.2]$$

avec

$$p^* = p + \varpi z$$

Comme pour les liquides parfaits, cette équation reste applicable si au lieu de considérer la trajectoire d'une molécule on considère un filet liquide. Dans ce cas, elle devient l'expression mathématique du *théorème de Daniel Bernoulli* étendu au cas d'un *liquide réel* c'est-à-dire de fluidité non parfaite :

En tout point d'un filet liquide pris dans une masse liquide de fluidité non parfaite en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur, la cote, la hauteur représentative de la pression, la hauteur représentative de la vitesse et la perte de charge depuis l'origine du mouvement forment une somme constante.

Remarques : 1 – Comme dans le cas du liquide parfait (§ V.1.6.2.2) ce théorème peut s'établir également en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à un déplacement élémentaire du filet liquide et

en introduisant au second membre de l'équation le travail élémentaire résultant des forces de frottement dues à la viscosité du liquide.

2 — Ce théorème exprime toujours la conservation de l'énergie totale tout le long du filet liquide considéré, le terme j représentant l'énergie dissipée sous forme de chaleur par suite des frottements et de la viscosité.

3 — *Représentation graphique du théorème de Bernoulli* (fig. V.2.3.1). On peut étendre au cas du

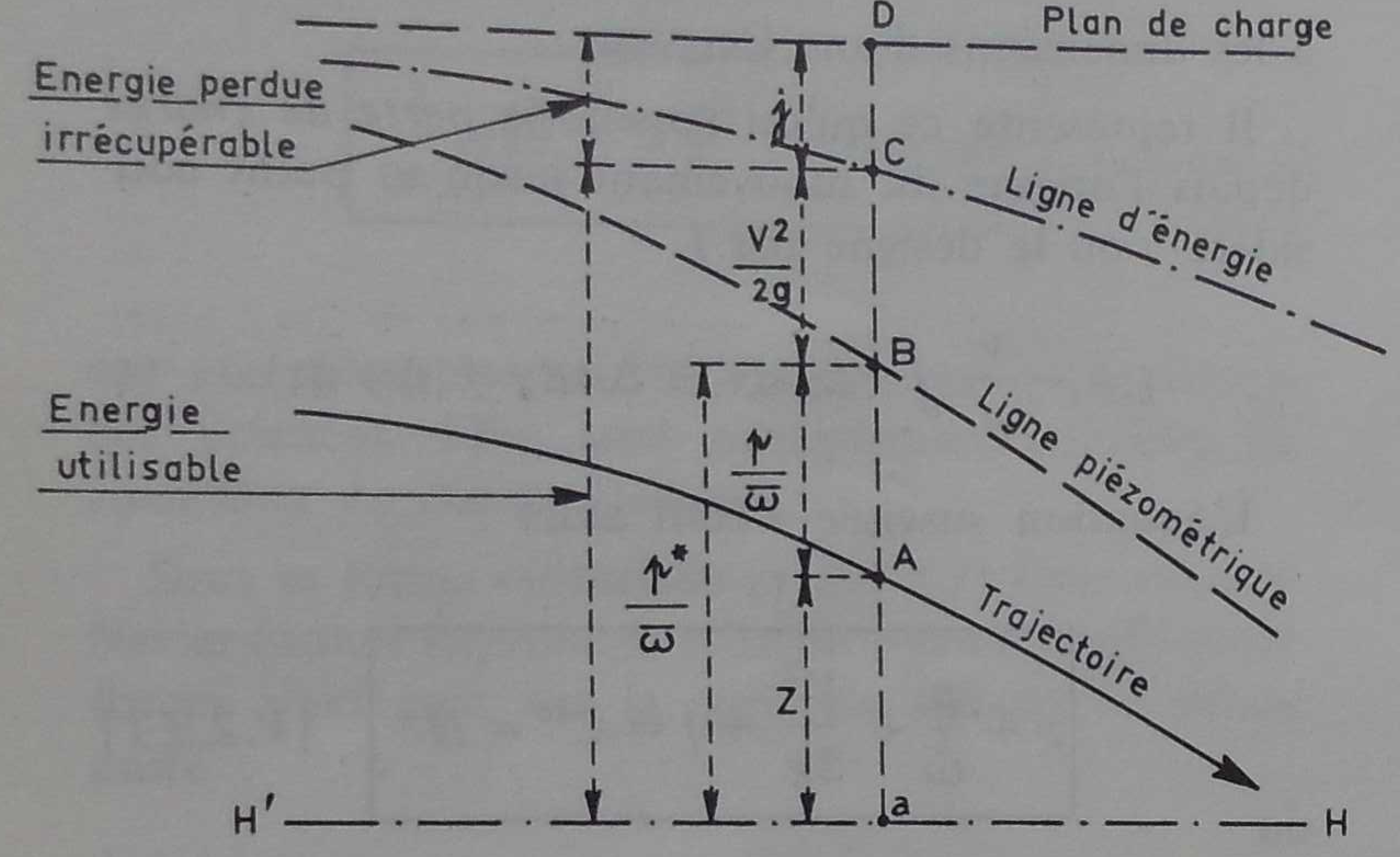


Fig. V.2.3.1 – Représentation graphique du théorème de Bernoulli (liquide réel)

liquide réel la représentation graphique définie au § V.1.6.2.2 dans le cas du liquide parfait ; il suffit d'ajouter aux longueurs :

$$aA = z$$

$$AB = \frac{p}{\varpi}$$

ou

$$aB = \frac{p^*}{\varpi}$$

$$BC = \frac{V^2}{2g}$$

la longueur $CD = j$ représentant la perte de charge depuis l'origine du filet liquide jusqu'au point considéré A.

Le lieu du point C qu'on appelle toujours *la ligne d'énergie* n'est plus une droite horizontale mais une courbe qui s'abaisse dans le sens de l'écoulement, sa distance au plan horizontal passant par D (qu'on appelle *plan de charge*) représentant la perte de charge depuis l'origine du mouvement.

4 — *Charge entre deux points d'un filet liquide.* Nous avons défini au § V.1.6.2.2 la charge entre deux points d'un filet liquide par l'expression :

$$h_{AA'} = \left(z + \frac{p}{\varpi}\right)_A - \left(z' + \frac{p'}{\varpi}\right)_{A'}$$

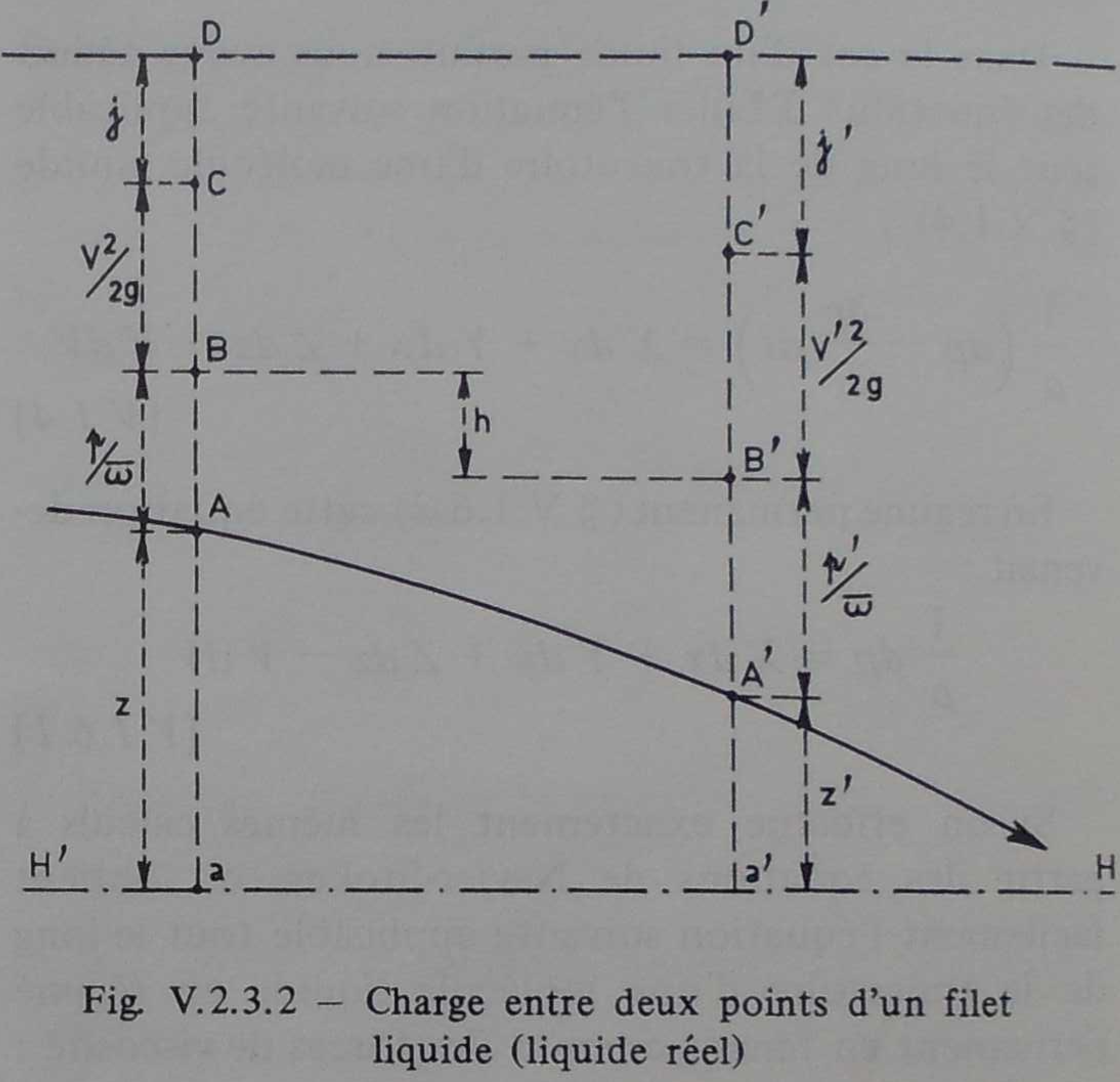


Fig. V.2.3.2 – Charge entre deux points d'un filet liquide (liquide réel)

La représentation graphique précédente montre qu'on a aussi (fig. V.2.3.2) :

$$h_{AA'} = B'D' - BD$$

$$= \frac{V'^2}{2g} + j' - \left(\frac{V^2}{2g} + j\right)$$

$$= \frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} + j' - j$$

$j' - j$ représente la perte de charge entre les deux points A et A' considérés ; désignons-la par $j_{AA'}$.

Il vient donc :

$$h_{AA'} = \frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} + j_{AA'}$$

ou :

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = h_{AA'} - j_{AA'} \qquad [V.2.3.3]$$

alors que pour un liquide de fluidité parfaite, nous avions obtenu (§ *V.1.6.2.2*) :

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = h_{AA'} \qquad [V.1.6.2.4]$$

V.2.4. Equations intrinsèques du mouvement permanent d'un liquide visqueux dans le champ de la pesanteur

Les équations du mouvement sont alors rapportées aux axes de coordonnées intrinsèques, c'est-à-dire liés à la trajectoire de la particule M, soit (fig. V.2.4):

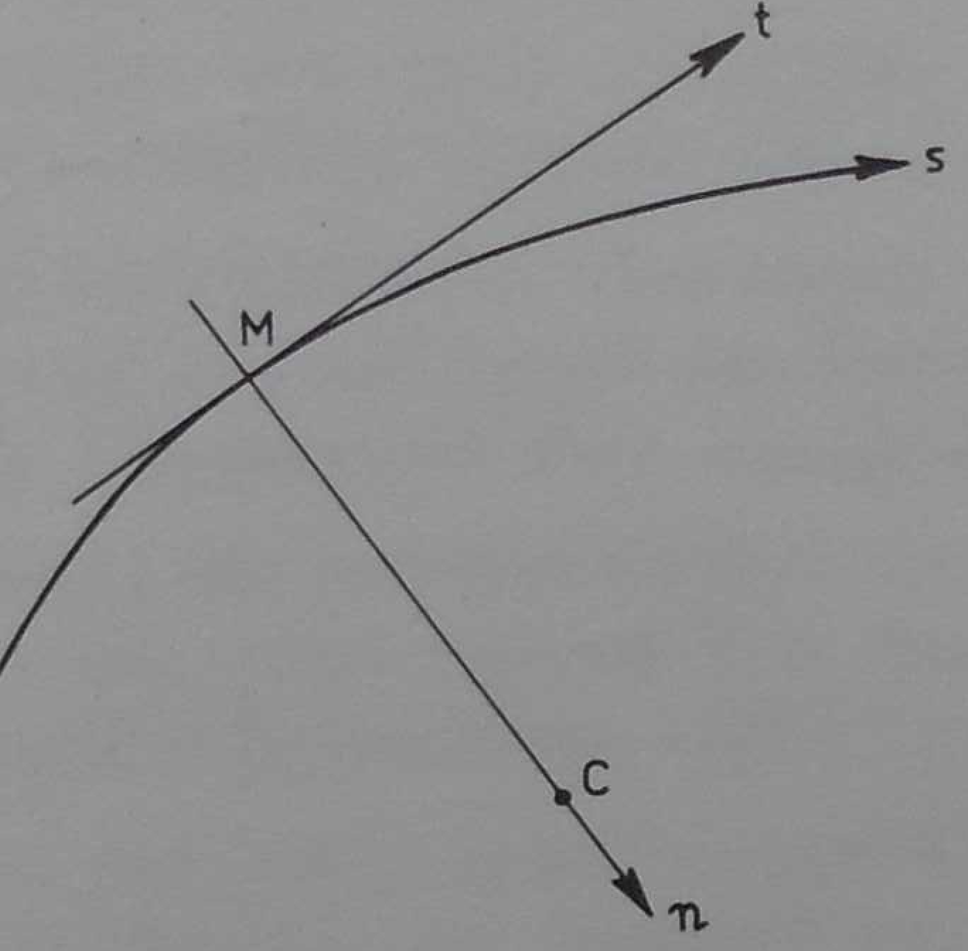


Fig. V.2.4 – Coordonnées intrinsèques du mouvement

Mt : tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement

Mn : normale principale orientée vers le centre de courbure C de la trajectoire

Mz : perpendiculaire aux deux axes précédents

Limitons-nous au mouvement permanent d'un liquide incompressible ($\rho = C^{te}$) dans le champ de la pesanteur et considérons l'équation de Navier-Stokes, sous sa forme vectorielle :

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}.\, p = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu \Delta \vec{V} \qquad [V.2.2.2.2]$$

On peut poser $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}.\, gh$, l'axe h étant orienté verticalement vers le haut.

Par ailleurs,
$$\gamma = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Posons $\nu \Delta \vec{V} = \vec{f}$, force de frottement visqueux par unité de masse du liquide.

L'équation de Navier-Stokes s'écrit ainsi :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}.\left(\frac{p}{\rho} + gh\right) - \vec{f}$$

Ces trois vecteurs sont dans un même plan.

Projetons cette égalité vectorielle sur la tangente Mt et sur la normale principale Mn. Il vient ainsi :

sur la tangente Mt : $$\frac{dV}{dt} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho} + gh\right) - f_t \qquad [V.2.4.1]$$

sur la normale Mn : $$\frac{V^2}{R} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\rho} + gh\right) - f_n \qquad [V.2.4.2]$$

R étant le rayon de courbure principal de la trajectoire en M.

Multiplions les deux membres de [*V.2.4.1*] par l'élément infiniment petit de la trajectoire $ds = V\,dt$ et restons sur la trajectoire :

$$V\,dV = -d\left(\frac{p}{\rho} + gh\right) - f_t\,ds$$

ou

$$d\left(\frac{V^2}{2}\right) = -d\left(\frac{p + \overline{\omega} h}{\rho}\right) - f_t\,ds$$

Posons $f_t\,ds = d\tau$ travail élémentaire fourni, en suivant la trajectoire, par les forces de frottement par unité de masse du liquide ; en divisant par g il vient :

$$d\left(\frac{V^2}{2g}\right) = -d\left(\frac{p^*}{\overline{\omega}}\right) - \frac{f_t}{g}\,ds$$

$$d\left(\frac{p^*}{\overline{\omega}} + \frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{d\tau}{g} = -dj$$

dj représentant le travail élémentaire absorbé par les frottements par unité de *poids* du liquide, c'est-à-dire la *perte de charge*.

En définitive :

$$d\left(\frac{p^*}{\overline{\omega}} + \frac{V^2}{2g} + j\right) = 0$$

le long de la trajectoire.

En intégrant le long de la trajectoire on obtient

$$\frac{p^*}{\overline{\omega}} + \frac{V^2}{2g} + j = C^{te}$$

ce qui exprime le *théorème de Bernoulli*.

Cas particulier où les trajectoires sont rectilignes et parallèles :

Les forces de viscosité n'ont plus alors de composante normale, $f_n = 0$ et $R = \infty$. L'équation [*V.2.4.2*] s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\rho} + gh\right) = 0$$

et, en intégrant dans la direction normale à la trajectoire :

$$p + \overline{\omega}h = C^{te}$$

ou

$$p^* = C^{te}$$

On retrouve le résultat démontré précédemment (§ V.2.2.3) : dans un plan perpendiculaire aux trajectoires rectilignes et parallèles, la pression varie selon la loi de l'hydrostatique.

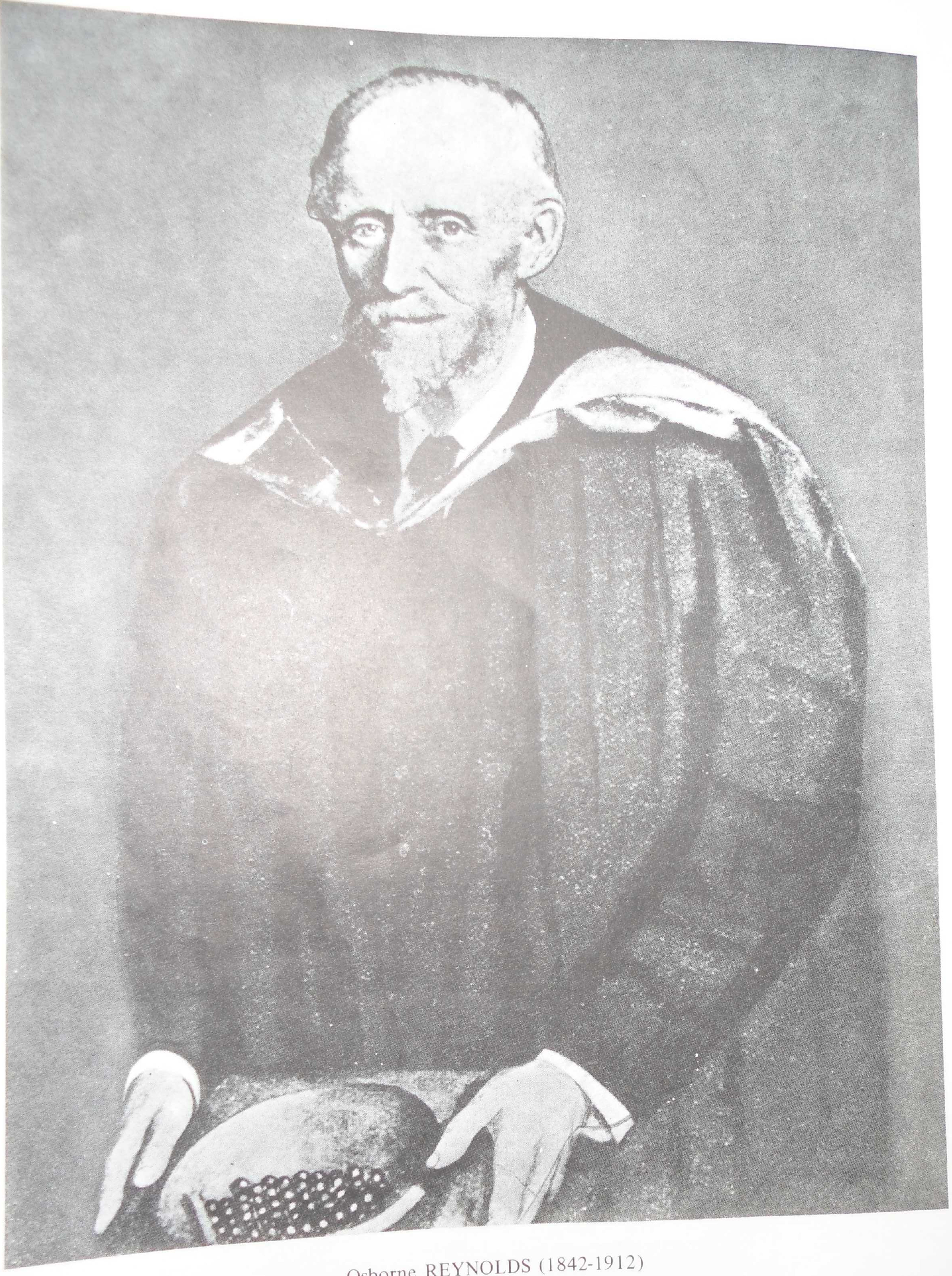
Comme nous l'avons constaté, les seules équations de l'hydrodynamique ne permettent généralement pas de donner aux problèmes courants dans des cas concrets des solutions pratiquement utilisables par l'Ingénieur, en raison des difficultés rencontrées, soit dans le développement de l'appareil mathématique, soit pour l'insertion dans les équations des paramètres physiques représentatifs de certains phénomènes naturels tels que les conditions aux limites.

Dans ces conditions, nous allons faire intervenir *l'expérience directe* et parfois des *théories approximatives* pour pouvoir établir les formules pratiques qui permettent de *calculer et de préciser les conditions de l'écoulement d'un liquide dans les différents cas usuels.*

Il faudra dès lors être extrêmement prudent dans l'application de ces formules, et ceci est tellement important que nous jugeons bon de reproduire ici ce passage de Flamant, extrait de l'avant-propos de son traité d'Hydraulique (1891) :

"Nulle part comme en hydraulique, il n'est important de se rendre compte des conditions dans lesquelles on peut employer les formules : ces conditions sont tellement variées que l'on ne peut en envisager, dans les solutions, qu'un petit nombre à la fois et il est nécessaire d'avoir toujours présentes à l'esprit les hypothèses simplificatrices que l'on a dû faire pour obtenir les formules dont on veut se servir. On s'expose, autrement, à commettre les erreurs les plus graves.

"Il ne faut, le plus souvent, prendre les résultats des formules que comme de premières indications qui doivent être interprétées, rectifiées ou complétées par la considération des circonstances spéciales relatives au cas particulier que l'on a en vue. Et il en est de même des coefficients numériques déduits de l'expérience dont on affecte ces formules".



Osborne REYNOLDS (1842-1912)

CHAPITRE VI

LES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT

VI.1. DISTINCTION DES RÉGIMES D'ÉCOULEMENT – EXPÉRIENCE DE REYNOLDS

Il existe plusieurs régimes d'écoulement ou régimes hydrauliques présentant entre eux des différences essentielles.

Depuis longtemps les hydrauliciens avaient constaté l'existence de ces différents régimes, mais c'est à *Osborne Reynolds* qu'il appartenait de les mettre expérimentalement en évidence et de dégager le critère permettant de les différencier.

L'expérience fondamentale de Reynolds (fig. VI.1.1) consiste à envoyer à l'aide du dispositif représenté un liquide coloré au sein d'une masse liquide en mouvement dans un tube de verre.

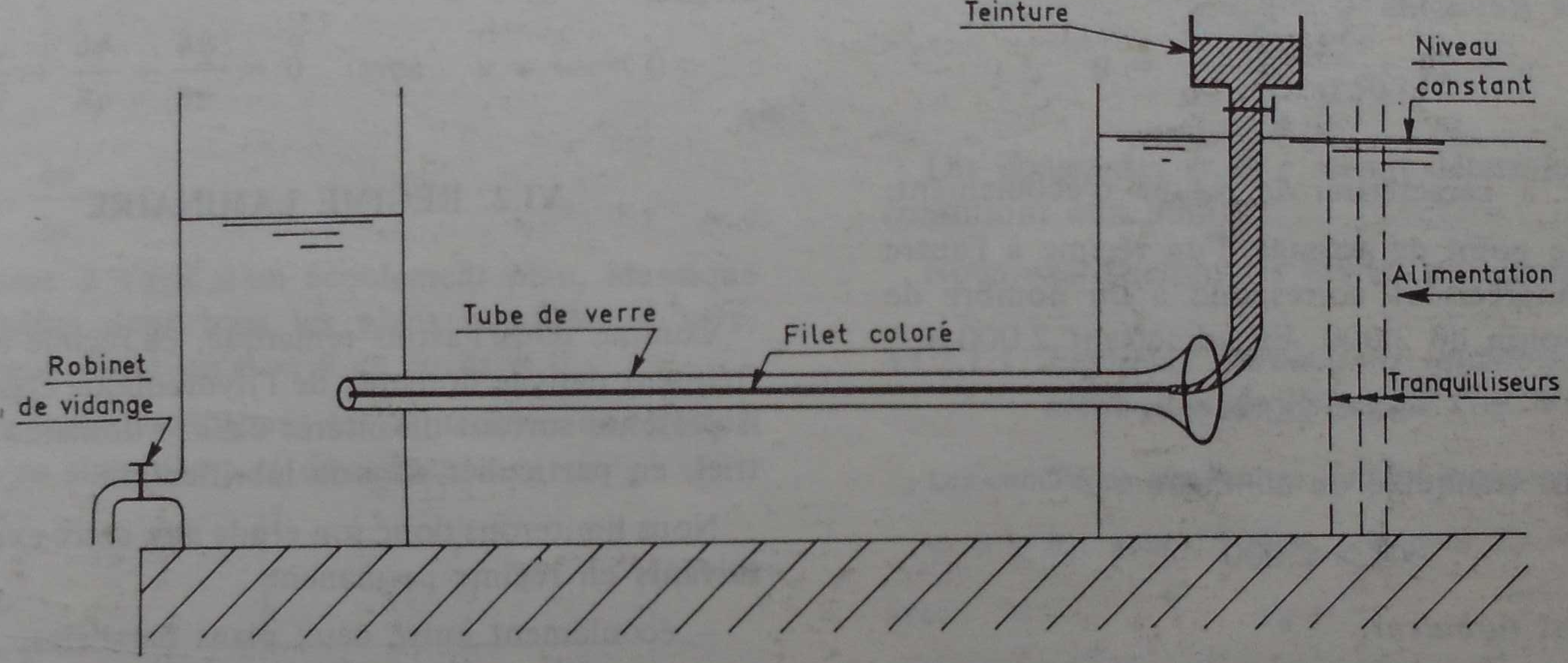


Fig. VI.1.1 – Expérience de Reynolds

En ouvrant plus ou moins le robinet de vidange, on fait varier la vitesse d'écoulement dans le tube.

Tant que la vitesse d'écoulement est suffisamment faible, la teinture forme dans le tube un filet coloré parfaitement net, très bien délimité et qui ne se mélange pas aux filets voisins, c'est le cas que représente la figure. Ceci montre que la masse liquide en mouvement dans le tube est formée de filets liquides juxtaposés restant parallèles sans aucun enchevêtrement.

C'est le régime tranquille ou *laminaire* dont le type est l'écoulement dans les tubes capillaires, autrefois étudié par le physicien allemand Hagen et le médecin français Poiseuille (1840). On l'appelle aussi parfois "régime de Navier" ou "régime de Poiseuille".

Si la vitesse d'écoulement s'accroît dans le tube, le filet coloré paraît osciller et vibrer, il devient sinueux puis, la vitesse augmentant encore, le filet se rompt, ne conserve plus son identité propre et se divise en un très grand nombre de particules animées chacune de mouvements transversaux désordonnés, de telle sorte que toute la matière colorante se répartit dans la masse en mouvement qui acquiert une coloration uniforme.

Ce régime, très différent du précédent, dans lequel chaque particule est projetée dans toutes les directions d'une manière complètement irrégulière et désordonnée, s'appelle le régime *turbulent* et ceci d'ailleurs même si l'écoulement ne présente pas l'aspect physique de turbulence, au sens que l'on donne habituellement à ce mot(1).

En raison de la multiplicité des conditions qui régissent un écoulement et de la diversité des dispositifs solides guidant la masse liquide, il était difficile de dégager un *paramètre* permettant de servir de critère à un type d'écoulement donné.

C'est précisément le grand mérite de Reynolds d'avoir su dégager ce paramètre.

Si on désigne par U la vitesse moyenne dans le tube, par D le diamètre intérieur du tube et par ν le coefficient de viscosité cinématique du liquide en mouvement, le nombre adimensionnel appelé "*nombre de Reynolds*" :

$$\mathcal{R} = \frac{UD}{\nu}$$

peut servir à caractériser le régime d'écoulement.

Certes, le point de passage d'un régime à l'autre est assez imprécis et correspond à un nombre de Reynolds voisin de 2.000. En admettant 2.000, si :

$$\mathcal{R} < 2.000$$

le régime est tranquille ou *laminaire* ;

et si :

$$\mathcal{R} > 2.000$$

le régime est *turbulent*.

La condition requise pour le régime laminaire peut s'écrire :

$$U < 2.000 \frac{\nu}{D}$$

C'est la "*vitesse critique inférieure*".

On est arrivé d'ailleurs dans des expériences de laboratoire (Eckmann, Comolet, Schiller) à dépasser cette vitesse critique inférieure sans faire cesser le régime laminaire, mais le régime n'est plus stable et toute perturbation accidentelle qui vient à se produire le fait cesser.

Par exemple, pour de l'eau à 20 °C ($\nu = 10^{-6}$ ma Sk), il faudrait, pour avoir un régime laminaire stable :

$$U < 2.000 \frac{10^{-6}}{D}$$

$$U < \frac{2 \times 10^{-3}}{D}$$

soit, dans un tuyau de 0,10 m de diamètre :

$$U < 2 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

de sorte que pratiquement dans tous les problèmes usuels de l'hydraulique (sauf pour l'hydraulique souterraine) c'est au régime turbulent que l'on a affaire.

VI.2. RÉGIME LAMINAIRE

Comme nous l'avons remarqué, ce régime est peu fréquent dans le domaine de l'hydraulique classique ; il présente surtout un intérêt dans le domaine industriel, en particulier dans la lubrification.

Nous limiterons donc son étude aux deux exemples suivants en régime permanent :

– écoulement entre deux plans parallèles,

– écoulement dans un tube cylindrique.

VI.2.1. Ecoulement entre deux plans parallèles (fig. VI.2.1.1)

Désignons par $h = 2\,y_0$ la distance des deux plans et choisissons comme suit les axes :

– l'origine O est au milieu de l'intervalle entre les deux plans,

– l'axe Oy est perpendiculaire aux deux plans,

– l'axe Ox est parallèle à la vitesse,

– l'axe Oz est perpendiculaire à Ox et Oy.

Considérons les équations de Navier-Stokes :

---

(1) Le régime turbulent est aussi parfois appelé "régime de Venturi" ou "régime hydraulique" ou "régime tumultueux". Ces deux dernières désignations sont d'ailleurs impropres et nous adopterons le terme "régime turbulent".

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta u\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} + \nu\Delta v\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} + \nu\Delta w\end{aligned}\right.$$

Compte tenu des hypothèses :

$$X = Y = Z = 0$$

L'écoulement étant parallèle à Ox, les lignes de courant sont des droites parallèles et $v = w = 0$.

Le régime est supposé permanent, donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{avec} \quad v = w = 0$$

entraîne $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Comme il s'agit d'un écoulement plan, identique à lui-même dans tous les plans parallèles à xOy, u ne peut varier qu'avec y et $\partial u/\partial z = 0$.

Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes se simplifient et deviennent :

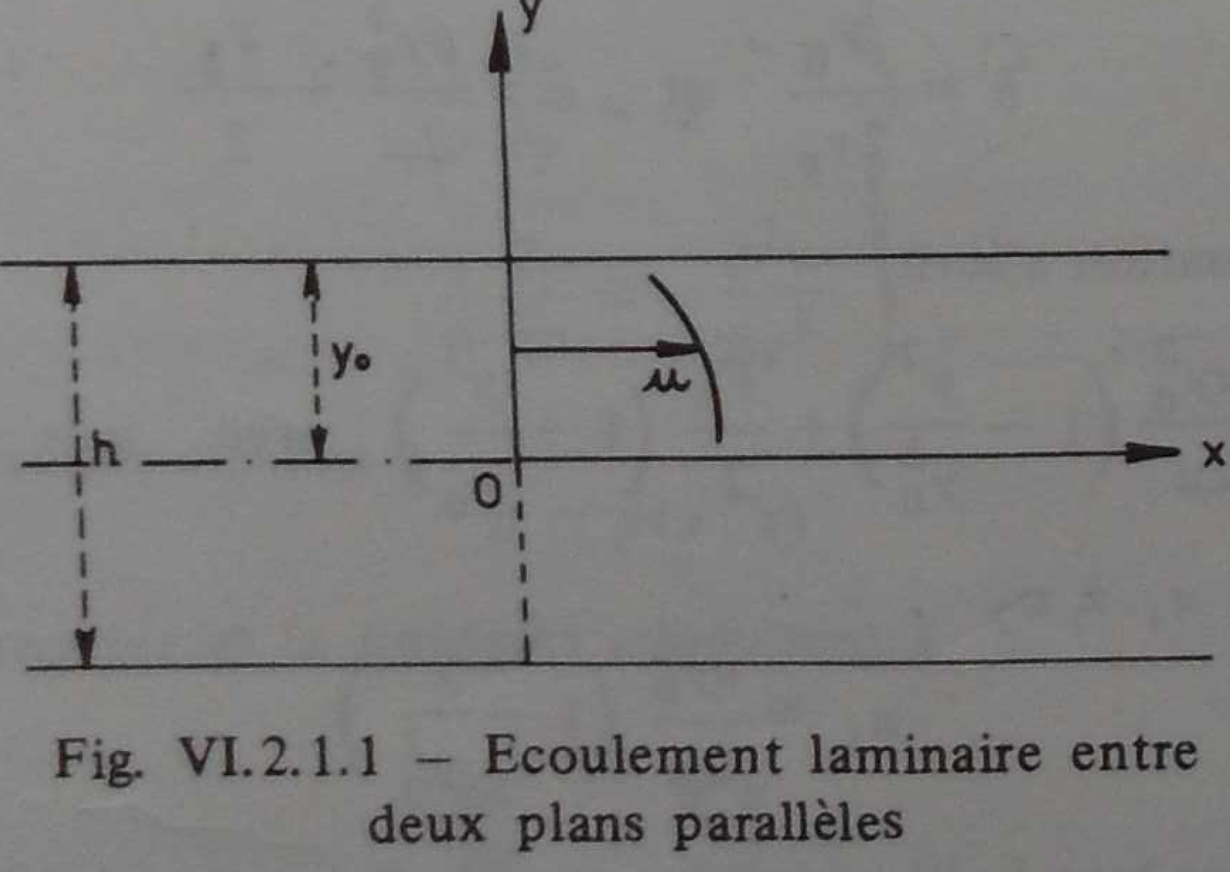


Fig. VI.2.1.1 – Ecoulement laminaire entre deux plans parallèles

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\frac{d^2u}{dy^2} \qquad [VI.2.1.1]$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Les deux dernières équations montrent que la pression est constante dans les plans parallèles à yOz ; elle ne dépend donc que de x.

L'équation [*VI.2.1.1*] s'écrit :

$$\frac{dp}{dx} = \rho\nu\frac{d^2u}{dy^2}$$

ou

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

où u ne dépend que de y

et p ne dépend que de x

ce qui conduit, en particulier, à $dp/dx = c^{te} = -a$

Intégrons l'équation par rapport à y ; il vient successivement :

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)y + b$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{y^2}{2} + by + c \qquad [VI.2.1.2]$$

Les constantes b et c seront déterminées par les conditions aux limites.

Nous examinerons les cas les plus simples.

VI.2.1.1. *Les deux parois sont immobiles : écoulement plan de Poiseuille* (fig. VI.2.1.2)

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad y = y_0 \quad \text{et pour} \quad y = -y_0$$

avec $$y_0 = \frac{h}{2}$$

L'équation [*VI.2.1.2*] permet d'obtenir les valeurs des constantes :

$$b = 0$$

$$c = \frac{ay_0^2}{2\mu}$$

et l'expression de u devient :

$$u = \frac{ay_0^2}{2\mu}\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

La *répartition des vitesses* dans le plan xOy est donc parabolique (fig. VI.2.1.2) ; la vitesse maximale est atteinte au milieu de l'intervalle entre les deux plaques et a pour valeur

$$u_m = \frac{ay_0^2}{2\mu}$$

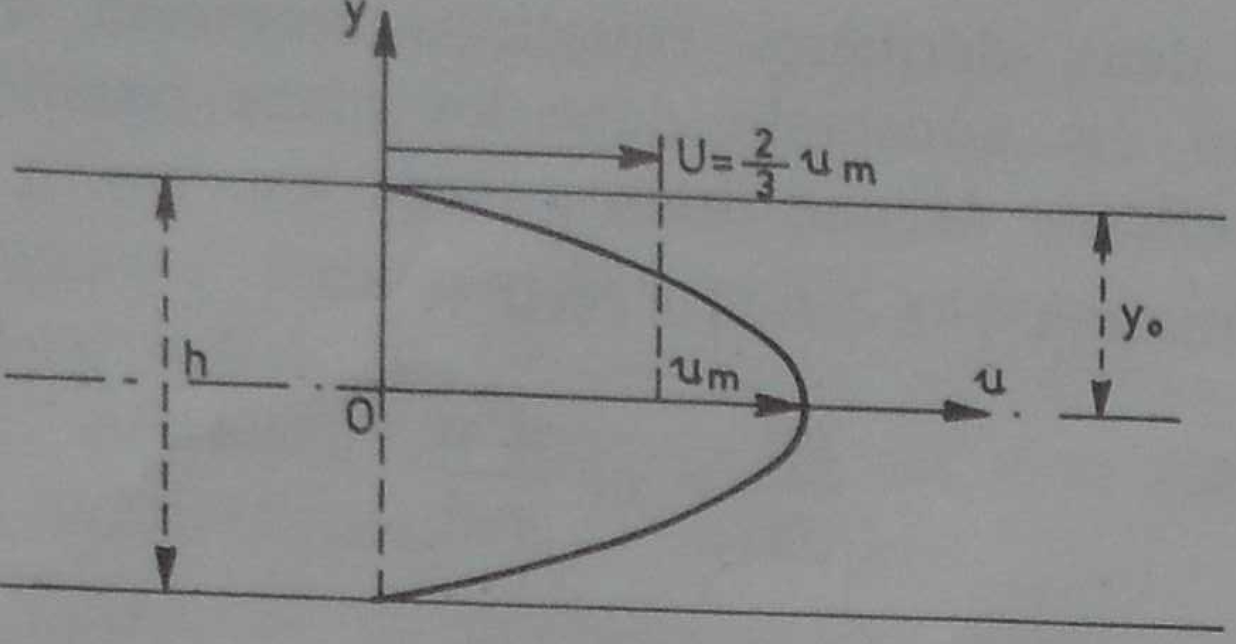


Fig. VI.2.1.2 – Ecoulement plan de Poiseuille

La *vitesse moyenne* est $U = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dy$

avec $$\int_0^h u \, dy = \frac{2}{3} h u_m$$

(surface du segment de parabole)

d'où $$U = \frac{2}{3} u_m = \frac{a y_0^2}{3\mu}$$

Quant à la *pression*, elle décroît linéairement dans la direction de l'écoulement suivant la loi $dp/dx = -a$.

Pour une longueur l le long de laquelle la pression varie de Δp on a $\Delta p/\Delta l = a$.

Le *débit* par unité de largeur mesurée dans la direction Oz est donné par

$$q = Uh = 2 y_0 U$$

$$q = \frac{2 a y_0^3}{3\mu}$$

L'écoulement reste laminaire tant que le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = \frac{Uh}{\nu} = \frac{2 U y_0}{\nu}$ reste inférieur à 1.000 environ.

VI.2.1.2. *Une paroi est immobile, l'autre en mouvement avec une vitesse constante V_0 : écoulement plan de Couette* (fig. VI.2.1.3)

On a alors

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad y = -y_0$$

$$u = V_0 \quad \text{pour} \quad y = y_0$$

Compte tenu de ces conditions, l'équation [*VI.2.1.2*] s'écrit

$$u = by + c$$

avec $$b = \frac{V_0}{2 y_0} \quad \text{et} \quad c = \frac{V_0}{2}$$

soit $$u = \frac{V_0}{2}\left(\frac{y}{y_0} + 1\right)$$

La répartition des vitesses est linéaire (fig. VI.2.1.3).

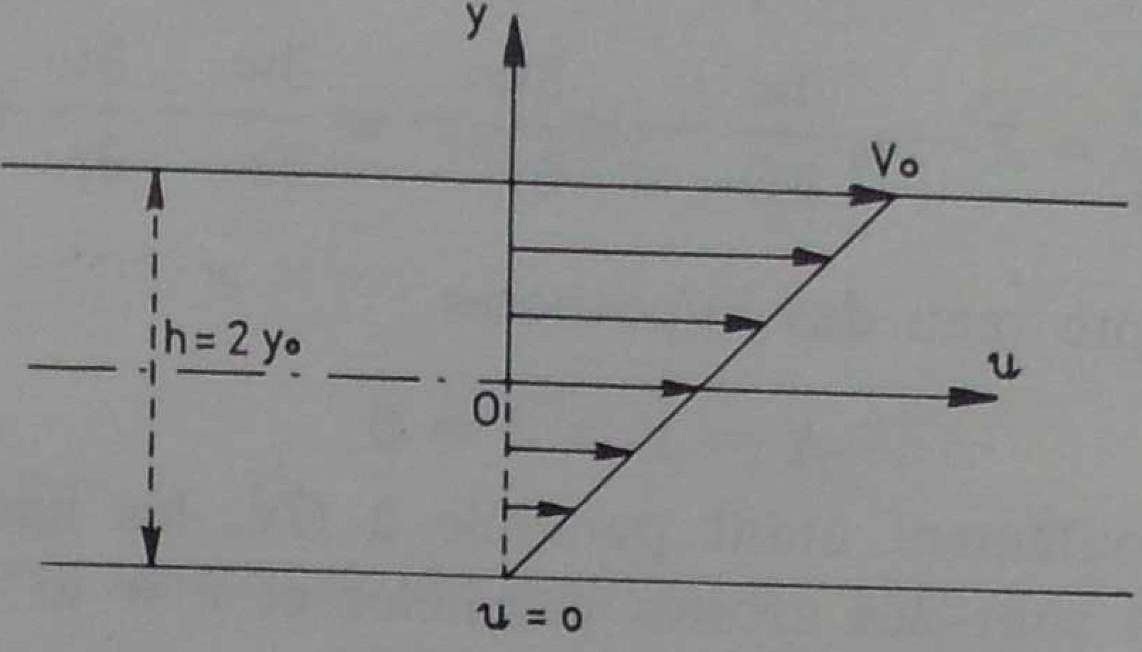


Fig. VI.2.1.3 – Ecoulement plan de Couette

VI.2.1.3. *Une paroi est immobile, l'autre en mouvement avec une vitesse constante V_0 mais le gradient de pression dp/dx n'est pas nul : écoulement de Couette généralisé*

C'est une synthèse des deux cas précédents

On a

$$\frac{dp}{dx} = -a$$

$$u = V_0 \quad \text{pour} \quad y = y_0$$

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad y = -y_0$$

L'équation [*VI.2.1.2*] donne immédiatement les valeurs des constantes b et c :

$$b = \frac{V_0}{2 y_0} \quad \text{et} \quad c = \frac{a y_0^2}{2\mu} + \frac{V_0}{2}$$

et l'équation s'écrit :

$$u = \frac{a y_0^2}{2\mu}\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right) + \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{y}{y_0}\right) \quad \text{avec} \quad a = -\frac{dp}{dx}$$

ou $u = u_1 + u_2$

avec $$u_1 = \frac{a y_0^2}{2\mu}\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)$$

correspondant à l'écoulement plan de Poiseuille (§ VI.2.1.1)

et $$u_2 = \frac{V_0}{2}\left(1 + \frac{y}{y_0}\right)$$

correspondant à l'écoulement plan de Couette (§ VI.2.1.2)

La répartition des vitesses est la somme des répartitions précédentes et, suivant la grandeur de dp/dx, conduit à des courbes $u(y)$ analogues à celles de la figure VI.2.1.4.

Fig. VI.2.1.4 – Ecoulement de Couette généralisé

$$(1) : \frac{dp}{dx} = \frac{2\mu V_0}{h^2} \quad ; \quad (2) : \frac{dp}{dx} = -\frac{4\mu V_0}{h^2}$$

$$(3) : \frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{(Ecoulement de Couette)}$$

VI.2.1.4. *Ecoulement de Hele-Shaw*

C'est un écoulement visqueux en régime laminaire entre deux plans parallèles, les conditions aux limites étant quelconques.

La distance $h = 2y_0$ de ces deux plans est petite, de sorte que les composantes u et w de la vitesse varient beaucoup plus rapidement dans le sens Oy que dans le sens Ox et Oz. Par suite, les dérivées partielles $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial z$, $\partial w/\partial x$ et $\partial w/\partial z$ sont négligeables devant $\partial u/\partial y$ et $\partial w/\partial y$.

Par ailleurs, $v = 0$.

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}$$

La seconde conduit à

$$p = p(x, z)$$

La première et la troisième conduisent à

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \qquad [VI.2.1.4.1]$$

Les conditions aux limites (adhérence du fluide sur les deux plans) imposent $u = w = 0$ pour $y = \pm y_0$, ce qui conduit à chercher à exprimer u et w par des formules paraboliques en y de la forme

$$u = Hy(y - 2y_0)\,u_0$$

$$w = H'y(y - 2y_0)\,w_0$$

où H et H' sont des constantes, u_0 et w_0 ne dépendant que de x et z.

On peut faire en sorte que u_0 et w_0 représentent les composantes de la vitesse moyenne $\vec{V}_0$; il suffit d'écrire

$$u_0 \times 2y_0 = \int_{-y_0}^{y_0} u\,dy = Hu_0 \int_{-y_0}^{y_0} y(y - 2y_0)\,dy$$

d'où on déduit

$$H = -\frac{3}{2y_0^2}$$

De manière analogue :

$$w_0 \times 2y_0 = \int_{-y_0}^{y_0} w\,dy = H'w_0 \int_{-y_0}^{y_0} y(y - 2y_0)\,dy$$

d'où on déduit

$$H' = -\frac{3}{2y_0^2} = H$$

Les composantes u et w s'écrivent donc

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{3}{2y_0^2}\,y(y - 2y_0)\,u_0 \\ w &= -\frac{3}{2y_0^2}\,y(y - 2y_0)\,w_0 \end{aligned}\right.$$

En portant ces expressions dans les équations [*VI.2.1.4.1*], il vient, tous calculs faits :

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= -\frac{y_0^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \\ w_0 &= -\frac{y_0^2}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

Si on pose

$$\varphi = -\frac{y_0^2}{3\mu}\,p(x, z)$$

les composantes de la vitesse moyenne $\vec{V}_0$ s'écrivent

$$u_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$w_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

donc

$$\vec{V}_0 = \overrightarrow{\text{grad}}\,.\,\varphi = -\frac{y_0^2}{3\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,.\,p$$

Les composantes de la vitesse moyenne de l'écoulement sont donc celles d'un écoulement irrotationnel à deux dimensions (x, z) possédant les mêmes conditions aux limites et dans lequel le potentiel des vitesses est

$$\varphi = -\frac{y_0^2}{3\mu}\, p\,(x\,,\,z)$$

L'analogie de Hele-Shaw ainsi définie est utilisée couramment pour visualiser expérimentalement des écoulements à potentiel ; par exemple, dans les écoulements souterrains à deux dimensions les lignes isobares ($p = C^{te}$) de l'écoulement visqueux correspondent aux lignes équipotentielles ($\varphi = C^{te}$) de l'écoulement à potentiel.

VI.2.1.5. *Ecoulement de Reynolds dans un coin d'huile – Graissage hydrodynamique*

Supposons un patin plan de longueur l mobile parallèlement à une plaque plane parallèle au patin et distante de celui-ci d'une longueur h (fig. VI.2.1.5.1). Afin d'obtenir un mouvement stationnaire, nous choisirons un système d'axes lié au patin qui sera donc au repos, la plaque étant animée d'une vitesse $\vec{V}_0$. Si la surface du patin est suffisamment grande, on peut admettre que l'écoulement est longitudinal plan, parallèle à $\vec{V}_0$. La loi de ce mouvement est donnée par l'équation générale [*VI.2.1.1*] établie précédemment :

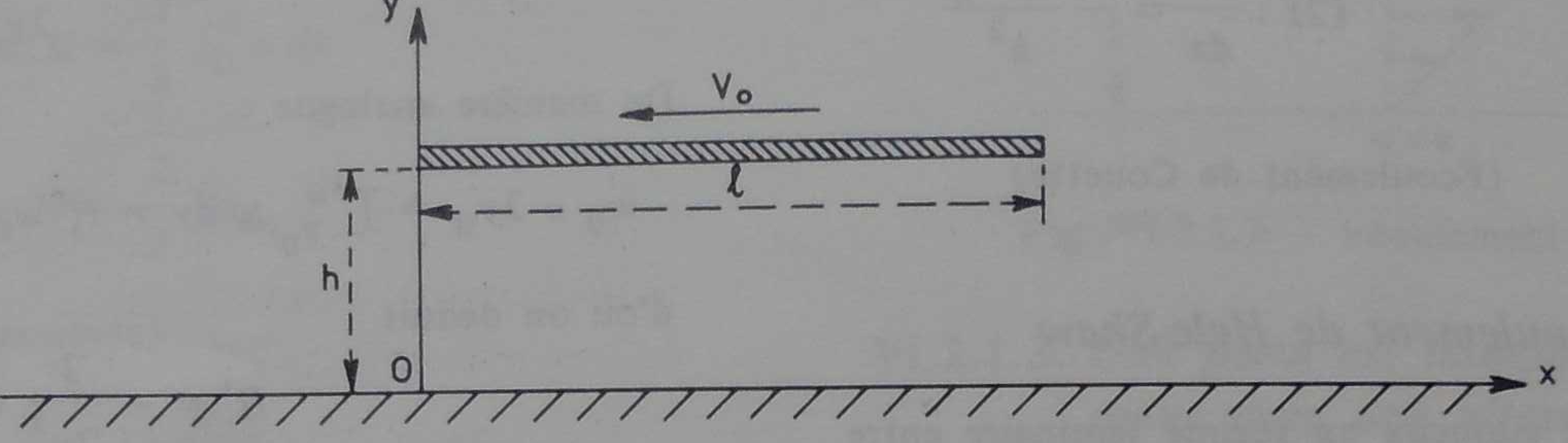


Fig. VI.2.1.5.1

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \nu\,\frac{d^2u}{dy^2} \qquad [VI.2.1.1]$$

Choisissons l'origine 0 dans le plan de la plaque au droit d'une des extrémités du patin ; les conditions aux limites sont alors

$u = V_0$ pour $y = 0$

$u = 0$ pour $y = h$

$p = p_1$ pour $x = 0$

$p = p_2$ pour $x = l$

Il existe donc un gradient de pression $\dfrac{dp}{dx} = -\,a = \dfrac{p_1 - p_2}{l}$

et nous sommes dans le cas de l'écoulement de Couette généralisé (§ VI.2.1.3) mais les axes et les conditions aux limites sont différents. Si on pose $dp/dx = C^{te} = a$, l'équation différentielle [*VI.2.1.1*] s'intègre facilement et donne, en tenant compte des conditions aux limites définies précédemment :

$$u = V_0\left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{ayh}{2\mu}\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Le débit par unité de largeur comptée perpendiculairement à $\vec{V}_0$ s'écrit :

$$q = \int_0^h u\,dy$$

soit, tous calculs faits :

$$q = \frac{V_0 h}{2} + \frac{a}{12\mu}\,h^3 \qquad [VI.2.1.5.1]$$

En fait dans le fonctionnement réel du patin sur sa glissière la pression est la même aux deux extrémités du patin, donc

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{l} = -\,a = 0$$

La pression restant constante dans la lame d'huile, le patin ne pourrait supporter une charge quelconque.

Dans ces conditions, *inclinons légèrement le patin* sur sa glissière d'un petit angle α (fig. VI.2.1.5.2). Le débit total d'huile d'une extrémité à l'autre du patin est constant et, par unité de largeur, sa valeur est celle donnée par l'expression [*VI.2.1.5.1*] d'où on tire :

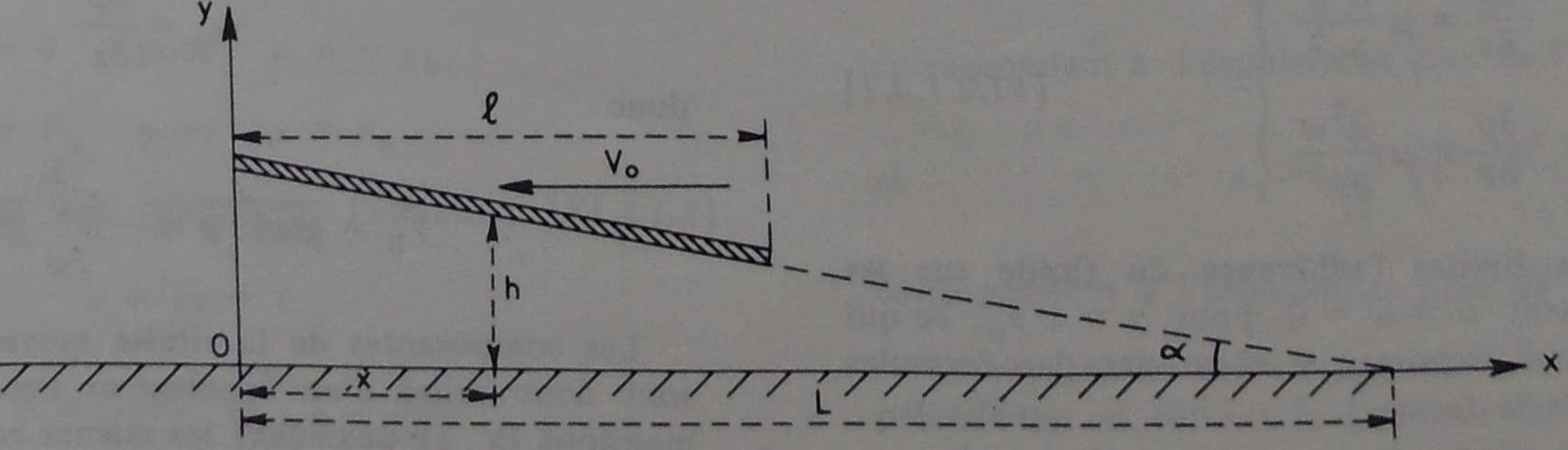


Fig. VI.2.1.5.2 – Ecoulement de Reynolds dans un coin d'huile

$$\frac{dp}{dx} = -a = 12\mu\left(\frac{V_0}{2h^2} - \frac{q}{h^3}\right) \qquad [VI.2.1.5.2]$$

Connaissant la loi $h = f(x)$, c'est-à-dire la forme du coin d'huile, on peut intégrer l'équation précédente et en déduire la loi $p(x)$. Par exemple, pour un patin analogue à celui de la figure VI.2.1.5.2, on a

$$h = (L - x)\alpha$$

En remplaçant h par cette valeur dans l'équation [*VI.2.1.5.2*] et en tenant compte des conditions aux limites ($p = p_0$ pour $x = 0$ et $x = l$), l'intégration de l'équation conduit à

$$p = p_0 + \frac{6\mu V_0 x(l - x)}{(2L - l)\alpha^2 (L - x)^2} \qquad [VI.2.1.5.3]$$

Le gradient de pression n'est plus nul et la variation de p le long du patin est représentée par une courbe du genre de celle de la figure VI.2.1.5.3. La pression maximale est réalisée pour la valeur de x qui annule la dérivée de [*VI.2.1.5.3*],

soit
$$x = \frac{Ll}{2L - l}$$

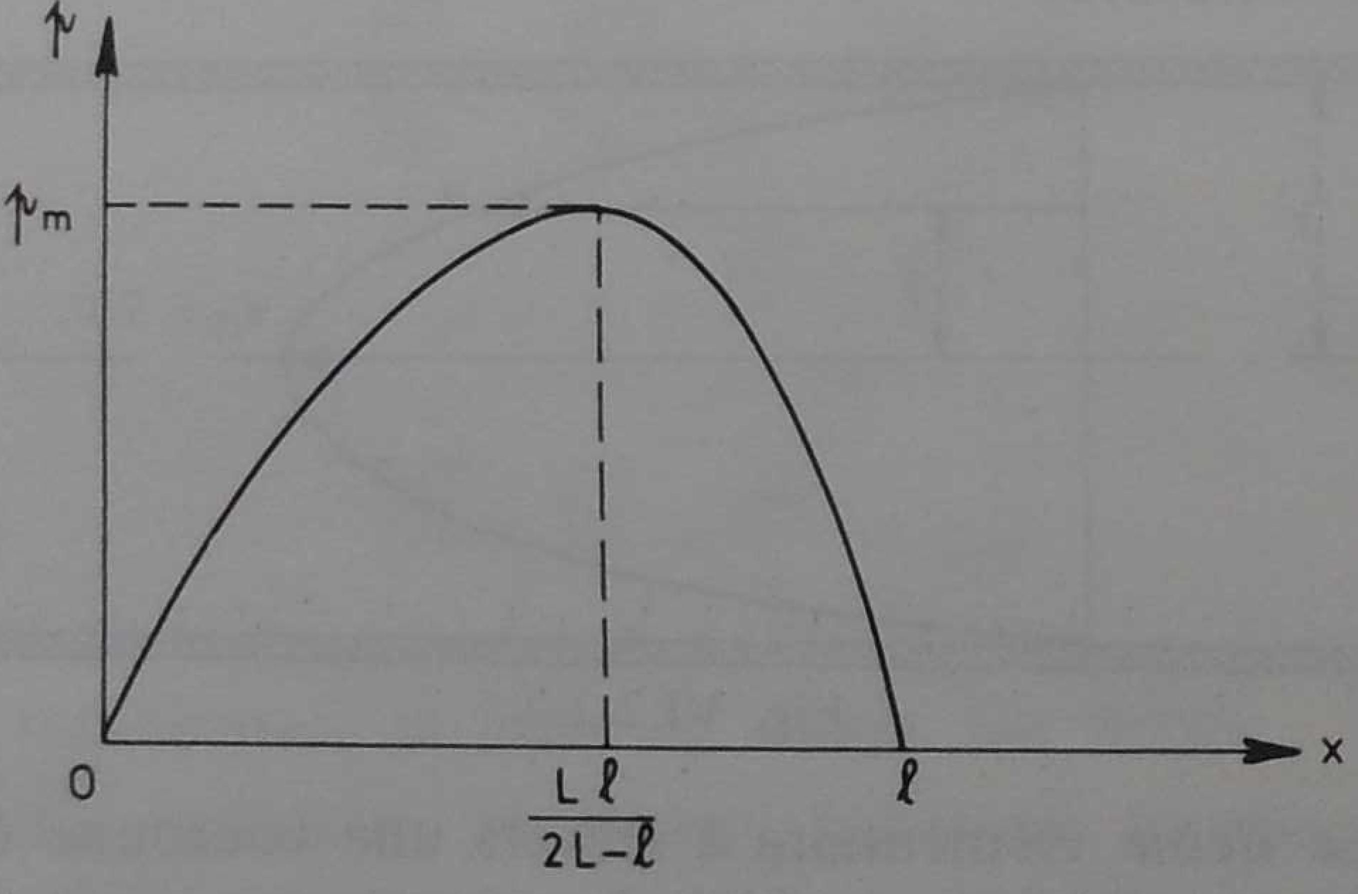


Fig. VI.2.1.5.3 – Variation de la pression le long du coin d'huile

Ce dispositif constitue le principe de la *butée Mitchell* qui est utilisée dans la construction des *pivoteries des groupes turbo alternateurs* à axe vertical ; l'arbre du groupe porte une couronne dont la face inférieure repose sur une couronne de patins inclinés supportée par les fondations du groupe ; l'ensemble est contenu dans un bain d'huile dont le refroidissement est assuré par une circulation continue à travers un réfrigérant ; on peut ainsi supporter les charges de plusieurs centaines de tonnes que représente le poids des masses tournantes auquel s'ajoute la poussée hydraulique.

VI.2.2. Ecoulement dans un tube cylindrique

Considérons un tube rectiligne de section circulaire constante de rayon r à l'intérieur duquel se déplace un liquide en régime laminaire et permanent (fig. VI.2.2.1).

Dans ces conditions, le débit est le même dans toutes les sections transversales et comme toutes les sections transversales sont identiques, la vitesse est constante tout le long d'un filet liquide ; le mouvement est *uniforme.*

Par raison de symétrie, l'écoulement reste identique à lui-même dans tous les plans passant par l'axe du tuyau. Il suffit donc de l'étudier dans le plan vertical passant par cet axe et que nous choisirons comme plan de figure.

Prenons comme axes OX confondu avec l'axe du tuyau et OY perpendiculaire à OX dans le plan de la figure. Soit α l'angle de OX avec le plan horizontal $H'H$.

Considérons, entre deux sections transversales (S_1) et (S_2) distantes d'une longueur l et où les pressions respectives sont p_1 et p_2, le cylindre de liquide de rayon y qui glisse par rapport à la masse liquide en mouvement qui l'entoure.

Puisque le mouvement est rectiligne et uniforme, écrivons que la somme des projections sur OX des forces extérieures qui agissent sur ce cylindre est nulle.

Ces forces sont :

1) Le poids dont la projection sur OX est :

$$-\bar{\omega}\pi y^2 l \sin\alpha = -\bar{\omega}\pi y^2 (z_2 - z_1)$$

en désignant par z_1 et z_2 les cotes des centres des sections (S_1) et (S_2).

2) Les pressions en bout dont la résultante est :

$$(p_1 - p_2)\pi y^2$$

3) Les réactions qui s'exercent sur la surface latérale dont la résultante tangentielle est :

$$-\tau 2\pi y l$$

en désignant par τ la force de frottement par unité de surface latérale du cylindre ; son expression sera

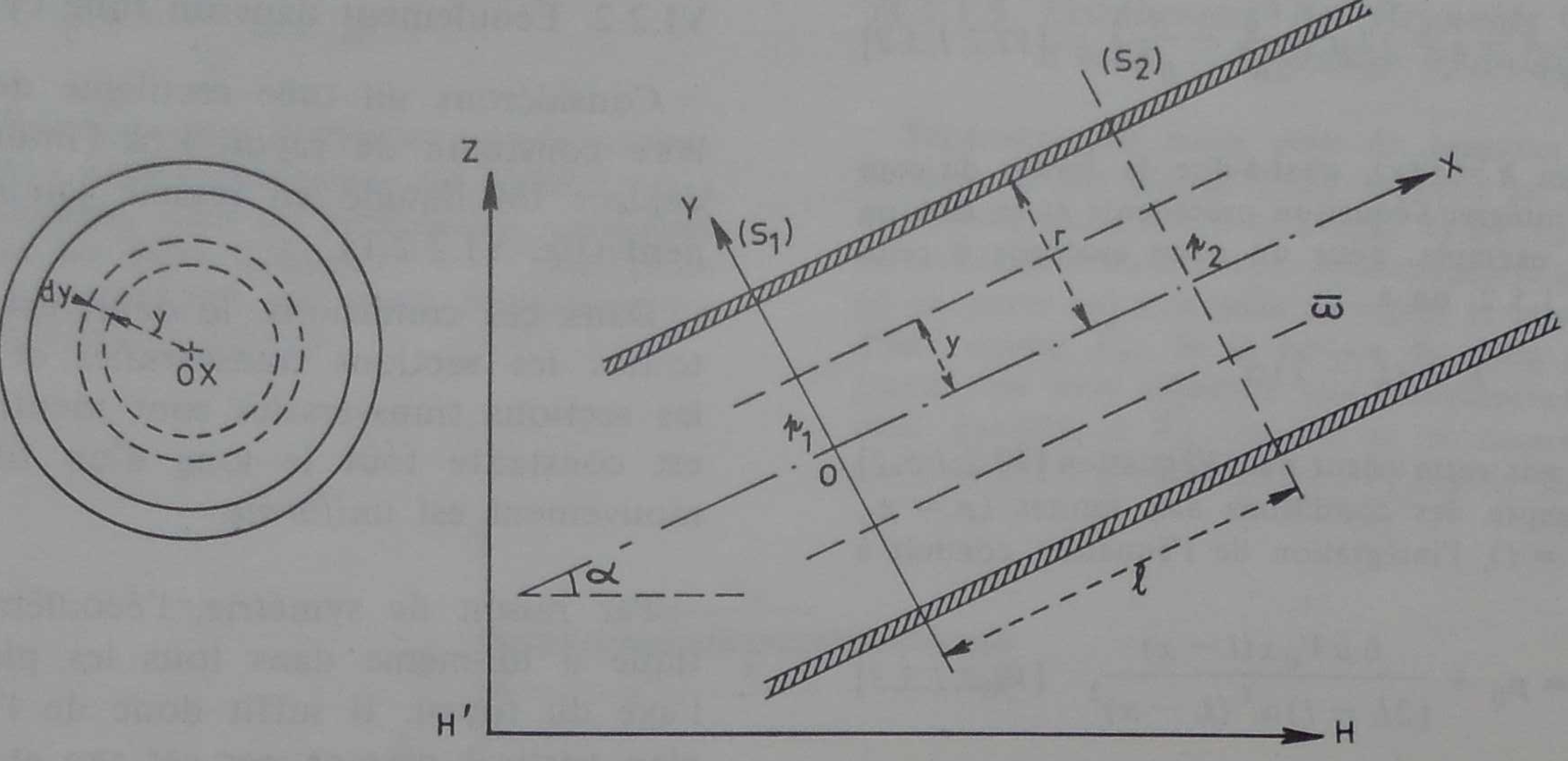


Fig. VI.2.2.1 – Ecoulement en régime laminaire dans un tube cylindrique

donnée par la formule de Newton :

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}$$

Sa projection sur OX aura donc pour expression

$$+\mu \frac{du}{dy} 2\pi y l$$

L'équilibre dynamique du cylindre impose donc

$$-\varpi \pi y^2 (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) \pi y^2 + \mu \frac{du}{dy} 2\pi y l = 0$$

$$\pi y^2 [(p_1 + \varpi z_1) - (p_2 + \varpi z_2)] = -2\pi \mu y l \frac{du}{dy}$$

En introduisant les pressions étoilées

$$p_1^* = p_1 + \varpi z_1$$

$$p_2^* = p_2 + \varpi z_2$$

et en divisant par $2\pi\mu y l$, il vient :

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{2\mu l} y = -\frac{du}{dy}$$

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{2\mu l} y \, dy = -du$$

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{2\mu l} \frac{y^2}{2} = -u + c^{te}$$

Compte tenu de la condition aux limites ($u = 0$ pour $y = r$), on obtient, en définitive :

$$\boxed{u = \frac{p_1^* - p_2^*}{4\mu l} (r^2 - y^2)}$$

La vitesse varie donc suivant une *loi parabolique* (fig. VI.2.2.2)

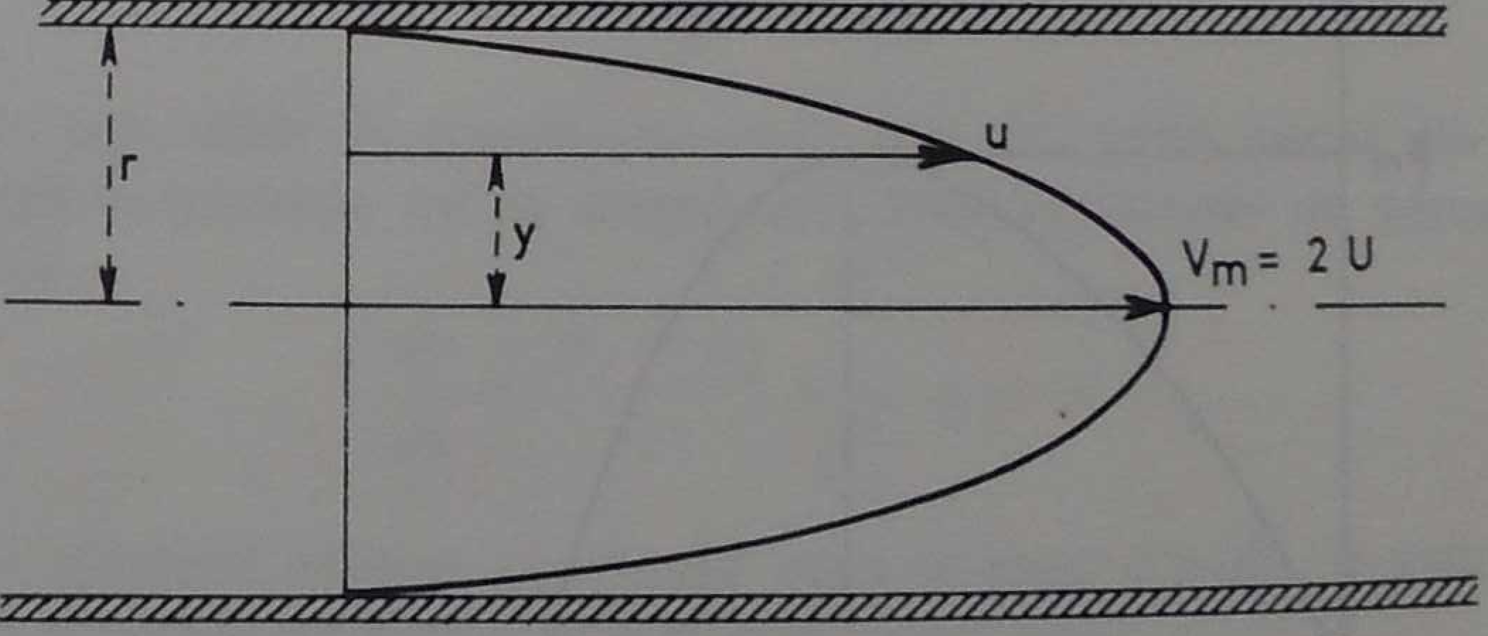


Fig. VI.2.2.2

Le *débit* élémentaire à travers une couronne élémentaire de rayon y et de largeur dy est :

$$dQ = 2\pi y \, dy \, u$$

d'où $$Q = \int_0^r 2\pi y \frac{p_1^* - p_2^*}{4\mu l} (r^2 - y^2) \, dy$$

$$\boxed{Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{p_1^* - p_2^*}{l}}$$

C'est la *formule de Poiseuille* (1840).

Elle peut se vérifier expérimentalement avec une grande précision et permet de déterminer le coefficient de viscosité μ d'un liquide (voir § VI.2.3).

La *vitesse moyenne* a pour expression :

$$U = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{r^2}{8\mu}\,\frac{p_1^* - p_2^*}{l}$$

La *vitesse maximale* V_m est atteinte sur l'axe et a pour valeur :

$$V_m = \frac{p_1^* - p_2^*}{4\mu l}\, r^2 = 2U$$

Les diverses relations établies montrent que la vitesse u en un point et le débit Q sont proportionnels à $\frac{p_1^* - p_2^*}{l}$ c'est-à-dire à la chute de pression piézométrique par unité de longueur.

Or, la charge entre les deux sections (S_1) et (S_2) a pour expression :

$$h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\bar{\omega}}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\bar{\omega}}\right) = \frac{p_1^* - p_2^*}{\bar{\omega}}$$

$$\frac{p_1^* - p_2^*}{l} = \frac{\bar{\omega} h}{l}$$

et comme le mouvement est uniforme, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = h - j = 0$$

$$j = h = \frac{p_1^* - p_2^*}{\bar{\omega}}$$

et $$\frac{p_1^* - p_2^*}{l} = \frac{j\bar{\omega}}{l} = J\bar{\omega}$$

J représentant la perte de charge par mètre.

En définitive, en régime laminaire *la vitesse et le débit sont proportionnels à la perte de charge par unité de longueur.*

C'est la loi découverte presque simultanément par le physicien allemand Hagen (1839) et le médecin français Poiseuille (1840).

VI.2.3. Mesure de la viscosité des liquides – Viscosimètres

Comme nous l'avons indiqué, la formule de Poiseuille permet la mesure précise de μ. Les appareils utilisés pour cette mesure sont des *viscosimètres.* Ils comportent un récipient pourvu à sa partie inférieure d'un orifice calibré (fig. VI.2.3.1). Le liquide à étudier est placé dans le récipient et on mesure le temps nécessaire à l'écoulement d'un volume déterminé du liquide. Le coefficient de viscosité étant très sensible à la température, le récipient est généralement placé à l'intérieur d'un bain maintenu à température constante.

Tous les modèles de viscosimètres correspondent à ce schéma de principe et ne diffèrent que par des détails constructifs.

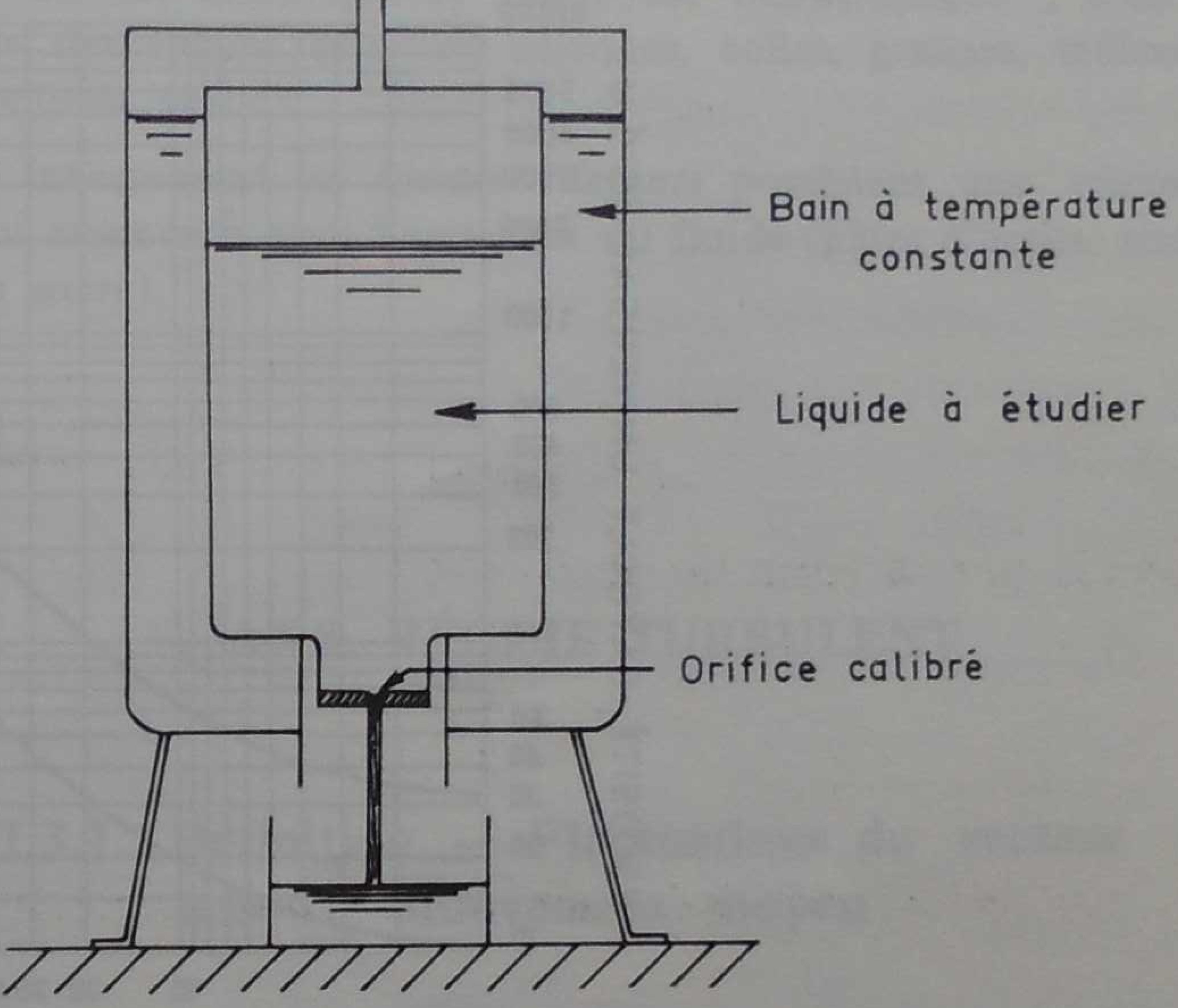


Fig. VI.2.3.1 – Viscosimètre (type Engler)

On utilise le plus souvent :

– le *viscosimètre Engler* (France et Allemagne) au moyen duquel on définit le *degré Engler* qui est le rapport du temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm^3 du liquide à étudier à travers un orifice calibré, au temps nécessaire à l'écoulement de 200 cm^3 d'eau à 20 °C à travers le même orifice (ce dernier temps est de 51 secondes pour l'appareil Engler).

– le *viscosimètre Redwood Standard* (Angleterre) au moyen duquel on définit la "*Second Redwood Standard*" (*SRS*). On attribue la valeur 100 secondes Redwood Standard à la viscosité cinématique ν d'une huile de densité 0,915 dont 50 cm^3 s'écoulent en 535 secondes à 15,55 °C dans l'appareil Redwood Standard. La "Second Redwood Standard" (SRS) est utilisée pour exprimer les viscosité moyennes ; pour les fortes viscosités on utilise la "*Second Redwood Admiralty*" (*SRA*) qui est sensiblement 10 fois plus grande que la "Second Redwood Standard" (SRS).

– le *viscosimètre Saybolt Universal* (Etats-Unis) au moyen duquel on définit la "*Second Saybolt Universal*" (*SSU*) qui est le nombre de secondes nécessaires à l'écoulement de 60 cm^3 du liquide à étudier dans le viscosimètre Saybolt Universal (la viscosité de l'eau à 15,5 °C est de 30 SSU). Pour les fortes viscosités on utilise le viscosimètre Saybolt Furol et on exprime les viscosités en "*Second Saybolt Furol*" (*SSF*) qui est sensiblement 10 fois plus grande que la "Second Saybolt Universal" (SSU).

– *Relations entre les différentes viscosités*

Désignons par

E le degré de viscosité Engler,

R la seconde de viscosité Redwood Standard,

S la seconde de viscosité Saybolt Universal,

ν le coefficient de viscosité cinématique, en stokes.

On peut adopter entre ces quatre viscosités les relations approximatives suivantes résultant de mesures expérimentales :

$$\nu = 0{,}0731 \ E - \frac{0{,}0631}{E} \quad \text{(formule de Ubelhode)}$$

$$\nu = 0{,}00239 \ R - \frac{1{,}50}{R}$$

$$\nu = 0{,}0022 \ S - \frac{1{,}80}{S}$$

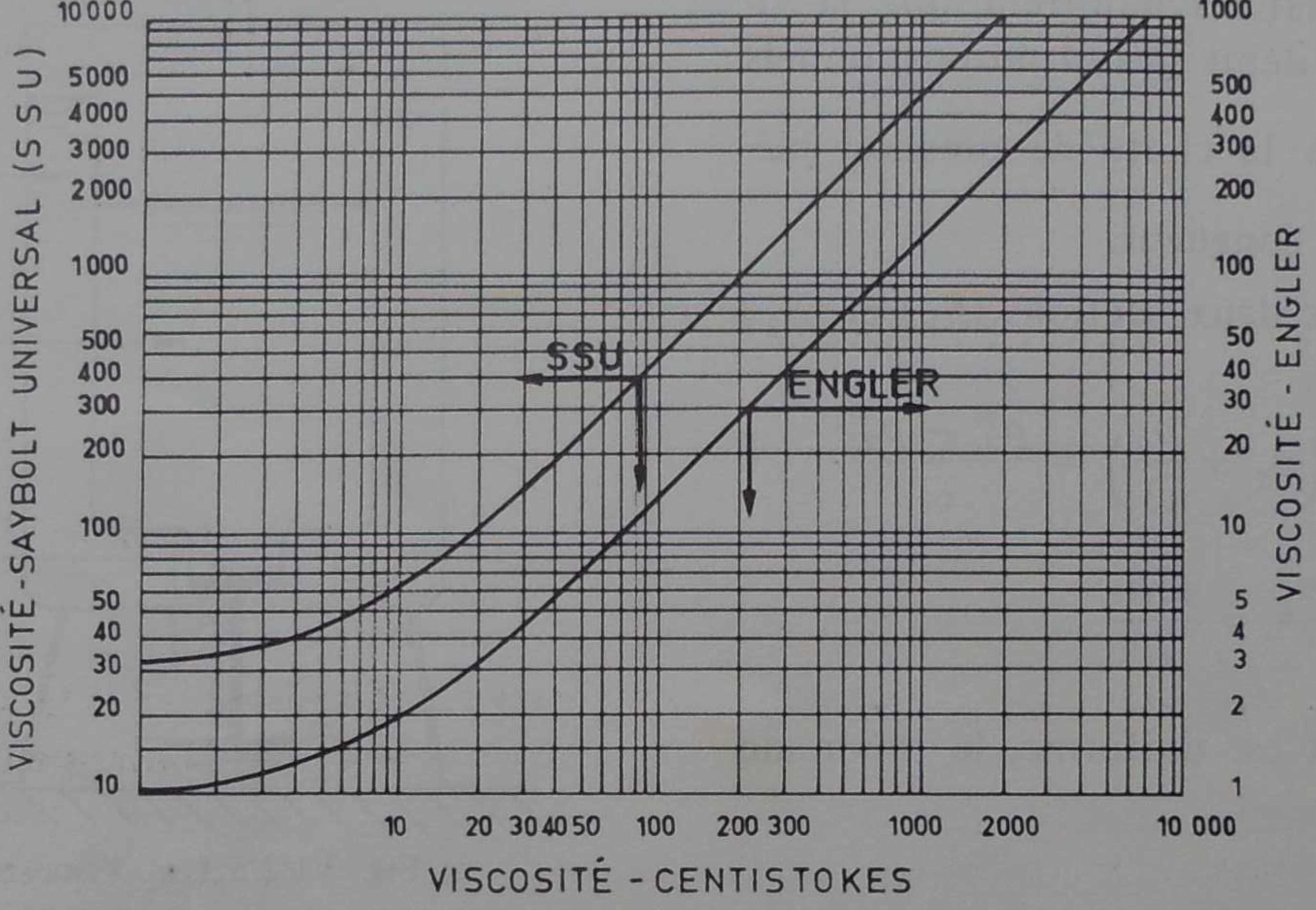


Fig. VI.2.3.2 – Equivalence des unités de viscosité industrielles et scientifiques

Le graphique de la figure VI.2.3.2 donne l'équivalence entre les unités Engler, Saybolt Universal (SSU) et ν.

– *Nombre S.A.E.* (Society of Automotive Engineers). Ce nombre, introduit aux USA dans l'industrie automobile, ne mesure pas à proprement parler une viscosité mais couvre en réalité une gamme de viscosités comprises entre certaines limites.

Par exemple, à 50 °C :

les huiles	*SAE*	20 (très fluide)
	SAE	40 (semi-fluide)
	SAE	50 (semi-épaisse)
	SAE	80 (épaisse)
	SAE	140 (très épaisse)

correspondent respectivement à

$E = 8$ et $\nu = 0{,}6$ stokes
$E = 10{,}2$ et $\nu = 0{,}78$ "
$E = 13{,}5$ et $\nu = 1{,}05$ "
$E = 16{,}8$ et $\nu = 1{,}2$ "
$E = 22$ et $\nu = 1{,}6$ "

VI.2.4. Ecoulement en régime laminaire dans les sols

Nous avons constaté que pour la plupart des écoulements intéressant l'Ingénieur (tuyaux, canaux, etc.) le régime était turbulent. Il est toutefois un cas important où le régime est laminaire, c'est celui de l'écoulement dans les massifs filtrants, en particulier dans les sols. Les intervalles entre les matériaux forment, en effet, une énorme quantité de petits conduits de sections très faibles et, à l'échelle de ces conduits, l'écoulement est laminaire.

Toutefois, en raison de la grande diversité de forme des canalicules dans lesquels le liquide circule, il n'est pratiquement pas possible de les considérer individuellement et d'appliquer à cet écoulement les formules que nous avons établies.

On préfère considérer les limites extérieures du massif perméable comme les véritables limites de l'écoulement sans se préoccuper de l'espace occupé par les particules du massif. Nous retrouverons ces notions dans le chapitre XIII (Hydraulique souterraine).

VI.2.5. Limitation de la loi de Newton – Introduction à la rhéologie

Représentons la contrainte tangentielle τ en fonction du gradient de vitesse dV/dn (fig. VI.2.5).

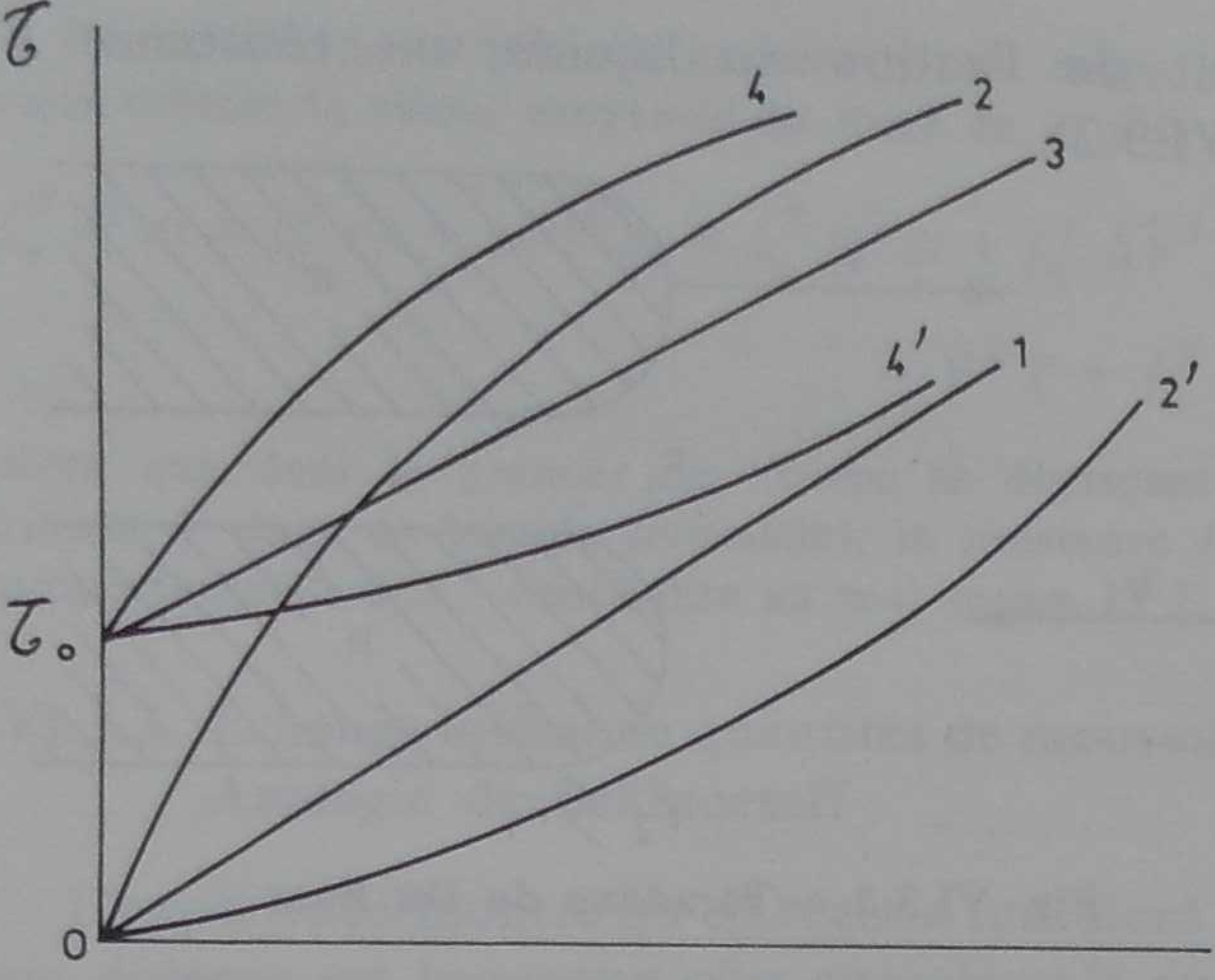


Fig. VI.2.5

L'axe des abscisses ($\tau = 0$) traduit le comportement du *fluide parfait*.

L'axe des ordonnées $\left(\frac{dV}{dn} = 0\right)$ traduit le comportement du *solide élastique* au sens de la théorie de l'élasticité.

a) la formule de Newton $\tau = \mu \frac{dV}{dn}$ est représentée par une droite 1 passant par l'origine ; on a affaire à un *fluide visqueux newtonien*.

Le comportement de certains fluides correspond à des lois différentes dont nous citerons les principales :

b) $$\tau^n = \mu \frac{dV}{dn} \quad \text{avec} \quad n \neq 1$$

représentée par une courbe 2 ou 2′ (fig. VI.2.5). Ces fluides présentent une *viscosité de structure* caractérisée par une "pseudo-viscosité" μ résultant de l'orientation et de la déformation des micelles colloïdales sous l'action des forces hydrodynamiques. C'est le cas de nombreuses solutions colloïdales (encres, peintures, vernis, lait, sang, crème, latex végétaux).

c) $$\tau = \tau_0 + \mu \frac{dV}{dn} \quad \textit{(loi de Bingham)}$$

représentée par une droite 3. C'est le cas d'un grand nombre de pâtes et matières plastiques. L'écoulement plastique correspondant à la loi de Bingham s'observe dans les techniques de filage et moulage des matières plastiques par extrusion.

d) $$(\tau - \tau_0)^n = \mu \frac{dV}{dn} \quad \textit{(loi d'Herschel-Buckley)}$$

représentée par une courbe 4 ou 4′.

C'est une généralisation de la loi de Bingham.

e) *Liquides thixotropiques et liquides dilatants*

Toutes les relations précédentes supposent que μ est indépendant du temps. Il existe des liquides pour lesquels μ varie avec le temps. Le fluide au repos depuis un temps assez long possède une viscosité élevée μ_b ; après une violente agitation sa viscosité devient relativement faible, soit $\mu_a < \mu_b$; lorsque le liquide est de nouveau abandonné au repos sa viscosité croît progressivement suivant une loi de la forme

$$\mu = \mu_b + (\mu_a - \mu_b)\, e^{-t/t_0}$$

où t est le temps écoulé depuis la fin de l'agitation et t_0 un temps de relaxation caractéristique du fluide.

On dit alors que le fluide est *thixotropique* ; c'est le cas des argiles, bitumes, silicones, colles, graisses, mélasses, gommes, savons.

Inversement les fluides *dilatants* possèdent une viscosité qui augmente avec l'agitation du fluide (pâtes d'argile, sirops de sucre).

VI.3. RÉGIME TURBULENT

VI.3.1. Définition – Fluctuations du vecteur vitesse – Mouvement moyen

Comme le montre l'expérience de Reynolds, lorsque le nombre de Reynolds devient supérieur à une valeur limite qui est de l'ordre de 2000, le mouvement du liquide s'effectue de telle sorte qu'en chaque point les particules semblent animées de mouvements désordonnés. Les trajectoires de deux particules initialement voisines ainsi que les trajectoires de deux particules issues d'un même point à deux instants différents sont totalement distinctes.

Cette agitation provient de ce que, dans les conditions où s'effectue le mouvement, les molécules se heurtent aux aspérités de la paroi solide et sont renvoyées au sein de la masse liquide ; il en résulte des mouvements désordonnés qui se propagent dans toute la masse liquide en mouvement.

Ceci est dû à l'extrême mobilité des molécules liquides les unes par rapport aux autres. Il y a là quelques chose d'un peu analogue à ce qui se passe pour les gaz (théorie cinétique des gaz). On a pu observer en effet que des particules de gomme-gutte en suspension dans l'eau sont animées du mouvement brownien et l'analogie avec les gaz est telle qu'en assimilant cette suspension à un gaz, M. Perrin a pu déterminer la constante d'Avogadro N.

Ainsi donc, en un point le vecteur vitesse $\vec{V}$ n'est stable ni en grandeur, ni en direction, même en régime permanent.

Dès 1887, Bazin avait analysé le phénomène et énonçait déjà ce qui suit :

"Au premier abord tout paraît confus et irrégulier, mais ce désordre n'est qu'apparent, et si l'on fait, même pour un temps assez court, les moyennes de toutes les vitesses qui se succèdent en chaque point de la section, des lois précises se manifestent bientôt ; ces moyennes prennent une valeur parfaitement déterminée autour de laquelle les vitesses instantanées oscillent avec une sorte de périodicité".

Autrement dit, bien que en un point les composantes instantanées u, v, w du vecteur $\vec{V}$ subissent des variations qui paraissent désordonnées, *la vitesse moyenne en ce point pendant un espace de temps suffisamment petit prend une valeur déterminée, c'est celle que nous appelons V.*

Des mesures effectuées par divers expérimentateurs il résulte, en effet, que les variations relatives de la valeur instantanée de la vitesse par rapport à la valeur moyenne, pour des écoulements en conduites ou canaux à parois assez lisses et pour des vitesses usuelles, ne paraissent pas dépasser 10 %.

Cette remarque permet d'ailleurs d'utiliser la méthode chronophotographique en régime turbulent pour déterminer la vitesse en un point de la masse liquide en écoulement. Pour la même raison, les appareils de mesure utilisés en hydraulique donneront les valeurs moyennes des vitesses et des pressions en un point d'une masse liquide en régime turbulent.

Ces valeurs moyennes de la vitesse et de la pression en chaque point définissent un mouvement fictif que Bazin a appelé *mouvement moyen.* C'est ce mouvement moyen qui, en réalité, constitue le mouvement d'ensemble de la masse auquel se superposent les mouvements d'agitation tourbillonnaire et de turbulence.

VI.3.2. Paradoxe de Du Buat

La notion de turbulence permet d'expliquer un résultat que son apparence, à première vue paradoxale, a fait désigner sous le nom de "paradoxe de Du Buat".

Soit un corps R immergé se déplaçant à une vitesse V dans un liquide immobile ; il éprouve du fait de l'action du liquide une résistance F_1 (fig. VI.3.2).

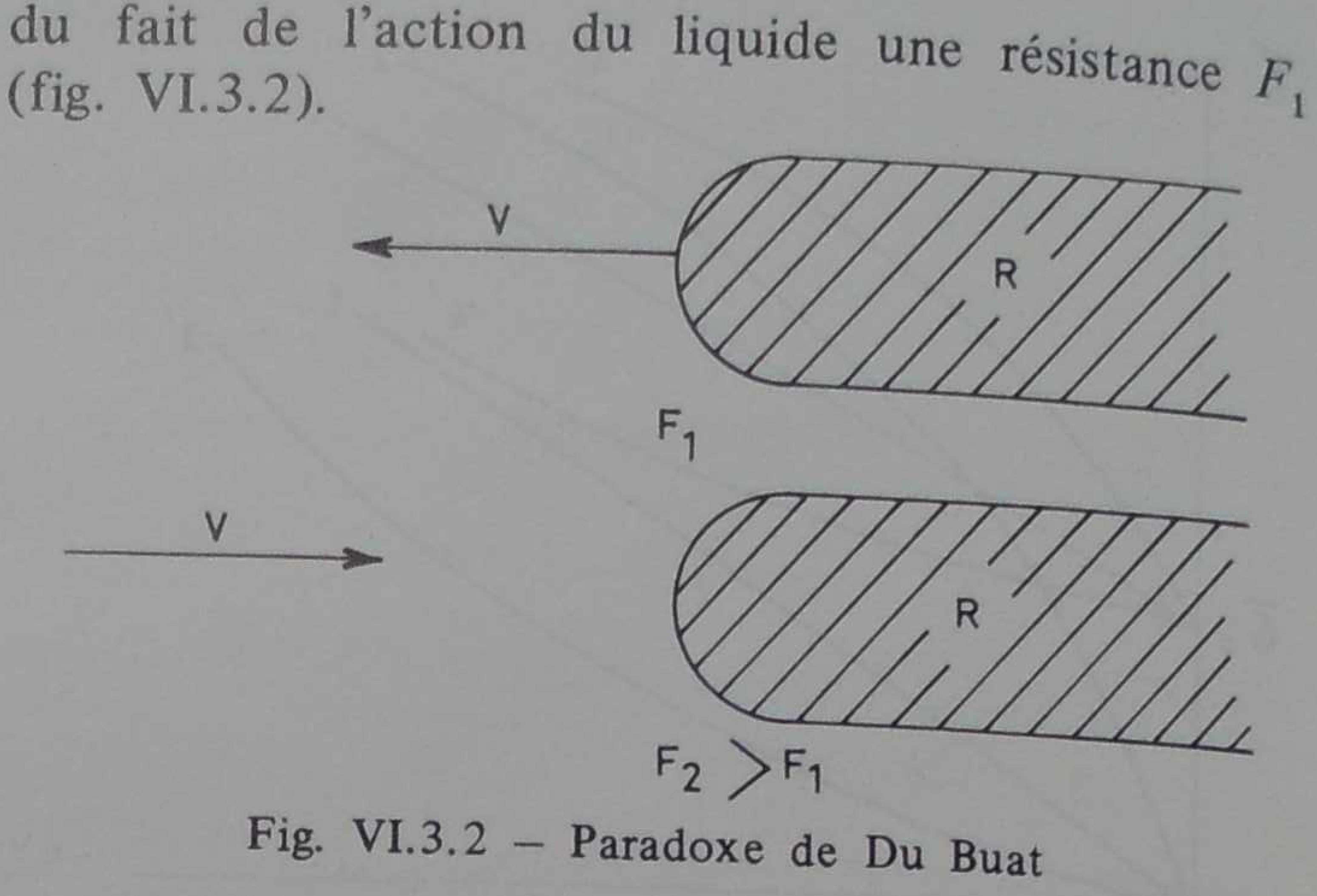


Fig. VI.3.2 – Paradoxe de Du Buat

Supposons maintenant le même corps R immobile et immergé dans un courant du même liquide en régime turbulent de même vitesse V qui attaque le corps suivant la même orientation ; on constate que l'action du courant sur le corps se traduit par une force F_2 supérieure à F_1.

Ce résultat, de prime abord en contradiction avec le principe fondamental du mouvement relatif, peut s'expliquer en faisant intervenir la turbulence.

En réalité, pour que les conditions de l'écoulement soient absolument identiques il faudrait que dans le second cas (corps immobile) le courant possédât en tous ses points une vitesse d'attaque égale à V ; or, en raison de la turbulence du courant, la vitesse en chaque point oscille autour de la vitesse moyenne V et ces variations rapides de la vitesse se traduisent par une résistance plus grande sur le corps R.

Pour mieux se rendre compte de l'incidence de la fluctuation rapide de la vitesse en un point sur la résistance opposée par le corps immergé on peut faire le calcul simplifié suivant :

Supposons, par exemple, que la composante v de la vitesse d'attaque instantanée suivant la direction de la vitesse moyenne V, soit la même en tous les points à chaque instant t et soit donnée par une expression de la forme :

$$v = V + \Delta V$$

avec

$$\int_0^T \Delta V \, dt = 0$$

T désignant la période de la turbulence.

La poussée exercée sur le corps immergé varie, comme nous le verrons plus loin, comme la quantité de mouvement du courant, soit $\bar{\omega}/g \; Qv$ en considérant la quantité de mouvement par unité de temps, soit $\bar{\omega}/g \; Sv^2$, en désignant par S la section du corps normalement à la direction de la vitesse moyenne V (S s'appelle le maître-couple).

En définitive, la poussée exercée sur le corps immergé varie comme la valeur moyenne du carré de v, soit :

$$\int_0^T v^2\,dt = \int_0^T (V + \Delta V)^2\,dt = \int_0^T V^2\,dt + \int_0^T \overline{\Delta V}^2\,dt =$$

$$= V^2 T + \int_0^T \overline{\Delta V}^2\,dt$$

alors que dans le premier cas (corps se déplaçant à une vitesse V dans un liquide immobile), la résistance F_1 était proportionnelle à V^2 c'est-à-dire au seul terme $V^2 T$.

VI.3.3. Echange latéral de quantités de mouvement — Analogie de Bakhmeteff

L'expérience montre qu'en régime turbulent l'énergie dissipée est beaucoup plus considérable que celle qui résulterait de la seule viscosité par application de la formule de Newton.

Boussinesq a expliqué l'accroissement des tensions tangentielles par l'échange continuel de particules fluides résultant de la turbulence et provoquant une variation de la quantité de mouvement et, par suite, une résistance supplémentaire à l'écoulement.

Pour comprendre comment dans le régime turbulent un effort tangentiel peut s'exercer entre deux couches en mouvement *par un simple échange latéral de quantités de mouvement,* indépendamment de ce qui peut être dû au contact mutuel et au glissement relatif, Bakhmeteff a donné l'image matérielle suivante (fig. VI.3.3).

Considérons deux corps A et B éloignés l'un de l'autre et se mouvant chacun d'un mouvement de translation parallèlement à OX et dans le même sens.

Soient u_A et u_B leurs vitesses respectives.

Supposons :

$$u_A > u_B$$

et désignons par u' leur différence :

$$u' = u_A - u_B$$

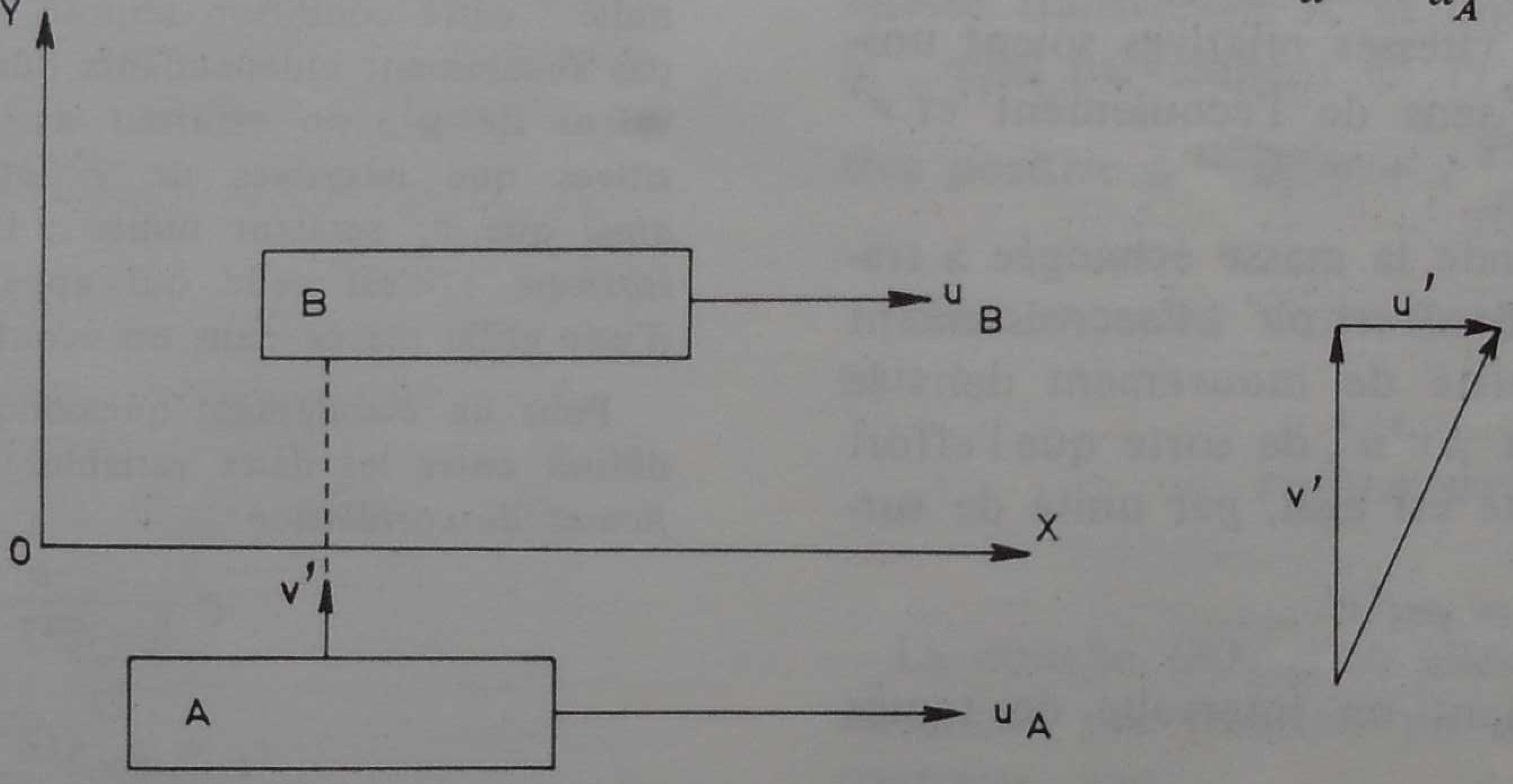


Fig. VI.3.3 — Analogie de Bakhmeteff

Supposons qu'au moment où A passe en face de B une mitrailleuse fixée sur A envoie sur B une rafale de balles parallèlement à OY, perpendiculaire à OX, et à une cadence régulière correspondant, par seconde, à une masse m de projectiles. Soit v' la vitesse de ces projectiles par rapport à A (c'est-à-dire suivant OY) au sortir de la mitrailleuse.

Supposons enfin que chaque projectile pénètre dans le corps B et y demeure.

Chacun d'eux a par rapport à B et suivant OX une vitesse u' de sorte que la rafale augmentera, par seconde, la quantité de mouvement de B, suivant OX, de $m\,u'$ et, par suite, d'après le théorème de la projection de la quantité de mouvement, le corps A exercera sur le corps B, sans le toucher, simplement par l'intermédiaire des projectiles, un effort tangentiel

$$F = m\,u'$$

tendant à accélérer la vitesse de B.

Si d'ailleurs on construit le diagramme des vitesses relatives pour un projectile, on voit clairement que chaque balle frappe le corps B sous un angle tel qu'il en résulte une accélération pour ce corps.

Inversement, si on avait supposé $u_A < u_B$ on aurait été amené à conclure que la rafale de balles issues de A freinait le corps B.

Ce même raisonnement peut s'appliquer à deux filets liquides adjacents dans une masse liquide en mouvement en régime turbulent.

Les balles sont remplacées par les particules liquides qui, animées de mouvements transversaux désordonnés, passent d'un filet à l'autre en modifiant à chaque instant la quantité de mouvement de chacun d'eux.

Il en résulte donc qu'en plus de la tension tangentielle due au frottement des deux filets et qui est proportionnelle à $\mu \dfrac{du}{dy}$, il existe une autre tension tangentielle due à cet échange de quantités de mouvement.

On peut la calculer en faisant l'hypothèse simplificatrice suivante.

Soient deux couches du liquide en mouvement séparées par une surface S et supposons que pour toutes les molécules en contact de part et d'autre de cette surface S, les vitesses relatives soient uniformément u' dans le sens de l'écoulement et v' dans le sens transversal.

Pendant chaque seconde la masse échangée à travers l'unité de surface de S est $\rho v'$; l'accroissement correspondant de quantité de mouvement dans le sens de l'écoulement est $\rho v' u'$, de sorte que l'effort tangentiel qui en résulte est égal, par unité de surface à :

$$\tau_1 = \rho u' v'$$

et, en moyenne, pendant un intervalle de temps fini :

$$\boxed{\tau_1 = \rho \overline{u'v'}}$$

$\overline{u'v'}$ représentant la moyenne du produit des fluctuations de la vitesse instantanée dans le sens longitudinal (u') et dans le sens transversal (v').

Une telle dissipation d'énergie résultant d'un échange latéral de quantités de mouvement existe toujours dans l'écoulement d'un liquide réel en régime laminaire ou turbulent mais, dans le cas du régime laminaire, les particules mises en jeu sont les molécules du fluide entraînant un échange de quantités de mouvement à l'échelle moléculaire ; dans le cas d'un régime turbulent, à ce processus à l'échelle moléculaire se superpose un échange de quantités de mouvement entre particules fluides de volume plus ou moins important c'est-à-dire à une échelle beaucoup plus grande et les phénomènes d'origine visqueuse sont alors masqués par ceux d'origine turbulente.

VI.3.4. Etude statistique de la turbulence

La tension de turbulence $\tau_1 = \rho \overline{u'v'}$ dépend des fluctuations de vitesse u' et v' qui varient dans l'espace et dans le temps et sont donc des variables aléatoires. La tension τ_1 n'existe donc que si la covariance des deux variables u et v c'est-à-dire la moyenne $\overline{u'v'}$ n'est pas nulle ; cette condition impose donc que u' et v' ne soient pas absolument indépendants l'un de l'autre ; sinon, à toute valeur de u', on pourrait associer autant des valeurs positives que négatives de v' et la valeur moyenne $\overline{u'v'}$ ainsi que τ_1 seraient nulles ; la turbulence est alors dite *isotrope* ; c'est celle qui apparaît, par exemple, à l'aval d'une grille placée dans un écoulement.

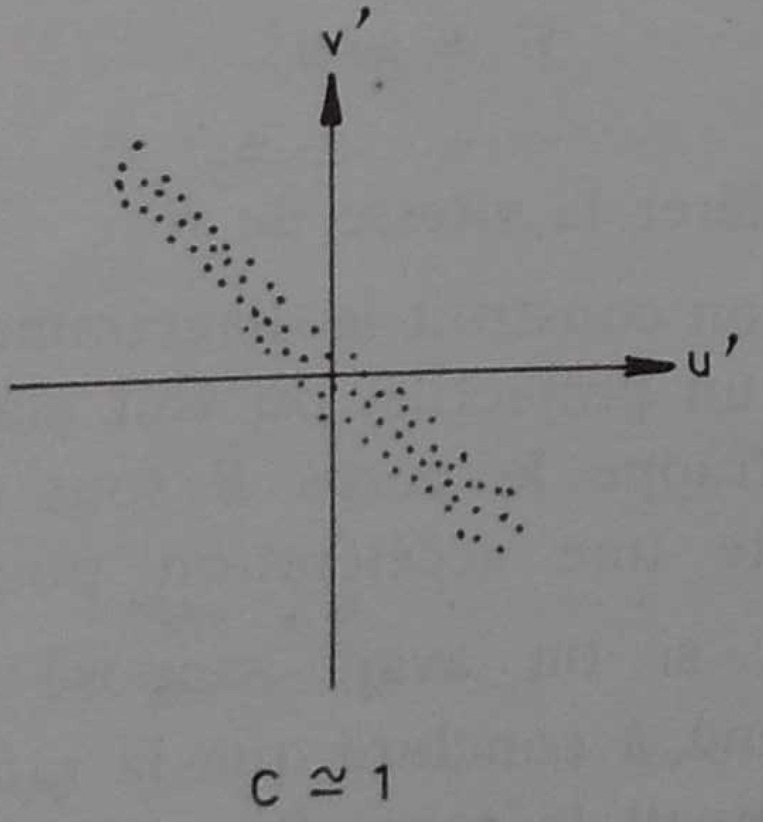
Pour un écoulement quelconque en régime turbulent, on définit entre les deux variables aléatoires u' et v' un *coefficient de corrélation*

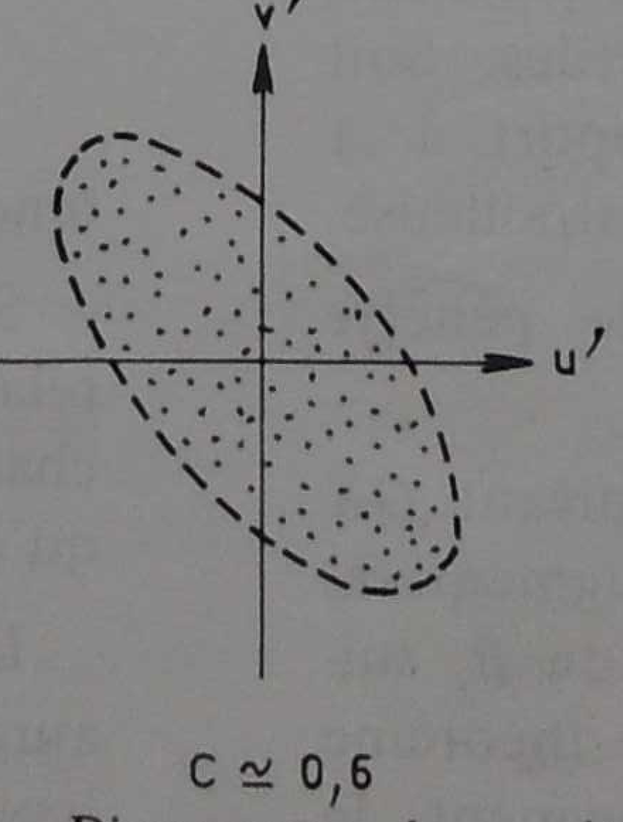
$$C = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\ \sqrt{\overline{v'^2}}}$$

$$\tau_1 = \rho C \sqrt{\overline{u'^2}}\ \sqrt{\overline{v'^2}}$$

Si entre u' et v' existe une relation linéaire, par exemple $u' = kv'$, on trouve $C = 1$. Si aucune relation n'existe entre u' et v' on a $C = 0$; la tension tangentielle de turbulence est alors nulle.

Entre ces deux valeurs extrêmes, C peut prendre toutes les valeurs intermédiaires et la corrélation entre u' et v'





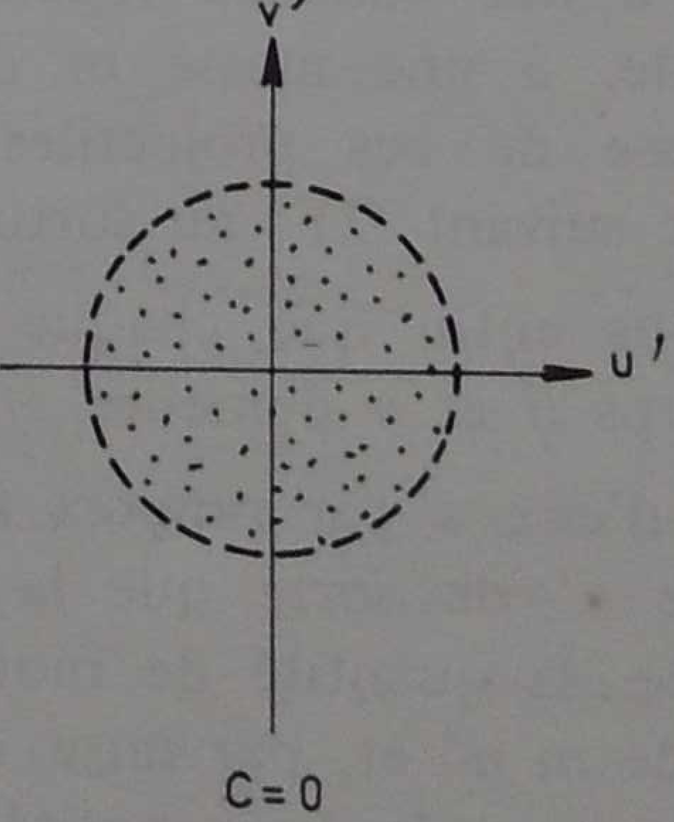


Fig. VI.3.4 – Diagrammes de corrélation

ainsi que la valeur de τ_1 sont d'autant plus grandes que C est plus proche de l'unité.

Certains anémomètres à fil chaud (voir § VI.3.7) permettent de mesurer les quantités C, $\sqrt{\overline{u'^2}}$ et $\sqrt{\overline{v'^2}}$ et, par suite, de déterminer τ_1.

La figure VI.3.4 représente, par exemple, divers diagrammes de corrélation des fluctuations u' et v' pour différentes valeurs du coefficient de corrélation C.

VI.3.5. Longueur de mélange – Equation de Prandtl et Von Karman

On peut appliquer le même raisonnement à un écoulement continu en régime turbulent dans lequel la vitesse moyenne $\bar{u}$ est distribuée suivant une certaine loi $\bar{u}(y)$, y représentant la distance à la paroi (fig. VI.3.5).

A travers un plan OO_1 parallèle à la direction générale de l'écoulement, existe un échange transversal de particules avec des vitesses transversales $\pm v'$. Il s'agit de relier v' à la vitesse longitudinale différentielle u' que le mouvement d'agitation va transférer à la couche OO_1.

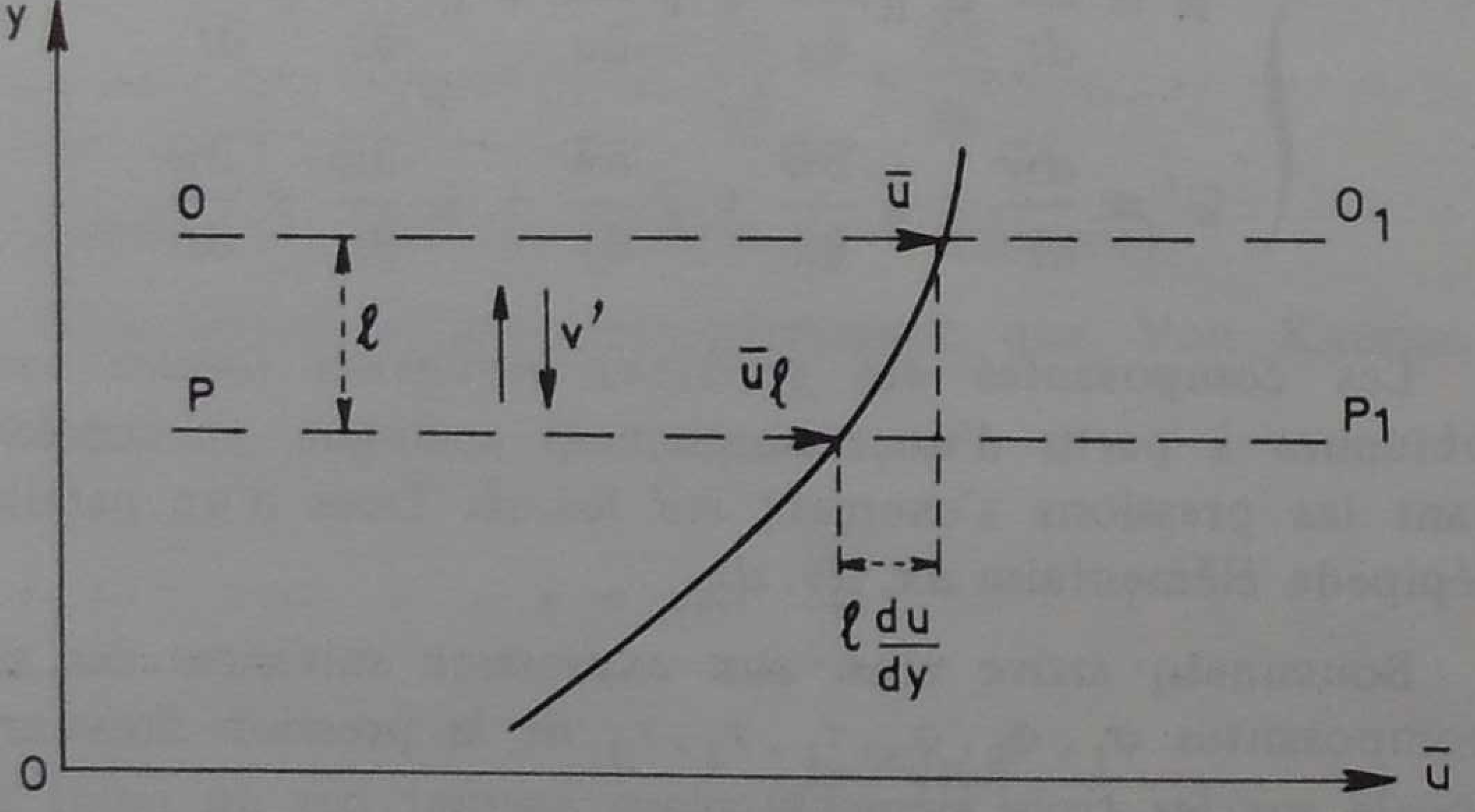


Fig. VI.3.5 – Longueur de mélange

En 1925, Prandtl et Von Karman définissent dans ce but la *longueur de mélange* l qui est la distance du plan OO_1 à un autre plan PP_1 telle qu'une particule soumise à l'impulsion transversale v' et partant du plan PP_1 puisse atteindre la couche OO_1 et participer ensuite au mouvement de cette couche OO_1. Au-delà de la distance l, les particules issues de PP_1 n'ont plus d'action sur le mouvement du plan OO_1. Cette hypothèse de la longueur de mélange est analogue à celle que les physiciens appellent l'hypothèse du libre parcours moyen des molécules dans la théorie cinétique des gaz.

Examinons l'*influence sur la couche* OO_1 *de ce double courant de particules* : celles qui proviennent de PP_1 et qui atteignent OO_1 et celles qui quittent OO_1 pour atteindre PP_1 :

a) *Les particules provenant de* PP_1 situé à la distance l ont une vitesse v' dirigée vers OO_1 et comme leur composante u' de fluctuation est nulle en moyenne, elles parviennent en OO_1 avec leur vitesse moyenne $\bar{u}_l$, c'est-à-dire une vitesse relative négative $\bar{u}_l - \bar{u} = - l \dfrac{d\bar{u}}{dy}$.

Elles exercent donc sur OO_1 un effet retardateur :

$$\tau_1 = - \rho v' l \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad [VI.3.5.1]$$

b) *Les particules quittant* OO_1 *vers* PP_1 ont une vitesse transversale v' et une composante moyenne $\bar{u}$; elles parviennent en PP_1 avec une vitesse relative positive $\bar{u} - \bar{u}_l = + l \dfrac{d\bar{u}}{dy}$.

Elles exercent donc sur PP_1 un effort accélérateur :

$$\tau_1 = + \rho v' l \frac{d\bar{u}}{dy}$$

La couche OO_1 d'où elles sont parties subit évidemment par réaction un effort égal et de signe contraire, soit

$$\tau_1 = - \rho v' l \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad [VI.3.5.2]$$

L'identité des équations [*VI.3.5.1*] et [*VI.3.5.2*] montre que cette équation est donc valable pour les deux types de particules.

La différence des vitesses longitudinales des deux plans OO_1 et PP_1 est alors :

$$\bar{u} - \bar{u}_l = u' = l \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Pour relier u' à v' on applique le principe de continuité ou de conservation de la masse à un volume élémentaire du fluide ; en somme, s'agissant d'un fluide incompressible, les variations de

flux dans la direction longitudinale (u') et dans la direction transversale (v') devant être égales, il faut bien que u' et v' soient du même ordre de grandeur.

Cela revient à dire qu'il existe entre u' et v' une corrélation statistique régulière, ce qui explique que le produit $\overline{u'v'}$ (covariance des variables aléatoires u et v) soit, en moyenne, constant en fonction du temps.

Soit $\tau = \rho\overline{u'v'}$ la valeur moyenne qui en résulte pour la tension tangentielle due à la turbulence.

Von Karman admet donc que la composante transversale v' de la vitesse instantanée qui est provoquée par l'existence du gradient $l \dfrac{d\overline{u}}{dy}$ a la même forme que lui, c'est-à-dire que v' est aussi proportionnel à $l \dfrac{d\overline{u}}{dy}$; par suite, on peut écrire

$$\tau_1 = -\rho v' l \frac{d\overline{u}}{dy} = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

le facteur de proportionnalité étant inclus dans le paramètre l (longueur de mélange).

Cette expression

$$\tau_1 = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2$$

constitue l'*équation de Prandtl.*

Pour aller plus loin, il serait nécessaire de relier l à l'écoulement moyen, seul intéressant dans la pratique car seul défini à partir des mesures expérimentales.

On peut le faire au moyen de certaines hypothèses dont la validité est appuyée sur l'expérience.

C'est en particulier ce qu'a fait Prandtl en supposant qu'au voisinage de la paroi la longueur de mélange est proportionnelle à la distance à la paroi. Il a ainsi déterminé analytiquement des courbes de répartition des vitesses au voisinage de la paroi ; la forme de ces courbes a été confirmée par l'expérience. Nous retrouverons ces résultats à propos de l'écoulement dans les canalisations (Chapitre XI).

VI.3.6. Coefficient de turbulence

Boussinesq distingue deux parties dans la vitesse instantanée en chaque point en régime turbulent :

– l'une correspondant à la *vitesse moyenne de translation* de composantes, $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$,

– l'autre correspondant à la *vitesse d'agitation locale* de composantes u', v', w'.

En désignant par T la période moyenne de l'agitation on doit avoir, comme nous l'avons indiqué plus haut :

$$\frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T v'\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T w'\,dt = 0$$

Boussinesq en déduit que le mouvement moyen ($\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$) et le mouvement d'agitation locale (u', v', w') satisfont séparément à l'équation de continuité ; on peut en quelque sorte les concevoir indépendamment l'un de l'autre ; le mouvement instantané résulte de la superposition de ces deux mouvements.

L'*accélération moyenne locale* en un point s'exprime seulement en fonction des vitesses moyennes locales ($\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$) et de leurs dérivées ; en effet, d'une part les termes représentant la moyenne de l'accélération d'agitation sont nuls, d'autre part, ceux qui résultent du produit d'une vitesse moyenne ($\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$) par une dérivée de vitesse d'agitation (du'/dt, dv'/dt, dw'/dt) ou inversement, sont également nuls en raison de l'indépendance des deux mouvements.

Les valeurs moyennes des composantes de l'accélération moyenne locale sont donc :

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{u}' &= \frac{d\overline{u}}{dt} = \overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial t}\\
\overline{v}' &= \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial\overline{v}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t}\\
\overline{w}' &= \frac{d\overline{w}}{dt} = \overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial t}
\end{aligned}\right.$$

Les composantes des *pressions moyennes locales* sont obtenues à partir d'un raisonnement analogue, en considérant les pressions s'exerçant sur les six faces d'un parallélépipède élémentaire dx, dy, dz.

Boussinesq arrive ainsi aux expression suivantes des six composantes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ de la pression moyenne locale sur les trois éléments plans passant par un point de la masse liquide :

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_1 &= -p + 2\epsilon\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\\
\sigma_2 &= -p + 2\epsilon\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}\\
\sigma_3 &= -p + 2\epsilon\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\tau_1 &= \epsilon\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial y}\right)\\
\tau_2 &= \epsilon\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)\\
\tau_3 &= \epsilon\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right.$$

Dans ces expressions :

– $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ sont les composantes de la pression sur les trois axes de coordonnées telles qu'elles ont été définies en hydrodynamique,

– p représente la pression statique au point correspondant, c'est-à-dire ce que serait la pression si le liquide était au repos,

– ϵ est un coefficient introduit par Boussinesq et appelé "coefficient de viscosité fictive de turbulence" ou "coefficient d'échange des quantités de mouvement" ou, plus simplement, "*coefficient de turbulence*". On retrouve ce coefficient dans les problèmes de suspension (par turbulence) de sable dans l'eau et dans l'étude de la convection forcée de la chaleur où ϵ désigne alors un coefficient d'échange de quantité de chaleur.

On peut mettre également en évidence le *coefficient de turbulence* ϵ à partir de la notion de *longueur de mélange* de Prandtl et Von Karman.

La résistance (perte de charge) due à la turbulence résulte en effet du brassage dû à la pénétration mutuelle des filets liquides contigüs animés de vitesses différentes.

Si l est la profondeur moyenne de pénétration, c'est-à-dire la longueur de mélange de Prandtl – Von Karman, et $\overline{v}'$ la moyenne des valeurs absolues des fluctuations du vecteur vitesse normale au courant principal, la grandeur du phénomène de brassage (ou "Austausch" suivant le terme de Prandtl) est proportionnelle au produit $l\overline{v}'$.

Dans l'expression de l'effort tangentiel apparaît alors, à la place du coefficient de viscosité $\mu \left(\tau = \mu \dfrac{du}{dy}\right)$, le terme $\rho\beta l\overline{v}'$ où β est un coefficient sans dimension et on obtient :

$$\tau_1 = \rho\beta l\overline{v}' \frac{du}{dy} = \epsilon \frac{du}{dy}$$

en posant $\epsilon = \rho\beta l\overline{v}'$ (coefficient de turbulence).

Nous avons indiqué précédemment que Von Karman avait posé $v' = l\dfrac{du}{dy}$; il en résulte que

$$\epsilon = \rho\beta l^2 \frac{du}{dy}$$

et $$\tau_1 = \epsilon \frac{du}{dy} = \rho\beta l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

analogue à l'équation de Prandtl :

$$\tau_1 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

En comparant les expressions :

$$\tau_1 = \epsilon \frac{du}{dy}$$

et $$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{(formule de Newton)}$$

on constate que *le coefficient de turbulence* ϵ de Boussinesq est la réplique du coefficient de viscosité dynamique μ.

ϵ est égal à μ lorsque la dissipation d'énergie due à la turbulence est négligeable vis à vis de celle due à la viscosité, c'est-à-dire dans le cas d'un écoulement en régime laminaire à faible nombre de Reynolds. Dans ce cas ($\epsilon = \mu$) les expressions de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ sont identiques à celles déduites des équations de Navier.

Lorsque le régime est turbulent, l'influence de la turbulence augmente d'importance vis à vis de celle due à la viscosité et le coefficient de turbulence ϵ prend alors une valeur très supérieure au coefficient de viscosité μ (fréquemment de l'ordre de $10^3\mu$). La valeur de ϵ dépend principalement du degré de turbulence c'est-à-dire du nombre de Reynolds.

Dans ces conditions, en écrivant les équations indéfinies du mouvement suivant le même processus que celui que nous avons utilisé pour établir les équations de Navier-Stokes et en prenant la valeur moyenne des deux membres, Boussinesq arrive au système suivant :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial\tau_3}{\partial y} + \frac{\partial\tau_2}{\partial z}\right) + X &= \overline{u}' \\
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial\tau_1}{\partial z} + \frac{\partial\tau_3}{\partial x}\right) + Y &= \overline{v}' \\
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial\tau_2}{\partial x} + \frac{\partial\tau_1}{\partial y}\right) + Z &= \overline{w}'
\end{aligned}\right\} \quad [VI.3.6]$$

dans lequel :

– $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ sont les composantes moyennes de la pression définies précédemment,

– $\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}'$ sont les composantes de l'accélération moyenne locale définies également plus haut,

– X, Y, Z sont les composantes des forces extérieures par unité de masse du liquide.

Lorsque la dissipation d'énergie due à la turbulence devient négligeable vis à vis de celle due à la viscosité, le coefficient ϵ devient égal à μ comme nous l'avons indiqué et il est facile de constater que les trois équations précédentes deviennent les équations de Navier-Stokes établies précédemment (cf. § V.2.2.2).

Si les frottements sont négligeables (fluides peu visqueux donc $\epsilon \simeq 0$, ou mouvement conservatif ou à potentiel des vitesses c'est-à-dire à énergie constante), on a :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.$$

Le système [VI.3.6] se réduit alors à :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{d\overline{u}}{dt}$$

ou :

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,.\,p = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{\gamma} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{d\bar{u}}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{d\bar{v}}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{d\bar{w}}{dt} \end{cases}$$

Ce sont les *équations d'Euler* pour les liquides parfaits.

On peut donc énoncer la *conclusion* suivante, très importante du point de vue des applications :

Lorsque les frottements sont négligeables, les *équations d'Euler des liquides parfaits* s'appliquent aux mouvements des liquides réels en régime turbulent, à condition d'y introduire les *valeurs moyennes locales de la vitesse et de la pression* (c'est-à-dire celles qui définissent le mouvement moyen et qui sont données par les appareils de mesure) au lieu des valeurs vraies et instantanées.

VI.3.7. Etude expérimentale de la turbulence. L'anémomètre à fil chaud

Les appareils usuels de mesure des vitesses (moulinet, tube de Pitot) ne peuvent être utilisés pour mesurer les fluctuations instantanées de la vitesse en raison de leur inertie spécifique.

On fait appel, pour les liquides et pour les gaz, à des appareils de très faible temps de réponse ; le plus employé est l'*anémomètre à fil chaud.*

Un fil de platine ou de tungstène de quelques millièmes de mm de diamètre et de quelques mm de longueur est chauffé par un courant électrique et placé dans le courant du fluide étudié (liquide ou gaz). La température d'équilibre prise par le fil et, par suite, sa résistance électrique, sont fonction de la vitesse du courant ; en raison du très faible diamètre du fil par rapport à sa longueur on peut négliger les échanges thermiques par conductibilité aux extrémités et si l'axe du fil est perpendiculaire à la vitesse moyenne du fluide, on peut admettre que l'influence de cette vitesse sur la résistance électrique du fil est donnée par la *loi de King* :

$$R = \sqrt{A + B\sqrt{V}}$$

avec

R = résistance du fil ; V = vitesse du fluide ;

A et B sont des coefficients dépendant des caractéristiques physiques du fil et du nombre de Reynolds de l'écoulement.

La mesure de R est obtenue en intercalant le fil dans un pont de Wheatstone, sa température étant portée à environ 500 °C.

La tension de déséquilibre du pont est une mesure de V.

Pour l'étude de la turbulence, en raison des variations très rapides de la vitesse, au lieu d'alimenter le fil par un courant de chauffage d'intensité constante, on maintient constante la température, c'est-à-dire la résistance du fil, en faisant varier l'intensité du courant de chauffage ; ce courant est asservi automatiquement à la résistance du fil, de manière à maintenir constamment le pont en équilibre.

On peut ainsi mesurer des fluctuations de vitesse dont la fréquence atteint 50.000 cycles par seconde.

En disposant deux fils chauds perpendiculaires entre eux, les indications qu'ils donnent sont identiques lorsque la vitesse est dirigée suivant leur bissectrice ; tout écart par rapport à cette direction se traduit par un déséquilibre qui mesure l'angle de rotation de la vitesse ; ces appareils sont des *anémoclinomètres.*

En procédant de même avec un trièdre trirectangle et en analysant au calculateur électronique les résultats des trois fils, on peut déterminer, dans l'espace à trois dimensions, l'orientation et les trois composantes du vecteur vitesse.

Ce dispositif expérimental est très utilisé pour l'étude de la turbulence ; il permet de déterminer les caractéristiques statistiques de la turbulence (coefficient de corrélation) et de vérifier les lois de répartition des vitesses indiquées précédemment, en particulier la loi : $\tau_1 = \rho\overline{u'v'}$.

VI.3.8. Influence de la turbulence sur le degré d'inégalité des vitesses dans une section transversale

Pour un écoulement en régime laminaire, par exemple dans un tuyau, le profil des vitesses dans une section transversale et dans un plan longitudinal passant par l'axe du tuyau a la forme parabolique que nous avons précisée (fig. VI.3.8.1).

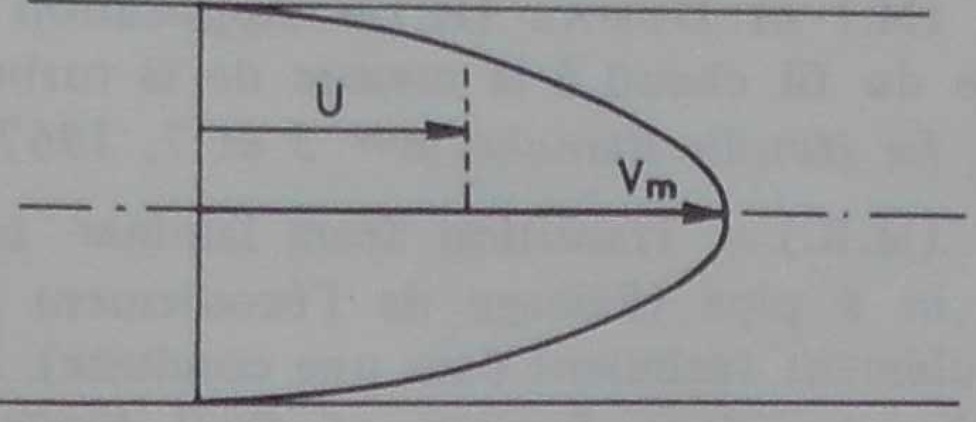


Fig VI.3.8.1 – Régime laminaire $\left(\frac{V_m}{U} = 2\right)$.

En régime turbulent, les fluctuations transversales des vitesses tendent à égaliser les vitesses beaucoup plus rapidement et le profil prend une forme beaucoup plus aplatie (fig. VI.3.8.2).

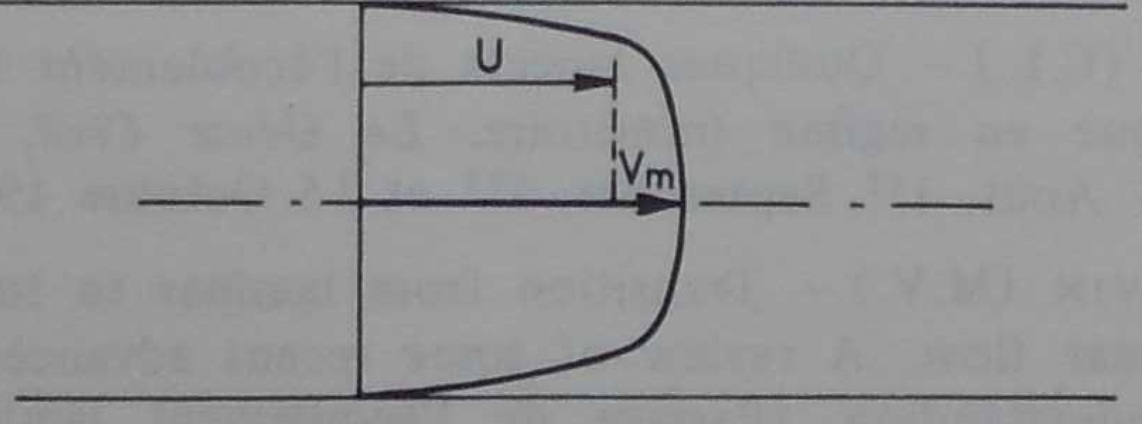


Fig. VI.3.8.2 – Régime turbulent $\left(\frac{V_m}{U} \simeq 1{,}2\right)$.

En particulier, dans le cas d'un tube de section droite circulaire, le rapport de la vitesse maximale (sur l'axe de la section) à la vitesse moyenne qui est égal à 2 en régime laminaire n'est plus que de l'ordre de 1,2 en régime turbulent.

Nous reviendrons sur la forme de ce profil à l'occasion de l'étude de la couche-limite (cf § VII.2.2).

VI.3.9. Conséquences secondaires de la turbulence

La turbulence n'affecte pas seulement les éléments liquides eux-mêmes mais les propriétés que ces éléments comportent.

Si par exemple chaque élément liquide est chargé de *chaleur,* la turbulence provoquera un *transport latéral de chaleur.* Ainsi s'explique le fait suivant : si un tuyau métallique (parois conductrices de la chaleur) est entouré d'une enveloppe de fluide chaud (air ou eau), le liquide qui circule dans le tuyau évacue les calories plus rapidement s'il coule vite (régime turbulent) que s'il coule lentement (régime laminaire) ce qui peut paraître paradoxal puisqu'à faible vitesse le liquide du tuyau séjourne plus lontemps dans la zone chaude.

Si des particules solides sont entraînées en suspension dans un courant turbulent, elles vont subir l'action des composantes transversales des vitesses et la turbulence s'opposera à la pesanteur pour *maintenir les particules en suspension.* Lorsque ces deux actions s'équilibrent, on observe un régime permanent de concentration stable dans toute la masse en écoulement ; ce régime est caractérisé par *une courbe de variation de la concentration* n en fonction de la distance au fond h (fig. VI.3.9.1).

Exprimons les concentrations en poids de particules solides par unité de volume de la suspension et désignons respectivement par n_0 et n la concentration au niveau du fond et à une distance h du fond.

Soient U la vitesse limite de chute des particules dans le liquide supposé au repos, telle qu'elle résulte de la loi de Stokes (cf. § VII.3.6.2), et ϵ le coefficient de turbulence à la distance h du fond.

Considérons l'unité de surface du plan horizontal OO' distant de h du fond.

Sous l'influence de la pesanteur le poids de particules traversant cette surface unité de haut en bas pendant l'unité de temps est Un.

Sous l'influence de la turbulence, un certain poids de particules va traverser cette surface unité de bas en haut

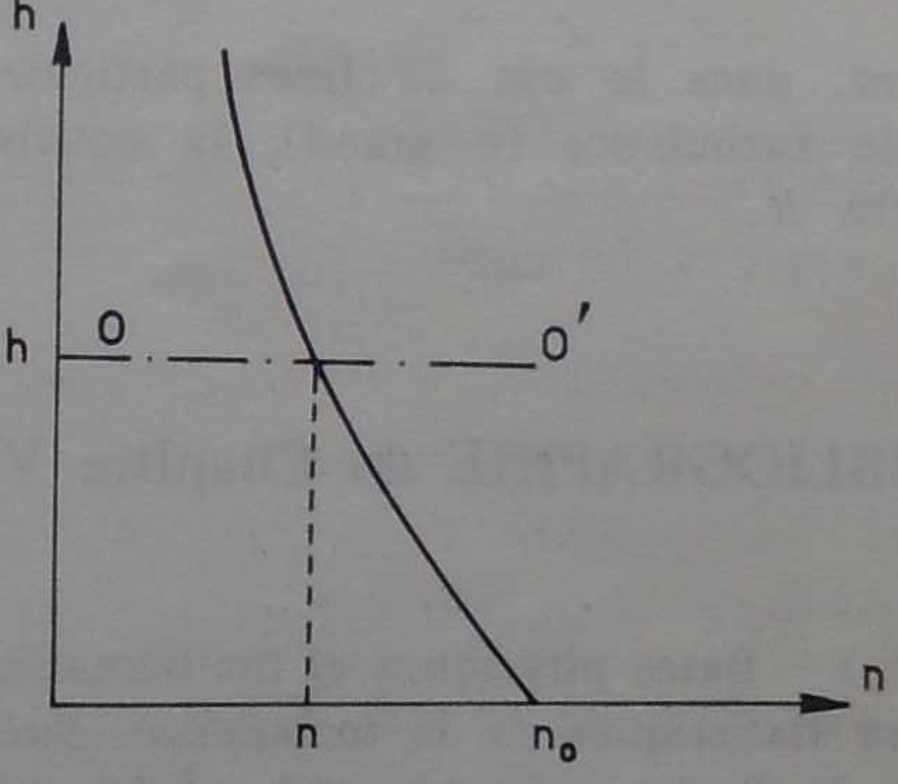


Fig. VI.3.9.1

pendant le même temps ; cette influence va dépendre de la pente de la coure $n(h)$, soit dn/dh, et de l'intensité de la turbulence exprimée par le coefficient de turbulence ϵ.

Le poids de particules traversant la surface unité de bas en haut pendant l'unité de temps pourra donc s'exprimer par

$$\epsilon \frac{dn}{dh}$$

En régime permanent de concentration stable, ces deux causes s'équilibrent et on peut écrire :

$$Un = -\epsilon \frac{dn}{dh} \qquad [VI.3.9]$$

En intégrant cette équation, on obtiendra l'équation $h(n)$ de la courbe.

Si nous supposons que ϵ ne dépend pas de la profondeur (c'est-à-dire de n), l'intégration est immédiate :

$$\frac{U}{\epsilon} dh = -\frac{dn}{n}$$

ce qui conduit à

$$n = n_0 \, e^{-\frac{U}{\epsilon} h}$$

L'équation différentielle [*VI.3.9*] montre que si les particules sont relativement grosses, la vitesse-limite de la chute U sera grande et dn/dh sera grand : courbe A (fig. VI.3.9.2).

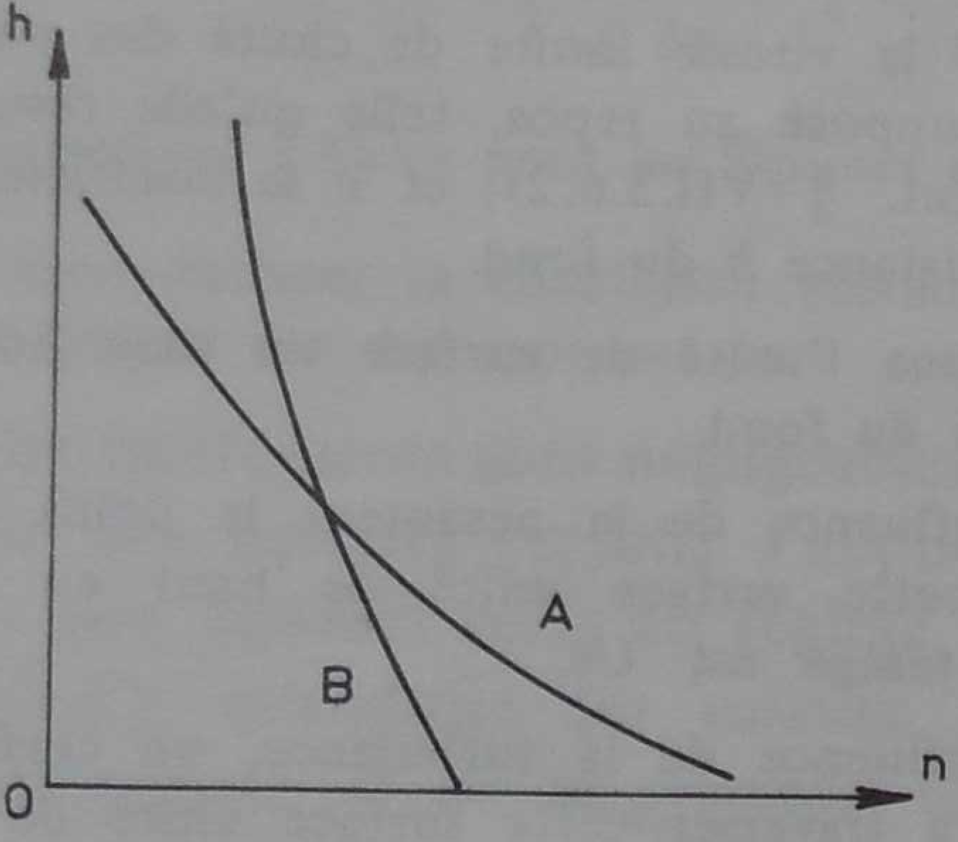


Fig. VI.3.9.2

Inversement, dans le cas de fines particules (U petit) ou de grande turbulence (ϵ grand), la courbe sera plus raide : courbe B.

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre VI

BAATARD (F.).– Bases physiques et mathématiques des mécaniques statistiques de la turbulence. *Bulletin technique de la Suisse romande*, 87, n° 23, 18 Novembre 1961.

BOUVARD (M.) et DUMAS (H.).– Application de la méthode du fil chaud à la mesure de la turbulence dans l'eau. *La Houille Blanche*, nos 3 et 7, 1967.

CARSTENS (M.R.).– Transition from laminar to turbulent flow in a pipe (Passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent dans une conduite). *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, HY6, Décembre 1957.

COANTIC (M.) et RESCH (F.).– Etude sur le fil chaud et le film chaud dans l'eau. *La Houille Blanche*, n° 2, 1969.

KESTLICHER (D.).– L'écoulement des liquides non-newtoniens. *Revue Universelle des Mines*, Liège, n° 8, Août 1958.

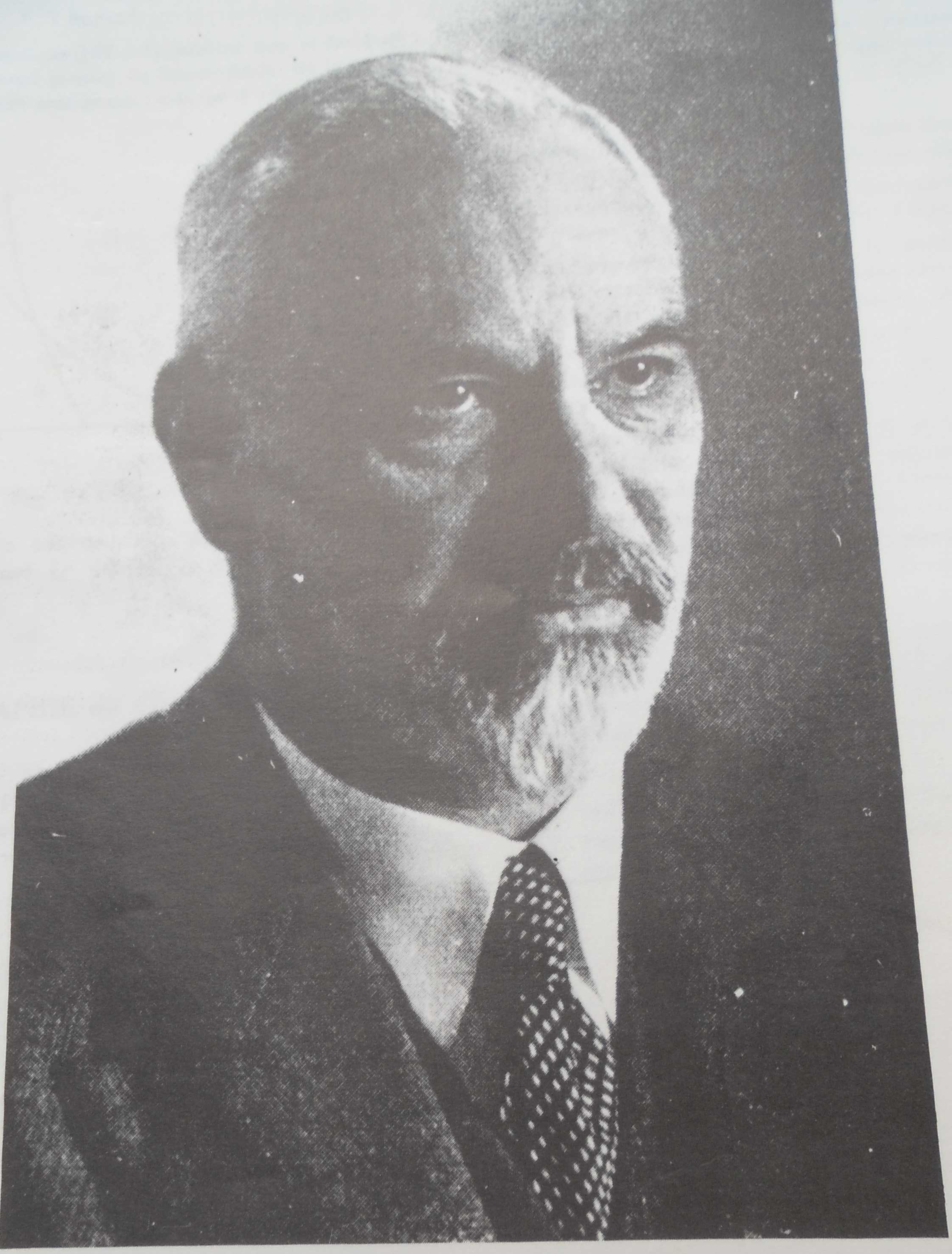
LHERMITTE (P.).– Influence de la turbulence sur la vitesse de chute des particules solides dans les fluides pesants. *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 3, Mai-Juin 1962.

MEYER (C.L.).– Quelques aspects de l'écoulement hydraulique en régime transitoire. *Le Génie Civil*, 1er et 15 Août, 1er Septembre, 1er et 15 Octobre 1959.

MORKOVIN (M.V.).– Transition from laminar to turbulent shear flow. A review of some recent advances in its understanding. (Passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent. Examen des progrès récents dans la connaissance de ce phénomène). *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, n° 5, Juillet 1958.

SIBULKIN (M.).– Experiment on transition from turbulent to laminar pipe flow. (Expérience sur le passage du régime turbulent au régime laminaire dans un tuyau). *Bulletin of American Physical Society*, n° 4, 1959.

ZAGUSTIN (A.) et ZAGUSTIN (K.).– Analytical solution for turbulent flow in pipes. (Solution analytique pour les régimes d'écoulement turbulent en conduites). *La Houille Blanche*, n° 2, 1969.



Ludwig PRANDTL (1875-1953)

La Houille Blanche

CHAPITRE VII

LE COURANT LIQUIDE

En hydrodynamique nous avons considéré d'abord la trajectoire immatérielle d'une molécule liquide, puis le filet liquide, ensemble de trajectoires s'écartant très peu les unes des autres, la section transversale de cet ensemble étant encore infiniment petite.

Pour étudier des cas concrets il va nous falloir passer d'une section transversale infiniment petite à une section transversale finie, pour cela il nous suffira d'envisager un ensemble de filets liquides juxtaposés.

Or il se trouve que dans la plupart des problèmes rencontrés pratiquement en hydraulique le mouvement permanent s'effectue par filets liquides juxtaposés : c'est par exemple ce qui se passe dans les tuyaux rectilignes ou peu courbés et aussi dans les canaux.

Nous appellerons donc *courant liquide* ou *veine liquide, la réunion de plusieurs filets juxtaposés. Comme le filet liquide ne peut se concevoir qu'avec le mouvement permanent, le courant liquide sera toujours pris dans une masse liquide en régime permanent.*

VII.1. RÉGIME, DÉBIT, VITESSE MOYENNE

VII.1.1. Régime

Puisque nous avons pour objectif l'étude de l'écoulement d'un liquide dans les différents cas usuels, le régime auquel nous aurons affaire sera, sauf indication contraire, le régime *turbulent*.

VII.1.2. Débit

Puisque le débit de chacun des filets qui constituent le courant liquide est constant le long de ce filet, *le débit d'un courant liquide sera constant tout le long de ce courant.* Proposons-nous d'en chercher l'expression.

Compte-tenu des propriétés du régime turbulent, la vitesse V en un point d'une section droite Ω d'un courant liquide est la valeur moyenne, en un temps très court, des différentes vitesses des molécules qui se succèdent en ce point. Nous ne reviendrons plus sur cette remarque et nous appellerons toujours désormais cette vitesse *"vitesse en un point à l'instant t"*.

Dans toute l'étendue Ω de la section droite considérée, cette vitesse V varie.

A travers chaque élément de section $d\omega$, le débit élémentaire est :

$$dQ = V\,d\omega$$

Donc le débit du courant s'exprime par :

$$Q = \int_\Omega V\,d\omega$$

VII.1.3. Vitesse moyenne — Coefficients η, α et β

Dans un but de simplification il pourra être commode, dans certains cas, de remplacer les vitesses vraies des différentes molécules dans une section transversale par la vitesse moyenne qui aura pour valeur :

$$U = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega V\,d\omega$$

ou encore :

$$U = \frac{Q}{\Omega}$$

Mais avant de faire cette substitution, il y a lieu de rechercher quelle erreur elle peut entraîner.

En particulier, le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de la quantité de mouvement de la mécanique générale dont les applications en hydraulique sont très fréquentes et très fructueuses, font intervenir la vitesse. Il est donc indispensable de comparer successivement la quantité de mouvement et l'énergie cinétique réelles d'un courant liquide de section Ω à ce qu'elles seraient si toutes les vitesses dans la section considérée étaient égales à la vitesse moyenne U.

VII.1.3.1. *Quantité de mouvement*

La quantité élémentaire de mouvement de la masse liquide qui pendant l'intervalle de temps dt traverse l'élément $d\omega$ de la surface Ω avec la vitesse V, est :

$$\rho \, dQ \, dt \, V = \rho \, V^2 \, d\omega \, dt$$

et la quantité de mouvement de la masse liquide qui traverse toute la section Ω pendant le temps dt est :

$$\int_\Omega \rho \, V^2 \, d\omega \, dt = \rho \, dt \int_\Omega V^2 \, d\omega$$

La quantité de mouvement fictive serait pour toute la section :

$$\rho \, Q \, dt \, U$$

Or $Q = \Omega U$, ce qui donne :

$$\rho \, dt \, U^2 \Omega$$

Nous avons donc à comparer les deux expressions :

$$\int_\Omega V^2 \, d\omega$$

pour la valeur *réelle* et

$$U^2 \Omega$$

pour la valeur *fictive*.

Désignons par v l'excès, positif, négatif ou nul, de la valeur vraie V de la vitesse d'un filet traversant la section Ω sur la valeur moyenne U.

On a donc

$$V = U + v$$

et, en élevant au carré :

$$V^2 = U^2 + 2\,Uv + v^2$$

Multiplions les deux membres par $d\omega$ et intégrons dans toute la section :

$$\int_\Omega V^2 d\omega = U^2 \Omega + 2\,U \int_\Omega v \, d\omega + \int_\Omega v^2 d\omega$$

Mais, par définition de la vitesse moyenne, la somme des écarts doit être nulle, soit

$$\int_\Omega v \, d\omega = 0$$

donc :

$$\int_\Omega V^2 d\omega = U^2 \Omega + \int_\Omega v^2 d\omega$$

ou, en divisant par $U^2 \Omega$:

$$\frac{\int V^2 d\omega}{U^2 \Omega} = 1 + \frac{\int_\Omega v^2 d\omega}{U^2 \Omega}$$

Quel que soit v, v^2 est positif, donc :

$$\int_\Omega v^2 d\omega > 0$$

Posons :

$$\frac{\int_\Omega v^2 d\omega}{U^2 \Omega} = \eta \qquad \eta > 0$$

on a :

$$\frac{\int_\Omega V^2 d\omega}{U^2 \Omega} = 1 + \eta$$

On pose $1 + \eta = \beta$; le coefficient β, supérieur à l'unité, est appelé *"coefficient de quantité de mouvement"* ou *"coefficient de Boussinesq"*.

La quantité de mouvement *réelle* du courant est donc :

$$\rho \, dt \int_\Omega V^2 d\omega = \beta \, \rho \, dt \, U^2 \Omega$$

c'est-à-dire :

$$\text{q}^{\text{té}} \text{ de mouv}^{\text{t}} \text{ réelle} = \beta \times \text{q}^{\text{té}} \text{ de mouv}^{\text{t}} \text{ fictive}.$$

Autrement dit, *la quantité de mouvement réelle est toujours supérieure à la quantité de mouvement fictive correspondant à la vitesse moyenne.*

En conséquence, lorsque nous appliquerons à un courant liquide le théorème de la quantité de mouvement nous pourrons faire intervenir la vitesse moyenne U de ce courant, à condition de remplacer U par βU.

VII.1.3.2. *Energie cinétique*

Le raisonnement est analogue. L'énergie cinétique réelle du courant est

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \rho \, dQ \, dt \, V^2 = \frac{1}{2} \rho \, dt \int_\Omega V^3 d\omega$$

L'énergie cinétique fictive est :

$$\frac{1}{2} \rho \, Q \, dt \, U^2 = \frac{1}{2} \rho \, dt \, U^3 \Omega$$

Il faut donc comparer :

$$\int_\Omega V^3 d\omega$$

pour la valeur *réelle* à :

$$U^3 \Omega$$

pour la valeur *fictive*.

En écrivant comme précédemment :

$$V = U + v$$

il vient :

$$V^3 = U^3 + 3\,U^2 v + 3\,v^2 U + v^3$$

Multiplions chaque terme par $d\omega$ et intégrons dans l'étendue Ω :

$$\int_\Omega V^3 d\omega = U^3\Omega + 0 + 3\,U \int_\Omega v^2 d\omega + \int_\Omega v^3 d\omega$$

ou, en divisant par $U^3\Omega$:

$$\frac{\int_\Omega V^3 d\omega}{U^3\Omega} = 1 + \frac{3\int_\Omega v^2 d\omega}{U^2\Omega} + \frac{\int_\Omega v^3 d\omega}{U^3\Omega}$$

Le dernier terme du deuxième membre est négligeable devant le second pour les raisons suivantes :

v est petit par rapport à U et le deuxième terme est de la forme $(v/U)^2$ tandis que le troisième est de la forme $(v/U)^3$.

De plus v est tantôt positif, tantôt négatif, puisque :

$$\int_\Omega v\, d\omega = 0$$

Donc le dernier terme contient des termes négatifs, tandis que le second ne comprend que des termes positifs.

Il reste donc pratiquement :

$$\frac{\int_\Omega V^3 d\omega}{U^3\Omega} = 1 + 3\eta$$

On pose :

$$1 + 3\,\eta = \alpha$$

Le coefficient α est appelé *"coefficient d'énergie cinétique"* ou *"coefficient de Coriolis"*.

L'énergie cinétique *réelle* du courant est donc :

$$\frac{1}{2}\,\rho\, dt \int_\Omega V^3 d\omega = \alpha\,\frac{1}{2}\,\rho\, dt\; U^3\Omega$$

c'est-à-dire :

Energie cinétique réelle = α × Energie cinétique fictive .

Autrement dit, *l'énergie cinétique réelle d'un courant liquide est toujours supérieure à l'énergie cinétique fictive correspondant à la vitesse moyenne U.*

En particulier l'application à un filet liquide du théorème de l'énergie cinétique conduit, comme nous le savons, à l'expression du *théorème de Bernoulli.*

Compte-tenu de l'étude précédente, *le théorème de Bernoulli appliqué à un courant liquide* s'exprimera donc par l'égalité :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \alpha\,\frac{U^2}{2g} + j = C^{te}$$

z est la cote d'un point pris dans une section transversale déterminée du courant (suivant les cas on prendra le centre de gravité de la section, un point de la surface libre, etc . . .)

p est la pression en ce point

U est la vitesse moyenne dans la section transversale considérée.

La valeur des coefficients η, α et β varie avec le degré d'inégalité des vitesses, c'est-à-dire pratiquement avec la forme des sections d'écoulement et la nature des parois qui limitent ces sections, ces facteurs intervenant au premier chef sur le degré de turbulence de l'écoulement, c'est-à-dire sur le degré d'inégalité des vitesses.

Pour un écoulement en régime laminaire dans un tube cylindrique de rayon r, la formule de Hagen-Poiseuille permet de calculer ces coefficients.

Ainsi :

$$\beta = \frac{1}{U^2\Omega}\int_\Omega V^2 d\omega$$

avec

$$V = \frac{p_1^* - p_2^*}{4\mu l}\,(r^2 - y^2)$$

et

$$U = \frac{r^2}{8\mu}\,\frac{p_1^* - p_2^*}{l}$$

$$\Omega = \pi r^2$$

$$d\omega = 2\pi y\, dy$$

d'où

$$\beta = \frac{64\,\mu^2 l^2}{\pi r^6 (p_1^* - p_2^*)^2}\int_0^r \frac{(p_1^* - p_2^*)^2}{16\,\mu^2 l^2}\,(r^2 - y^2)^2\, 2\pi y\, dy$$

Le calcul conduit à

$$\beta = 1{,}33$$

d'où

$$\eta = 0{,}33$$

$$\alpha = 1 + 3\,\eta = 2$$

En régime turbulent, ces coefficients sont beaucoup plus faibles par suite de l'égalisation des vitesses résultant de la turbulence.

Ainsi, Bazin a donné les valeurs suivantes :

— pour un canal en planches très unies : $\eta = 0{,}013$

— pour un canal à parois très rugueuses : $\eta = 0{,}041$

Pour un écoulement à surface libre (canal ou rivière) le coefficient α peut être pris égal à :

$\alpha = 1 + 150$ b pour une section infiniment large

$\alpha = 1 + 210$ b pour une section rectangulaire très large

$\alpha = 1 + 240$ b pour une section semi-circulaire

$\alpha = 1 + 225$ b pour une section trapézoïdale

avec $b = 1/C^2$, les coefficients b et C ayant les valeurs qui seront définies lors de l'étude de l'écoulement dans les canaux (cf. chapitre XII).

Une étude de M. Vibert publiée dans "Le Génie Civil" du 1^er^ Février 1962 présente la synthèse des résultats obtenus par divers expérimentateurs et en tire les conclusions suivantes :

a) La valeur maximale de α est de 2 pour l'écoulement en régime laminaire dans une canalisation cylindrique et de 1,5 dans le cas –théorique– où les vitesses seraient infiniment grandes.

b) Dans la pratique usuelle de l'écoulement dans les canalisations, pour les conduites de faible et moyen diamètre (de 0,20 m à 1 m), la valeur de α est de l'ordre de 1,04. Pour les diamètres supérieurs, cette valeur est de l'ordre de 1,02.

c) Dans les aqueducs de section circulaire, le coefficient α est encore plus faible, de l'ordre de 1,01 ; il n'atteint 1,02 que dans des cas exceptionnels.

Dans la pratique, comme on ignore souvent la valeur exacte de η, on le néglige généralement, c'est-à-dire qu'on prend $\alpha = \beta = 1$ mais on commet ainsi une erreur qu'il ne faut pas ignorer.

VII.2. RÉPARTITION DES VITESSES DANS UNE SECTION TRANSVERSALE

VII.2.1. Répartition générale

L'expérience montre que la courbe de répartition des vitesses dans une section transversale d'un courant liquide en régime turbulent a l'allure générale indiquée figure VII.2.1 dans deux cas particuliers fréquents.

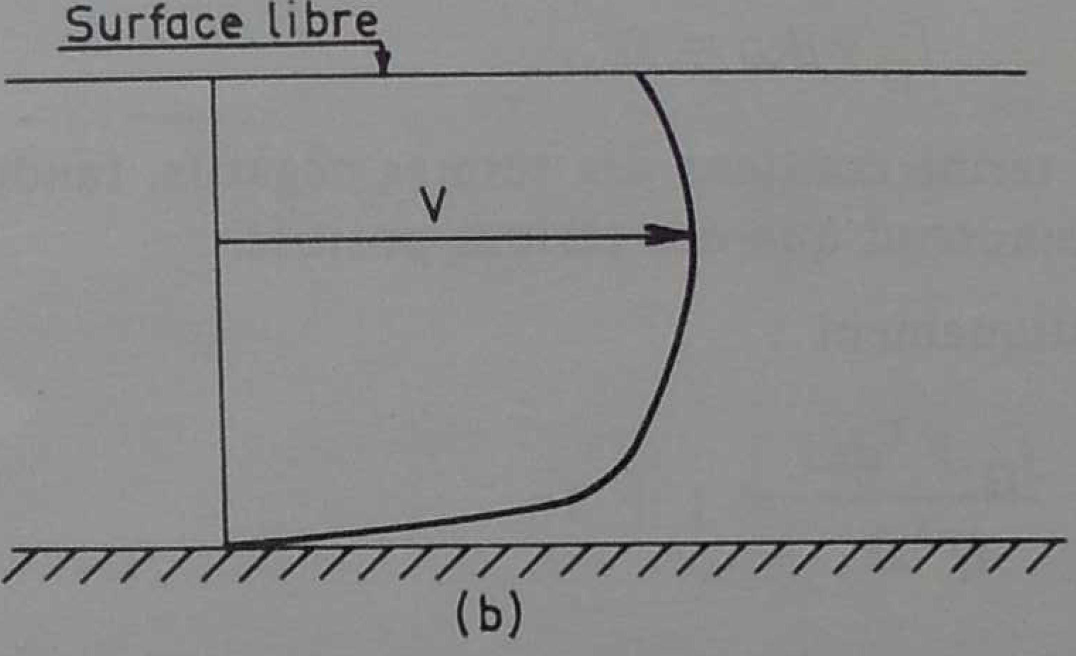


Fig. VII.2.1 – Répartition des vitesses dans une section transversale d'un courant liquide en régime turbulent. a) Canalisation en charge. b) Ecoulement à surface libre

Comme nous l'avons indiqué, la turbulence provoque une égalisation des vitesses par rapport au régime laminaire.

Il existe donc dans la masse liquide en écoulement turbulent *deux zones nettement différenciées :*

— l'une comprenant le corps de l'écoulement et présentant un faible gradient transversal des vitesses ;

— l'autre située au voisinage des parois, intéressant une très faible partie de l'écoulement et présentant un très fort gradient transversal des vitesses.

Cette dernière zone constitue la *couche-limite* que nous étudierons de manière un peu plus approfondie.

VII.2.2. Etude du courant liquide en régime turbulent au voisinage de la paroi – Notion de couche-limite.

Cette étude présente une importance toute particulière car, comme nous l'avons indiqué, les équations de Navier-Stokes ne peuvent pas être utilisées pratiquement lorsque les termes relatifs à la viscosité et les termes d'accélération ou d'inertie sont du même ordre de grandeur.

Or c'est bien ce qui se produit dans la plupart des écoulements au voisinage d'une paroi solide.

Dans le corps de l'écoulement, les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux forces d'inertie et de turbulence ; au contaire, dans la zone plus proche de la paroi, l'influence de la viscosité n'est plus négligeable.

Prandtl (1904) distingue ainsi deux domaines dans la masse liquide en écoulement (fig. VII.2.2.1) :

1 — Un domaine situé dans le corps de l'écoulement où les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux forces d'inertie et de turbulence. Le gradient de vitesse, normalement à la paroi, est relativement faible.

2 — Un domaine situé au voisinage immédiat de la paroi et qui constitue la *couche-limite*. Dans cette couche d'épaisseur δ la vitesse varie très rapidement

d'une valeur nulle au contact immédiat de la paroi, à une valeur finie V. Dans ce domaine les forces de viscosité ne sont plus négligeables par rapport aux forces d'inertie et de turbulence.

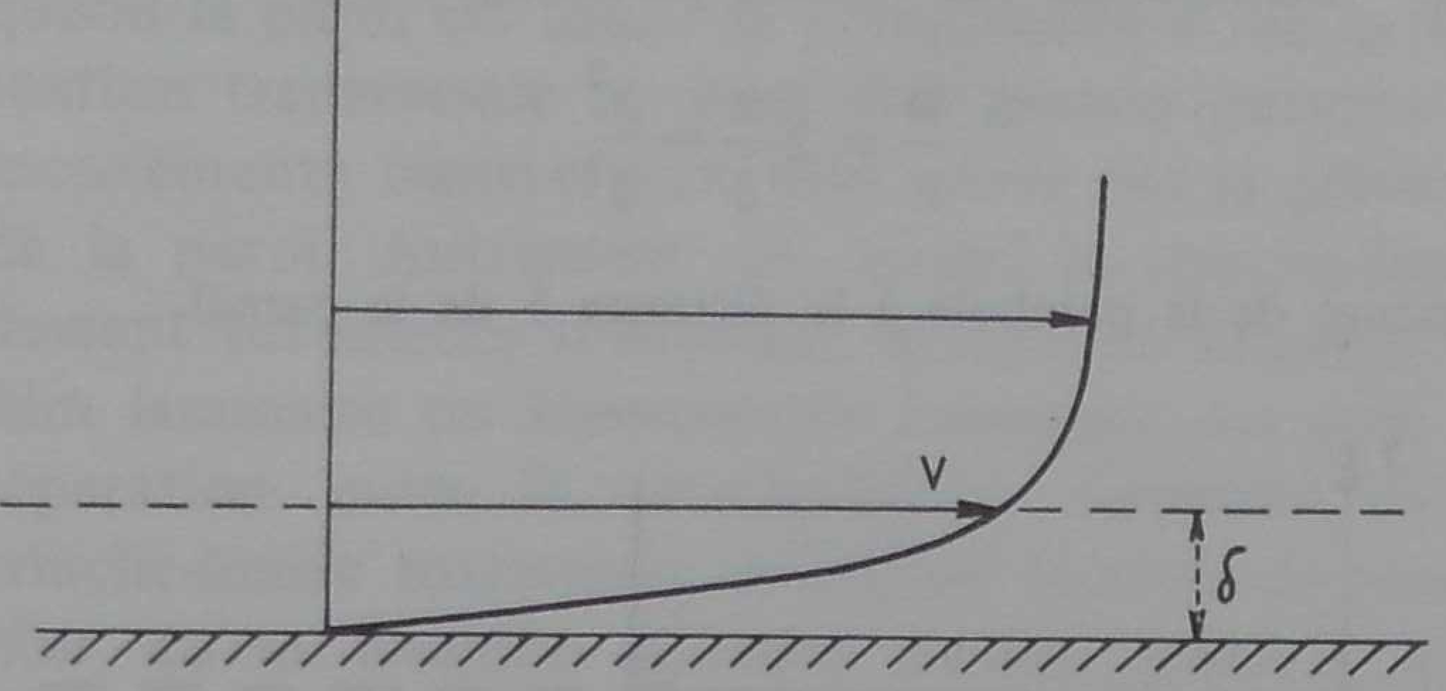


Fig. VII.2.2.1 – Couche-limite

Pour définir l'*épaisseur δ de la couche-limite*, on adopte une des conventions suivantes :

1 — La vitesse V à la distance δ de la paroi diffère de moins de 1 % de la vitesse dans le corps de l'écoulement.

2 — On confond, au contact de la paroi, la courbe de répartition des vitesses et sa tangente et on prend l'intersection de cette tangente avec le prolongement de la courbe donnant les vitesses dans le corps de l'écoulement (fig. VII.2.2.2).

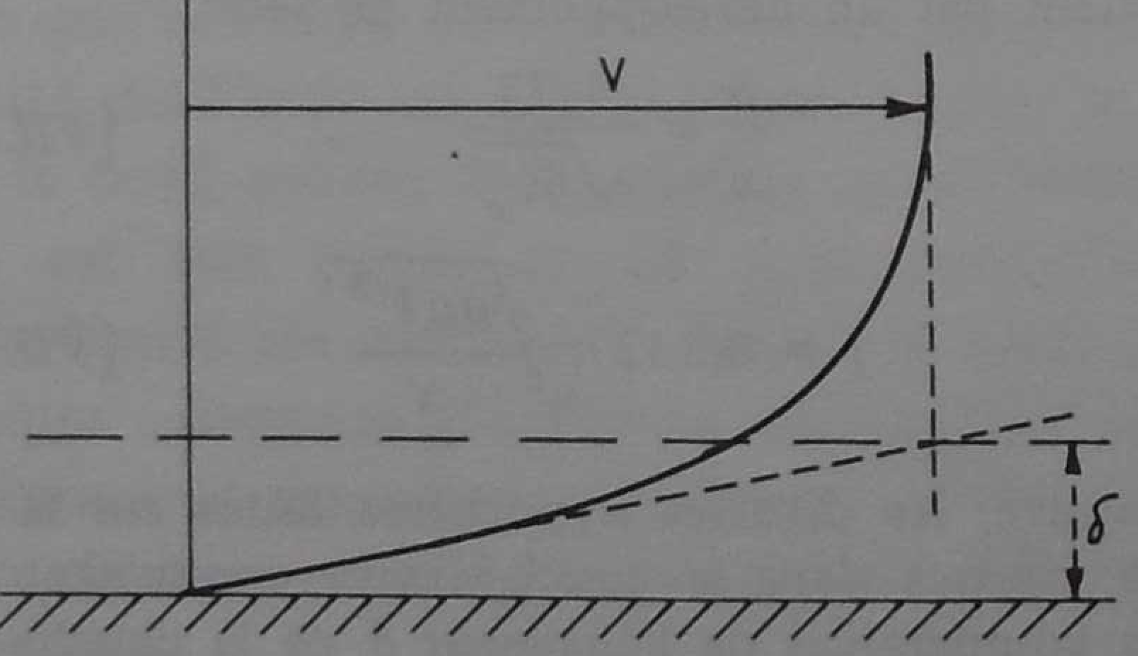


Fig. VII.2.2.2

3 — On détermine une parallèle ABC à la paroi qui délimite par rapport à la courbe de répartition des vitesses deux surfaces égales OAB et BCD (fig. VII.2.2.3).

En fait, le choix de la convention à adopter n'a pas d'importance car on cherche seulement l'ordre de grandeur de δ.

Cette définition étant donnée, l'écoulement dans la couche-limite peut être laminaire ou turbulent.

Fig. VII.2.2.3

VII.2.2.1. *Couche-limite laminaire*

Considérons une plaque plane très mince placée parallèlement à un courant de vitesse $\vec{V}$ constante (fig. VII.2.2.4).

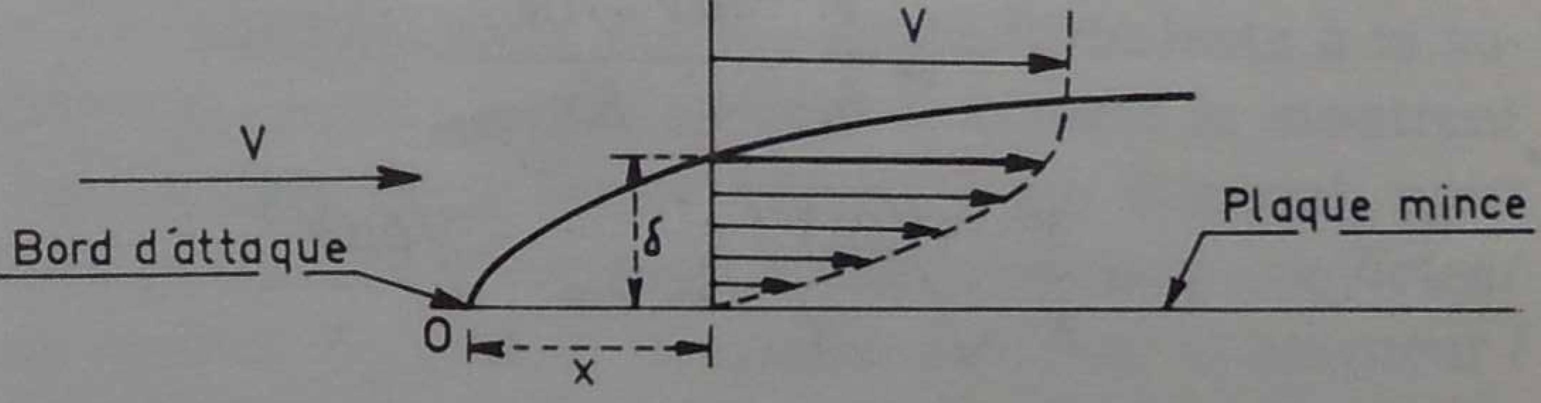


Fig. VII.2.2.4 – Couche-limite laminaire (Pour simplifier la figure, on n'a représenté la couche-limite que sur la face supérieure de la plaque)

Sur le bord amont (bord d'attaque) de la plaque supposé très aigu pour éviter les décollements, l'épaisseur de la couche-limite est nulle ; cette épaisseur croît lorsqu'on s'éloigne du bord d'attaque dans la direction de la vitesse $\vec{V}$ du fait de l'action retardatrice des frottements.

A la distance x du bord d'attaque de la plaque, l'épaisseur δ de la couche-limite est donnée par la formule approchée suivante :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} \qquad [VII.2.2.1]$$

avec

$$\mathcal{R}_x = \frac{V_x}{\nu}$$

V est la vitesse du courant mesurée suffisamment loin de la plaque,

ν est le coefficient de viscosité cinématique du liquide.

Le coefficient K est de l'ordre de 5 et on admet donc généralement :

$$\frac{\delta}{x} \simeq \frac{5}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} \qquad [VII.2.2.2]$$

La couche-limite se développe donc le long de chaque face de la plaque selon un profil parabolique à partir du bord d'attaque (fig. VII.2.2.4).

Par ailleurs, le régime dans la couche-limite étant laminaire, on sait que la *force de frottement* τ par unité de surface a pour expression :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

La variation de vitesse étant linéaire dans l'épaisseur de la couche-limite en écoulement laminaire, on a :

$$\frac{du}{dy} = \frac{V}{\delta}$$

Donc :

$$\tau = \mu \frac{V}{\delta} = \frac{\mu V \sqrt{\mathcal{R}_x}}{Kx}$$

$$\tau = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\rho\mu V^3}{x}} \simeq 0{,}2 \sqrt{\frac{\rho\mu V^3}{x}} \qquad [VII.2.2.3]$$

Définissons le *coefficient de frottement* C_f par la grandeur adimensionnelle :

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

En remplaçant τ par sa valeur dans l'expression de C_f il vient :

$$C_f = 2K\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_x}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} \qquad [VII.2.2.4]$$

En résumé :

1 — L'épaisseur de la couche-limite δ augmente dans la direction de $\vec{V}$ proportionnellement à la racine carrée de la distance au bord amont de la plaque (équation [*VII.2.2.1*]).

2 — Le coefficient de frottement C_f diminue corrélativement (équation [*VII.2.2.4*]).

3 — En un point quelconque de la paroi, la tension unitaire de frottement τ varie comme $V^{1,5}$ (équation [*VII.2.2.3*]).

On peut retrouver ces résultats d'une manière plus rigoureuse en partant des équations de Navier-Stokes et en faisant l'une des hypothèses suivantes (vérifiées expérimentalement) sur la distribution des vitesses dans la couche-limite.

1 — Distribution des vitesses parabolique (fig. VII.2.2.5) :

$$\frac{\mu}{V} = 2\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}$$

(sommet de la parabole à la distance δ de la paroi).

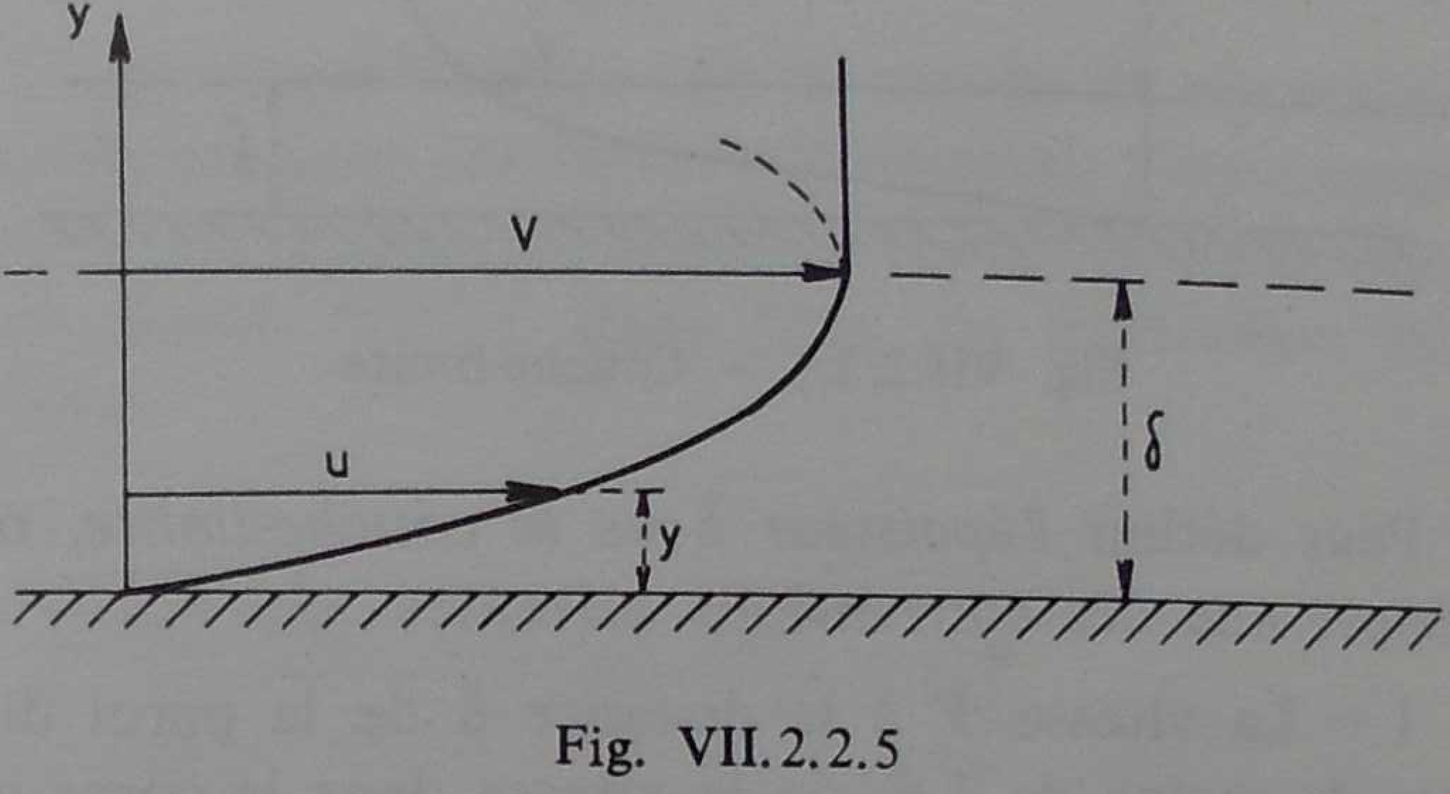


Fig. VII.2.2.5

On trouve :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5{,}47}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} \qquad [VII.2.2.5]$$

et

$$\tau = 0{,}365\sqrt{\frac{\rho\mu V^3}{x}} \qquad [VII.2.2.6]$$

2 — Distribution des vitesses telle que δ soit définie comme il est indiqué figure VII.2.2.3. Partant de cette hypothèse, Blasius obtient par un développement en série :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{1{,}73}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} \qquad [VII.2.2.7]$$

et

$$\tau = 0{,}332\sqrt{\frac{\rho\mu V^3}{x}} \qquad [VII.2.2.8]$$

En définitive, les diverses hypothèses faites sur la distribution des vitesses dans la couche-limite conduisent à des expressions comparables de l'épaisseur δ de la couche-limite (formules *VII.2.2.2, 5* et *7*) et de la tension unitaire de frottement τ (formules *VII.2.2.3, 6* et *8*).

VII.2.2.2. *Couche-limite turbulente — Sous-couche laminaire*

Reprenons la plaque mince parallèle à l'écoulement.

Quand on s'éloigne du bord d'attaque de la plaque, la couche-limite laminaire augmente d'épaisseur comme le prouve l'équation *VII.2.2.1*. $\mathcal{R}_x = (Vx)/\nu$ augmente également. Quand $\mathcal{R}_x$ dépasse 10^5 à 10^6, on constate que l'écoulement dans la couche-limite

n'est plus laminaire et devient turbulent. Mais au voisinage de la paroi la pente du profil des vitesses est très grande et la contrainte de viscosité $\tau = \mu\,(du/dy)$ est donc importante ; au contraire –tout au moins quand la paroi est lisse– la composante v' de la fluctuation transversale ne peut être grande puisque les mouvements transversaux sont gênés par la présence de la paroi. Autrement dit, quand la couche-limite devient turbulente il subsiste, le long de la paroi, un film laminaire ou *sous-couche laminaire*. La zone de séparation entre la couche-limite laminaire et la couche-limite turbulente constitue la *zone de transition* qu'on assimile souvent à une ligne T (fig. VII.2.2.6).

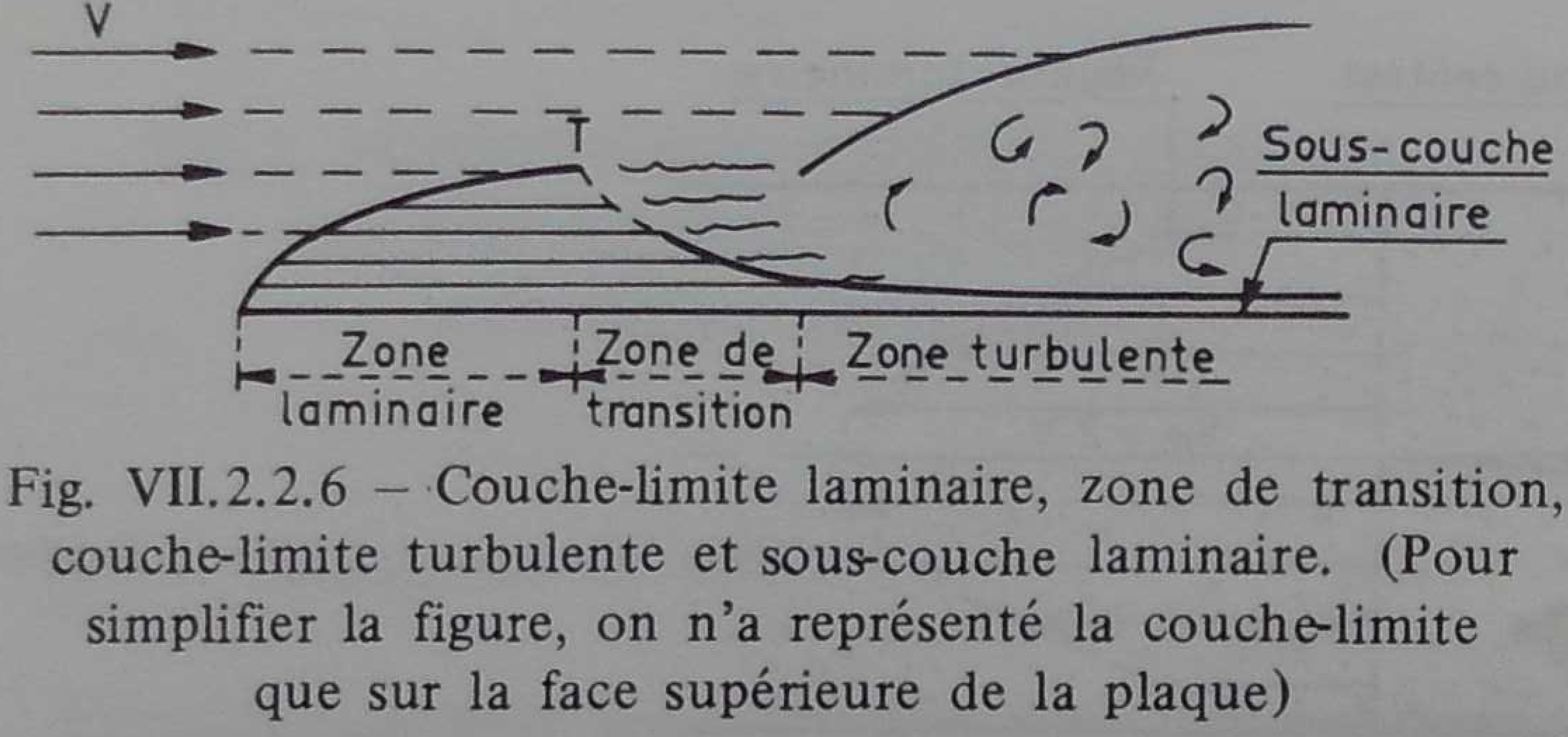


Fig. VII.2.2.6 – Couche-limite laminaire, zone de transition, couche-limite turbulente et sous-couche laminaire. (Pour simplifier la figure, on n'a représenté la couche-limite que sur la face supérieure de la plaque)

Le point de la paroi qui marque l'origine de la ligne de transition, c'est-à-dire le point à partir duquel le régime dans la couche-limite devient turbulent est appelé *point de transition*.

Dès que la vitesse est suffisamment grande et que la viscosité du fluide est relativement faible, la distance entre le bord amont de la plaque et le point de transition est très petite et on peut admettre que la couche-limite est turbulente depuis le bord amont de la plaque ; dans ces conditions, en utilisant les mêmes notations que pour la couche-limite laminaire, *l'épaisseur δ de la couche-limite turbulente* est donnée par la formule :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{B}{\mathcal{R}_x^{\frac{n}{n+1}}} \qquad [VII.2.2.9]$$

B est une constante numérique et n est un exposant qui décroît lentement lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Par exemple, pour $\mathcal{R}_x = 10^5$, on a

$$B = 0{,}33 \quad \text{et} \quad n = 0{,}25 \, .$$

Quant à la force de frottement par unité de surface τ, elle peut se mettre sous la forme habituelle :

$$\tau = C_f\,\rho\,\frac{V^2}{2}$$

avec

$$C_f = \frac{C}{\mathcal{R}_x^{\frac{n}{n+1}}} \qquad [VII.2.2.10]$$

Pour $\mathcal{R}_x = 10^5$, on a

$$n = 0{,}25 \quad \text{et} \quad C = 0{,}059 \, .$$

Dans le cas de l'écoulement laminaire, $n = 1$ et on retrouve les différentes formules établies précédemment pour la couche-limite laminaire.

La leçon essentielle à retenir de cette rapide rétrospective des études modernes c'est l'existence dans la couche-limite de deux régions différentes qui affectent directement la résistance de la paroi à l'écoulement du fluide.

Notamment, pour une même valeur du nombre de Reynolds, la tension unitaire de frottement à la paroi τ est supérieure en couche-limite turbulente à sa valeur en couche-limite laminaire, comme le montrent les courbes de la figure VII.2.2.7 qui donnent, pour une plaque de longueur l, les variations du *coefficient de traînée* C_x (valeur moyenne de C_f sur la longueur l de la plaque) en fonction du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_l = Vl/\nu$.

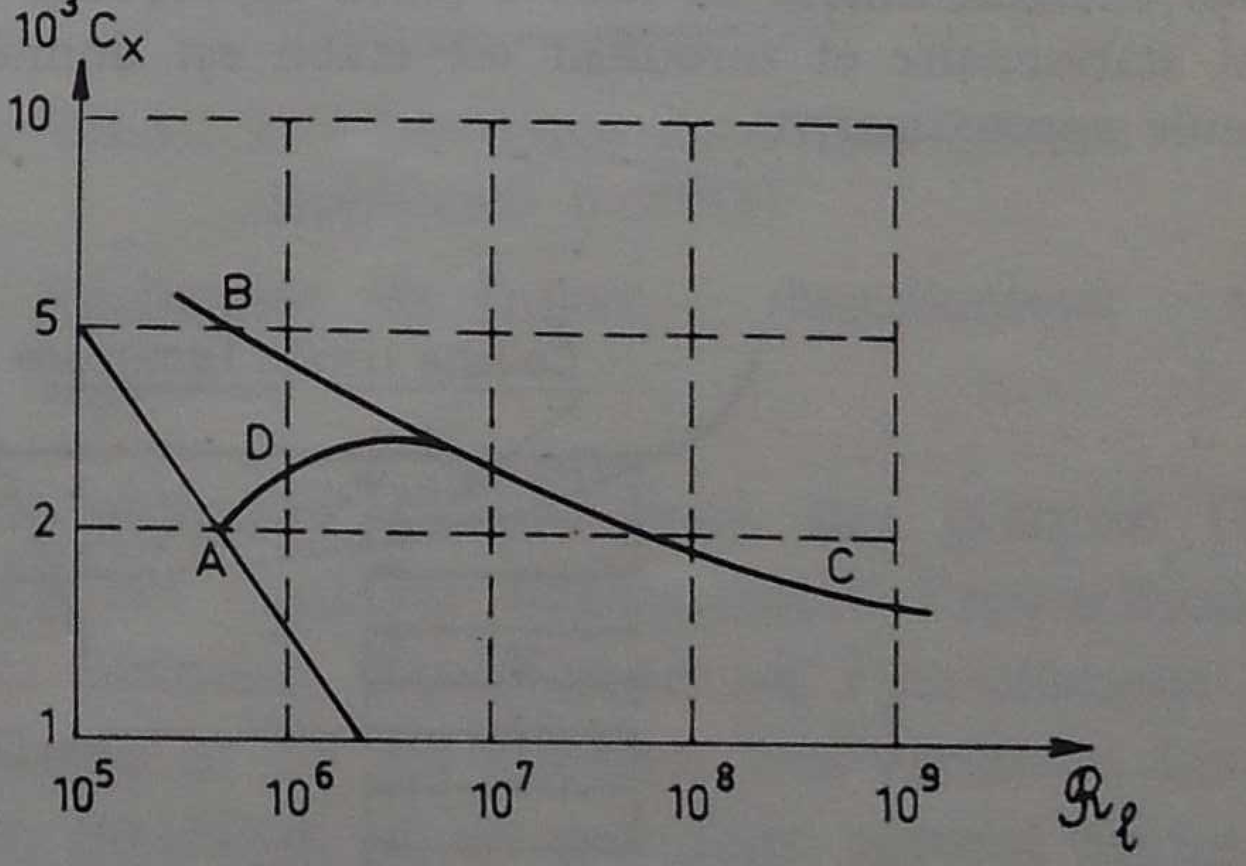


Fig. VII.2.2.7 – Coefficient de traînée d'une plaque plane. A : couche-limite laminaire ; BC : couche-limite turbulente ; D : zone de transition.

VII.2.2.3. *Développement de la couche-limite à l'entrée d'un tube cylindrique ou d'un canal* (fig. VII.2.2.8)

L'origine amont du tube est profilée de manière à éviter les décollements. A l'entrée du tube la répartition des vitesses est uniforme dans la section, soit V la valeur constante de cette

vitesse. La présence de la paroi provoque un freinage des particules fluides au contact et la couche-limite laminaire prend naissance. Les particules liquides de la zone centrale du tube qui n'ont pas subi l'effet du frottement sont accélérées de manière que le débit total à travers toute la section soit maintenu constant ; à cette augmentation de vitesse correspond une diminution de pression conformément au théorème de Bernoulli. La couche-limite est d'abord laminaire et s'épaissit progressivement suivant la formule [*VII.2.2.1*] :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{R}_x}} .$$

Deux cas sont alors à considérer selon la valeur du nombre de Reynolds $\mathcal{R} = VD/\nu$ caractérisant l'écoulement moyen dans le tube.

1[er] cas : Si $\mathcal{R} < 2000$: La couche-limite reste laminaire et lorsqu'elle occupe toute la section du tube, l'écoulement stationnaire demeure naturellement laminaire (fig. VII.2.2.8). On observe une répartition des vitesses parabolique suivant le résultat classique, la vitesse maximale dans l'axe du tube étant égale à $2V$. La distance l_1 mesurée depuis l'origine amont du tube à partir de laquelle l'écoulement stationnaire est établi est donnée approximativement par la formule

$$l_1 = 0{,}02 \frac{D^2 V}{\nu} \qquad [VII.2.2.3.1]$$

D représentant le diamètre du tube.

2[ème] cas : Si $\mathcal{R} > 2000$: Les perturbations prenant naissance dans la couche-limite laminaire vont en s'amplifiant et la couche-limite devient turbulente en passant par la

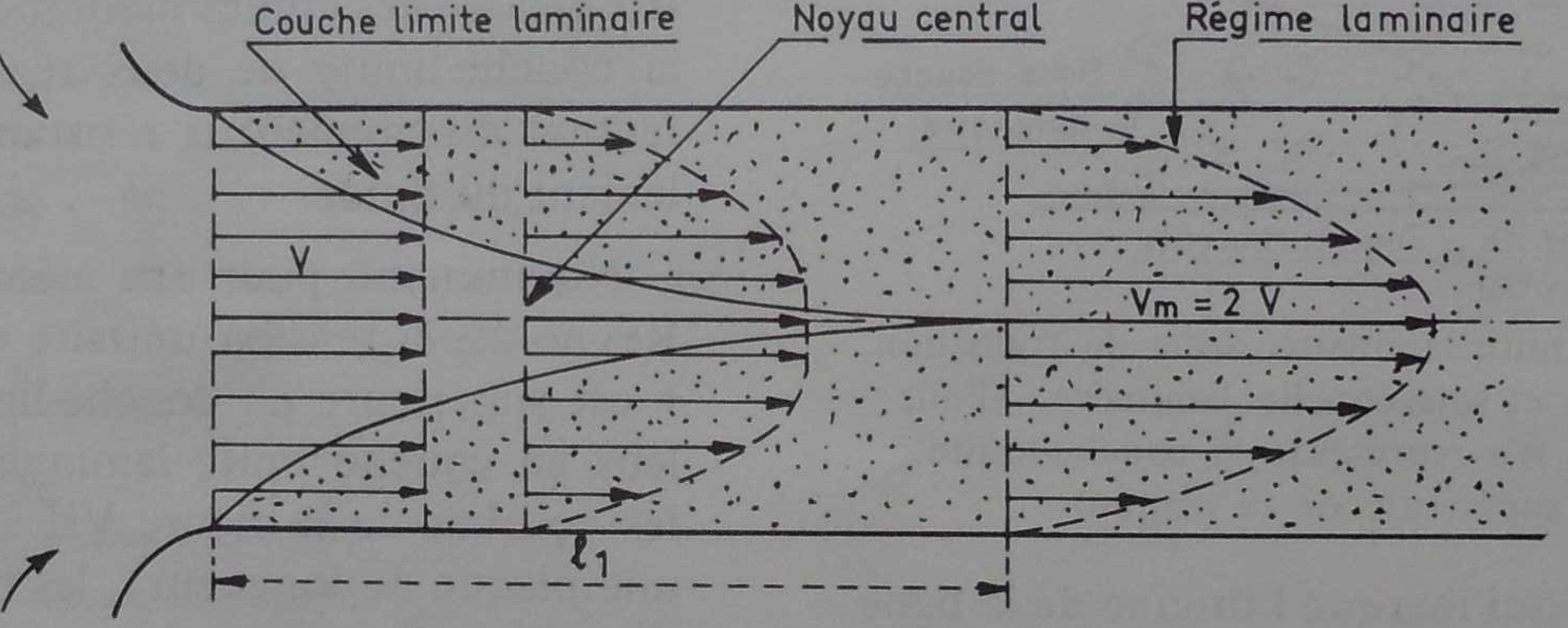


Fig. VII.2.2.8 – Développement de la couche-limite à l'entrée d'un tube cylindrique. Cas du régime laminaire.

zone de transition (fig. VII.2.2.9). La distance l_2 mesurée depuis l'origine amont du tube à partir de laquelle l'écoulement stationnaire et turbulent est établi est donnée par la formule approximative :

$$l_2 = 1{,}5\, D \sqrt[4]{\mathcal{R}} \qquad [VII.2.2.3.2]$$

avec

$$\mathcal{R} = \frac{VD}{\nu}$$

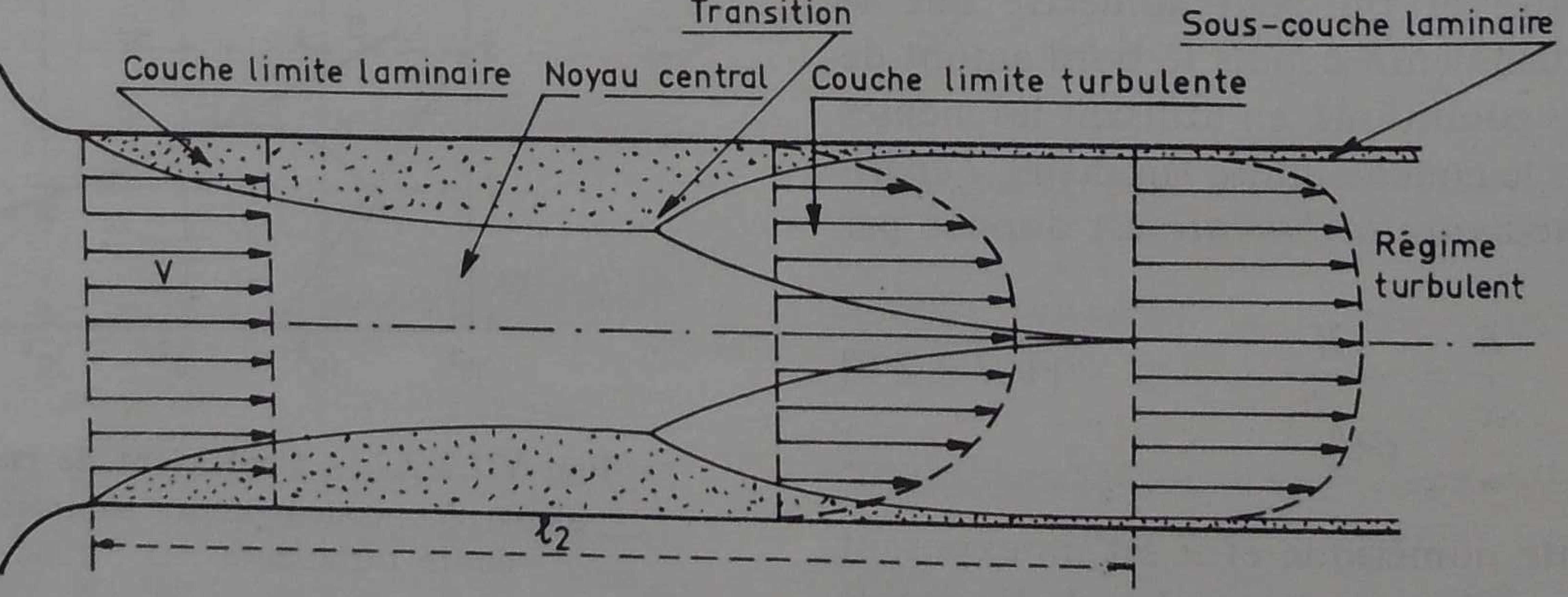


Fig. VII.2.2.9 – Développement de la couche-limite à l'entrée d'un tube cylindrique. Cas du régime turbulent.

Dans la cas d'un écoulement à surface libre (canal), on observe des phénomènes analogues, la couche-limite se développant le long du fond et des parois du canal. Les distances l_1 et l_2 sont données par les formules approximatives suivantes :

— en régime laminaire :

$$l'_1 = 0{,}04 \frac{H^2 V}{\nu} \qquad [VII.2.2.3.3]$$

— en régime turbulent :

$$l'_2 = 3H \sqrt[4]{\mathcal{R}'} \qquad [VII.2.2.3.4]$$

avec H = profondeur du canal

V = vitesse moyenne dans le canal

$$\mathcal{R}' = \frac{VR}{\nu}$$

R = rayon hydraulique moyen $\left(= \frac{\Omega}{B}\right)$

Les longueurs l_1, l_2, l'_1 et l'_2 données par les formules précédentes sont relativement grandes de sorte que pour des écoulements de courte longueur (orifices, déversoirs) la couche-limite ne joue qu'un rôle secondaire car la distance est trop courte pour qu'elle puisse se développer ; ceci explique pourquoi la théorie des écoulements à potentiel des vitesses peut alors s'appliquer à de tels écoulements sur des ouvrages courts.

VII.3. RÉSISTANCE OPPOSÉE PAR UN SOLIDE IMMERGÉ DANS UN COURANT LIQUIDE

VII.3.1. Résistance de surface

Considérons deux lames souples parfaitement lisses, infiniment minces (par exemple deux cartes à jouer) (fig. VII.3.1.1). Juxtaposons-les côte à côte dans un courant liquide de vitesse uniforme $\vec{V}$ de manière que

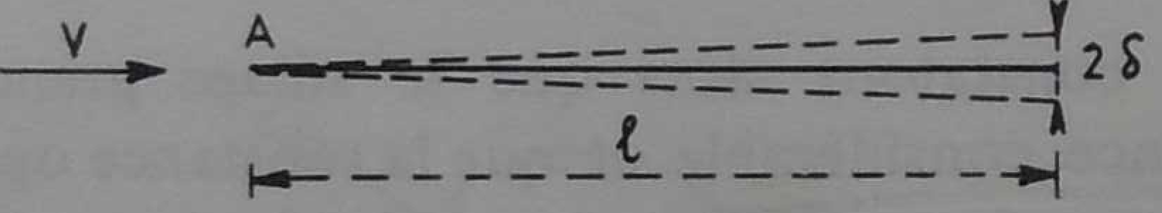


Fig. VII.3.1.1 – Résistance de surface (plaque plane)

leur plan soit parallèle à $\vec{V}$. Nous savons qu'une couche-limite prend naissance depuis l'origine amont A de la plaque (bord d'attaque).

Si le nombre de Reynolds de l'écoulement est suffisamment grand, la transition se produit très tôt au voisinage du bord d'attaque et on peut admettre que la couche-limite turbulente recouvre pratiquement toute la plaque.

Désignons par :

l la longueur de la plaque mesurée parallèlement à V,

b sa largeur mesurée perpendiculairement au plan de la figure,

τ la force de frottement par unité de surface,

F la résistance totale opposée par la plaque.

On aura

$$F = 2\tau lb$$

avec

$$\tau = C_f \rho \frac{V^2}{2}$$

et

$$C_f = \frac{C}{\mathcal{R}_x^{\frac{n}{n+1}}} \qquad [VII.2.2.10]$$

On constate donc que le coefficient de frottement C_f et la force de frottement unitaire τ décroissent depuis le bord amont de la plaque jusqu'à son extrémité.

Si toutefois la longueur l de la plaque est suffisamment grande, C_f et τ prennent une valeur moyenne constante et la résistance opposée par la plaque *$F = 2\tau lb$ ne dépend que du frottement dans l'épaisseur de la couche-limite* ; nous définirons cette résistance comme une *résistance de surface*.

Supposons maintenant que nous donnions aux deux plaques un *léger bombement* (fig. VII.3.1.2).

Si la courbure des plaques est suffisamment faible, la couche-limite subsiste sur toute la surface des plaques, elle reste adhérente aux deux plaques et la résistance qu'elles opposent conserve la même valeur :

$$F = 2\tau lb\,.$$

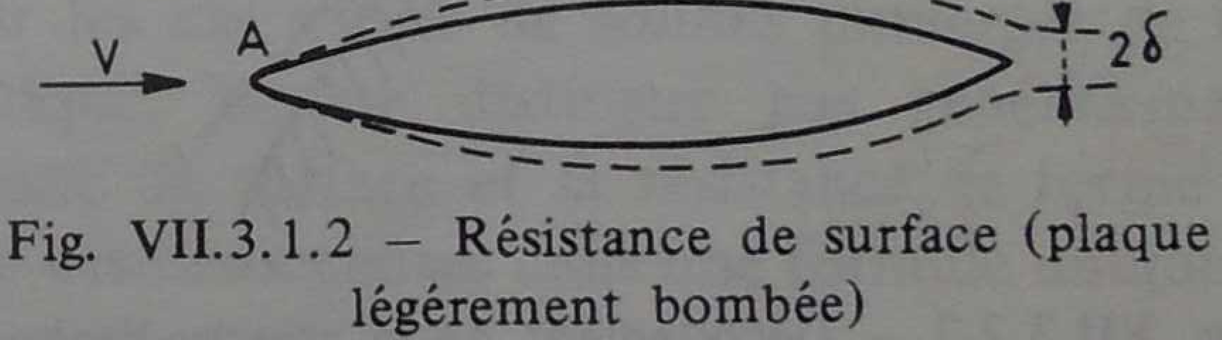


Fig. VII.3.1.2 – Résistance de surface (plaque légérement bombée)

VII.3.2. Résistance de forme – décollement – sillage

Si on accentue la courbure des plaques (fig. VII.3.2.1), on constate brusquement l'apparition, à l'aval des plaques, d'une zone où l'écoulement est très perturbé et où les vitesses, très variables dans le temps en direction et en grandeur, restent nulles en moyenne. Cette zone est appelée *zone de sillage* ou plus simplement *sillage*.

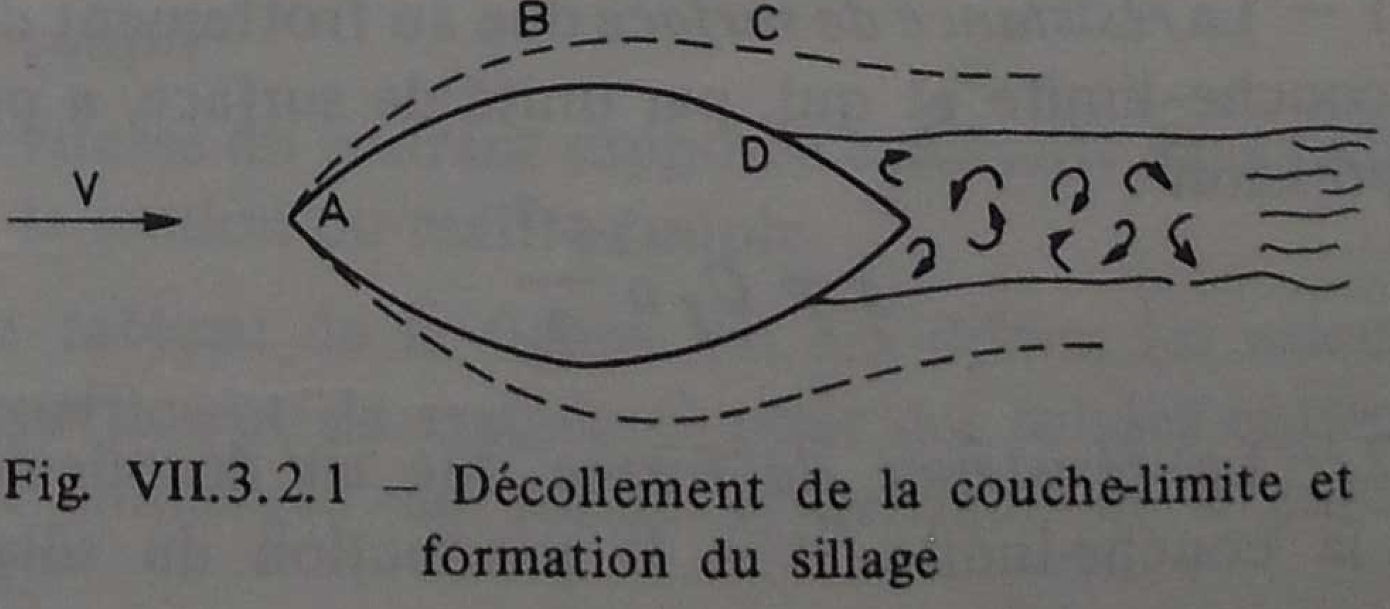


Fig. VII.3.2.1 – Décollement de la couche-limite et formation du sillage

Simultanément la résistance F croît brusquement.

Ceci s'explique en considérant un filet liquide ABC au contact de la couche-limite : de A en B, la pression décroît et la vitesse augmente, (théorème de Bernoulli) mais au-delà de B la pression augmente de nouveau et il en résulte une brusque diminution de vitesse, la courbe de répartition des vitesses dans la direction normale à la paroi se déforme et on arrive à un point D appelé *point de décollement* au-delà duquel la vitesse le long de la paroi est en sens contraire de l'écoulement général (fig. VII.3.2.2). Les points de décollement forment sur la surface de la paroi une *ligne de décollement*. A l'aval de cette ligne, les lignes de courant ne suivent plus la surface de la paroi et la couche-limite n'existe plus, il y a décollement de la couche-limite et, simultanément, formation du sillage.

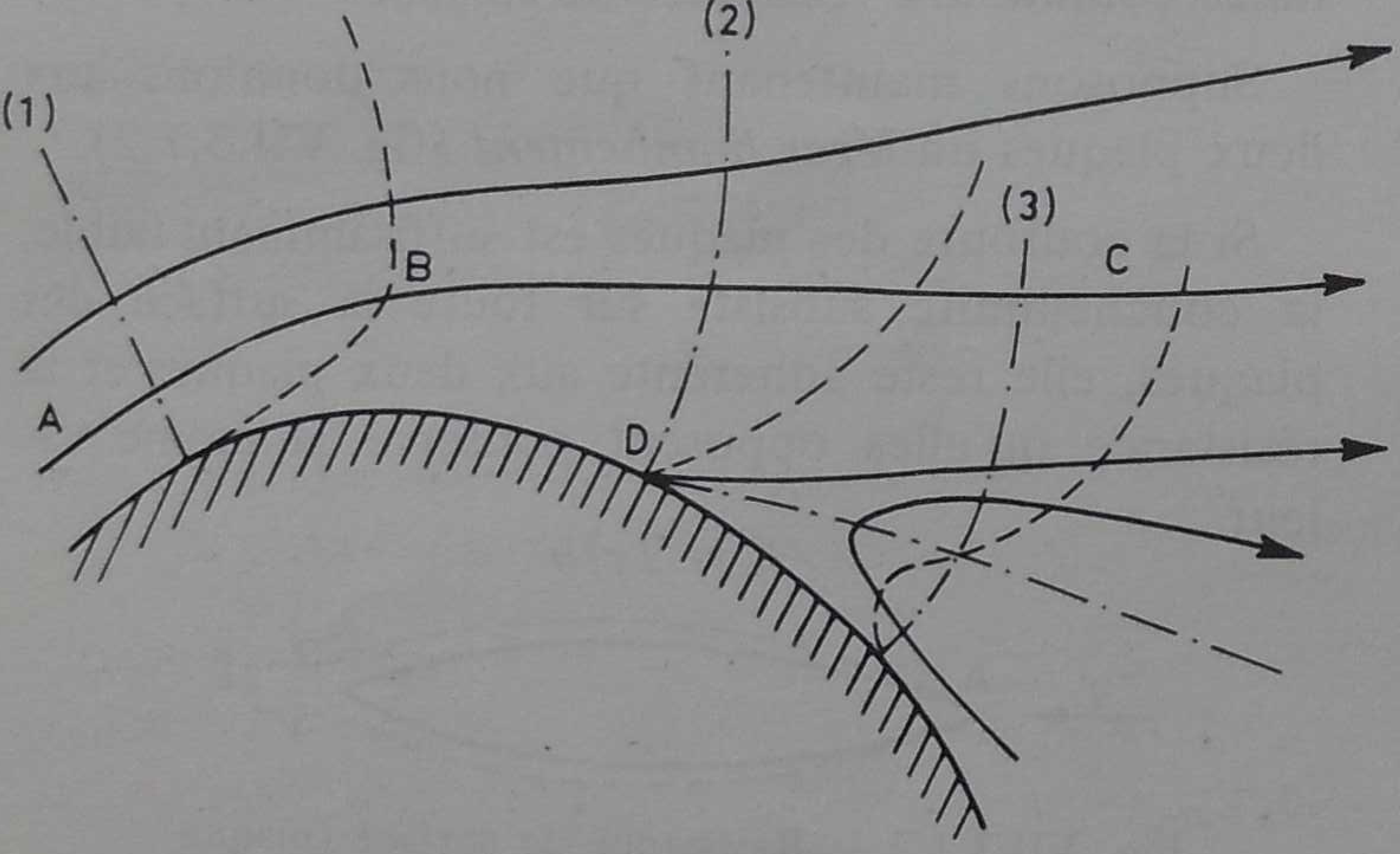


Fig. VII.3.2.2 – Décollement de la couche-limite

Une résistance supplémentaire s'ajoute à celle due à la simple action de frottement dans le domaine de la couche-limite, c'est la *résistance due à la forme* même de l'obstacle qui, ici, provoque le décollement de la couche-limite et la formation du sillage.

En définitive, pour un obstacle quelconque immergé dans un courant, la résistance opposée par l'obstacle comprend deux parties :

1 — La *résistance de surface* due au frottement dans la couche-limite et qui, par unité de surface, a pour expression :

$$\tau = C_f \, \rho \, \frac{V^2}{2}$$

2 — La *résistance de forme* due au décollement de la couche-limite et à la production du sillage.

Dans le dernier exemple cité, ces deux résistances interviennent et leur somme constitue la résistance totale opposée par l'obstacle au courant.

Disposons de nouveau les deux plaques côte à côte mais plaçons-les perpendiculairement à la vitesse $\vec{V}$ (fig. VII.3.2.3).

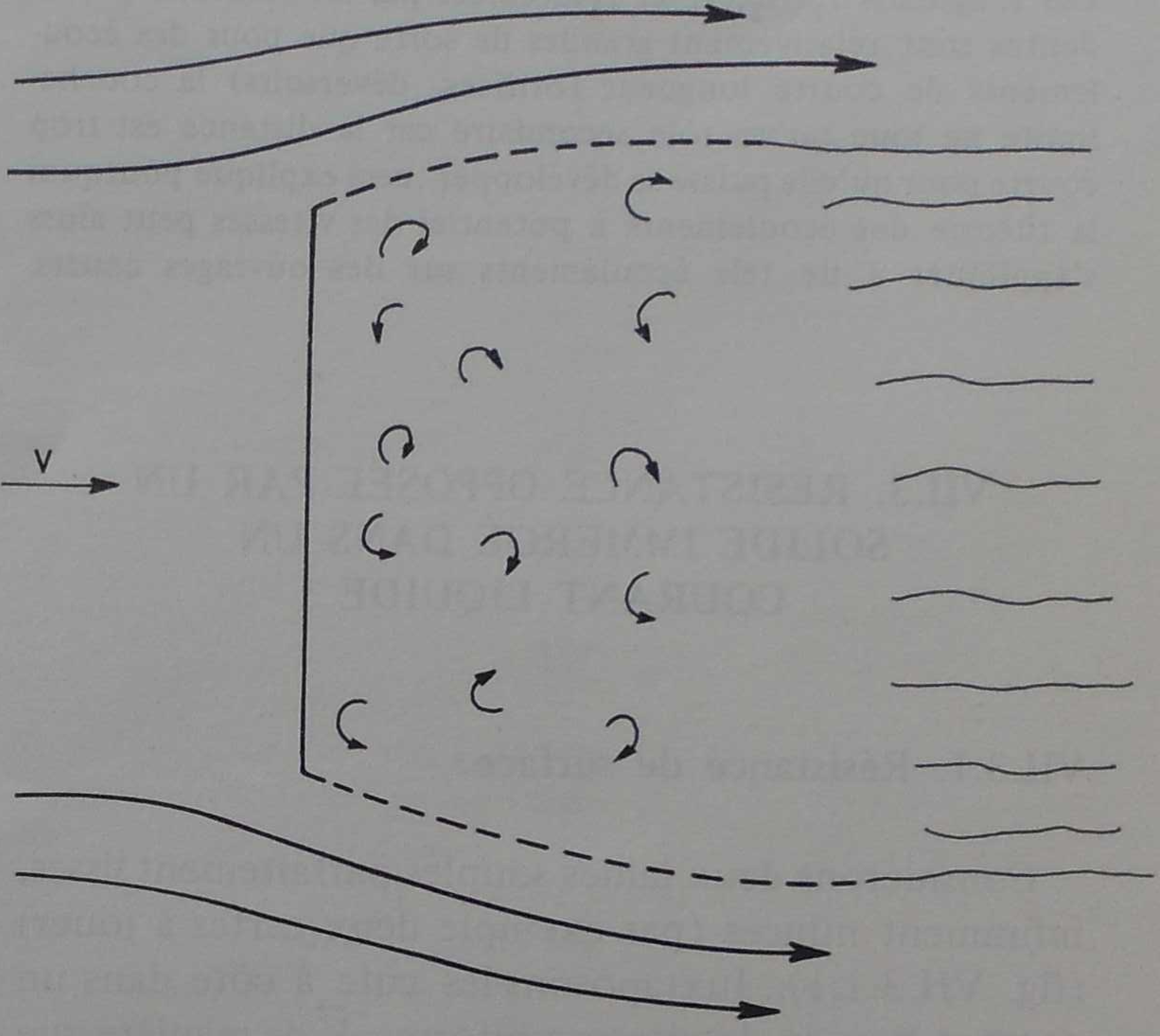


Fig. VII.3.2.3 – Résistance de forme

Nous constatons alors que le sillage prend une importance considérable et que la résistance opposée atteint sa plus grande valeur. Il n'existe plus de couche-limite puisque le décollement a lieu depuis le bord de la plaque. La résistance de surface a disparu et il ne subsiste que la *résistance de forme* qui prend une valeur considérable en raison de l'importance du sillage dont la largeur est d'ailleurs supérieure à celle de la plaque.

VII.3.3. Comparaison du pouvoir d'adhérence de la couche-limite laminaire et de la couche-limite turbulente – Paradoxe d'Eiffel

En raison du brassage violent des particules liquides résultant de la turbulence du régime, la couche-limite turbulente adhère mieux à la paroi que la couche-limite laminaire. Il en résulte que l'apparition de la turbulence dans la couche-limite rejette le point de décollement vers l'aval, diminue l'importance du sillage et, par suite, la résistance opposée par l'obstacle alors que la vitesse du courant augmente.

Ce résultat constitue le *paradoxe d'Eiffel* qui peut être démontré expérimentalement en enroulant un fil autour d'une sphère disposée dans un courant liquide à vitesses parallèles.

Avant la pose du fil (fig. VII.3.3.1), le décollement de la couche-limite se produit suivant un cercle *ab* pratiquement confondu avec le grand cercle perpendiculaire à $\vec{V}$ et la plus grande partie de la face arrière de la sphère est dans la zone de sillage et donc soumise à une dépression ; le coefficient de traînée est de 0,44, valeur observée par Prandtl.

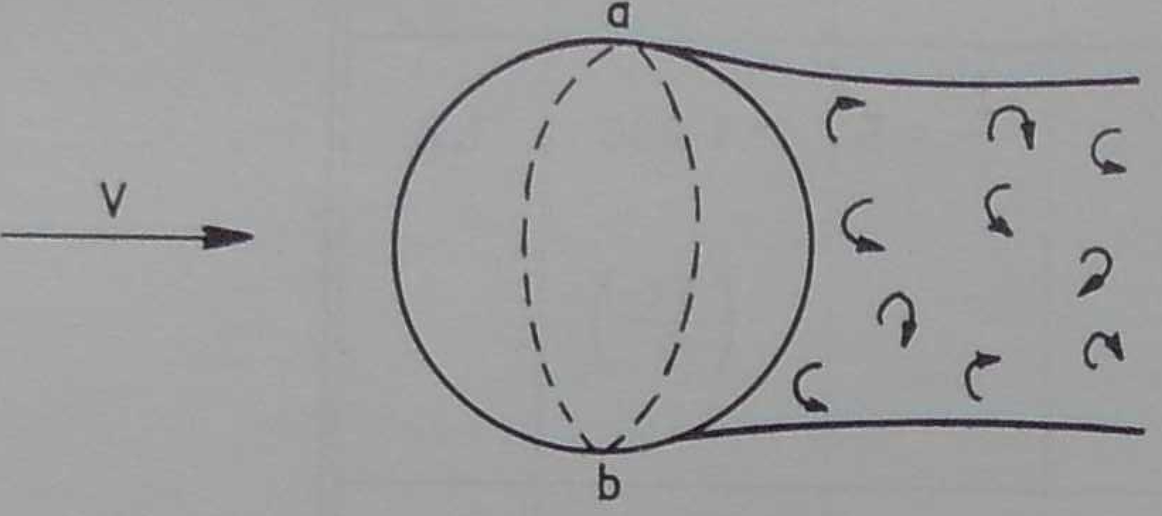


Fig. VII.3.3.1

Après la pose du fil (fig. VII.3.3.2), la couche-limite laminaire est détruite par la présence du fil et l'écoulement dans cette couche passe du régime laminaire au régime turbulent. Comme la couche-limite turbulente a un pouvoir d'adhérence plus élevé que la couche-limite laminaire, le courant liquide reste plus longtemps en contact avec la sphère, le décollement est reporté au cercle $a_1 b_1$ à l'aval du grand cercle *ab*, ce qui réduit la surface soumise à la dépression et l'importance de la zone de sillage. Il en résulte une brusque diminution de la résistance due à une réduction du coefficient de traînée qui passe de 0,44 à 0,176, valeur obtenue expérimentalement par Eiffel.

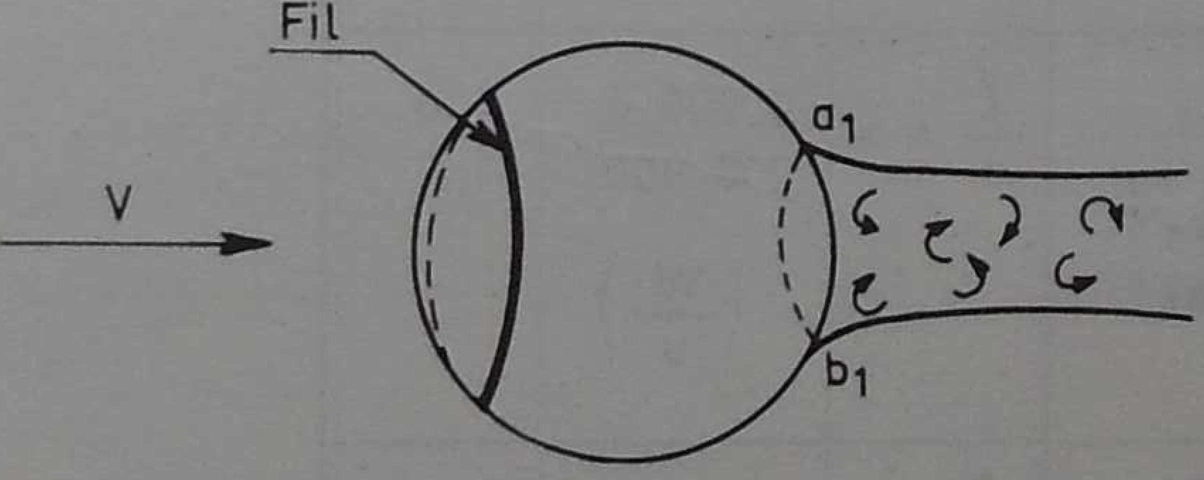


Fig. VII.3.3.2

L'augmentation de la rugosité de la paroi produit le même effet que le fil, ce qui explique le paradoxe apparent qu'une sphère rugueuse oppose une résistance inférieure à celle d'une sphère lisse dans le domaine limité du nombre de Reynolds correspondant au passage de la couche-limite laminaire à la couche-limite turbulente.

VII.3.4. Aspiration de la couche-limite

Nous avons constaté que le décollement de la couche-limite résultait de la diminution de vitesse consécutive à l'augmentation de pression au contact de la paroi. Si on s'oppose à cette cause, par exemple en créant une dépression le long de la paroi à l'aval du point de décollement, on aspire en quelque sorte la couche-limite et le point de décollement est repoussé vers l'aval (fig. VII.3.4).

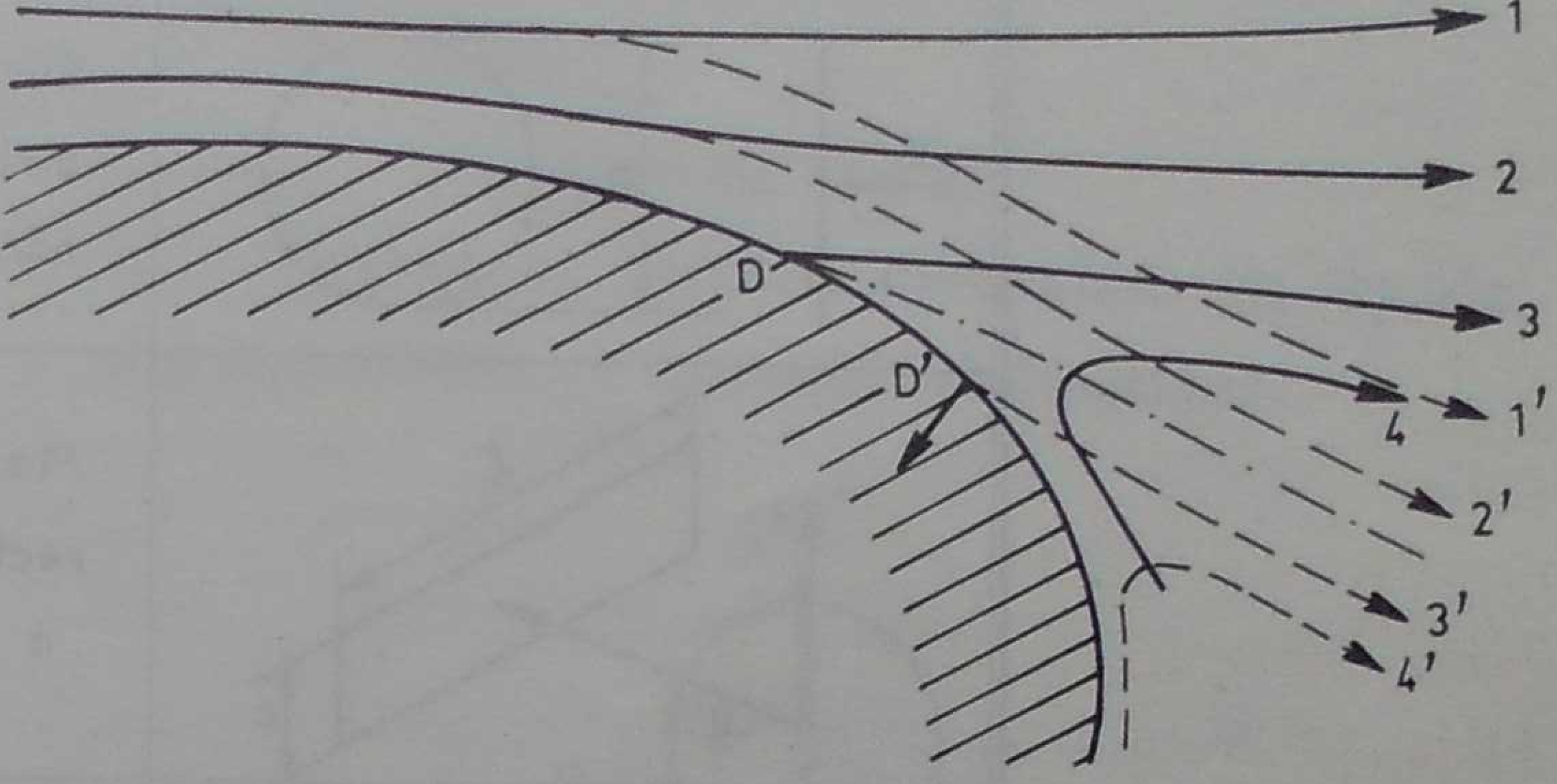


Fig. VII.3.4 – Aspiration de la couche-limite

M. Escande a appliqué ce phénomène à divers écoulements (vannes, prises en rivière, déversoirs). L'aspiration de la couche-limite permet d'éviter les décollements et les mouvements tourbillonnaires (sillage) qui en résultent tout en augmentant le coefficient de débit des ouvrages.

VII.3.5. Expression de la résistance totale sur des solides immergés de forme symétrique

Pour les cas usuels de solides immergés de forme symétrique, on ne distingue pas généralement la résistance de surface et la résistance de forme et on groupe ces deux causes dans une formule unique de la forme :

$$F = C \bar{\omega} A \frac{V^2}{2g} \qquad [VII.3.5]$$

F = résistance totale

C = coefficient appelé *"coefficient de traînée"* et dépendant de la forme et des dimensions du corps, de la rugosité de sa surface et du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement

A = section maximale du corps par un plan normal à la vitesse $\vec{V}$; on l'appelle la *section du maître-couple*

V = vitesse du courant supposée constante dans toute la section du maître-couple.

Le tableau de la figure VII.3.5 donne les valeurs du coefficient de traînée C pour des solides entièrement immergés de forme symétrique et à parois lisses.

Définition de l'obstacle immergé dans le courant			Nombre de REYNOLDS $\mathcal{R}$	Coefficient de traînée C
Schéma	Description	Proportions		
	Surface plane, mince, circulaire (disque) normale à l'écoulement	—	> 1.000 $\left(\frac{VD}{\nu}\right)$	1,12
	Plaque plane, mince, rectangulaire, normale à l'écoulement	$\frac{l}{c} = 5$	> 1.000 $\left(\frac{Vc}{\nu}\right)$	1,2
	Plaque plane, mince, rectangulaire normale à l'écoulement. Décollement supprimé sur les deux petits cotés par des parois planes parallèles à l'écoulement	$\frac{l}{c} = 5$	> 1.000 $\left(\frac{Vc}{\nu}\right)$	1,95
	Sphère	—	1.000 à 200.000 $\left(\frac{VD}{\nu}\right)$	0,4 à 0,5
	Cylindre droit à base circulaire dont l'axe est normal à l'écoulement	$\frac{l}{d} = 5$	1.000 à 100.000 $\left(\frac{Vd}{\nu}\right)$	0,75
	- id - Décollement supprimé sur les deux bases par des parois planes parallèles à l'écoulement	$\frac{l}{d} = 5$	1.000 à 200.000 $\left(\frac{Vd}{\nu}\right)$	1 à 1,2
	Cylindre droit à base circulaire dont l'axe est parallèle à l'écoulement	$\frac{l}{d} = 5$	> 1.000 $\left(\frac{Vd}{\nu}\right)$	0,9
	Solide profilé de forme hydrodynamique (pisciforme)	$\frac{l}{d} = 5$	> 200.000 $\left(\frac{Vd}{\nu}\right)$	0,06 à 0,1

Fig. VII.3.5 – Coefficients de traînée de solides entièrement immergés, de forme symétrique, à parois lisses

Remarques :

1 — En première approximation, l'effet est le même c'est-à-dire la force de résistance F est identique si le corps est immobile dans un liquide en mouvement ou si le corps se déplace avec la même vitesse et la même orientation relative dans le même liquide au repos. En fait, nous avons montré précédemment qu'en raison de l'existence de la turbulence les deux phénomènes n'étaient pas absolument symétriques (cf. § VI.3.2 – Paradoxe de Du Buat).

2 — Pour une plaque rectangulaire ou un cylindre dont l'axe est perpendiculaire à la vitesse du courant, le coefficient de traînée C dépend du rapport l/c ou l/d caractérisant la forme ou l'allongement de la plaque ou du cylindre. Ceci s'explique par la diminution de la poussée (ou pression dynamique) sur la plaque due à la vitesse du courant au voisinage des bords de la plaque. Si la plaque est longue et étroite (l/c élevé) l'effet résultant sera peu appréciable ; si au contraire la plaque tend à prendre une forme carrée (l/c petit) l'effet correspondant sera appréciable et se traduira par une réduction du coefficient de traînée.

3 — De manière analogue, si la plaque ou le cylindre barre complètement le courant ce qui supprime les décollements sur les deux bords extrêmes, la poussée dynamique sur la plaque est maximale et le coefficient de traînée C augmente. Ce dernier phénomène présente une certaine analogie avec la variation du coefficient de débit des déversoirs avec ou sans contraction latérale (cf. chapitre X).

VII.3.6. Vitesse-limite de chute d'une sphère dans un liquide au repos

VII.3.6.1. *Variation du coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds*

Définissons le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement par l'expression $\mathcal{R} = VD/\nu$ (D = diamètre de la sphère).

Pour des valeurs $\mathcal{R} < 1$ le régime d'écoulement est laminaire et la relation $C = f(\mathcal{R})$ est de la forme $C = 24/\mathcal{R}$ (fig. VII.3.6.1). Lorsque $\mathcal{R}$ augmente C décroît et atteint une valeur constante pour des valeurs de $\mathcal{R}$ de l'ordre de 10^4 à 10^5. C'est cette valeur constante qui est portée sur le tableau de la fig. VII.3.5.

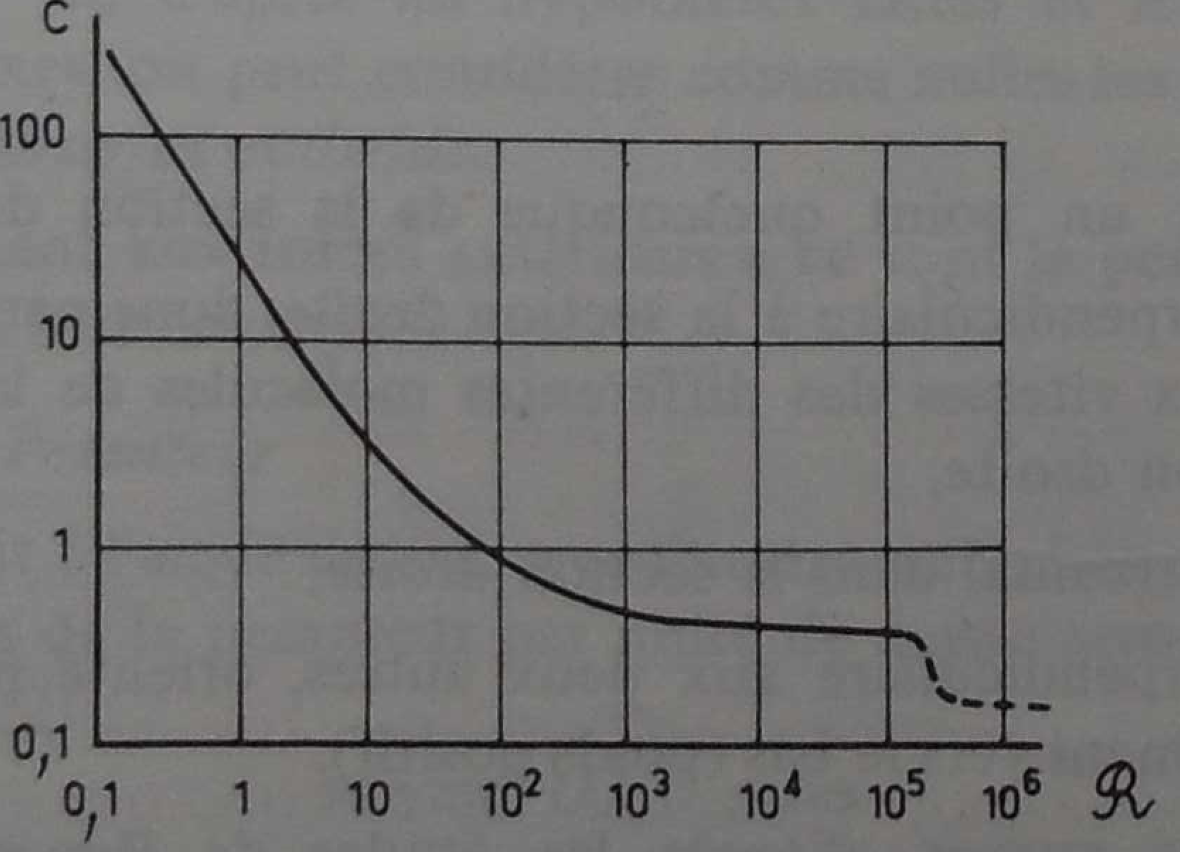


Fig. VII.3.6.1 – Variation du coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds

VII.3.6.2. *Vitesse-limite de chute en régime laminaire. Formule de Stokes* (fig. VII.3.6.2)

Désignons par

D le diamétre de la sphère,

σ sa masse volumique,

ρ la masse volumique du liquide,

μ le coefficient de viscosité dynamique du liquide,

ν son coefficient de viscosité cinématique.

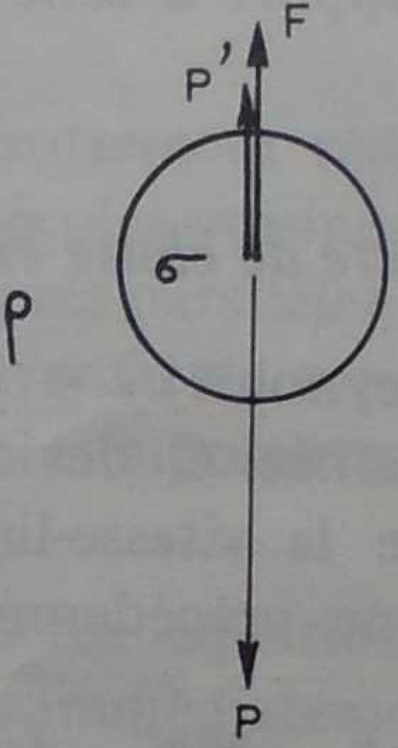


Fig. VII.3.6.2 – Vitesse-limite de chute d'une sphère dans un liquide au repos

Lorsque la sphère a atteint une vitesse-limite de chute constante, son poids P, la poussée d'Archimède P' et la résistance F opposée par le liquide au déplacement de la sphère forment un système de forces en équilibre ; ces trois forces étant verticales, il en résulte l'égalité :

$$P = P' + F$$

avec

$$P = \frac{\pi D^3}{6} \sigma g$$

$$P' = \frac{\pi D^3}{6} \rho g$$

$$F = C \rho g A \frac{V^2}{2g}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$C = \frac{24}{\mathcal{R}} = \frac{24\nu}{VD} \quad \text{d'où} \quad F = 3\mu\pi D V$$

Tous calculs faits, il vient :

$$V = \frac{D^2 g(\sigma - \rho)}{18\mu}$$

Ce résultat constitue la *formule de Stokes* et est utilisé pour mesurer la viscosité des liquides : on mesure V, D, σ et ρ et on déduit μ de la formule.

Par ailleurs, l'expression de $F = 3\mu\pi DV$ montre que la résistance au déplacement de la sphère dans le liquide qui résulte uniquement du frottement de la couche-limite contre la surface de la sphère (résistance de surface) est proportionnelle à la vitesse, conformément à la loi générale de l'écoulement en régime laminaire ; l'influence de la viscosité est prépondérante par rapport à celle de la turbulence.

VII.3.6.3. *Vitesse-limite de chute en régime turbulent*

Si le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = VD/\nu$ dépasse 10^4, le coefficient de traînée C devient constant (fig. VII.3.6.1) et lorsque la vitesse-limite est atteinte, on peut écrire comme précédemment :

$$P = P' + F \quad \text{avec} \quad C = C^{te}$$

Tous calculs faits, il vient :

$$V = 2\sqrt{\frac{gD}{3C}\,\frac{\sigma - \rho}{\rho}}$$

Par ailleurs, l'expression de $F = \frac{\pi}{8} C\rho D^2 V^2$ montre que la résistance au déplacement de la sphère est proportionnelle au carré de la vitesse, conformément à la loi générale de l'écoulement en régime turbulent ; l'influence de la turbulence est prépondérante par rapport à celle de la viscosité.

Enfin, le résultat précédent peut s'écrire :

$$\frac{V}{\sqrt{gD}} = 2\sqrt{\frac{\sigma - \rho}{3\rho C}} = C^{te}$$

Nous définirons plus tard le quotient adimensionnel $V/\sqrt{gD}$ qui est le *nombre de Froude* caractéristique de l'écoulement. On constate donc que pour l'écoulement considéré le nombre de Froude est constant ; le phénomène obéit à la loi *de similitude de Reech-Froude* (cf. chapitre XIV) qui, comme nous le montrerons plus loin, exprime précisément que les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux forces d'inertie, de pesanteur et de turbulence.

VII.4. ÉQUATION GÉNÉRALE DU MOUVEMENT PERMANENT D'UN COURANT LIQUIDE DANS LE CHAMP DE LA PESANTEUR

Considérons un courant liquide en régime turbulent et en mouvement permanent dans le champ de la pesanteur. Nous supposerons sa section transversale Ω constante ou très lentement variable et son axe longitudinal rectiligne ou de très faible courbure afin de pouvoir considérer comme parallèles les vitesses des différents filets liquides juxtaposés et pouvoir définir une section transversale plane.

Pour étudier ce courant, choisissons ainsi les trois axes OX, OY, OZ, (fig. VII.4.1) :

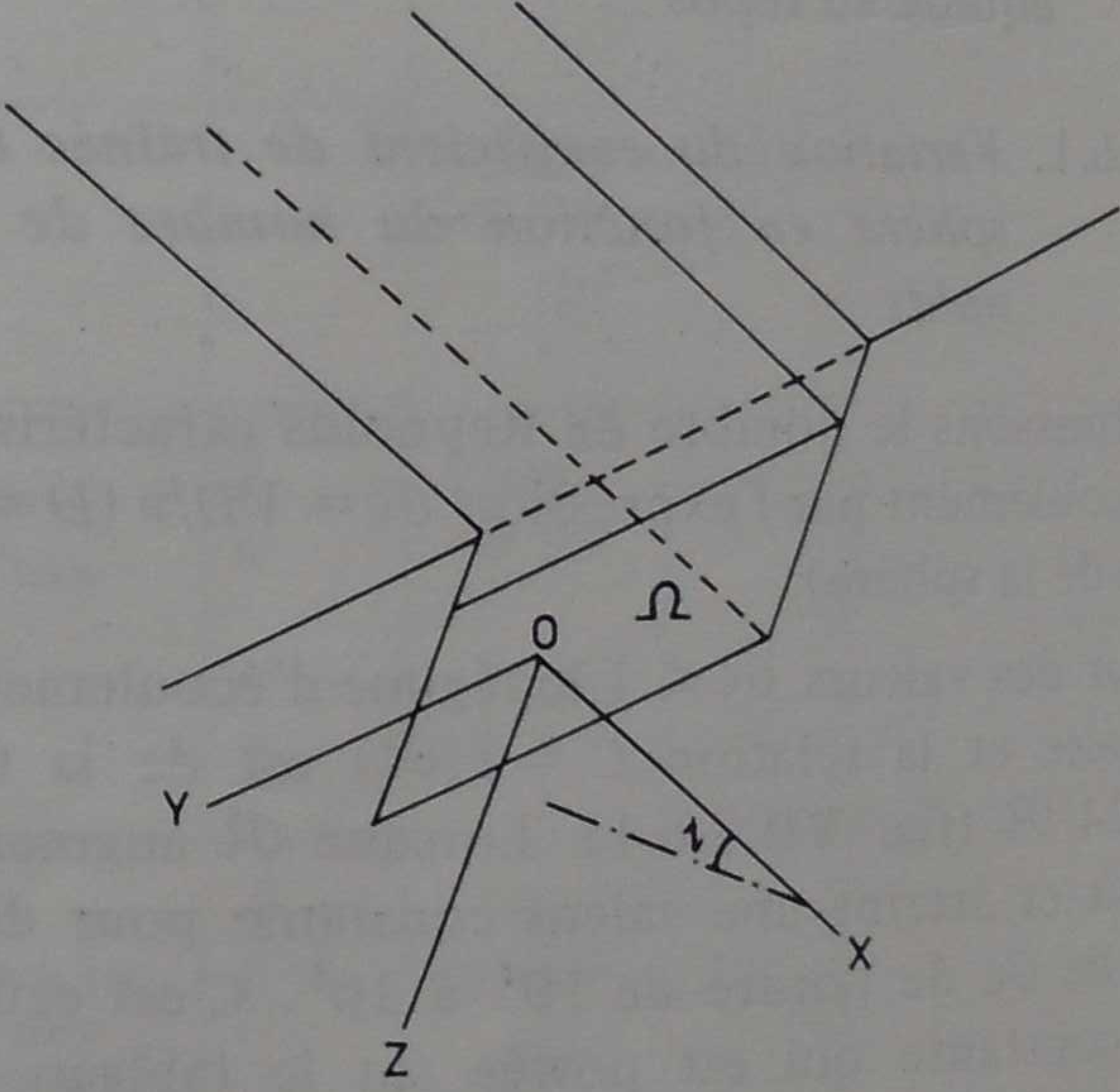


Fig. VII.4.1

O est un point quelconque de la section droite,

OX perpendiculaire à la section droite, donc parallèle aux vitesses des différentes molécules de la section droite,

OY horizontal dans la section droite,

OZ perpendiculaire aux deux autres, orienté positivement vers le bas (poids positif).

Nous savons, d'après les études de Boussinesq (§ VI.3.6), que les équations d'Euler des fluides parfaits sont applicables au mouvement des liquides

réels en régime turbulent lorsque les frottements sont négligeables et à condition d'y introduire les valeurs moyennes locales de la vitesse et de la pression au lieu des valeurs vraies.

Par ailleurs, en régime de pleine turbulence les forces de viscosité ont une influence négligeable par rapport aux forces d'inertie et à la dissipation d'énergie due à la turbulence, c'est notamment le cas dans la plus grande partie d'un courant liquide guidé par un dispositif solide ; nous savons, en effet, que l'influence de la viscosité n'est pratiquement appréciable qu'au voisinage des parois dans la couche-limite.

Compte tenu enfin de la complexité des équations de Navier-Stokes, nous utiliserons donc les formules d'Euler applicables aux fluides parfaits en y introduisant, au titre des forces extérieures, les forces de frottement dont l'expression exacte devra être précisée à partir de l'expérience ; les coefficients introduits dans l'expression de ces forces de frottement intégreront donc l'incidence de l'action des parois et l'influence de la couche-limite.

Autrement dit, en considérant les valeurs moyennes des pressions p et des vitesses $\vec{V}(u, v, w)$, nous partirons des équations d'Euler que nous rappelons ci-après :

$$\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad.}}\, p = \vec{F} - \vec{\gamma} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{du}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - \dfrac{dw}{dt} \end{cases}$$

Or ici, d'après les hypothèses faites et le choix des axes, on peut considérer comme nulles les accélérations dv/dt et dw/dt.

Quant aux forces extérieures, ce sont la pesanteur et les frottements.

1) *Pesanteur*

Soit i l'angle de OX avec l'horizontale. Les composantes de la pesanteur par unité de masse seront (fig. VII.4.2) :

suivant OX : $g \sin i$
suivant OY : 0
suivant OZ : $g \cos i$.

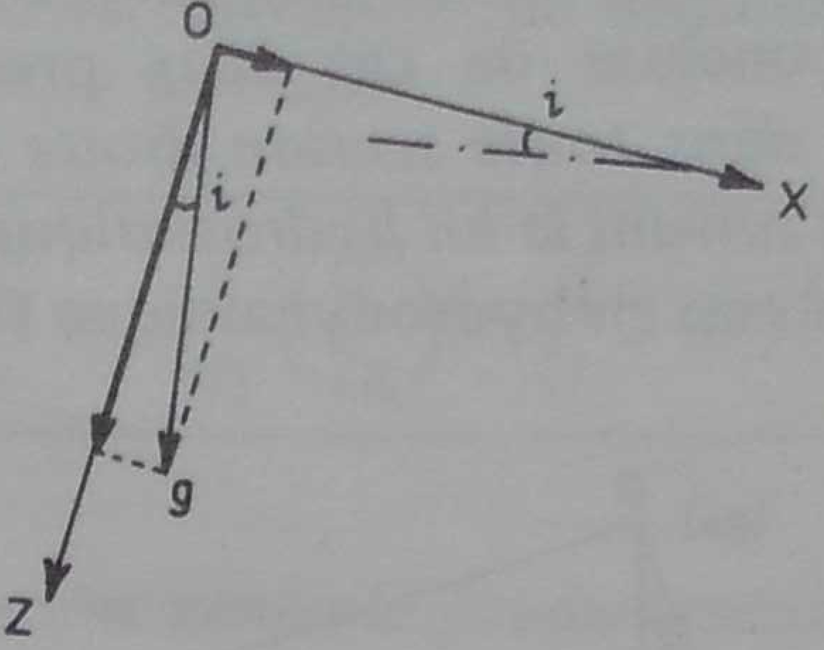


Fig. VII.4.2

2) *Frottements*

Les forces de frottement résultent des différences de vitesse des molécules voisines. Or ces vitesses sont parallèles ou à peu près parallèles à OX, donc les forces de frottement peuvent être considérées comme parallèles à OX, leurs composantes suivant OY et OY sont nulles.

Les deux dernières équations d'Euler vont permettre de préciser immédiatement comment varie la pression suivant les directions OY et OZ.

a) *Suivant* OY, la seconde équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

ce qui montre que *dans une section transversale la pression est constante le long d'une horizontale.* Donc, *s'il existe une surface libre où la pression est la pression atmosphérique, son intersection avec une section droite du courant est une horizontale.*

b) *Suivant* OZ, multiplions les deux membres de la troisième équation par $\rho\, dz$. Nous obtenons :

$$\frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho\, g \cos i\, dz = \overline{\omega} \cos i\, dz$$

Le premier membre est la différentielle de p pour la seule variation de z.

Intégrons depuis l'origine où la pression est p_0 jusqu'à un point de l'axe OZ, de coordonnée z où la pression est p (fig. VII.4.3).

Il vient :

$$p - p_0 = \overline{\omega} z \cos i = \overline{\omega} h$$

en désignant par h la distance verticale entre l'origine et le point de coordonnée z.

Donc le long de OZ la pression varie suivant la loi hydrostatique. Ceci étant valable quelle que soit la

position du point O dans la section transversale, on peut donc conclure de ces deux premières conséquences que *dans toute section droite du courant la pression varie suivant la loi hydrostatique*. On retrouve le résultat obtenu en hydrodynamique (§ V.1.5).

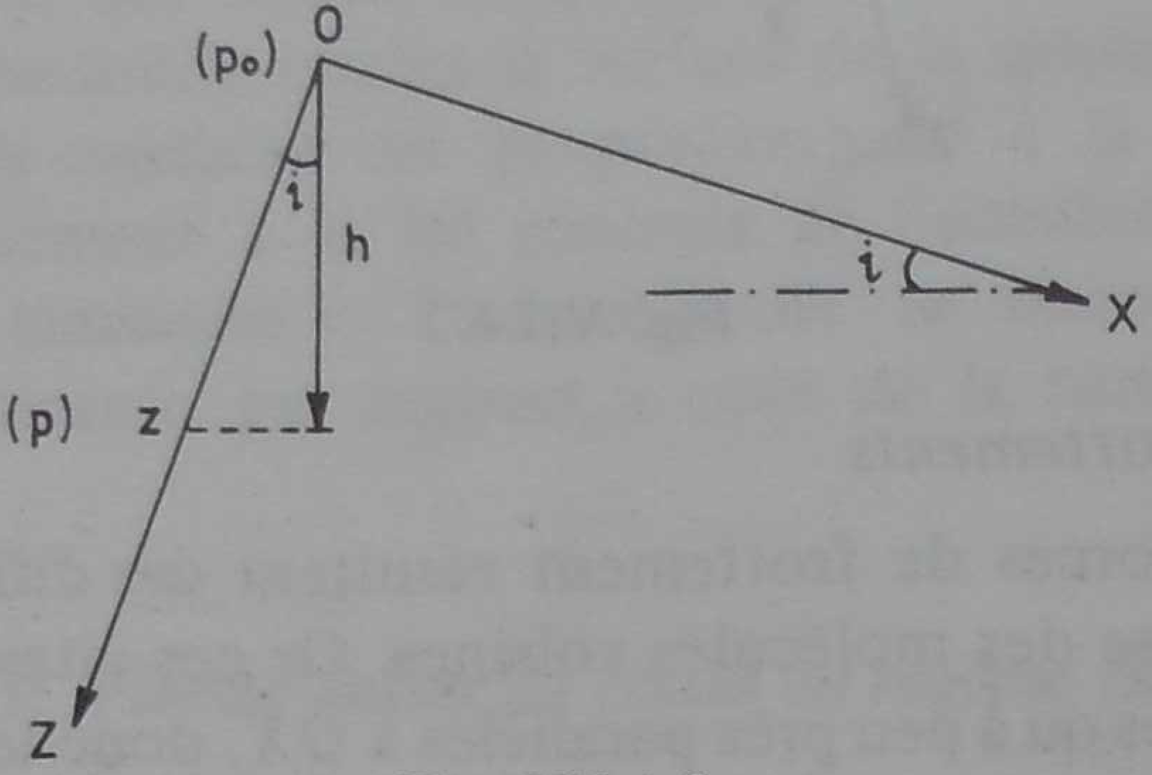


Fig. VII.4.3

c) *Suivant OX*

Pour étudier comment varie la pression suivant OX, on pourrait partir de la première équation d'Euler en explicitant la valeur de la force de frottement par unité de masse en fonction des divers paramètres dont elle peut dépendre.

Mais il est plus simple d'*appliquer à l'ensemble du courant l'équation de Bernoulli* qui résulte d'ailleurs des équations d'Euler comme nous l'avons montré en hydrodynamique.

Comme ici il nous faut tenir compte des forces de frottement, nous utiliserons l'équation de Bernoulli sous sa forme généralisée et puisque nous l'appliquons à un courant liquide, nous y introduirons la vitesse moyenne U du courant affectée du coefficient α.

En définitive l'équation de Bernoulli s'écrira :

$$h + \frac{p}{\overline{\omega}} + \alpha \frac{U^2}{2g} + j = C^{te}$$

Rappelons que cette relation n'est valable que le long du courant c'est-à-dire, ici, dans la direction OX.

Dérivons l'équation par rapport à x :

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\overline{\omega}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{U^2}{2g}\right) + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

Evaluons chaque terme du premier membre :

1^er terme :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\sin i \quad \text{(fig. VII.4.4)}$$

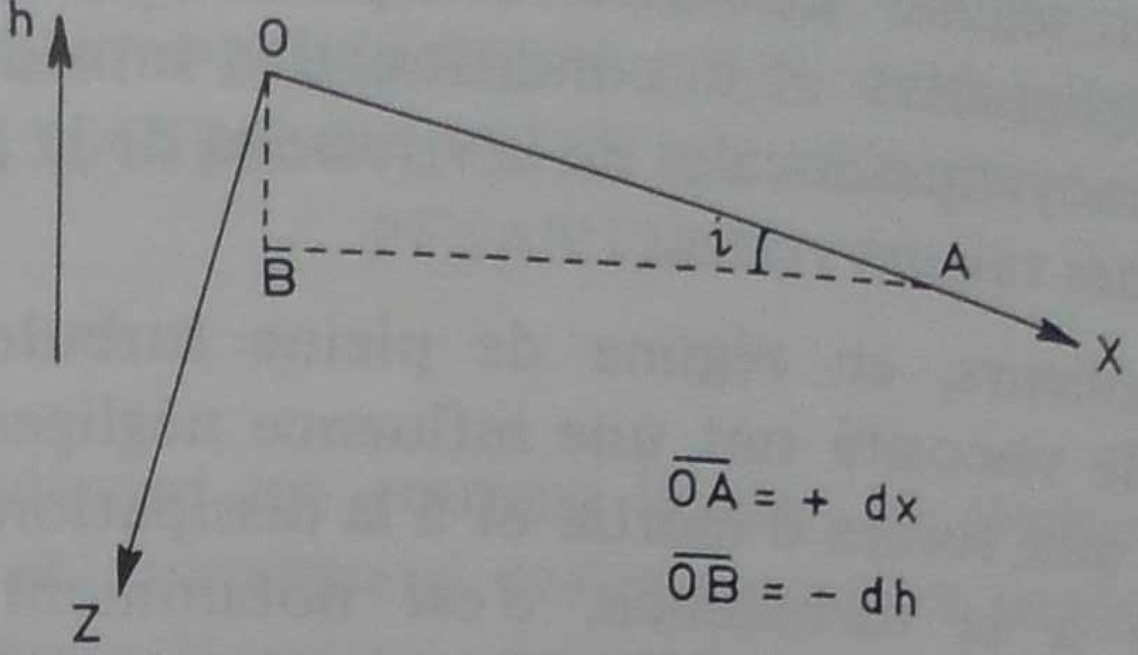


Fig. VII.4.4

2^ème terme : La troisième équation d'Euler donne :

$$p = p_0 + \overline{\omega} z \cos i$$

Dérivons par rapport à x en maintenant y et z constants :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

3^ème terme : La vitesse moyenne U ne peut varier qu'avec x puisque le régime est permanent ; on peut donc remplacer $\frac{\partial}{\partial x}$ par $\frac{d}{dx}$. En supposant α constant avec x, le terme considéré s'écrit donc :

$$\alpha \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

4^ème terme : Nous savons que j représente l'énergie absorbée par les frottements par unité de poids du liquide.

Les forces de frottement étant dirigées suivant OX, j ne varie pas avec y et z et comme le régime est permanent il ne varie pas non plus avec t.

On peut donc remplacer $\partial j/\partial x$ par dj/dx

dj représente l'énergie absorbée par les frottements, par unité de poids du liquide, *sur la distance dx*.

A l'intérieur du courant, la somme des projections sur l'axe des x des forces de frottement des filets liquides est nulle, par application du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Il reste donc les frottements de la tranche de courant d'épaisseur dx sur les parois du dispositif solide qui guide la masse liquide en écoulement.

Désignons par B le périmètre mouillé.

Il est logique d'admettre que la *force de frottement* le long de l'élément de paroi de longueur dx est

proportionnelle à la surface de cet élément c'est-à-dire à $B\,dx$ et au poids volumique du liquide $\overline{\omega}$.

Enfin, compte-tenu des phénomènes complexes qui se produisent dans la couche-limite et nous appuyant sur les résultats de l'expérience qui vient ici remédier à la complexité de la théorie, nous écrirons que la force de frottement considérée est une fonction de la vitesse moyenne U, cette fonction $\varphi(U)$ intégrant le coefficient de proportionnalité, la viscosité et la turbulence du liquide et l'incidence de la rugosité des parois.

Cette fonction $\varphi(U)$ devra être déterminée par l'expérience ; a priori, son expression doit dépendre de la nature de l'écoulement dans la couche-limite (régime laminaire ou turbulent) ce qui obligera à faire intervenir pratiquement dans l'expression de $\varphi(U)$ la nature et la rugosité des parois et le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement.

En définitive, sur l'élément de paroi considéré la *force* élémentaire de frottement aura pour expression

$$\overline{\omega} B \varphi(U)\, dx$$

Par unité de poids du liquide elle sera donc

$$\frac{B}{\Omega}\varphi(U)$$

L'énergie dj correspondante dissipée sur la longueur dx est donc

$$dj = \frac{B}{\Omega}\varphi(U)\, dx$$

$$\frac{dj}{dx} = \frac{B}{\Omega}\varphi(U) \quad ,$$

c'est aussi la *perte de charge par mètre J*.

L'équation de Bernoulli s'écrit donc :

$$-\sin i + \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial x} + \alpha \frac{d}{dx}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{B}{\Omega}\varphi(U) = 0$$

ou, enfin, en remarquant que $dx = ds$ élément de la trajectoire du courant :

$$\boxed{\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{B}{\Omega}\varphi(U) + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)}$$

[*VII.4.1*]

qu'on peut écrire également, en introduisant la pression étoilée $p^* = p + \overline{\omega} h$:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0^*}{\partial s} + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) + \frac{B}{\Omega}\varphi(U) = 0}$$

[*VII.4.2*]

C'est l'équation générale fondamentale du mouvement permanent d'un courant liquide sensiblement rectiligne à section à peu près constante ou très lentement variable.

Remarquons que la fonction $\varphi(U)$ tient compte de la loi de variation de la vitesse dans une section transversale du courant, c'est-à-dire de l'incidence des frottements intérieurs (turbulence et viscosité) jusqu'à la paroi. Cela revient, en somme, à remplacer fictivement le mouvement du courant liquide par couches concentriques ou par tranches parallèles par un mouvement "en bloc", les frottements étant reportés sur les parois, en donnant à la fonction $\varphi(U)$ une expression telle que, dans les deux cas (fiction et réalité), l'énergie absorbée soit la même.

Remarquons enfin que $\sin i$ représente la hauteur dont s'abaisse ou s'élève une particule liquide sur une longueur de déplacement égale à l'unité ; le premier membre de l'équation [*VII.4.1*] représente donc la variation correspondante de l'énergie potentielle et le second représente la somme de l'énergie absorbée par les frottements et de la variation de l'énergie cinétique.

En définitive les équations [*VII.4.1*] et [*VII.4.2*] traduisent la conservation de l'énergie tout le long du courant liquide considéré.

Rappelons que l'inverse du rapport B/Ω porte le nom de *rayon hydraulique moyen* de la section transversale considérée, soit $R = \Omega/B$.

Application de l'équation générale à deux cas particuliers usuels : section circulaire et section rectangulaire.

a) *Section circulaire* de diamètre D

$$B = \pi D$$

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\frac{B}{\Omega} = \frac{4}{D}$$

L'équation devient alors :

$$\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{4}{D}\varphi(U) + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

Dans le cas particulier du *régime uniforme*, $U = C^{te}$ et l'équation se réduit à :

$$\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{4}{D}\varphi(U)$$

Le premier membre représente la variation de l'énergie potentielle (c'est-à-dire de l'énergie totale puisque l'énergie cinétique est constante en régime uniforme) d'une particule de poids unité sur une distance unité, c'est donc la perte de charge par mètre J.

Donc :

$$J = \frac{4}{D}\varphi(U)$$

ou :

$$\frac{1}{4}DJ = \varphi(U)$$

équation que nous retrouverons à propos de l'écoulement dans les canalisations de section constante (chapitre XI).

b) *Section rectangulaire d'un courant à surface libre (canal).*

Soient l la largeur et H la hauteur (fig. VII.4.5) :

$$B = l + 2H$$

$$\Omega = lH$$

$$\frac{B}{\Omega} = \frac{l+2H}{lH} = \frac{1}{R}$$

L'origine O des axes ayant été choisi arbitrairement dans la section transversale, plaçons-le sur la surface libre ; l'axe OX est donc dans la surface libre de sorte que :

$$p_0 = p_a \quad \text{(pression atmosphérique)}$$

et, par suite :

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$$

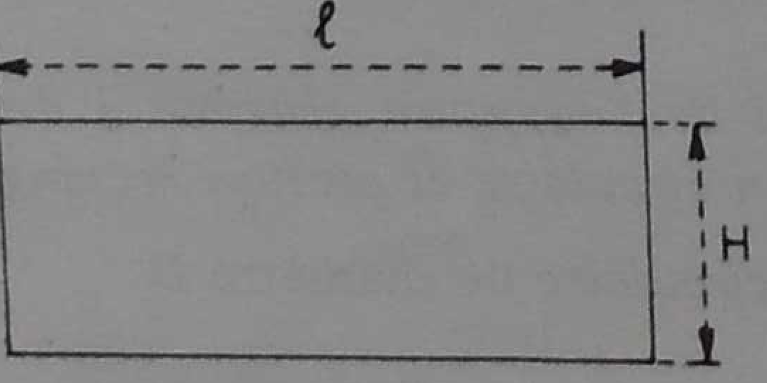


Fig. VII.4.5

Par ailleurs, l'angle i est toujours petit et on peut admettre $\sin i \simeq \operatorname{tg} i = I$, pente longitudinale de la surface libre. L'équation [*VII.4.1*] s'écrit ainsi :

$$I = \frac{1}{R}\varphi(U) + \alpha\frac{d}{ds}\frac{U^2}{2g}$$

Dans le cas particulier du *régime uniforme*, $U = C^{te}$ et l'équation se réduit à :

$$I = \frac{1}{R}\varphi(U) \quad \text{ou} \quad RI = \varphi(U)$$

équation que nous retrouverons à propos de l'écoulement dans les canaux en régime uniforme (chapitre XII).

Si, ce qui se produit souvent dans un cours d'eau, *la largeur est très grande par rapport à la profondeur*, on peut négliger $2H$ devant l et écrire :

$$\frac{l+2H}{lH} \simeq \frac{l}{lH} = \frac{1}{H}$$

d'où :

$$I = \frac{\varphi(U)}{H} + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

qui, dans le cas particulier du mouvement uniforme, devient :

$$HI = \varphi(U)$$

C'est l'équation générale du mouvement uniforme dans les rivières dont la profondeur est négligeable par rapport à la largeur.

Courant liquide en mouvement uniforme

Quelle que soit la forme de la section transversale, l'équation de l'écoulement sera l'équation [*VII.4.1*] ou [*VII.4.2*] dans laquelle $U = C^{te}$, soit

$$\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{B}{\Omega}\varphi(U) \qquad [VII.4.3]$$

ou

$$\frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0^*}{\partial s} + \frac{B}{\Omega}\varphi(U) = 0 \qquad [VII.4.4]$$

VII.5. APPLICATION AU COURANT LIQUIDE DU THÉORÈME DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT : THÉORÈME D'EULER

Dans la mécanique rationnelle du point et du système matériel deux théorèmes jouent un rôle fondamental et ont chacun leur homologue en mécanique des liquides :

— *le théorème de l'énergie cinétique* auquel correspond, en hydraulique, le *théorème de Bernoulli*,

— *le théorème des quantités de mouvement* auquel correspond le *théorème d'Euler*.

Chacun de ces deux théorèmes peut se démontrer à partir des équations générales du mouvement (nous l'avons fait pour le théorème de Bernoulli). On peut

également les établir directement : c'est ce dernier procédé que nous utiliserons pour le théorème d'Euler.

VII.5.1. Théorème d'Euler

Considérons au temps t, dans une masse liquide en mouvement permanent, un filet liquide $ABCD$ limité à ses deux sections terminales $AB = d\Omega_1$ et $CD = d\Omega_2$ (fig. VII.5.1).

Le théorème des quantités de mouvement appliqué à la masse liquide contenue à l'intérieur de ce filet exprime que la dérivée par rapport au temps de la somme des quantités de mouvement de cette masse liquide est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées, soit

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\vec{v} = \Sigma \vec{F}_e$$

$d\Sigma m\vec{v}$ est la variation infiniment petite de la quantité de mouvement de la masse liquide $ABCD$ pendant l'intervalle de temps dt qui suit le temps t. Pendant cet intervalle de temps dt, la masse $ABCD$ est venue en $A'B'C'D'$ telle que

$$\text{Vol. } AB\,A'B' = \text{Vol. } CD\,C'D' = dq\,dt$$

dq désignant le débit du filet liquide (dq est constant puisque le régime est supposé permanent).

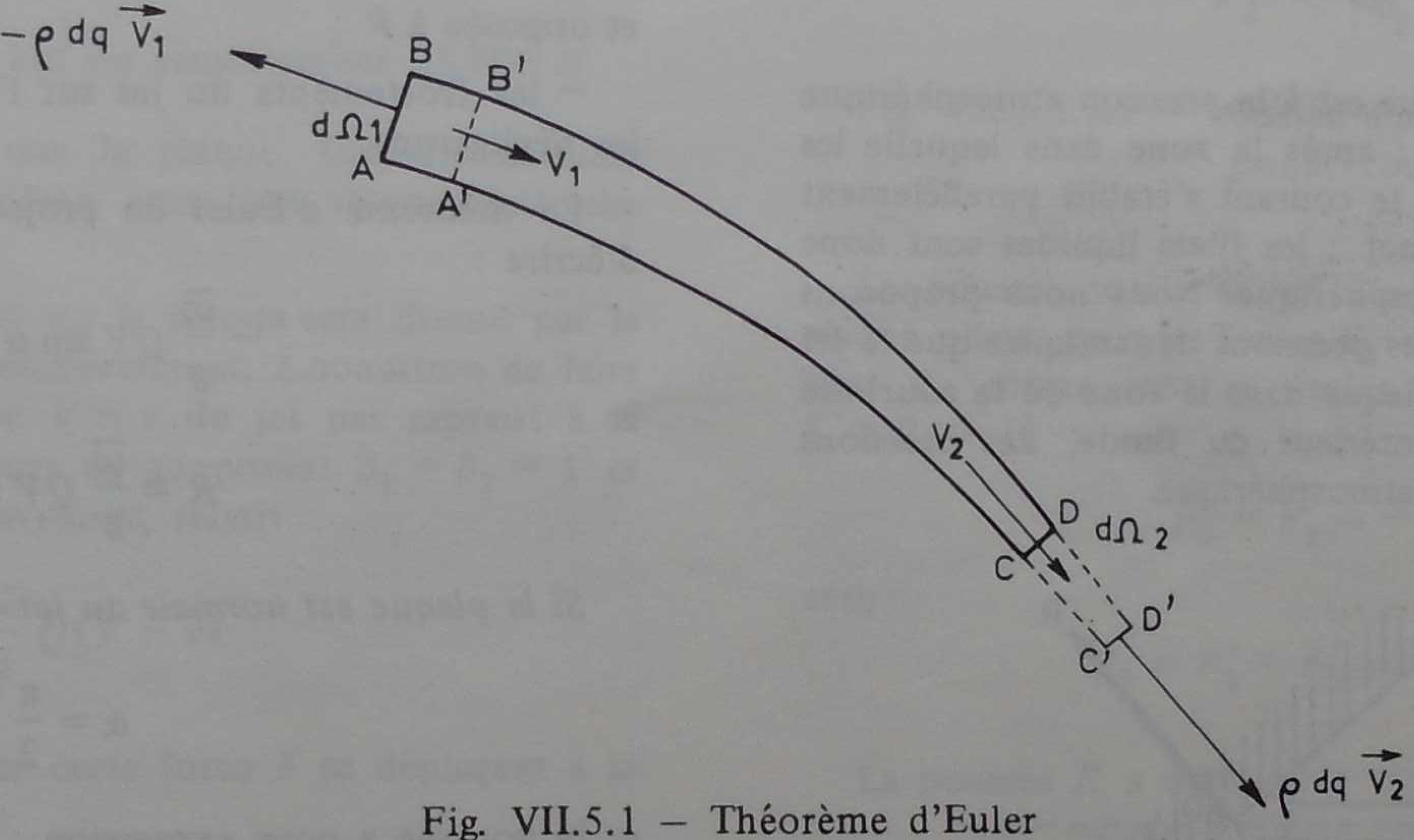


Fig. VII.5.1 – Théorème d'Euler

Le mouvement étant permanent la quantité de mouvement de la partie commune $A'B'CD$ n'a pas changé et la variation de la quantité de mouvement de la masse fluide considérée est égale à la différence des quantités de mouvement de la masse liquide $CD\,C'D'$ (soit : $\rho\,dq\,\vec{V}_2 dt$) et de la masse liquide $AB\,A'B'$ (soit : $\rho\,dq\,\vec{V}_1 dt$). On a donc :

$$d\Sigma m\vec{v} = \rho\,dq\,dt\,(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

et

$$\frac{d\Sigma\,(m\vec{v})}{dt} = \rho\,dq\,(\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Le théorème s'écrira donc, pour le filet liquide considéré :

$$\rho\,dq\,(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \Sigma\vec{F}_e$$

La somme des forces extérieures $\Sigma\vec{F}_e$ appliquées au filet liquide est donc équivalente à la somme des deux forces $\rho\,dq\,\vec{V}_2$ et $-\rho\,dq\,\vec{V}_1$ appliquées respectivement sur les sections CD et AB (fig. VII.5.1).

Généralement on étend ce résultat à un *courant de dimensions transversales finies* en faisant intervenir les vitesses moyennes U_1 et U_2 dans les sections transversales limitant la masse fluide considérée. Dans ce cas, pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses dans ces sections ont doit, en toute rigueur, introduire le coefficient $\beta = 1 + \eta$ défini précédemment. On écrira donc le théorème sous la forme :

$$\boxed{\beta_2\,\frac{\overline{\omega}}{g}\,Q\vec{U}_2 - \beta_1\,\frac{\overline{\omega}}{g}\,Q\vec{U}_1 = \Sigma\vec{F}_e}$$

Comme pour le théorème des quantités de mouvement, les forces intérieures n'interviennent pas dans l'expression du théorème d'Euler qui ne préjuge donc pas de la nature de l'écoulement entre les sections AB et CD ; c'est ce qui rend son utilisation particulièrement commode dans le cas où, du fait d'une singularité par exemple, l'écoulement est très troublé dans l'espace considéré.

Le plus souvent enfin, le théorème est appliqué en projection sur un axe de direction déterminée ; on choisit généralement cette direction de manière que la projection des forces inconnues non négligeables y soit nulle.

VII.5.2. Application au calcul de la poussée exercée par un jet horizontal sur une plaque

VII.5.2.1. *Plaque plane*

Soit un jet horizontal animé d'une vitesse $\vec{V}$ heurtant une plaque verticale dont le plan fait l'angle α avec la direction du jet lequel est dévié ensuite selon une direction parallèle à la plaque (fig. VII.5.2.1.1).

Prenons comme plan de figure le plan horizontal passant par l'axe du jet.

Le jet supposé cylindrique est à la pression atmosphérique avant d'aborder la plaque ; après la zone dans laquelle les trajectoires sont incurvées, le courant s'établit parallèlement à la plaque et à son contact ; les filets liquides sont donc encore à la pression atmosphérique. Nous nous proposons d'évaluer la résultante R des pressions dynamiques que le jet exerce normalement à la plaque dans la zone où la courbure des trajectoires crée, à l'intérieur du fluide, des pressions différentes de la pression atmosphérique.

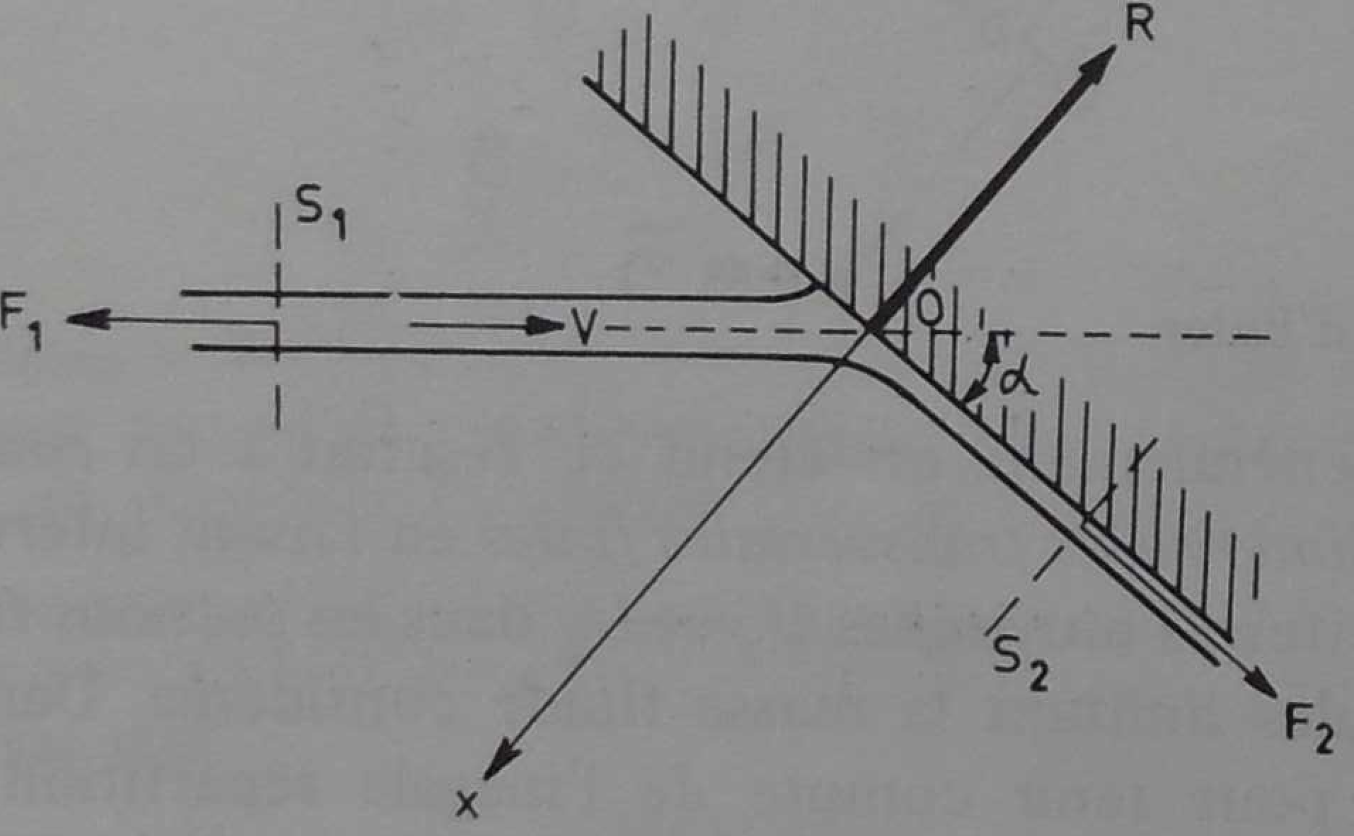


Fig. VII.5.2.1.1 – Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane inclinée sur l'axe du jet

Appliquons le théorème d'Euler à la portion de fluide comprise entre deux sections S_1 et S_2 situées respectivement à l'amont et à l'aval du point d'impact du jet et suffisamment éloignées de celui-ci pour que la pression y soit égale à la pression atmosphérique.

Négligeons les coefficients η_1 et η_2, c'est-à-dire admettons $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

La résultante des forces appliquées à cette portion de fluide est équivalente au système des deux forces suivantes :

$\vec{F}_1 = -\frac{\overline{\omega}}{g} Q\vec{V}$ appliquée en S_1 et opposée à $\vec{V}$;

$\vec{F}_2$ tangente à la plaque et égale à la quantité de mouvement du courant à la traversée de S_2. Comme nous ne connaissons pas $\vec{F}_2$ nous appliquerons le théorème d'Euler en projection sur un axe Ox normal à la plaque, c'est-à-dire horizontal, de manière que la projection de $\vec{F}_2$ sur cet axe soit nulle.

La projection de $\vec{F}_1$ a pour valeur :

$$-\frac{\overline{\omega}}{g} QV \sin\alpha$$

Les forces extérieures appliquées sur le fluide sont :

— le poids dont la projection sur Ox est nul ;

— les pressions partout égales à la pression atmosphérique (c'est-à-dire nulles puisque nous ne considérons que les pressions effectives) sauf au voisinage du point d'impact où la plaque exerce sur le jet une pression dynamique totale égale et opposée à R ;

— les frottements du jet sur l'air et sur la plaque ; nous les négligerons.

Le théorème d'Euler en projection sur Ox permet donc d'écrire :

$$-\frac{\overline{\omega}}{g} QV \sin\alpha = -R$$

$$R = \frac{\overline{\omega}}{g} QV \sin\alpha$$

Si la plaque est normale au jet (fig. VII.5.2.1.2) :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

et la poussée a pour expression :

$$R = \frac{\overline{\omega}}{g} QV$$

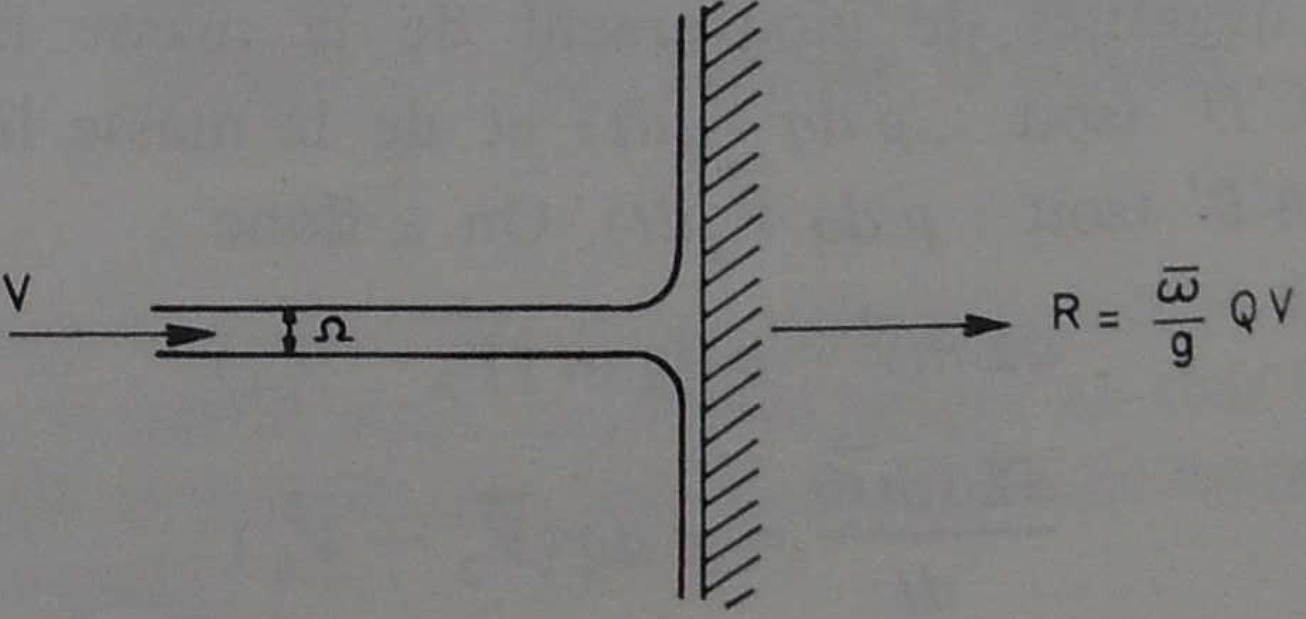


Fig. VII.5.2.1.2 – Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane normale à l'axe du jet

Soit Ω la section droite du jet ; on peut écrire :

$$R = \frac{\overline{\omega}}{g} \Omega V^2 = 2\overline{\omega} \frac{V^2}{2g} \Omega$$

$$\frac{R}{\Omega} = 2\overline{\omega} \frac{V^2}{2g}$$

R/Ω constitue, en quelque sorte, la pression dynamique par unité de section du jet. Cette pression unitaire du jet est donc égale au double de la pression due à la vitesse.

Par exemple, pour un jet de 1 dm^2 de section droite animé d'une vitesse de 50 m/s, on obtient :

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{50^2}{20} = 125 \text{ m d'eau}.$$

La poussée unitaire est donc :

$$\frac{R}{\Omega} = 125 \times 2 = 250 \text{ m d'eau, soit sensiblement 25 bars.}$$

et la poussée totale a pour valeur :

$$R = 25 \times 100 = 2.500 \text{ kgf ou sensiblement } 25.000\ N$$

Supposons maintenant que la plaque, toujours normale au jet, soit *mobile* elle-même avec une vitesse uniforme $v < V$ parallèle à V.

L'effort exercé par le jet sur la plaque sera donné par le même raisonnement que précédemment, à condition de faire intervenir la vitesse relative $V - v$ du jet par rapport à la plaque. On a donc, toujours en supposant $\beta_1 = \beta_2 = 1$ et en raisonnant dans le mouvement relatif :

$$F = \frac{\overline{\omega}}{g} Q (V - v)$$

La *puissance fournie* par cette force F se déplaçant à la vitesse v sera donc :

$$P = Fv = \frac{\overline{\omega}}{g} Qv(V - v)$$

Elle s'annule pour $v = 0$ et $v = V$ et est maximale pour $v = V/2$.

La valeur de cette puissance maximale sera :

$$P_m = \frac{\overline{\omega}}{g} Q \left(V - \frac{V}{2}\right)\frac{V}{2} = \frac{\overline{\omega}}{g} Q \frac{V^2}{4}$$

La puissance du jet correspond uniquement à son énergie cinétique puisqu'il s'écoule horizontalement à la pression atmosphérique. Cette puissance est donc

$$P_1 = \frac{\overline{\omega}}{g} Q \frac{V^2}{2}$$

On constate donc que le rendement maximal correspond à une vitesse de la plaque égale à la moitié de celle du jet et que ce rendement maximal a pour valeur :

$$\eta_m = \frac{P_m}{P_1} = 0,5$$

VII.5.2.2. *Plaque courbe* (fig. VII.5.2.2.1)

Supposons le jet toujours horizontal frappant l'arête d'une plaque cylindrique à génératrices verticales dont la directrice a la forme de deux demi-cercles accolés, de telle sorte que l'eau soit renvoyée sans perte de vitesse appréciable (en négligeant les frottements sur la plaque) suivant une direction parallèle et opposée à celle du jet.

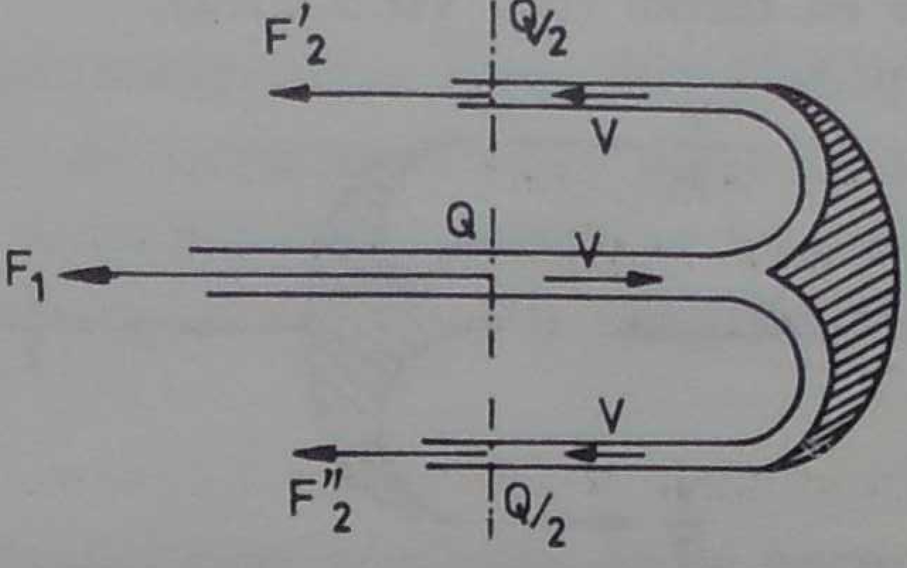


Fig. VII.5.2.2.1 – Poussée d'un jet horizontal sur une plaque courbe

La poussée totale se calcule comme dans le cas d'une plaque plane, mais les forces F_1 et F_2 sont maintenant parallèles, de même sens et égales à (en supposant toujours $\beta_1 = \beta_2 = 1$) :

$$F_1 = F_2 = -\frac{\overline{\omega}}{g} QV$$

avec :

$$F_2 = F_2' + F_2'' = -2\frac{\overline{\omega}}{g}\frac{Q}{2} V$$

La poussée R a donc pour valeur :

$$R = 2\frac{\overline{\omega}}{g} QV = 4\overline{\omega}\frac{V^2}{2g}\Omega$$

La pression unitaire du jet R/Ω est donc le quadruple de la pression due à la vitesse (au lieu du double pour une plaque plane).

Si la plaque se déplace avec une vitesse $v < V$ et parallèle à V, l'effort exercé par le jet est égal à :

$$F = 2\frac{\overline{\omega}}{g} Q (V - v)$$

La puissance correspondante est donc :

$$Fv = P = 2\frac{\overline{\omega}}{g} Qv(V - v)$$

P est maximale pour $v = \dfrac{V}{2}$ et a pour valeur :

$$P_m = \overline{\omega} Q \frac{V^2}{2g}$$

c'est-à-dire la puissance P_1 du jet.

Le *rendement maximal est donc maintenant égal à l'unité* soit le double de celui obtenu avec une plaque plane ; ce résultat reçoit une application pratique dans la forme des augets des *turbines Pelton.* Pour obtenir le rendement maximal on règle la vitesse de la roue de telle façon que la vitesse linéaire de l'auget soit la moitié de la vitesse du jet à la sortie de la buse. A la sortie de l'auget la vitesse de l'eau est $V/2$ par rapport à l'auget, mais elle est orientée en sens inverse du mouvement de l'auget ; la vitesse absolue de l'eau qui quitte l'auget est donc nulle, toute son énergie cinétique a été transformée en travail (fig. VII.5.2.2.2).

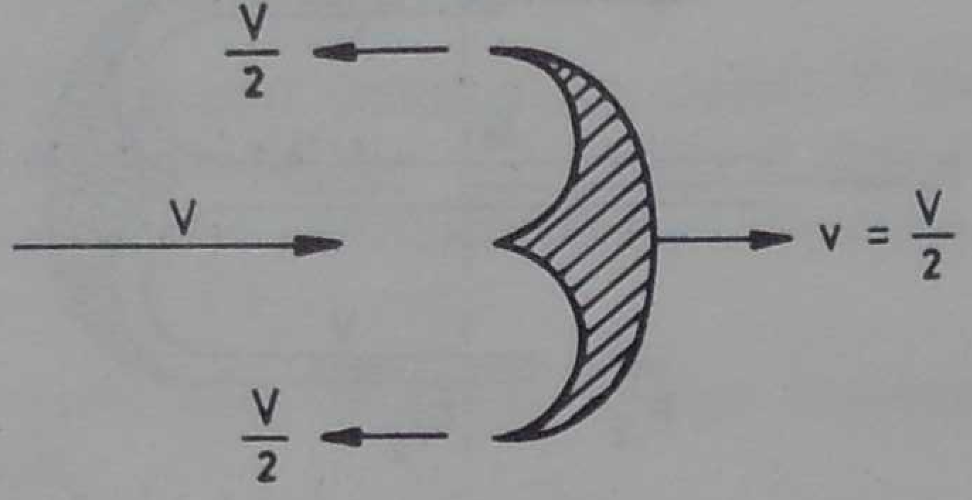


Fig. VII.5.2.2.2

VII.5.3. Application au calcul de la poussée sur un coude de conduite horizontal

Considérons un coude de conduite horizontal, à l'intérieur duquel le débit est Q et la vitesse moyenne est V. Soit α l'angle du coude. En première approximation négligeons les pertes de charge et appliquons le théorème d'Euler à la masse liquide limitée par deux sections S_1 et S_2 d'aire Ω situées respectivement à l'amont et à l'aval du coude (fig. VII.5.3.1).

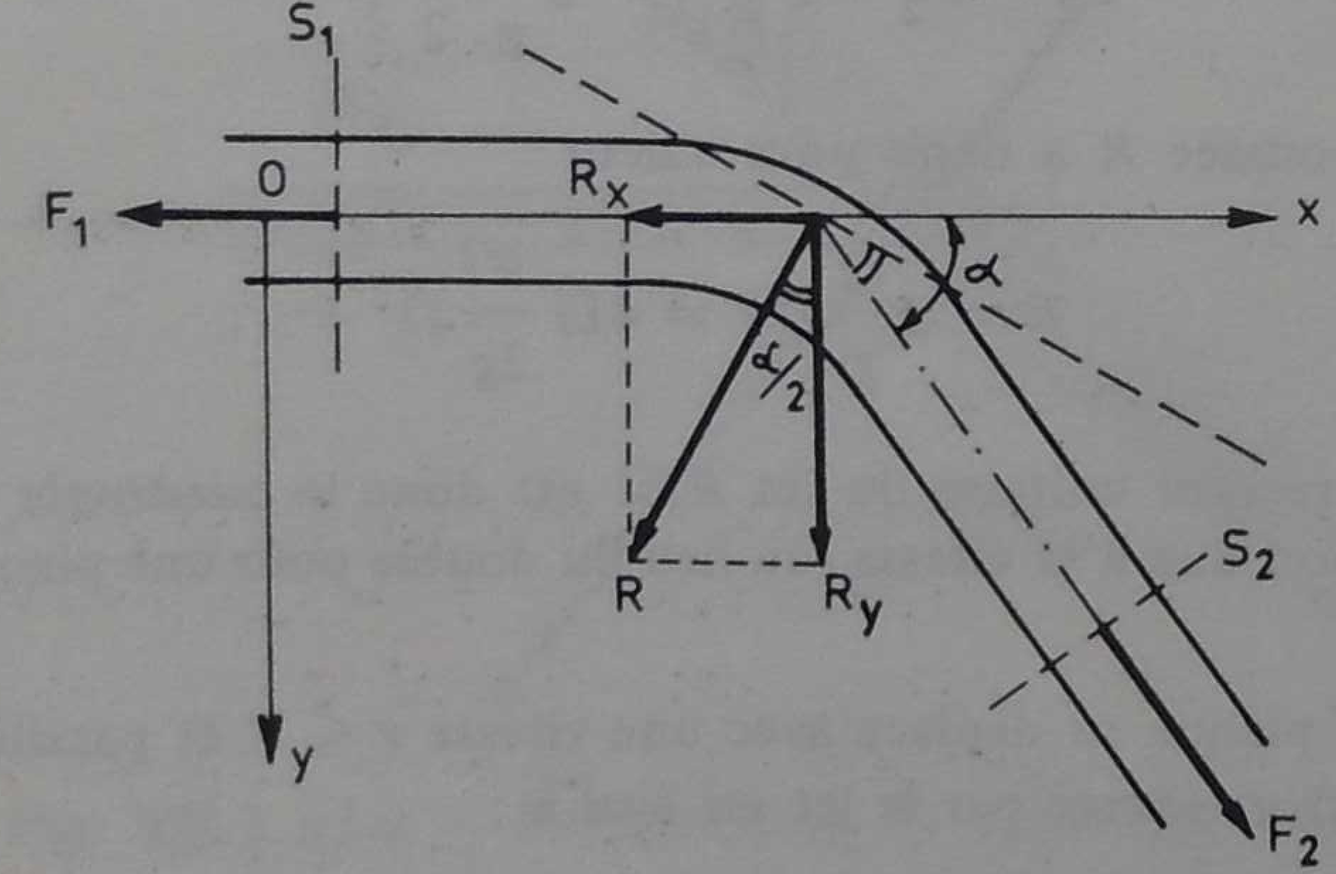


Fig. VII.5.3.1 – Poussée sur un coude de conduite horizontal

En supposant $\beta = 1$, les forces F_1 et F_2, égales chacune à $(\overline{\omega}/g)\,QV$, sont équivalentes à la résultante des forces extérieures agissant sur la masse liquide considérée.

Ces forces comprennent :

– les pressions $p_1\Omega$ et $p_2\Omega$ sur les sections extrêmes ;

– la réaction R des parois sur le liquide ;

– le poids de la masse liquide considérée.

Par raison de symétrie (les pertes de charge étant négligées donc $p_1\Omega = p_2\Omega = p\Omega$), R est dirigée suivant la bissectrice intérieure de l'angle des deux directions des axes des conduites constituant le coude.

Choisissons les axes Ox et Oy indiqués sur la figure : Ox confondu avec l'axe de la conduite à l'amont du coude et Oy perpendiculaire à Ox dans le plan du coude et orienté positivement vers l'intérieur du coude. Le plan xOy (plan de figure) est donc confondu avec le plan du coude et horizontal.

Appliquons le théorème d'Euler en projection sur l'axe Oy :

$$F_2 \sin\alpha = R_y - p_2\Omega \sin\alpha$$

$$R_y = \left(\frac{\overline{\omega}}{g}\,QV + p\Omega\right)\sin\alpha$$

La réaction R a donc pour expression :

$$R = \frac{R_y}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$R = 2\left(\frac{\overline{\omega}}{g}\,QV + p\Omega\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

Pour un coude à angle droit on a donc :

$$R = \left(\frac{\overline{\omega}}{g}\,QV + p\Omega\right)\sqrt{2}$$

Dans le cas général (α quelconque), la réaction R qui devra être supportée par le massif de butée du coude comprend deux parties :

– l'une provenant de la pression proprement dite :

$$2p\Omega\sin\frac{\alpha}{2}$$

– l'autre provenant de la pression dynamique et résultant de l'écoulement :

$$2\frac{\overline{\omega}}{g}\,QV\sin\frac{\alpha}{2}$$

Si on veut tenir compte des pertes de charge, il faut distinguer les pressions p_1 et p_2 dans les sections S_1 et S_2.

Le calcul se conduit de la même manière (fig. VII.5.3.2).

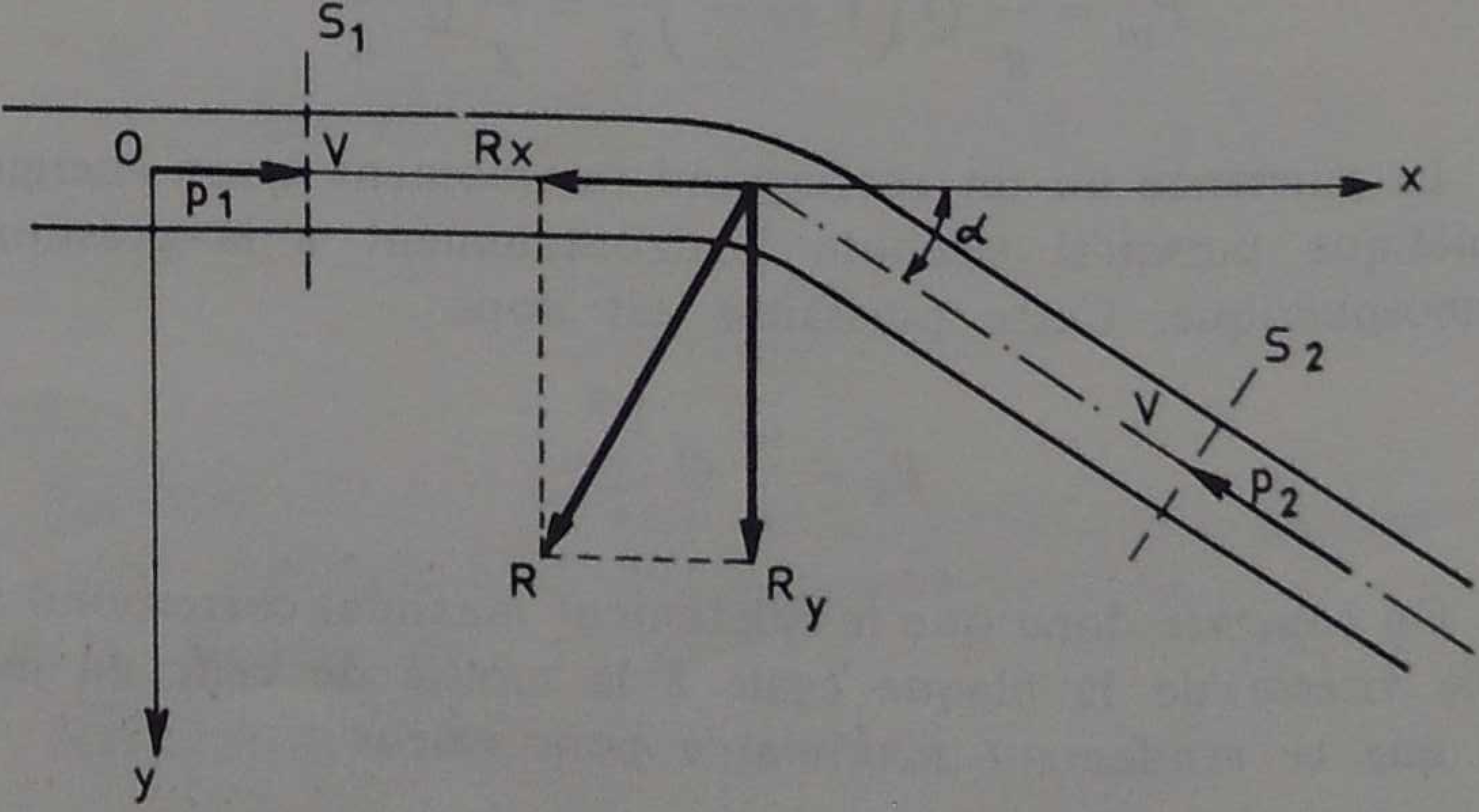


Fig. VII.5.3.2 – Poussée sur un coude de conduite horizontal, compte-tenu des pertes de charge

En projection sur Ox les forces extérieures se réduisent à :

$$p_1\Omega - R_x - p_2\Omega \cos\alpha$$

et le théorème d'Euler donne en projection sur Ox :

$$\frac{\overline{\omega}}{g} QV(\cos\alpha - 1) = p_1\Omega - R_x - p_2\Omega\cos\alpha$$

$$R_x = \Omega(p_1 - p_2\cos\alpha) + \frac{\overline{\omega}}{g} QV(1 - \cos\alpha)$$

On aurait de même sur Oy :

$$\frac{\overline{\omega}}{g} QV \sin\alpha = R_y - p_2\Omega\sin\alpha$$

$$R_y = \frac{\overline{\omega}}{g} QV\sin\alpha + p_2\Omega\sin\alpha$$

avec

$$\frac{p_1 - p_2}{\overline{\omega}} = j_{1-2} = k\frac{V^2}{2g}$$

(perte de charge singulière due au coude)

On a supposé que les pressions et les vitesses étaient uniformément réparties dans les sections S_1 et S_2. Or en fait, comme nous le verrons plus loin (chapitre XI), à la sortie du coude l'écoulement est très perturbé sur une grande longueur, de sorte que si on veut tenir compte de la variation des pressions et des vitesses dans l'étendue des sections, on doit, en toute rigueur, remplacer dans les formules précédentes :

$$p_1\Omega \quad \text{par} \quad \int_{\Omega_1} p\, d\omega$$

$$p_2\Omega \quad \text{par} \quad \int_{\Omega_2} p\, d\omega$$

$$\frac{\overline{\omega}}{g} QV_1 \quad \text{par} \quad \frac{\overline{\omega}}{g}\int_{\Omega_1} V^2 d\omega = \beta_1\frac{\overline{\omega}}{g} QV$$

et : $$\frac{\overline{\omega}}{g} QV_2 \quad \text{par} \quad \frac{\overline{\omega}}{g}\int_{\Omega_2} V^2 d\omega = \beta_2\frac{\overline{\omega}}{g} QV$$

Pratiquement, les formules approximatives précédentes donnent des résultats suffisamment exacts pour les besoins courants.

VII.6. PERTE DE CHARGE LE LONG D'UN COURANT LIQUIDE

La perte de charge ou perte d'énergie le long d'un courant liquide qui est représentée par le terme $(B/\Omega)\,\varphi(U)$ de l'équation générale [*VII.4.1*] est due aux frottements des molécules liquides entre elles et contre les parois du dispositif solide qui guide le courant.

Ces frottements interviennent dès que le mouvement se produit puisqu'ils résultent de la viscosité du liquide et de la turbulence du régime : ils apparaissent aussi bien dans un écoulement rectiligne de section constante ou très progressivement variable (qui est le cas de l'équation générale [*VII.4.1*]) que lorsqu'il se rencontre une singularité brusque dans la direction du courant ou dans la forme ou l'étendue de sa section transversale.

Nous commencerons donc par établir l'expression générale de la perte de charge dans un ouvrage quelconque et nous étudierons ensuite les pertes de charge locales provoquées par une singularité dans l'écoulement.

VII.6.1. Expression générale de la perte de charge — Utilisation de l'analyse dimensionnelle

La recherche de l'expression générale de la perte de charge résultant de l'écoulement dans un ouvrage quelconque (canal, canalisation, etc .) constitue une application remarquable de l'analyse dimensionnelle dont l'utilisation en hydraulique est très fréquente. Nous rappellerons donc, en préambule, le principe et le théorème fondamental de l'analyse dimensionnelle, puis nous en montrerons l'application en hydraulique, en particulier pour la recherche de l'expression générale de la perte de charge.

VII.6.1.1. *Principe de l'analyse dimensionnelle — Théorème des π ou de Vaschy-Buckingham* (1)

Rappelons qu'une loi physique concrétisée par une relation entre un certain nombre de grandeurs (longueurs, vitesses, masses, temps, accélérations, forces, etc . . .) est indépendante des unités employées pour exprimer les valeurs numériques des diverses grandeurs qui interviennent dans la dite relation. La théorie de l'analyse dimensionnelle permet précisément de déterminer la forme la plus simple que peut revêtir une loi reliant un certain nombre de grandeurs physiques.

Le théorème fondamental de l'analyse dimensionnelle est le *théorème des π* ou *théorème de Vaschy-Buckingham* ; il s'énonce ainsi :

- - - - - - - - - - - -

(1) Ce théorème a été énoncé par Vaschy en 1890 puis, de manière plus précise, par Buckingham en 1915.

Si n est le nombre des *grandeurs physiques* caractérisant le phénomène étudié et r le nombre des *grandeurs fondamentales* intervenant dans la définition de ces n grandeurs, la forme la plus simple de la relation qui existe entre ces n grandeurs est une relation entre les $n - r$ produits indépendants et sans dimension(1) qui constituent la série complète des produits indépendants et adimensionnels que l'on peut former avec les n grandeurs considérées.

Ces $n - r$ produits sans dimension sont constitués par des *groupements monômes* contenant deux ou plusieurs des n grandeurs caractérisant le phénomène étudié. Ils doivent être *indépendants* en ce sens que l'un deux ne doit pas être le résultat de la combinaison de deux ou plusieurs autres.

VII.6.1.2. *Application de l'analyse dimensionnelle en hydraulique*

Les diverses grandeurs physiques qui interviennent en hydraulique sont en nombre limité et les produits sans dimension que l'on peut former avec elles dérivent le plus souvent de quelques produits simples dont nous avons déjà rencontré quelques-uns au cours des chapitres précédents. La plupart de ces produits ont reçu le nom de l'auteur qui les a, le premier, introduits dans la littérature hydraulique.

Voici les principaux *produits adimensionnels de l'hydraulique* :

— *Nombre d'Euler ou nombre de Newton* : $\mathcal{E} = p/\rho V^2$ qui représente le rapport des forces de pression aux forces d'inertie.

— *Nombre de Reynolds* : $\mathcal{R} = UD/\nu$ qui représente le rapport des forces d'inertie et de turbulence aux forces de viscosité comme nous l'avons montré précédemment.

— *Nombre de Froude* : $\mathcal{F} = V/\sqrt{gh}$ qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de pesanteur.

— *Nombre de Mach* : $\mathcal{M} = \dfrac{V}{\sqrt{K/\rho}}$ qui représente le rapport de la vitesse du fluide à la vitesse du son dans ce fluide : $C = \sqrt{K/\rho}$ où K est la compressibilité volumique du fluide, soit $K = \dfrac{dp}{dV/V} = \dfrac{dp}{d\rho/\rho}$.

— *Nombre de Cauchy* : $Ca = \rho V^2/K$ qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de compressibilité ; il est égal au carré du nombre de Mach.

— *Nombre de Weber* : $We = \rho V^2 (D/A)$ où A est la tension superficielle ; il représente donc le rapport des forces d'inertie aux forces de capillarité.

Nous aurons l'occasion de retrouver la plupart de ces produits adimensionnels au cours des chapitres suivants, en particulier lors de l'étude de la similitude en hydraulique (chapitre XIV).

VII.6.1.3. *Application à l'établissement de l'expression de la perte de charge dans un écoulement rectiligne de section transversale constante*

Considérons un écoulement en régime permanent de débit Q dans un canal ou une canalisation rectiligne de section transversale constante ; une dimension caractéristique de cette section (rayon hydraulique moyen du canal, diamètre de la canalisation) est représentée par la longueur D.

Proposons-nous d'établir l'expression de la perte de charge Δj correspondant à l'écoulement sur la distance L représentant la longueur du tronçon rectiligne de la canalisation ou du canal considéré.

Les grandeurs physiques qui interviennent dans le problème ainsi posé sont :

1) Δp = perte de pression (cas d'une canalisation en charge) dont l'équation aux dimensions est $ML^{-1}T^{-2}$.

2) L = longueur du tronçon d'écoulement considéré dont l'équation aux dimensions est L.

3) D = dimension caractérisant la section transversale de l'écoulement dont l'équation aux dimensions est L.

4) k = dimension des aspérités de la paroi solide guidant la masse liquide dont l'équation aux dimensions est L.

Les paramètres L, D et k caractérisent la canalisation ou le canal considéré.

5) U = vitesse moyenne du fluide dont l'équation aux dimensions est LT^{-1}.

6) ρ = masse volumique du fluide dont l'équation est ML^{-3}.

7) ν = viscosité cinématique dont l'équation aux dimensions est L^2T^{-1}.

- - - - - - - - - - - - -

(1) Ces $n - r$ produits adimensionnels avaient été désignés par Buckingham par le terme "produits π", d'où le nom de "théorème des π" donné parfois au théorème de Vaschy-Buckingham.

Les paramètres U, ρ et ν caractérisent le fluide ; nous admettrons que les autres caractéristiques du fluide (tension superficielle) n'interviennent pas. D'autre part, nous n'introduirons pas g s'il s'agit d'un écoulement en charge (pour un écoulement à surface libre, il faudrait le faire intervenir, puisque $\Delta p = \overline{\omega}\Delta j = \rho g \Delta j$).

Nous avons donc sept grandeurs physiques caractérisant le phénomène étudié ($n = 7$) et trois grandeurs fondamentales (M, L et T) ($r = 3$). En application du théorème de Vaschy-Buckingham, la relation physique cherchée doit s'exprimer par une relation entre $n - r = 4$ produits sans dimension indépendants formés avec les sept grandeurs considérées, soit, par exemple :

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{U^2}{2}} = \varphi\left(\frac{L}{D}, \frac{UD}{\nu}, \frac{k}{D}\right)$$

Mais nous savons que Δp est proportionnel à L puisque l'écoulement est identique dans toutes les sections transversales. La relation peut donc s'écrire :

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{U^2}{2}} = \frac{L}{D}\, f\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{k}{D}\right)$$

Posons

$$\lambda = f\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{k}{D}\right)$$

Il vient :

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2}$$

Si on mesure Δp en hauteur de fluide, c'est-à-dire $\Delta p = \rho g \Delta j$, la perte de charge Δj peut s'exprimer par

$$\Delta j = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$$

et la perte de charge unitaire sera $\Delta j / L = J$, soit

$$J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \lambda = f\left(\mathcal{R}, \frac{k}{D}\right)$$

Autrement dit, le terme $(B/\Omega)\,\varphi(U)$ de l'équation générale fondamentale du mouvement permanent d'un courant liquide sensiblement rectiligne, à section à peu près constante ou très lentement variable (équation [*VII.4.1*]), représente la perte de charge unitaire et a pour expression générale :

$$\boxed{\frac{B}{\Omega}\varphi(U) = J = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}}$$

avec

$$\boxed{\lambda = f\left(\mathcal{R}, \frac{k}{D}\right)}$$

— *Remarques*

a) Le paramètre g ne s'introduit dans la formule finale que par un artifice indépendant de la loi physique considérée.

b) Les possibilités de l'analyse dimensionnelle se limitent à l'obtention de la loi ci-dessus. Il faut maintenant déterminer expérimentalement (ou théoriquement si on le peut) la fonction $\lambda = f(\mathcal{R}, k/D)$ ce qui est malgré tout plus simple (tout au moins quand on est obligé de faire appel à l'expérience) que de déterminer la fonction

$$\frac{\Delta p}{L} = f(D, k, U, \rho, \nu)$$

c) Chaque fois qu'une autre grandeur interviendra dans le phénomène le nombre des produits sans dimension sera augmenté d'une unité. Si, par exemple, la conduite n'est plus rectiligne mais enroulée en un serpentin de diamètre d et de pas m, la loi donnant la perte de charge sera, par exemple :

$$\frac{\Delta j}{L} = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g} \quad \text{avec} \quad \lambda = f\left(\mathcal{R}, \frac{k}{D}, \frac{d}{D}, \frac{m}{D}\right)$$

d) La série complète des produits sans dimension peut se former de diverses manières ; la compréhension et l'analyse physique du phénomène doivent cependant aider à choisir la meilleure façon de les établir. Dans l'exemple considéré il est, par exemple, assez logique de rapporter Δp à la pression dynamique $\rho(U^2/2)$, ce qui revient à introduire le nombre d'Euler, de même qu'il semble rationnel de rapporter k à D, ces deux dimensions étant mesurées dans le sens transversal au courant, plutôt qu'à L, cette dernière longueur étant ici arbitraire et mesurée dans le sens longitudinal.

e) En définitive, l'analyse dimensionnelle n'est pas susceptible de donner la loi du phénomène lui-même car elle ne donne ni la forme précise de cette loi ni ses coefficients numériques, mais, d'une part, elle permet d'expérimenter physiquement sur un modèle, d'autre part elle met de l'ordre dans les résultats, réduit le nombre des paramètres à faire intervenir et achemine vers la loi du phénomène étudié. En écartant certaines formes littérales, en permettant de reconnaître si une formule est fausse, elle a une valeur de recherche.

VII.6.2. Variations de la perte de charge d'un écoulement en fonction du nombre de Reynolds

Dans la formule générale obtenue précédemment

$$J = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g},$$

le coefficient adimensionnel λ est le même pour tous les systèmes géométriquement semblables, il ne change qu'avec la forme du système considéré.

L'expérience montre que l'allure générale de la variation de λ en fonction de $\mathcal{R}$ est donnée par la courbe représentée figure VII.6.2., étant entendu que la forme exacte de cette courbe dépend de la forme du système considéré et de la grandeur de k c'est-à-dire de la rugosité des parois du dispositif solide qui guide la masse liquide.

On peut distinguer trois zones particulières dans l'étendue de la variation totale de λ :

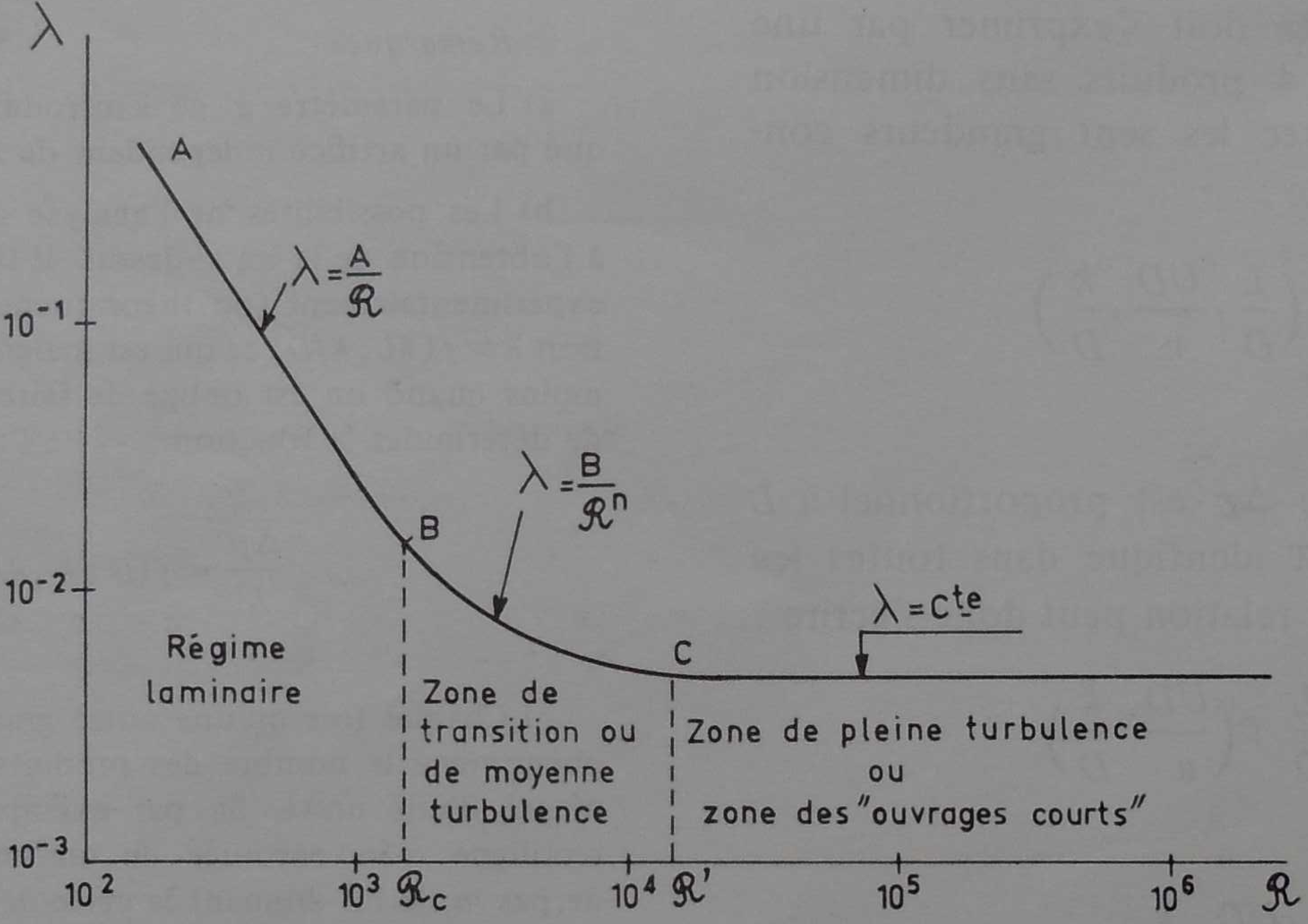


Fig. VII.6.2 – Variation de la perte de charge d'un écoulement en fonction du nombre de Reynolds

1 — *Pour les faibles valeurs de $\mathcal{R}$* c'est-à-dire en régime laminaire, la relation $\lambda(\mathcal{R})$ est de la forme $\lambda = A/\mathcal{R}$ représentée par une droite dans un système d'axes à graduations bilogarithmiques (fig. VII.6.2).

En effet, en régime laminaire la perte de pression Δp^* est proportionnelle à la vitesse moyenne, donc la perte de charge unitaire

$$\frac{\Delta p^*}{\varpi l} = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}$$

est de la forme

$$\frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g} = aU$$

d'où

$$\lambda = \frac{2agD}{U} = \frac{2agD^2}{\mathcal{R}\nu} = \frac{A}{\mathcal{R}}$$

Par exemple, pour un écoulement en régime laminaire dans un tube cylindrique la formule de Hagen-Poiseuille (§ VI.2.2) permet d'écrire :

$$J = \frac{\Delta p^*}{\varpi l} = \frac{32\nu U}{D^2 g}$$

En portant cette valeur dans l'expression générale

$$J = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g}$$

on obtient

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}}$$

2 — *Pour des valeurs de $\mathcal{R}$ supérieures au nombre de Reynolds critique $\mathcal{R}_c$* mais toutefois suffisamment faibles pour que la turbulence du régime à l'intérieur du système n'atteigne pas un degré extrême, le coefficient λ est de la forme :

$$\lambda = \frac{B}{\mathcal{R}^n}$$

avec :

$$0 < n < 0{,}3$$

Autrement dit, dans cette zone intermédiaire BC qu'on pourrait appeler *zone de transition* ou zone de *moyenne turbulence*, la turbulence *stricto sensu* n'est pas suffisamment importante pour qu'on puisse négliger les forces de viscosité et ces deux causes interviennent pour provoquer la perte de charge qui varie donc comme une puissance de la vitesse comprise entre 1 (régime laminaire $n = 1$) et 2 (régime complètement turbulent $n = 0$).

3 — *Enfin pour des valeurs supérieures du nombre de Reynolds* la turbulence devient telle que les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux effets de la turbulence. C'est ce que M. Camichel appelle la *"saturation"* du régime turbulent.

Dans cette zone de pleine turbulence le coefficient λ est constant soit $\lambda = K/\mathcal{R}^n$ avec $n = 0$ et

$$\lambda = C^{te} = K$$

$$J = \frac{KU^2}{2g\,D}$$

La perte de charge est donc proportionnelle au carré de la vitesse.

Les systèmes dans lesquels est réalisé un tel écoulement ont été appelés *"ouvrages courts"* par M. Camichel en raison du fait que ces pertes de charge se rencontrent le plus souvent dans des systèmes de longueur relativement faible (coudes, changements de section . . .). Pour ces types de singularités les formules classiques font en effet intervenir le carré de la vitesse. La valeur du nombre de Reynolds $\mathcal{R}'$ audessus de laquelle le coefficient λ demeure constant a été appelée par M. Camichel, le *"seuil" de l'ouvrage court*.

Comme la viscosité du liquide n'intervient plus, ces "ouvrages courts" seront particulièrement simples à étudier sur modèles réduits (cf. chapitre XIV).

Nous retrouverons des courbes de même allure générale à propos de l'étude de l'écoulement dans les canalisations et nous développerons les résultats des études détaillées qui ont été faites pour préciser la forme exacte des courbes $\lambda = f(\mathcal{R}, k/D)$ en particulier en fonction de la nature et des dimensions de la rugosité des parois de la canalisation (cf. chapitre XI : écoulement dans les canalisations en charge).

VII.6.3. Pertes de charge locales le long d'un courant liquide

Il peut exister le long d'un courant liquide des causes locales de perte de charge dues à une brusque variation de la section transversale ou de la direction du courant, constituant des *singularités* (élargissements ou rétrécissements brusques, changements de direction).

Ces singularités se comportent précisément comme des "ouvrages courts" et la perte de charge qu'elles engendrent sera donc de la forme $K(U^2/2g)$, U représentant la vitesse moyenne dans une section caractéristique de l'écoulement et K étant un coefficient dont la valeur dépendra de la forme et des dimensions de la singularité.

VII.6.3.1. *Elargissement brusque de la section d'un courant liquide*

Soit un courant liquide rectiligne $ABA'B'$ de section Ω_0 subissant en BB' un élargissement brusque CC' de sa section qui devient Ω_1, la direction du courant restant inchangée (fig. VII.6.3.1).

On peut se rendre compte, par exemple en mélangeant à l'eau de fines particules en suspension, de ce que les filets liquides en pénétrant dans la partie élargie s'épanouissent suivant des courbes telles que BDM et $B'D'M'$ et que dans les angles se produisent des mouvements tourbillonnaires non translatoires, de sorte qu'il existe dans la masse liquide considérée deux zones distinctes : d'une part une veine centrale ayant sensiblement la forme $ABMA'B'M'$ dans laquelle s'effectue le mouvement liquide et qui constitue la *veine vive*, d'autre part une zone *d'eau morte* $BCMD$ et $B'C'M'D'$ qui ne participe pas à l'écoulement.

Compte tenu de cette observation résultant de l'expérience qui est, ici, essentielle, considérons dans la partie élargie la section transversale EE' à partir de laquelle les filets redeviennent parallèles et proposons-nous de déterminer la perte de charge existant entre BB' et EE' qui est provoquée essentiellement par les frottements dûs à l'agitation tourbillonnaire de la zone d'eau morte.

Comme les forces de frottement correspondantes sont des forces intérieures que nous ne connaissons pas, nous aurons recours au théorème d'Euler qui ne fait intervenir que les forces extérieures.

Nous appliquerons donc ce théorème à la masse liquide $BCE\ E'C'B'B$ (comprenant donc la veine vive et la zone d'eau morte) en projection sur l'axe du courant orienté positivement dans le sens de l'écoulement général.

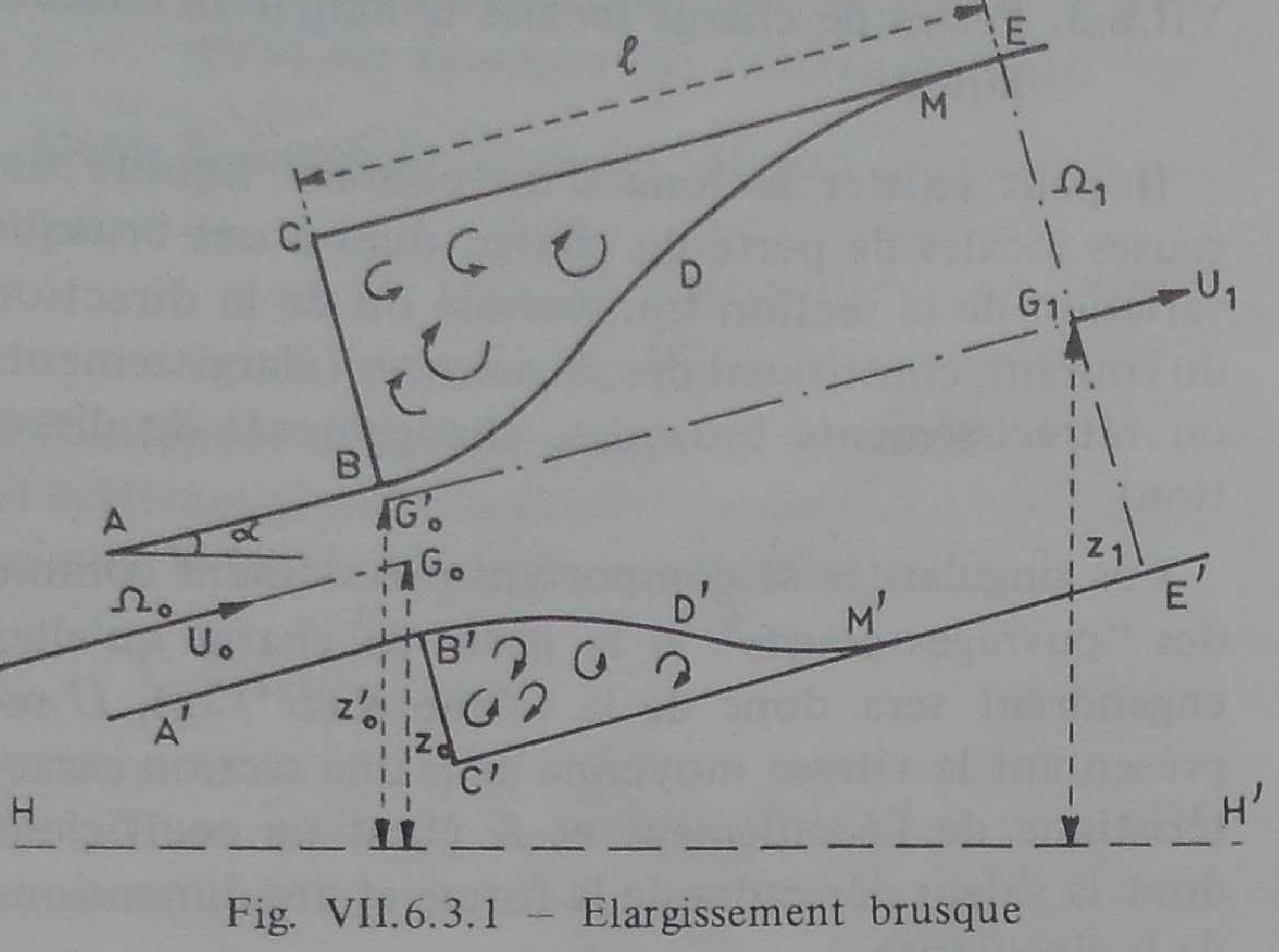


Fig. VII.6.3.1 – Elargissement brusque

Désignons par :

p_0 la pression au centre de gravité G_0 de la section BB' ;

p'_0 la pression au centre de gravité G'_0 de la section CC' ;

p_1 la pression au centre de gravité G_1 de la section EE' ;

α l'inclinaison de l'axe de l'écoulement sur le plan horizontal ;

U_0 la vitesse moyenne dans la section $BB'(\Omega_0)$;

U_1 la vitesse moyenne dans la section $EE'(\Omega_1)$;

l la distance des sections CC' et EE' ;

Q le débit supposé constant ;

z_0 la cote de G_0 ;

z_1 la cote de G_1 ;

z'_0 la cote de G'_0.

Ces cotes sont prises par rapport à un plan horizontal de référence HH'.

Si les sections rétrécies et élargies ont même axe on a évidemment $z'_0 = z_0$ et $p'_0 = p_0$.

Pour appliquer le théorème d'Euler, exprimons la somme des projections des forces extérieures sur l'axe de l'écoulement. Ces forces sont :

— le poids de la masse liquide considérée,

— les pressions,

— les frottements sur les parois en contact avec le courant.

a) *Poids.* Son expression est :

$$\overline{\omega} l \Omega_1$$

et en projection :

$$-\overline{\omega} l \Omega_1 \sin\alpha$$

ou :

$$-\overline{\omega}\Omega_1(z_1 - z'_0)$$

b) *Pressions.* Les pressions latérales sont normales à l'axe du courant et leur projection est donc nulle. Il reste donc seulement les pressions en bout sur CC' et EE'.

α) *Pression sur CC'* — Dans la zone d'eau morte le liquide est sensiblement immobile ; on peut donc admettre que la pression y varie suivant la loi hydrostatique.

De B à B', dans la section droite d'un courant liquide à filets parallèles, la pression varie également suivant la loi hydrostatique. En définitive la pression totale sur CC' a pour valeur $+ p'_0\Omega_1$.

Mais entre les deux points G_0 et G'_0 situés dans la section CC', l'application de la loi hydrostatique permet d'écrire :

$$p'_0 = p_0 - \overline{\omega}(z'_0 - z_0)$$

Donc la pression totale sur CC' sera :

$$\Omega_1[p_0 - \overline{\omega}(z'_0 - z_0)]$$

β) *Pression sur EE'* — Compte-tenu de l'hypothèse faite sur le parallélisme des trajectoires des filets liquides traversant la section EE', la pression totale sur cette section, en projection sur l'axe du courant, a pour valeur :

$$-p_1\Omega_1$$

c) *Frottements sur les parois.* Nous les négligerons en raison de la faible distance des sections CC' et EE' et surtout en raison de l'importance relative de la perte de charge due aux forces intérieures provoquées par les frottements résultant de l'agitation tourbillonnaire de la zone d'eau morte.

En définitive, la somme des projections des forces extérieures sur l'axe du courant a pour expression :

$$-\overline{\omega}\Omega_1(z_1 - z'_0) + \Omega_1[p_0 - p_1 - \overline{\omega}(z'_0 - z_0)]$$

et le *théorème d'Euler* en projection sur cet axe s'écrit donc :

$$\rho Q(\beta_1 U_1 - \beta_0 U_0) = -\overline{\omega}\Omega_1\left[z_1 - z'_0 + \frac{p_1 - p_0}{\overline{\omega}} + z'_0 - z_0\right] \quad [VII.6.3.1.1]$$

Le régime d'écoulement étant permanent, on a

$$Q = U_1\Omega_1 = U_0\Omega_0$$

Faisons l'approximation :

$$\beta_0 = \beta_1 = 1$$

Posons :

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_1} = m = \frac{U_1}{U_0} \quad (m < 1)$$

d'où :

$$\Omega_0 = m\,\Omega_1$$

et :

$$U_1 = m\,U_0.$$

En remplaçant dans l'équation [*VII.6.3.1.1*], il vient, après simplification :

$$\frac{p_1^* - p_0^*}{\overline{\omega}} = \frac{U_0^2}{g} m(1 - m) \quad [VII.6.3.1.2]$$

L'augmentation maximale de charge entre les deux sections Ω_0 et Ω_1 sera donc obtenue pour $m(1 - m)$ maximal c'est-

à-dire pour $m = 1/2$. Pour une canalisation de section circulaire cela correspondrait donc à un rapport des diamètres :

$$\frac{D_0}{D_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad D_1 = D_0\sqrt{2}$$

Pour calculer *la perte de charge due à l'élargissement*, exprimons la charge où énergie totale H dans chacune des sections BB' à l'amont et EE' à l'aval.

Dans BB' :

$$H_0 = \frac{p_0^*}{\bar{\omega}} + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g}$$

Dans EE' :

$$H_1 = \frac{p_1^*}{\bar{\omega}} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}$$

Faisons l'approximation

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 1$$

La perte de charge sera donc :

$$\Delta H = \frac{p_0^* - p_1^*}{\bar{\omega}} + \frac{U_0^2 - U_1^2}{2g}$$

En utilisant l'équation [*VII.6.3.1.2*] on obtient, tous calculs faits :

$$\boxed{\Delta H = \frac{(U_0 - U_1)^2}{2g}} \qquad [VII.6.3.1.3]$$

La perte de charge due à l'élargissement brusque d'un courant est donc égale à la *hauteur représentative de la vitesse perdue*.

Ce résultat constitue le *théorème de Bélanger ou de Borda*.

La perte de charge peut s'écrire également

$$\Delta H = \frac{U_1^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \qquad [VII.6.3.1.4]$$

Elle est donc de la forme $j = K(U^2/2g)$ conformément à la propriété des "ouvrages courts", le coefficient K dépendant des caractéristiques de la singularité c'est-à-dire, ici, du rapport des sections $m = \Omega_0/\Omega_1$. D'une manière générale, les pertes de charge de la forme $j = K(U^2/2g)$ sont parfois désignées pour cette raison par l'expression *"pertes de charge à la Borda"*.

Il faut toutefois signaler que la formule obtenue n'est qu'approchée. En effet, on a supposé :

a) que le liquide stagne dans la zone d'eau morte ;

b) que sont négligeables les frottements extérieurs sur la paroi solide ;

c) que, dans l'expression de la quantité de mouvement, nous avons négligé l'inégale répartition des vitesses et qu'au lieu de U_1^2 et U_0^2 il aurait fallu écrire $\beta_1 U_1^2$ et $\beta_0 U_0^2$;

d) que dans l'expression des charges H_1 et H_0, nous avons admis $\alpha_1 = \alpha_0 = 1$.

Barré de Saint-Venant, interprétant les expériences de Borda, propose de tenir compte de ces différences entre la théorie et la réalité en ajoutant à la perte de charge précédemment calculée le terme correctif :

$$\frac{1}{9}\,\frac{U_1^2}{2g}$$

Cette perte de charge devient donc, en définitive :

$$j = \frac{U_1^2}{2g}\left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}\right] \qquad [VII.6.3.1.5]$$

VII.6.3.2. *Elargissement progressif de la section d'un courant liquide (cône divergent)*

Pour une section circulaire (cas le plus fréquent d'une canalisation en charge) la perte de charge est due :

a) aux frottements contre les parois intérieures,

b) à l'augmentation progressive de section.

a) La perte de charge due aux frottements peut être calculée selon Schlag (1927) en remplaçant le tronc de cône par un tronçon fictif de canalisation rectiligne de même longueur L et de diamètre constant Φ tel que (fig. VII.6.3.2) :

$$\Phi = \sqrt[5]{\frac{4(D-d)D^4 d^4}{D^4 - d^4}}$$

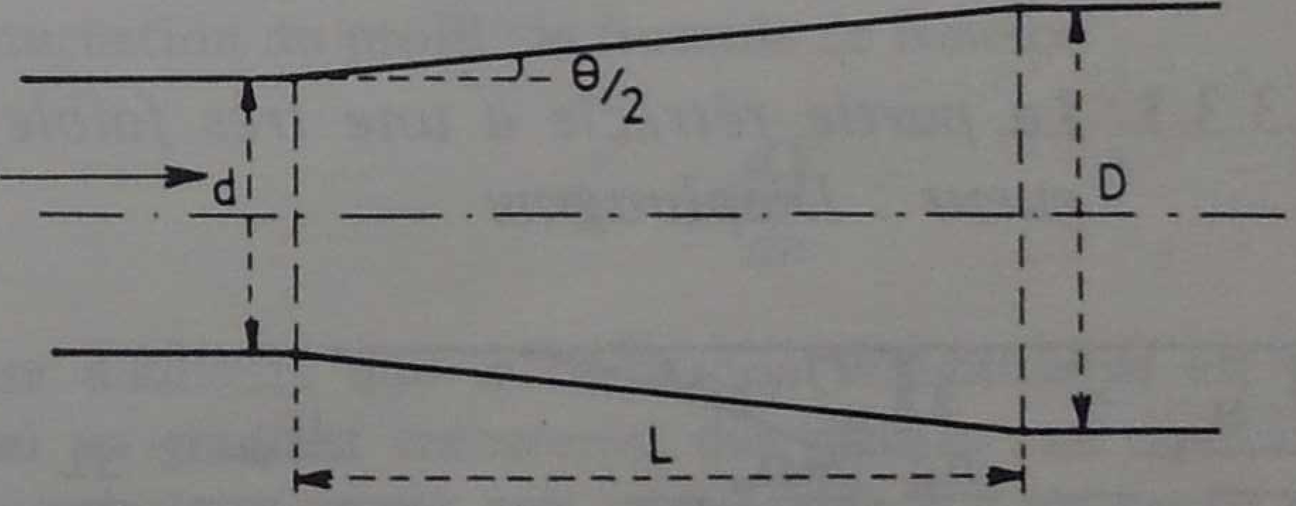


Fig. VII.6.3.2 – Elargissement progressif (cône divergent)

b) La perte de charge due à la *conicité* est évaluée par des formules empiriques déduites de l'expérience, elle est due à la grande irrégularité de répartition des vitesses dans les sections transversales du cône donnant naissance à des tourbillons, voire même à des décollements si l'angle θ (ouverture du cône) dépasse certaines valeurs.

S'agissant d'un "ouvrage court", la perte de charge due à la conicité est de la forme :

$$j = K\,\frac{U^2}{2g}$$

U représente la vitesse moyenne dans la section de sortie (diamètre D).

S'appuyant sur les résultats des expériences de Gibson et Schlag, Kestlicher (1927) propose pour K la valeur suivante :

$$K = z\left(\frac{D^2}{d^2} - 1\right)^2 = z\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2$$

m représentant toujours le rapport des sections extrêmes et le coefficient z dépendant de l'angle θ conformément au tableau suivant :

θ	5°	6°	7°	8°	10°
z	0,049	0,062	0,075	0,088	0,119
θ	16°	18°	20°	30°	40°
z	0,245	0,307	0,389	0,8	0,9

Le coefficient K augmente donc avec θ et tend vers 1 ce qui correspond au cas de l'élargissement brusque. En effet, au-delà d'une certaine valeur de θ, le liquide ne suit plus la paroi, il se produit un décollement et on est ramené au cas de l'élargissement brusque.

L'angle θ le plus favorable, réalisant la perte de charge minimale, est compris entre 6 et 8° pour D/d compris entre 1,25 et 3. Pour $\theta = 8°$, la longueur du cône produisant la perte de charge minimale est de l'ordre de 7 $(D - d)$.

VII.6.3.3. *Rétrécissement brusque de la section d'un courant liquide*

Deux cas sont à envisager suivant que la partie rétrécie a ou n'a pas une très faible longueur dans le sens du courant.

VII.6.3.3.1. *La partie rétrécie a une très faible longueur : Diaphragme*

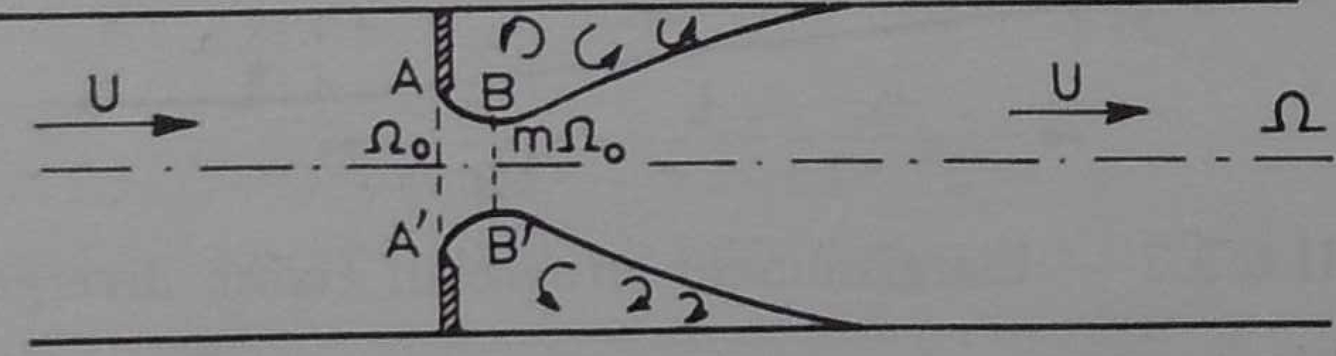


Fig. VII.6.3.3.1 – Rétrécissement de courte longueur (diaphragme)

Soit Ω_0 la section du diaphragme (fig. VII.6.3.3.1). On observe à son aval une contraction de la veine vive jusqu'à une section contractée BB' d'aire $m\Omega_0$; comme nous le montrerons plus loin cette convergence des filets liquides se produisant sur une courte longueur ne provoque pratiquement pas de perte de charge.

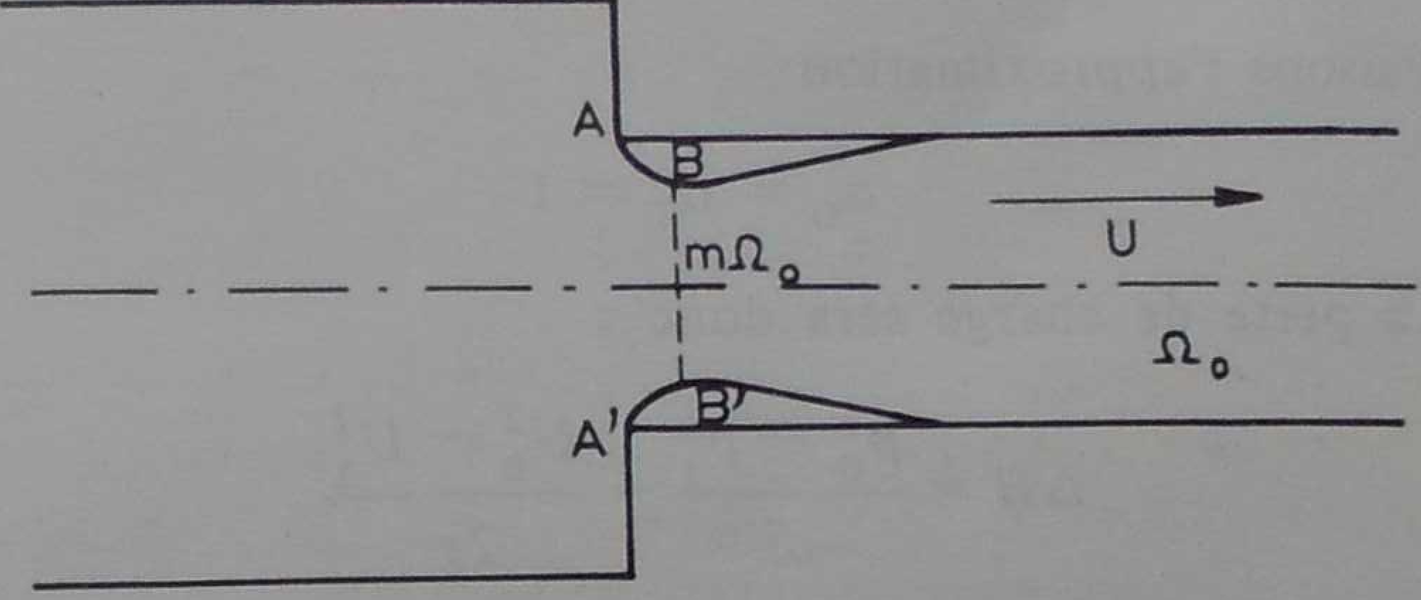
A partir de BB' le courant liquide s'épanouit pour occuper de nouveau toute la section Ω ; cet élargissement brusque ou tout au moins rapide entraîne une perte de charge donnée par la formule [*VII.6.3.1.5*], soit

$$j = \frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{\Omega}{m\Omega_0} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}\right]$$

Si, par exemple, $\Omega = 4\Omega_0$ et $m = 0{,}62$ (diaphragme circulaire en mince paroi), on trouve $j = 30(U^2/2g)$. Si le diaphragme est placé dans une canalisation dans laquelle la vitesse moyenne est $U = 1$ m/s, la perte de charge qu'il provoque sera de $30 \times (1/20) = 1{,}5$ m, valeur assez considérable.

VII.6.3.3.2. *La partie rétrécie a une certaine longueur (fig. VII.6.3.3.2)*

Dans ce cas on observe une contraction suivie d'un élargissement de la veine, ce dernier entraînant une perte de charge donnée par l'équation [*VII.6.3.1.5*] dans laquelle le rapport des sections devient $\Omega_0/m\Omega_0 = 1/m$,



VII.6.3.3.2 – Rétrécissement de grande longueur

donc :

$$j = \frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}\right]$$

Pour une section circulaire, on prend généralement

$$m = 0{,}62$$

d'où :

$$j = \frac{U^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{0{,}62} - 1\right)^2 + \frac{1}{9}\right] = 0{,}49\,\frac{U^2}{2g}$$

On admet couramment :

$$\boxed{j = 0{,}5\,\frac{U^2}{2g}}$$

Ici, U représente la vitesse dans la partie rétrécie.

VII.6.3.4. *Rétrécissement progressif de la section d'un courant liquide (convergent)*

La perte de charge comprend deux parties :

a) celle due aux *frottements* contre les parois intérieures du cône ; elle est donnée par la même formule que celle correspondant au divergent (§ VII.6.3.2).

b) celle due à la *réduction progressive de section* qui est beaucoup plus faible que pour les cônes divergents en raison de la propriété des dispositifs convergents d'entraîner une égalisation des vitesses, à la différence des dispositifs divergents comme nous allons le montrer.

VII.6.3.5. *Influence comparée d'un convergent et d'un divergent sur la répartition des vitesses dans la section transversale d'un courant liquide*

Considérons un courant liquide en écoulement permanent dont les filets liquides sont sensiblement rectilignes et dont le profil des vitesses n'est pas uniforme dans une section transversale S_1 (fig. VII.6.3.5.1). Proposons-nous de déterminer

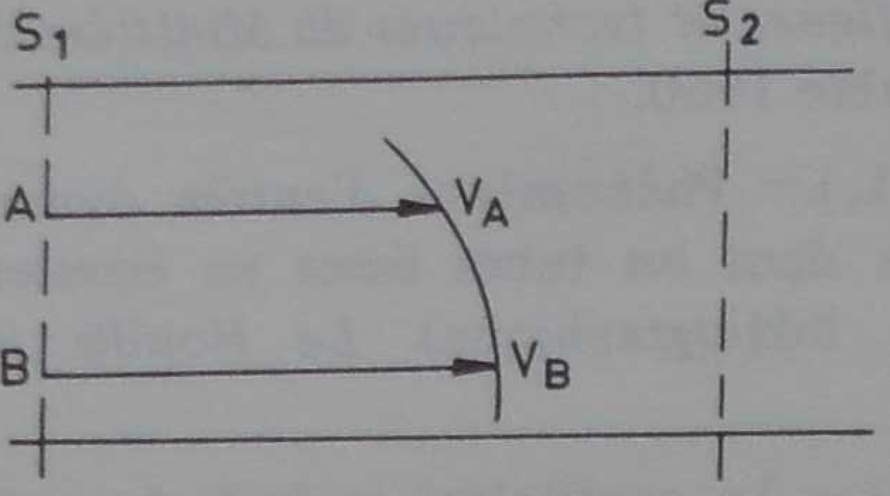


Fig. VII.6.3.5.1

comment évoluera ce profil entre les sections S_1 et S_2. Considérons deux filets liquides traversant en A et B la section S_1 et supposons $V_B > V_A$. L'écoulement étant rectiligne et les filets liquides parallèles, la pression dans S_1 varie suivant la loi hydrostatique, c'est-à-dire $p_A^* = p_B^* = p^*$. Si la distance entre les deux sections S_1 et S_2 est suffisamment faible on peut négliger la perte de charge et appliquer l'équation de Bernoulli, soit

pour le filet A :

$$\frac{p_A^*}{\omega} + \frac{V_A^2}{2g} = H_A$$

pour le filet B :

$$\frac{p_B^*}{\omega} + \frac{V_B^2}{2g} = H_B$$

étant entendu que $H_A \neq H_B$ puisque l'écoulement n'est pas irrotationnel.

Comme $p_A^* = p_B^* = p^*$, on en déduit $V_A^2 - V_B^2 = \text{C}^{\text{te}}$ entre les sections S_1 et S_2.

En différentiant d'une section à l'autre, on aura

$$V_A dV_A = V_B dV_B$$

ou

$$\frac{dV_A}{dV_B} = \frac{V_B}{V_A} \qquad [VII.6.3.5]$$

Les variations de vitesse dV d'un profil à l'autre sont donc en raison inverse des vitesses V.

Pour comparer les deux profils dans les sections S_1 et S_2, rapportons-les à la même droite d'origine $z'z$.

Si la veine est convergente (fig. VII.6.3.5.2) les vitesses croissent, dV_A et dV_B sont positifs et comme $V_B > V_A$, l'équation [*VII.6.3.5*] montre que $dV_A > dV_B$. Le profil tend vers celui d'un écoulement uniforme.

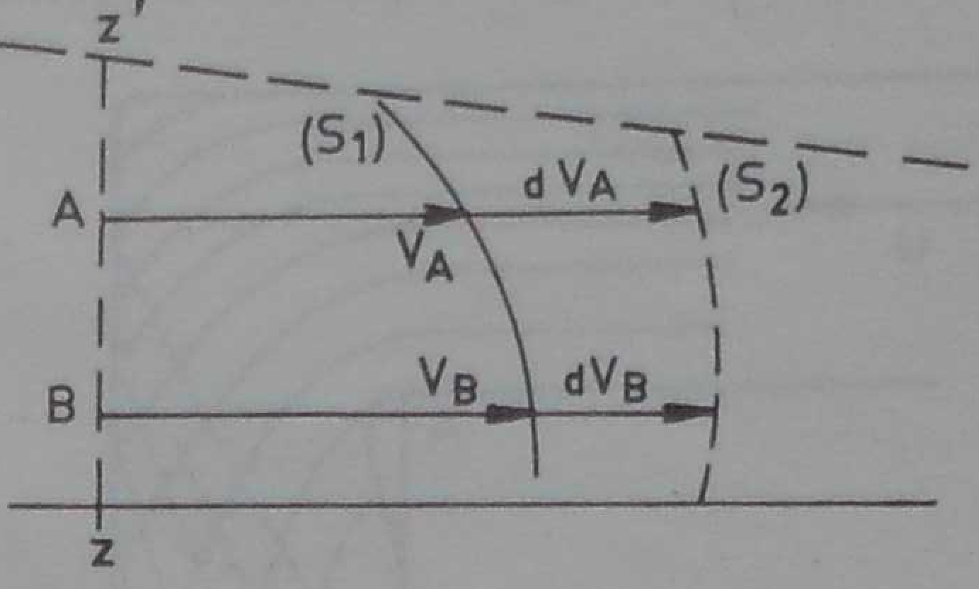


Fig. VII.6.3.5.2

Si la veine est divergente (fig. VII.6.3.5.3) les vitesses décroissent, dV_A et dV_B sont négatifs et comme $V_B > V_A$, l'équation [*VII.6.3.5*] montre que $|dV_A| > |dV_B|$. Le profil des vitesses devient de plus en plus pointu.

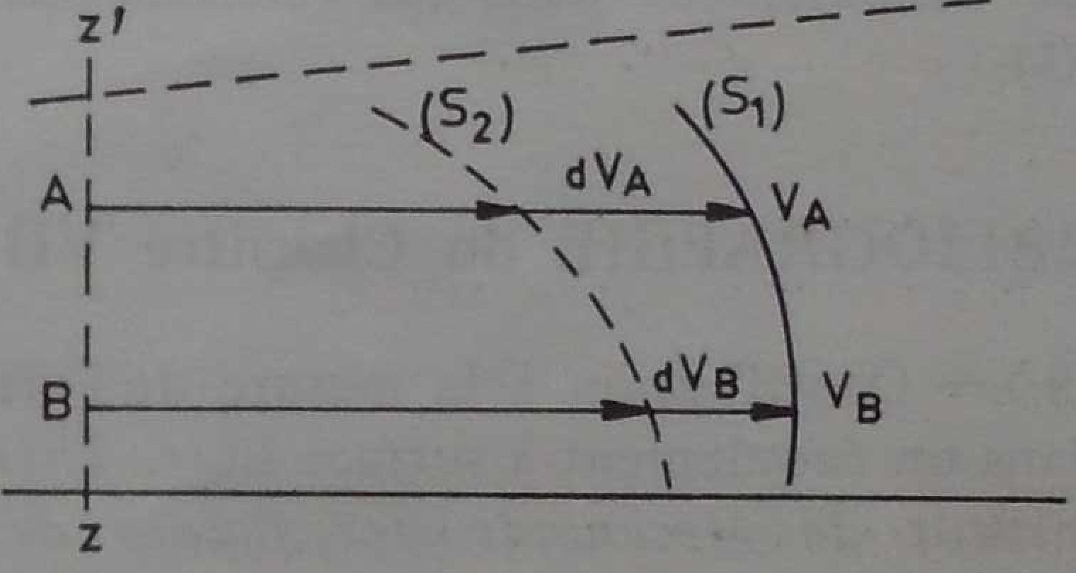


Fig. VII.6.3.5.3

L'intervention de la viscosité et des frottements sur un profil des vitesses très pointu contribuera à augmenter encore la perturbation du profil ; la formule de Newton

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dn}$$

montre d'ailleurs que le frottement longitudinal est proportionnel au gradient transversal des vitesses ; au contraire l'incidence de la viscosité sera négligeable sur un profil presque uniforme résultant de la convergence du courant.

En définitive, la convergence est un phénomène bienfaisant dans lequel on peut négliger la perte de charge et où l'angle des filets liquides peut être assez grand sans inconvénient ; l'égalisation des vitesses provoquée par un convergent est mise à profit chaque fois qu'on désire réaliser une meilleure répartition des vitesses dans une section transversale (par exemple à l'entrée de l'ouïe d'une pompe centrifuge). Au contraire, la divergence est dangereuse et l'angle du divergent doit rester faible (inférieur à 6 à 7°) pour éviter les décollements.

VII.6.3.6. *Changement de direction d'un courant liquide* (fig. VII.6.3.6)

Un changement de direction du courant liquide engendre également une perte de charge. Il provoque une contraction des filets liquides avec décollement de la couche-limite en A ;

de plus, les filets liquides qui viennent heurter les parois tendent à se mélanger en provoquant des remous à l'aval.

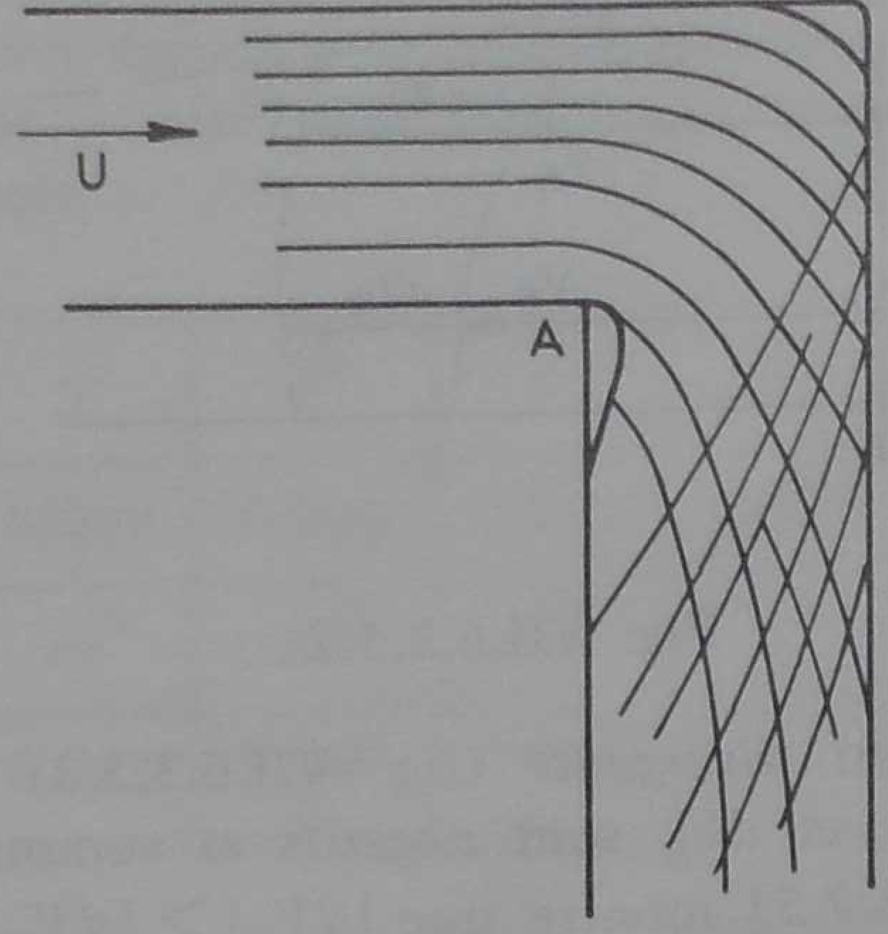


Fig. VII.6.3.6 – Changement de direction

Nous étudierons ces phénomènes de façon plus détaillée à propos de l'écoulement dans les canalisations en charge (chapitre XI).

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre VII

BURSALI (S.).— Contribution à la mesure de l'effort tangentiel dans un écoulement à surface libre. *Thèse soutenue à l'Institut de Mécanique des fluides de Toulouse*, 1965-66.

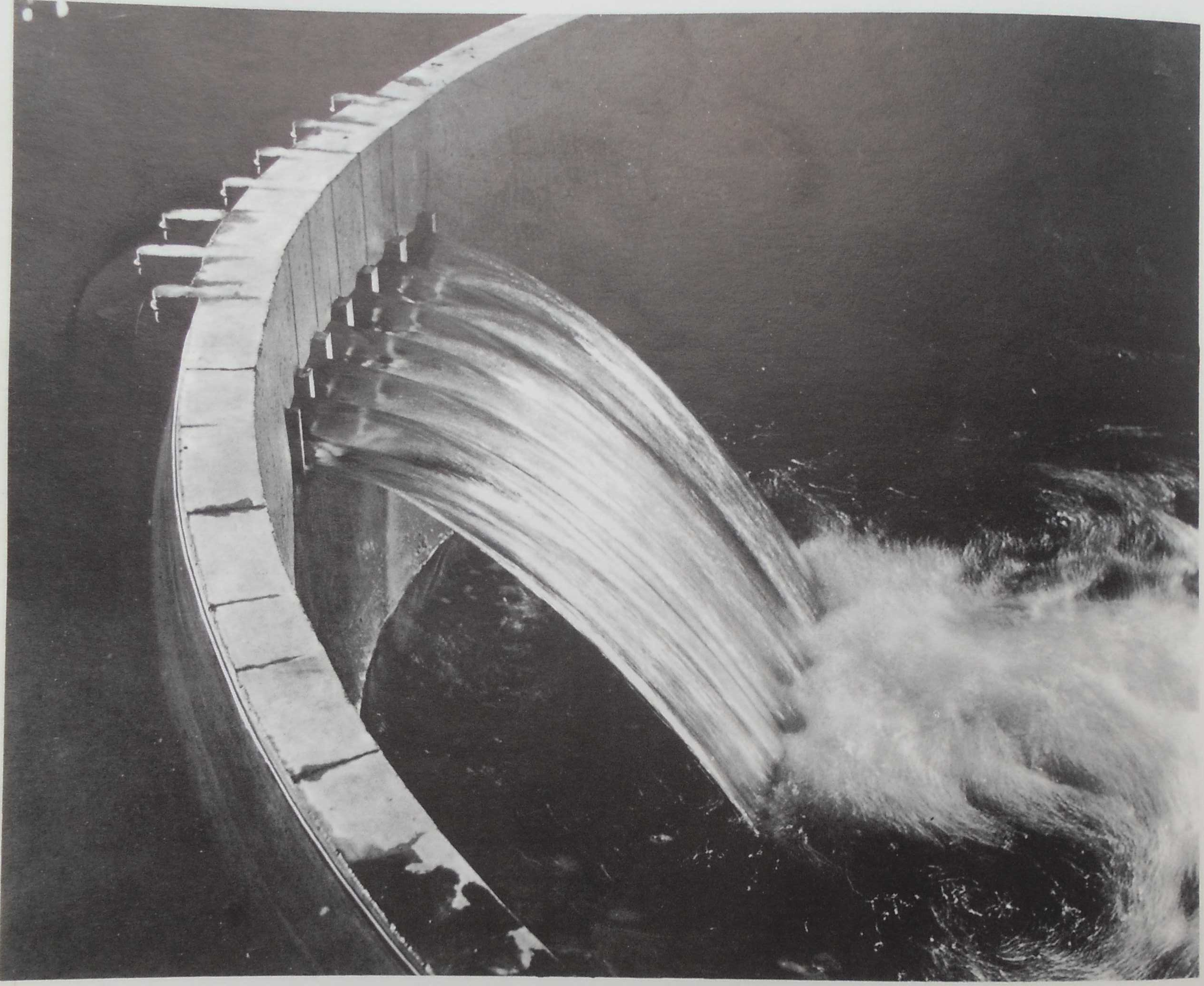
EPSTEIN (M.).— On the solution of the laminar boundary-layer equations (Note sur la solution des équations de la couche-limite laminaire). *J. Aero-Space Sci., U.S.A.*, n° 1, 1959.

LUNEAU (J.L.).— Sur l'influence de l'accélération sur la résistance au mouvement dans les fluides. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 363, année 1960.

RODET (E.).— Etude de l'écoulement d'un fluide dans un tunnel prismatique de section trapézoïdale. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 369, Novembre 1960.

TACCOEN (L.).— Phénomènes d'entrée dynamiques et thermiques dans les tubes lisses en écoulement turbulent (étude bibliographique). *La Houille Blanche*, n° 8, 1966.

VIBERT (A.).— Le coefficient α de la formule de Bernoulli. *Le Génie Civil*, n° 14, 15 Juillet 1962 et *Techniques et Sciences municipales*, n° 8-9, Août-Septembre 1962.



Evacuateur de crue du barrage de KARIBA sur le ZAMBEZE (Rhodésie)
(écoulement sur modèle réduit)

SOGREAH – Service Photo-Cinéma

CHAPITRE VIII

ÉCOULEMENT PAR LES ORIFICES

VIII.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS QUALITATIVES DE L'ÉCOULEMENT

Soit un vase contenant un liquide de poids volumique $\overline{\omega}$ dont le niveau est maintenu constant en AB (fig. VIII.1.1) ; le régime est alors permanent.

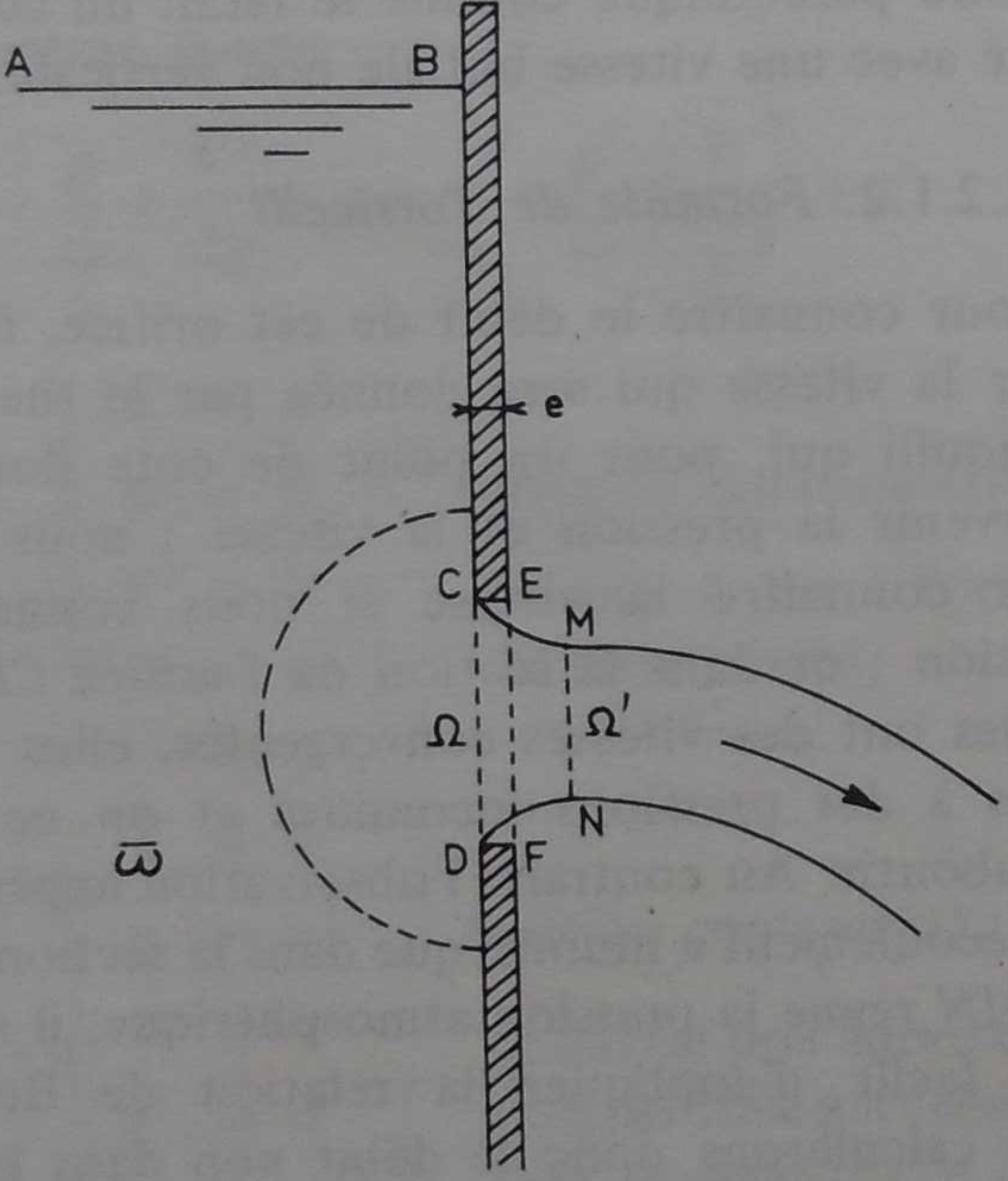


Fig. VIII.1.1

Soit $CDEF$ un orifice de section Ω ménagé dans une paroi du vase ; le liquide s'écoulera par cet orifice.

Si la paroi est transparente, en mélangeant au liquide quelques fines particules ayant à peu près même densité que lui (sciure de bois, poudre d'aluminium) on peut voir qu'à l'intérieur du vase le mouvement ne devient sensible qu'*à une très faible distance de l'orifice.* On peut, en somme, considérer le liquide comme étant au repos dans tout le reste du vase.

Ceci étant vrai pour tous les types d'orifices les conditions de l'écoulement, notamment à l'aval de la paroi, varient avec les différents types d'orifices.

Un orifice peut être *noyé* ou *non noyé* suivant que, sur sa face aval, la cote du niveau de la surface libre est supérieure ou non à celle de l'orifice (fig. VIII.1.2).

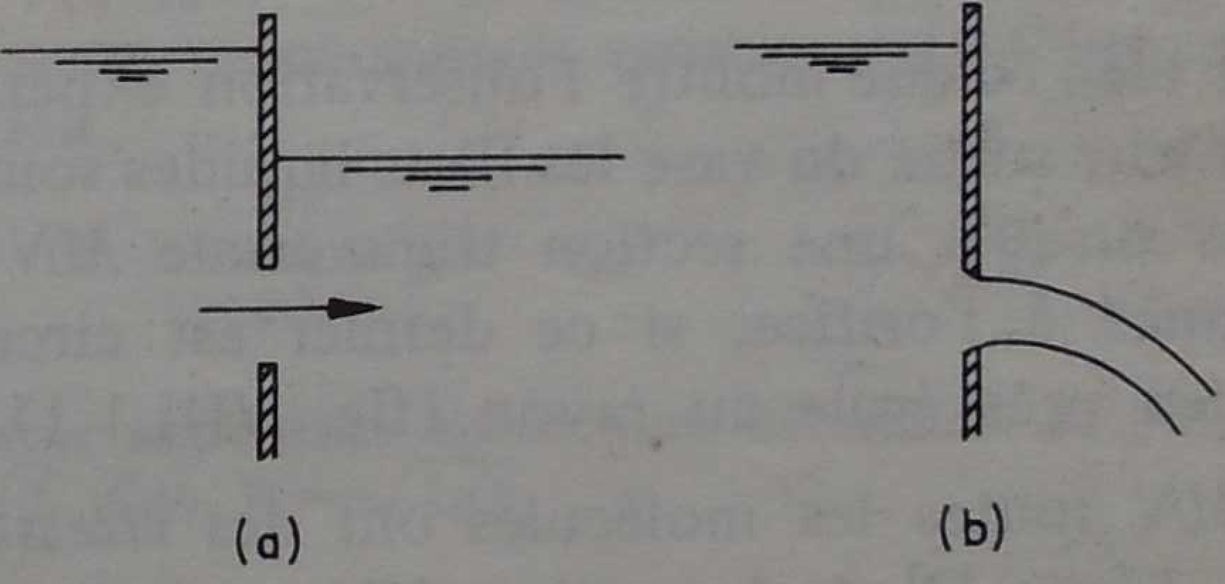


Fig. VIII.1.2 – Orifice noyé (*a*) et non noyé (*b*)

VIII.2. ORIFICES NON NOYÉS

Il en existe différents types :

VIII.2.1. Orifice en mince paroi

Si l'épaisseur e de la paroi est plus petite que la moitié de la plus petite dimension transversale de l'orifice (par exemple plus petite que le rayon de l'orifice s'il est circulaire), on dit que l'écoulement

se fait "en mince paroi". Par ailleurs, pour éviter l'influence des autres parois que celle dans laquelle est percé l'orifice, la distance d'un bord de l'orifice à la paroi la plus proche à l'amont doit être au moins égale à une fois et demie la plus petite dimension de l'orifice.

VIII.2.1.1. *Observation expérimentale – Phénomène de contraction de la veine*

Avant d'ouvrir l'orifice les pressions dans le vase contre la paroi de l'orifice fermé sont perpendiculaires à la paroi c'est-à-dire au plan de l'orifice, conformément à la loi de l'hydrostatique. Si on ouvre l'orifice, contrairement à ce que suggère la direction des pressions statiques, les filets liquides ne peuvent sortir du vase suivant la direction normale à la paroi car la pression effective au point de sortie est égale à $\overline{\omega} h$ (h représentant la profondeur du point considéré dans le vase) tandis qu'à l'extérieur elle est nulle (pression atmosphérique). Le filet liquide ne peut satisfaire à cette double condition qu'en se courbant, de manière que la courbure compense le gradient transversal des pressions suivant la loi établie au § V.1.7.3 :

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = - \rho \frac{V^2}{r}$$

C'est bien ce que montre l'observation expérimentale : à leur sortie du vase les filets liquides sont convergents jusqu'à une section transversale MN dont la distance à l'orifice, si ce dernier est circulaire, est à peu près égale au rayon (fig. VIII.1.1).

En MN toutes les molécules ont des *vitesses parallèles*. L'aire Ω' de la section MN est inférieure à l'aire Ω de l'orifice ; la veine liquide a donc subi une contraction entre CD et MN, ce phénomène est connu sous le nom de *"contraction de la veine"*. La section MN est la *section contractée*. Ce phénomène n'a été clairement mis en évidence qu'au 18ème siècle ; c'est Newton qui, en 1873, dans la 2ème édition de ses "Principia Philosophiae Naturalis", nota pour la première fois ce phénomène qui avait échappé à Torricelli et ses contemporains.

Le phénomène est encore plus net si les parois du vase autour de l'orifice sont taillées en biseau (fig. VIII.2.1.1).

Remarquons que dans la section contractée, puisque les molécules ont des vitesses parallèles, elles n'exercent les unes sur les autres aucune action transversale et elles sont toutes en équilibre avec le milieu extérieur où règne la pression atmosphérique ; donc, dans toute la section contractée règne également la pression atmosphérique.

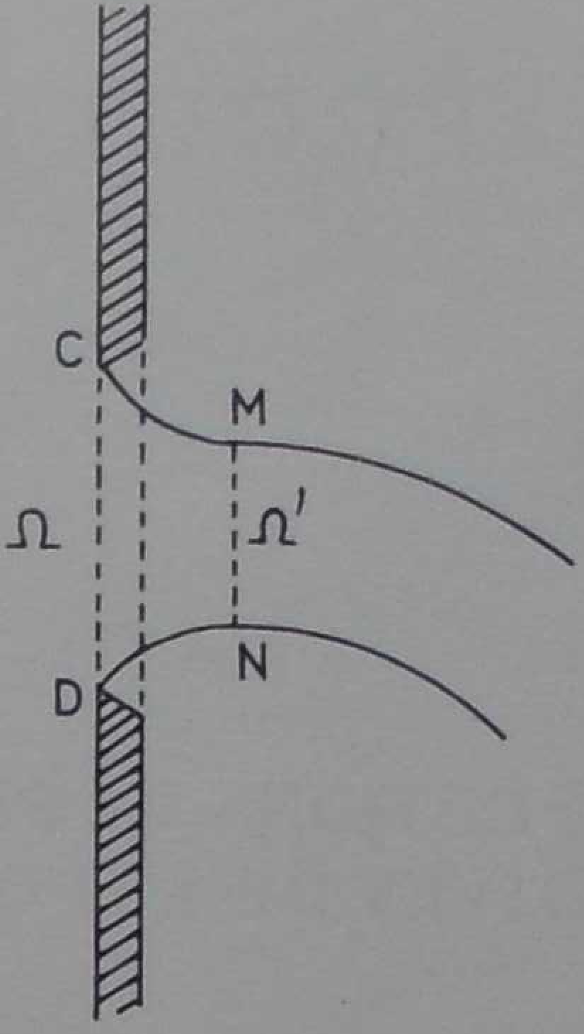


Fig. VIII.2.1.1 – Contraction de la veine à la sortie d'un orifice en mince paroi

A l'aval de MN, dans le cas d'un orifice percé dans une paroi non horizontale, la veine décrit une trajectoire parabolique comme le ferait un corps solide lancé avec une vitesse initiale non verticale.

VIII.2.1.2. *Formule de Torricelli*

Pour connaître le débit de cet orifice, il faut calculer la vitesse qui sera donnée par le théorème de Bernoulli qui, pour un point de cote donnée, fait intervenir la pression et la vitesse ; nous pourrons donc connaître la vitesse si nous connaissons la pression ; or dans la section de l'orifice CD les molécules ont des vitesses convergentes, elles sont soumises à des pressions inconnues et on ne pourrait pas aboutir. Au contraire l'observation expérimentale de l'écoulement a montré que dans la section contractée MN règne la pression atmosphérique, il sera donc plus facile d'appliquer la relation de Bernoulli ; nous calculerons donc le débit non dans la section de l'orifice mais *dans la section contractée MN* dont l'aire Ω' sera rapportée expérimentalement à l'aire facilement mesurable de l'orifice Ω.

Nous sommes donc conduits à calculer la vitesse V en un point quelconque I de la section contractée ; soit h la distance verticale de I à la surface libre AB. Considérons (fig. VIII.2.1.2) le filet liquide passant par I et dont l'origine est en I' sur la surface libre AB. Appliquons le *théorème de Bernoulli* entre les

points I' et I de ce filet liquide ; prenons comme plan de comparaison le plan horizontal $X'X$ passant par I.

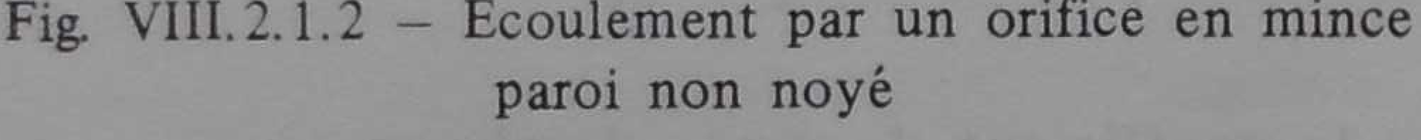


Fig. VIII.2.1.2 – Ecoulement par un orifice en mince paroi non noyé

Le théorème donne :

$$z + \frac{p}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + j = z' + \frac{p'}{\omega} + \frac{V'^2}{2g} + j'$$

En I' : $z' = h$
- $p' = p_a$ (pression atmosphérique)
- $V' \simeq 0$, $j' = 0$ puisque I' est à l'origine du mouvement

En I : $z = 0$
- $p = p_a$ (section contractée)
- V
- $j \simeq 0$ ce qui est une approximation justifiée par l'observation expérimentale qui a

montré que le mouvement ne devenait appréciable qu'à partir d'une faible distance à l'amont de I.

L'équation de Bernoulli s'écrit donc :

$$\frac{p_a}{\omega} + \frac{V^2}{2g} = h + \frac{p_a}{\omega}$$

$$V = \sqrt{2gh} \qquad [VIII.2.1.1]$$

La vitesse de la molécule liquide qui passe en I est donc la même que si elle tombait en chute libre dans le vide de la hauteur h. Cette proportionnalité de V à $\sqrt{h}$ a été établie expérimentalement en 1643 par Torricelli comme nous l'avons rappelé au chapitre I ; en fait on n'a pu vérifier immédiatement la valeur de V donnée par cette formule (en divisant le débit par la section) car le phénomène de contraction de la veine avait échappé aux contemporains de Torricelli.

Remarques :

1 — La formule [*VIII.2.1.1*] dite "formule de Torricelli" se déduit immédiatement du *théorème de Lagrange* : le liquide est parti du repos (surface libre du réservoir), donc l'écoulement est potentiel et la constante de Bernoulli h est la même dans toute la masse liquide. En I' sur la surface libre, elle vaut h (vitesse et pression nulles) ; en I elle vaut $V^2/2g$ (vitesse V, pression et cote nulles), d'où $h = V^2/2g$.

2 — Le même résultat peut être obtenu également en utilisant *l'analyse dimensionnelle* : supposons que la vitesse V à la sortie de l'orifice soit fonction seulement de l'accélération de la pesanteur g et de la hauteur h au-dessus de l'orifice. La relation cherchée est donc de la forme $f(V, g, h) = 0$. Les trois grandeurs ($n = 3$) figurant dans cette relation s'expriment au moyen de deux grandeurs fondamentales L et T ($r = 2$) ; la relation cherchée doit donc s'exprimer en fonction de $n - r = 1$ produit adimensionnel entre les trois grandeurs V, g et h, soit V^2/gh ; la relation est donc de la forme $f(V^2/gh) = 0$. Cette fonction d'une seule variable étant constamment nulle, la variable ne peut être que constante, soit

$$\frac{V^2}{gh} = K^2 \quad \text{ou} \quad V = K\sqrt{gh}$$

Une seule expérience suffit pour déterminer K ; elle donne $K = \sqrt{2}$, d'où $V = \sqrt{2gh}$.

VIII.2.1.3. *Calcul du débit*

Le débit élémentaire dq à travers l'élément infiniment petit $d\omega$ de la section contractée comprenant le point I sera :

$$dq = \sqrt{2gh}\, d\omega$$

Le débit de l'orifice mesuré à travers la section contractée Ω' sera donc

$$Q = \int_{\Omega'} \sqrt{2gh}\, d\omega$$

Comme on ne peut pas mesurer directement et facilement l'aire Ω' de la section contractée, on rapporte Ω' à Ω qui est l'aire mesurable de l'orifice ; on pose

$$\Omega' = m\Omega$$

Le coefficient $m < 1$ s'appelle le *coefficient de contraction*.

On a, en définitive

$$Q = \int_{m\Omega} \sqrt{2gh}\, d\omega$$

Comme cette intégrale n'est pas toujours facile à résoudre on fait la *double approximation éventuelle* suivante :

On admet que dans toute la section contractée la vitesse moyenne est celle de la molécule qui passe au centre de gravité (il n'y a plus d'approximation si la paroi est horizontale).

On admet ensuite que le plan horizontal passant par le centre de gravité de MN passe aussi par le centre de gravité de CD, de façon à pouvoir mesurer facilement la distance H de ce centre de gravité à la surface libre (il n'y a plus d'approximation si la paroi est verticale).

H s'appelle la *charge* sur l'orifice.

La valeur approchée du débit est alors donnée par la formule usuelle suivante :

$$\boxed{Q = m\Omega\sqrt{2gH}} \qquad [VIII.2.1.2]$$

Il faut, pour que les approximations faites soient acceptables, *que la hauteur de l'orifice soit petite par rapport à la charge H.*

VIII.2.1.4. *Valeurs du coefficient m*

Ces valeurs varient avec la forme, les dimensions, l'orientation de l'orifice (horizontal ou vertical), l'acuité de ses arêtes et la charge. Elles ont été déterminées expérimentalement et on les trouve dans des tables.

Pour un calcul approché et pour un orifice circulaire en mince paroi on peut prendre $m = 0{,}62$.

Dans son traité "Applied Hydraulics" (1954), Herbert Addison propose pour un orifice en mince paroi circulaire de diamètre $D \geqslant 6$ cm et une charge $H \geqslant 0{,}45$ m, pour de l'eau aux températures ordinaires et à la pression atmosphérique, la valeur

$$m = \frac{Q}{\Omega\sqrt{2gH}} = 0{,}597$$

Pour des orifices plus petits, d'autres températures et des charges plus faibles, on peut utiliser la formule

$$m = 0{,}592 + \frac{4{,}5}{\sqrt{\mathcal{R}}}$$

avec $$\mathcal{R} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH}\,D}{\nu}$$

D = diamètre de l'orifice.

Il y a lieu de remarquer que ces valeurs obtenues expérimentalement en mesurant le débit des orifices et en le divisant par $\Omega\sqrt{2gH}$ sont en définitive celles du *coefficient de débit* et non plus seulement du coefficient de contraction ; elles tiennent compte en effet des variations de la vitesse dans la section contractée.

On distingue parfois de ce point de vue :

— le coefficient de *contraction* proprement dit :

$$m_c = \frac{\Omega'}{\Omega}$$

— le coefficient de *perte de charge* :

$$m_j = \frac{V}{\sqrt{2gH}}$$

— le *coefficient de débit m* tel que :

$$m = m_c m_j = \frac{V\Omega'}{\Omega\sqrt{2gH}} = \frac{Q}{\Omega\sqrt{2gH}}$$

VIII.2.1.5. *Particularités de l'écoulement par un orifice polygonal*

a) *Orifice carré* (fig. VIII.2.1.3)

Le profil en long de la veine présente une série de contractions (noeuds) et d'expansions (ventres). Les sections transversales montrent qu'au niveau du premier "noeud" les angles de la section carrée initiale de l'orifice s'abattent, les pans coupés étant légèrement concaves (section 2), puis le phénomène s'accentue, les quatre faces de la veine se creusent notablement de sorte que, par rapport à leur disposition primitive, la disposition respective des faces et des arêtes est inversée, la section prend l'allure d'une étoile à quatre branches dont les sommets correspondent aux côtés du carré de l'orifice ; il semble que la veine ait tourné de 45° autour de son axe (section 3). Le phénomène se poursuit et au niveau du second "noeud" on constate une nouvelle inversion des faces et des côtés du carré initial (section 4).

Ce phénomène d'*inversion de la veine* est assez mal expliqué ; il résulte vraisemblablement du fait que les filets

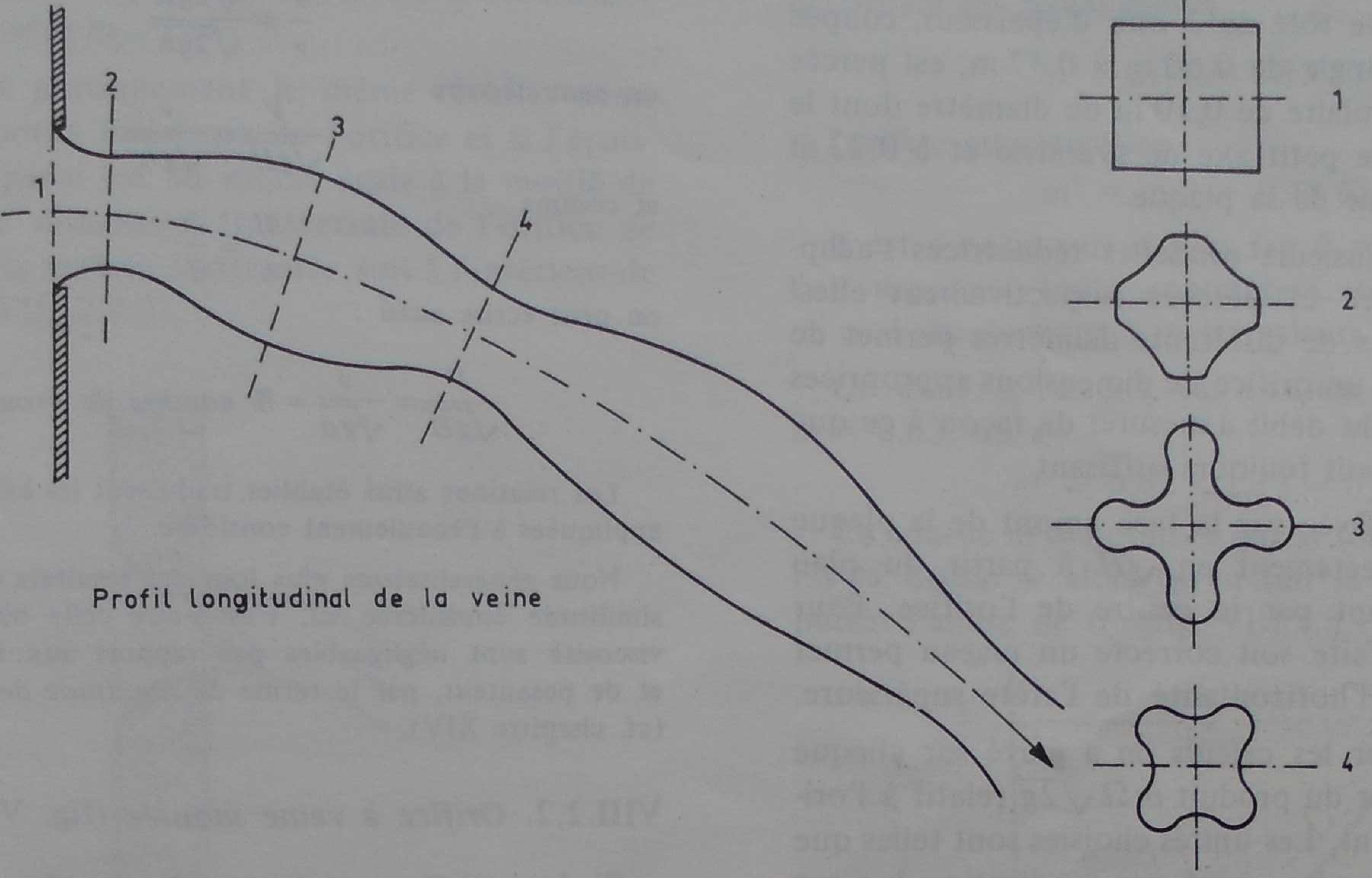


Fig. VIII.2.1.3 – Ecoulement par un orifice carré en mince paroi non noyé

liquides qui sortent au voisinage des sommets du carré de l'orifice ont une direction centripète et tendent à repousser ceux qui sortent au voisinage des milieux des côtés ; les filets liquides tout le long de la veine n'ont donc plus des trajectoires parellèles et s'entrecroisent au niveau des "noeuds". La tension superficielle sur la surface extérieure de la veine doit également jouer un rôle pour expliquer le phénomène qui n'est pas encore nettement exprimé.

b) *Autres orifices polygonaux*

D'une façon générale la veine qui sort d'un orifice polygonal se déforme et sa section rappelle une étoile dont les branches restent perpendiculaires aux côtés du polygone (exemples : triangle équilatéral, pentagone régulier).

VIII.2.1.6. *Application : Orifice de jauge*

On peut utiliser un orifice en mince paroi pour jauger une source ou un très petit cours d'eau. On barre l'émissaire de la source ou le petit cours d'eau par un panneau dans lequel on a pratiqué un orifice en mince paroi ; on oblige ainsi le cours d'eau à s'écouler à travers cet orifice.

Pour obtenir un écoulement calme et avoir pour le coefficient de contraction une valeur aussi constante que possible pratiquement valable pour toutes les charges compatibles avec les dimensions du dispositif, on adopte un orifice circulaire.

On peut facilement réaliser un tel dispositif avec les moyens locaux pour faire une mesure. La Station expérimentale d'Hydraulique agricole et de Génie Rural a établi un type de dispositif de jaugeage par orifice en mince paroi ainsi constitué (fig. VIII.2.1.4) :

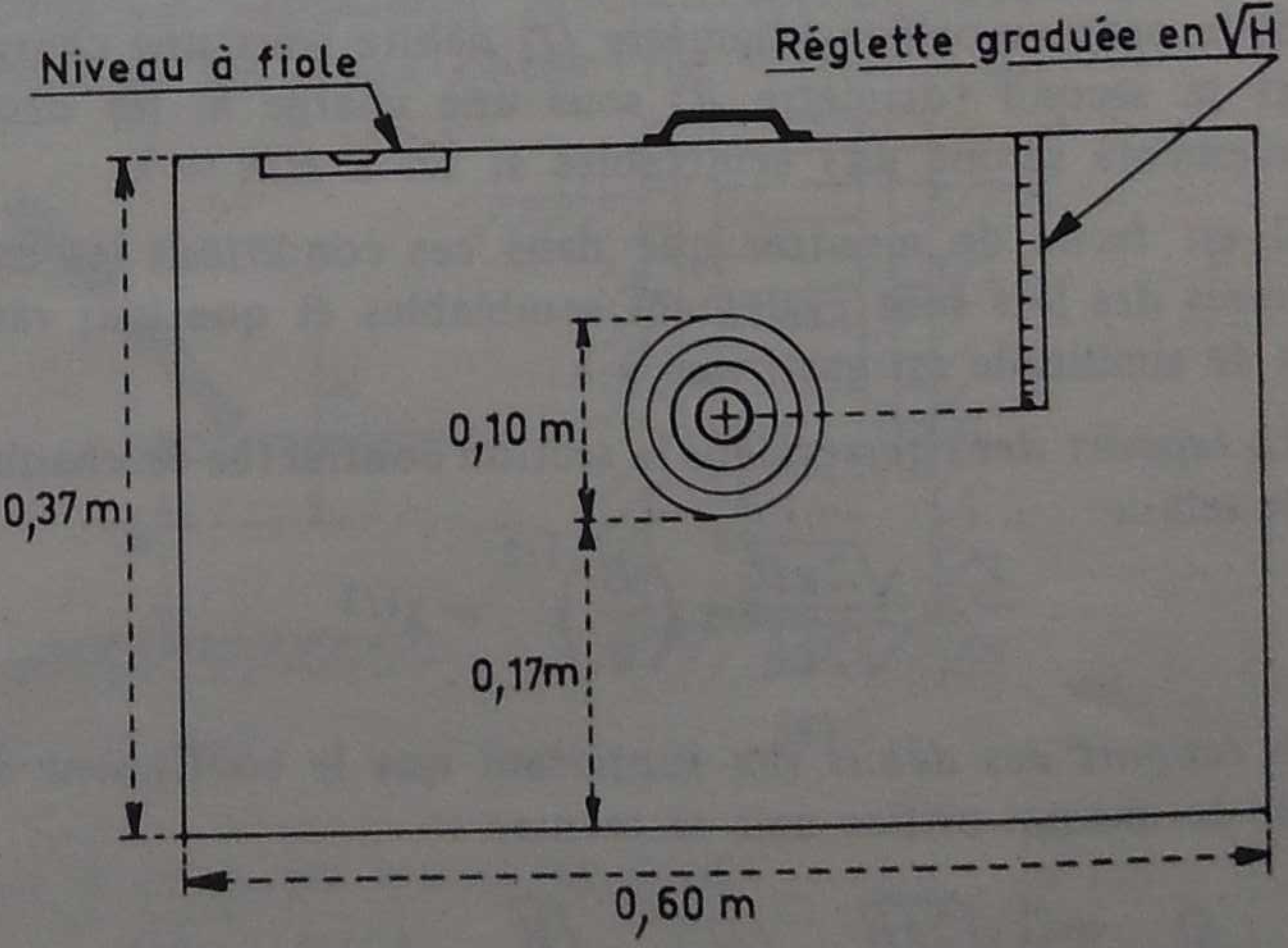


Fig. VIII.2.1.4 – Orifice de jauge de la Station expérimentale d'Hydraulique agricole et de Génie Rural

Une plaque de tôle de 3 mm d'épaisseur, coupée suivant un rectangle de 0,60 m × 0,37 m, est percée d'un orifice circulaire de 0,10 m de diamètre dont le centre est sur le petit axe de symétrie et à 0,22 m du bord inférieur de la plaque.

Un jeu de plusieurs rondelles réductrices s'adaptant sur l'orifice et percées respectivement elles-mêmes d'orifices de différents diamètres permet de toujours utiliser un orifice de dimensions appropriées à l'importance du débit à mesurer de façon à ce que le rapport H/R soit toujours suffisant.

Une réglette fixée sur la face amont de la plaque est graduée directement en $\sqrt{H}$ à partir du plan horizontal passant par le centre de l'orifice. Pour que la lecture faite soit correcte un niveau permet de s'assurer de l'horizontalité de l'arête supérieure.

Pour simplifier les calculs on a gravé sur chaque rondelle la valeur du produit $m\Omega\sqrt{2g}$ relatif à l'orifice correspondant. Les unités choisies sont telles que le produit du nombre gravé par l'indication lue sur la réglette donne directement le débit en litres par heure.

Ce dispositif permet d'effectuer des jaugeages depuis 300 litres jusqu'à 30 mètres cubes par heure.

VIII.2.1.7. *Similitude des écoulements par les orifices*

Considérons deux orifices de même forme géométrique mais de dimensions différentes, par exemple deux orifices circulaires de diamètre D et d. Posons $D/d = \lambda$ rapport de similitude des deux orifices.

Si le premier orifice (diamètre D) débite sous une charge H et le second (diamètre d) sous une charge h, les deux écoulements seront dits semblables si on a $H/h = \lambda$.

Il est facile de montrer que dans ces conditions les trajectoires des jets sont également semblables et que leur rapport de similitude est aussi égal à λ.

Le *rapport des vitesses* dans la section contractée de chaque veine sera :

$$\frac{V}{v} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{2gh}} = \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} = \lambda^{1/2}$$

et le *rapport des débits* (en supposant que le coefficient de débit de chaque orifice soit le même) :

$$\frac{Q}{q} = \frac{m\Omega\sqrt{2gH}}{m\omega\sqrt{2gh}} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \sqrt{\frac{H}{h}} = \lambda^2\lambda^{1/2} = \lambda^{5/2}$$

Remarquons que de la relation :

$$\frac{V}{v} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{2gh}}$$

on peut déduire

$$\frac{V}{\sqrt{gH}} = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

et comme

$$\frac{H}{h} = \frac{D}{d}$$

on peut écrire aussi :

$$\frac{V}{\sqrt{gD}} = \frac{v}{\sqrt{gd}} = \mathcal{F} \text{ nombre de Froude.}$$

Les relations ainsi établies traduisent les lois de similitude appliquées à l'écoulement considéré.

Nous généraliserons plus loin ces résultats et définirons la similitude considérée ici, c'est-à-dire celle où les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux forces d'inertie et de pesanteur, par le terme de *similitude de Reech-Froude* (cf. chapitre XIV).

VIII.2.2. *Orifice à veine moulée* (fig. VII.2.2.1)

Si les parois intérieures de l'orifice épousent la forme de la veine jusqu'à contenir la section contractée et si l'on considère l'aire facilement mesurable Ω de la section extérieure de l'orifice, il n'y a plus de contraction à l'aval de cette section. Le coefficient de contraction m_c est donc égal à 1. On a alors :

$$Q = \Omega\sqrt{2gH}$$

Dans ce cas la veine est dite *moulée* et l'orifice est dit *parfaitement évasé*.

En fait, il subsiste toujours une légère perte de charge par suite des frottements du liquide contre

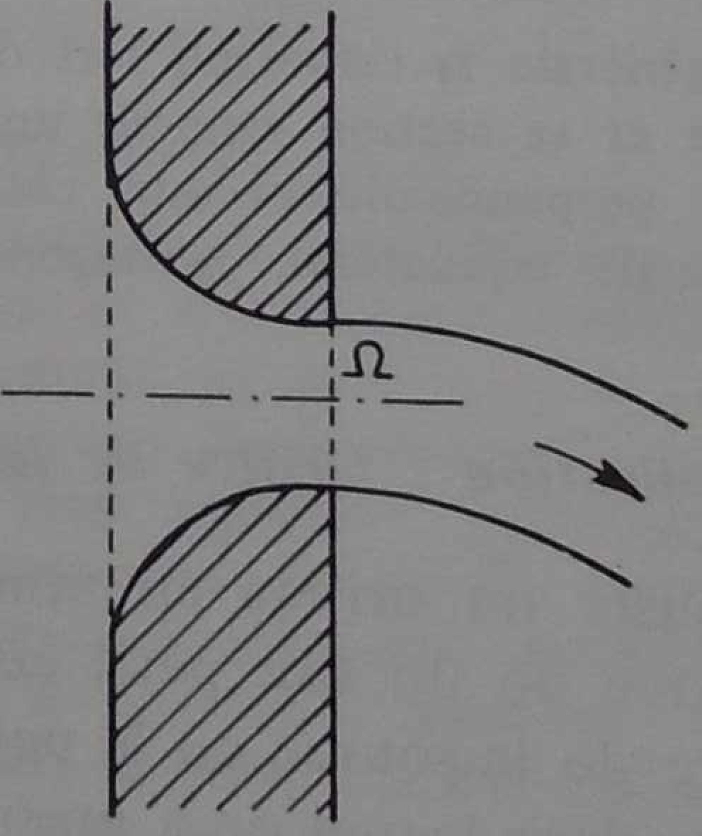


Fig. VIII.2.2.1 – Orifice à veine moulée

les parois intérieurs de l'orifice, de sorte que l'on a pratiquement :

$$Q = 0{,}98\,\Omega\sqrt{2gH}$$

Le coefficient 0,98 représente en somme le coefficient de perte de charge m_j.

On obtient pratiquement le même résultat si on arrondit les bords intérieurs de l'orifice et si l'épaisseur e de la paroi est au moins égale à la moitié de la plus petite dimension transversale de l'orifice de manière que la section contractée soit à l'intérieur de la paroi (fig. VIII.2.2.2).

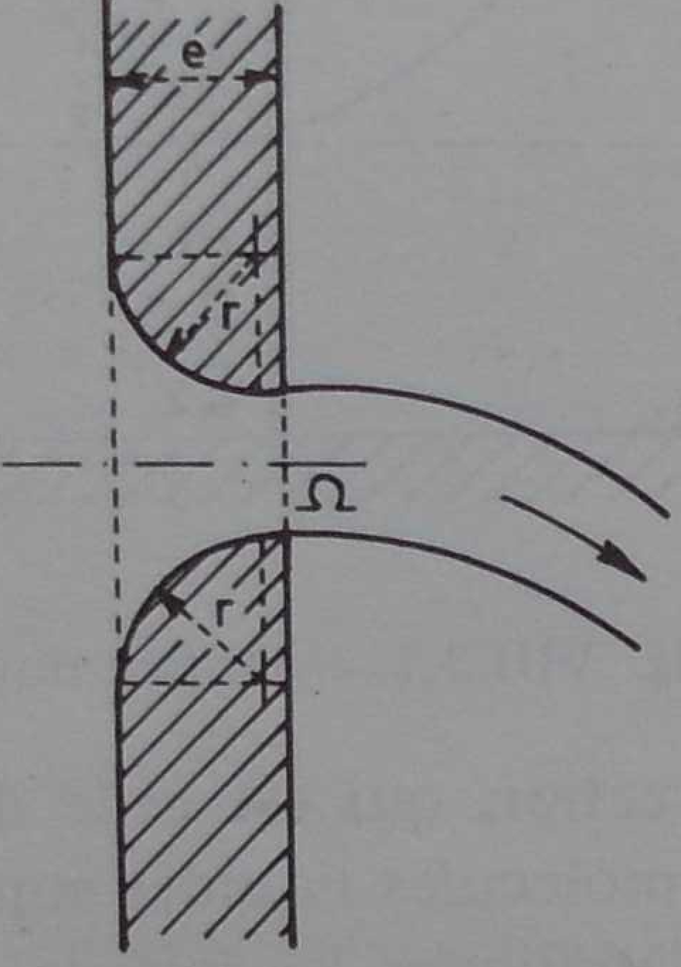


Fig. VIII.2.2.2 – Orifice à bords arrondis

VIII.2.3. Orifices à contraction incompléte

Entre l'écoulement par orifice en mince paroi pour lequel m est de l'ordre de 0,62 et l'écoulement par veine moulée pour lequel m est de l'ordre de 1, s'échelonnent tous les intermédiaires. On dit pour eux qu'il y a *contraction incomplète*.

Si on désigne par θ la fraction du périmètre de l'orifice sur laquelle la contraction est supprimée, le coefficient m' à appliquer serait lié, d'après les expériences de Bidone, au coefficient m valable pour une contraction complète, par les relations suivantes :

si l'orifice est rectangulaire :

$$m' = m(1 + 0{,}15\,\theta)$$

si l'orifice est circulaire :

$$m' = m(1 + 0{,}13\,\theta)$$

Il est à noter que si l'on fait $\theta = 1$ c'est-à-dire si l'on supprime toute contraction, on devrait avoir $m' \simeq 1$ en donnant à m les valeurs courantes.

Or dans le second cas (orifice circulaire) avec $m = 0{,}62$, on a

$$m' = 0{,}62 \times 1{,}13 = 0{,}70$$

La courbe $m'(\theta)$ donnée par la formule de Bidone est la droite D alors qu'en fait la courbe $m'(\theta)$ a plutôt l'allure de D' (fig. VIII.2.3.1).

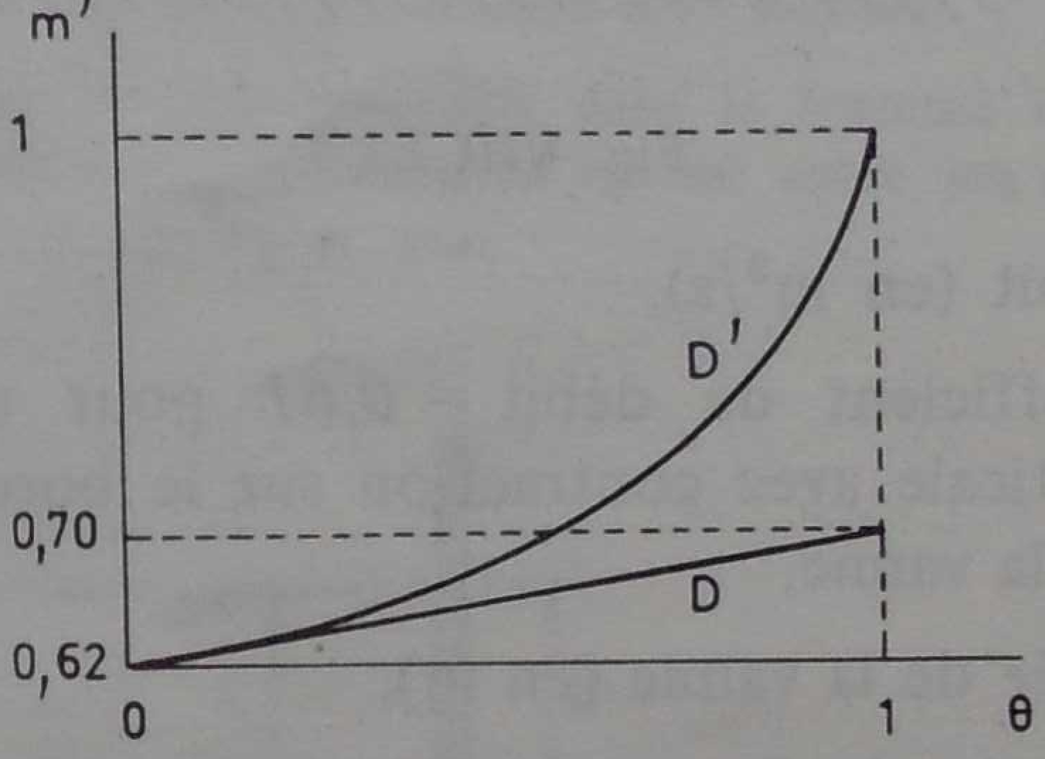


Fig. VIII.2.3.1 – Coefficient de débit des orifices à contraction incomplète

Il y a donc quelques réserves à faire sur l'emploi de ces formules, aussi pratiquement, pour les *vannes* non noyées on adopte des formules déduites de l'expérience.

Voici par exemple celles de *Poncelet* valables pour des *orifices non noyés réglés par des vannes de fond* en supposant la contraction supprimée sur le fond et les deux côtés (fig. VIII.2.3.2).

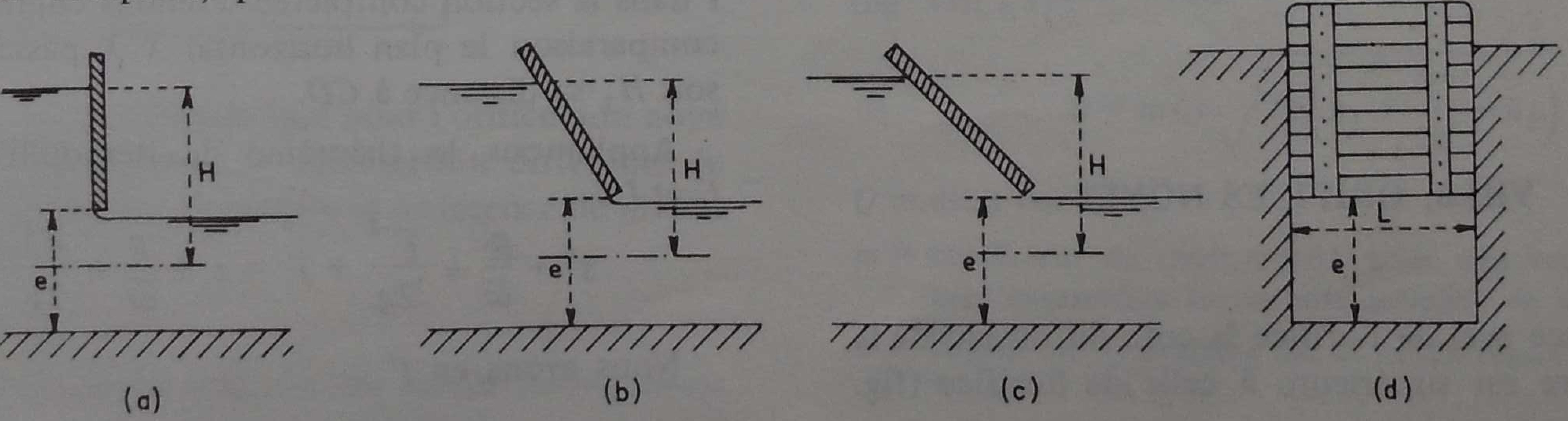


Fig. VIII.2.3.2 – Formules de Poncelet pour le débit des vannes de fond.
(a) Vanne verticale : $Q = 0{,}70\ Le\sqrt{2gH}$
(b) Vanne inclinée à 1 de base pour 2 de hauteur : $Q = 0{,}74\ Le\sqrt{2gH}$
(c) Vanne inclinée à 1/1 : $Q = 0{,}80\ Le\sqrt{2gH}$
(d) Section transversale.

Dans le cas d'une vanne verticale on peut également utiliser la formule plus précise suivante (fig. VIII.2.3.3) :

$$Q = mLe\sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{me}{h_1}}}$$

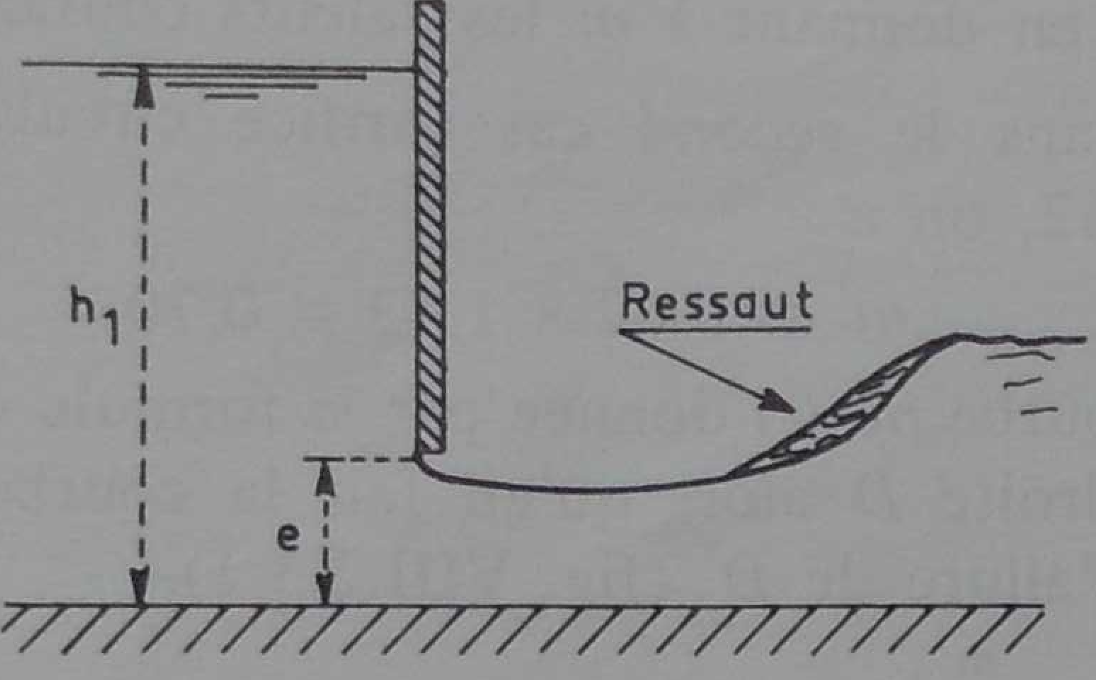


Fig. VIII.2.3.3

Q = débit (en m³/s),

m = coefficient de débit = *0,61* pour une vanne verticale avec contraction sur le bord inférieur de la vanne,

e = levée de la vanne (en m),

L = largeur de l'ouverture de la vanne (égale à la largeur du canal) (en m),

h_1 = profondeur amont (en m).

Bien entendu, cette formule n'est valable que pour un écoulement non noyé ou dénoyé ; parfois il se produit un ressaut à une certaine distance à l'aval de la vanne suivant les conditions d'écoulement dans le bief aval. Ce ressaut, tant qu'il ne touche pas la vanne, est sans influence sur le débit de celle-ci comme nous le montrerons lors de l'étude des écoulements à surface libre (cf. chapitre XII).

VIII.3. ORIFICES NOYÉS

Sur la face aval de l'orifice la cote du niveau de la surface libre est supérieure à celle de l'orifice (fig. VIII.3.1).

On peut observer *expérimentalement* l'écoulement à travers une paroi vitrée en visualisant les filets liquides et on constate, d'une part que l'écoulement ne devient appréciable qu'à une faible distance à l'amont de l'orifice et, d'autre part, l'existence d'une section contractée MN à l'aval de l'orifice.

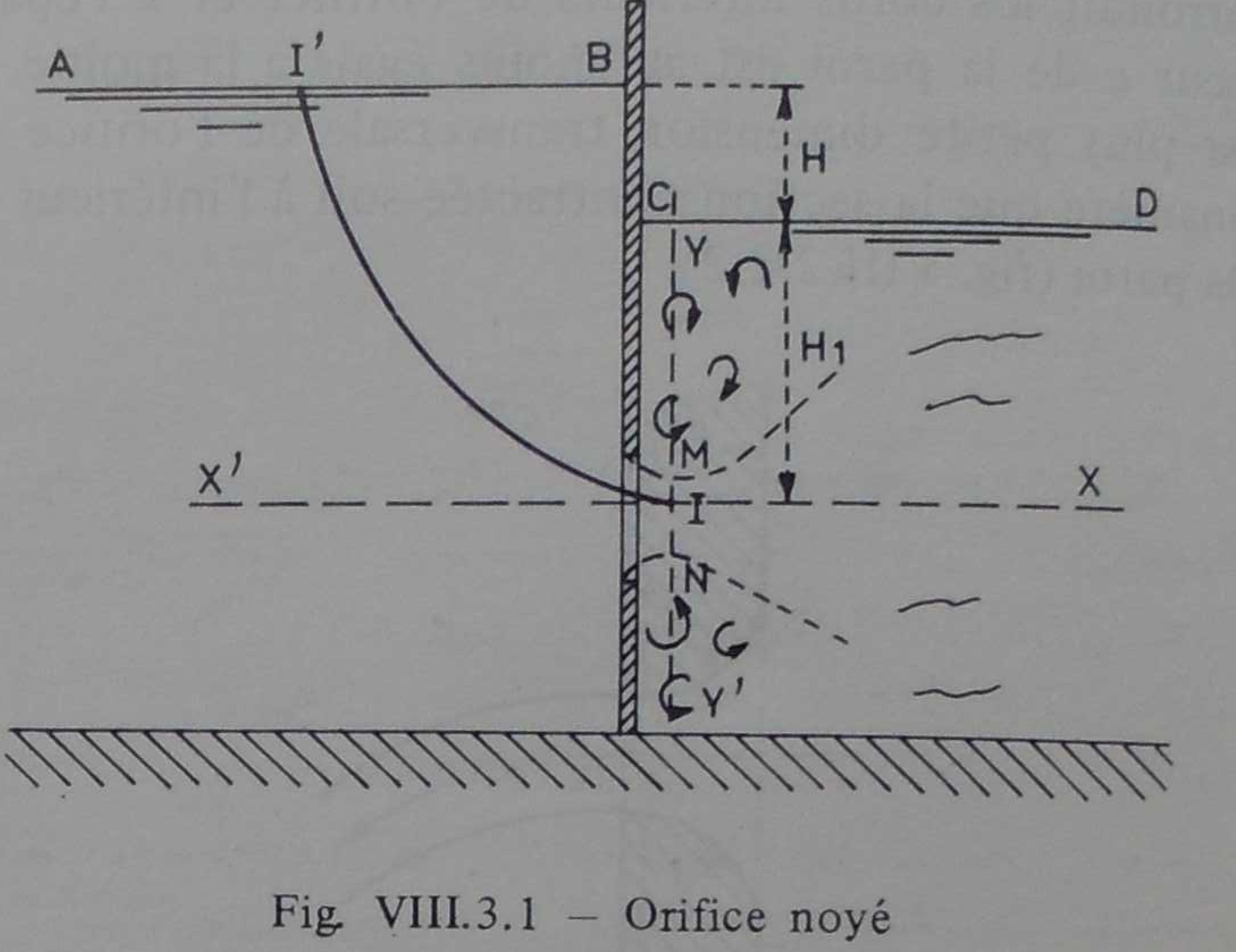


Fig. VIII.3.1 – Orifice noyé

Dans cette section qui est celle de la veine vive, les vitesses des molécules liquides sont parallèles ; on pourra donc y appliquer les lois de l'hydrostatique. A l'extérieur de MN se trouve une zone d'eau morte où le liquide ne participe pas à l'écoulement général et est animé de mouvements tourbillonnaires très lents, de sorte que nous pourrons le considérer comme pratiquement immobile. En définitive, dans tout le plan vertical $Y'Y$ contenant la section contractée nous pourrons appliquer la loi de l'hydrostatique.

Le régime étant supposé permanent, les surfaces libres AB et CD dans les deux biefs sont fixes ; soit H la différence de leurs niveaux.

Faisons le même raisonnement que précédemment sur un filet liquide $I'I$ ayant son origine I' sur la surface libre AB et passant par un point quelconque I dans la section contractée. Prenons comme plan de comparaison le plan horizontal $X'X$ passant par I ; soit H_1 sa distance à CD.

Appliquons le théorème de Bernoulli aux points I' et I :

$$z' + \frac{p'}{\omega} + \frac{V'^2}{2g} + j' = z + \frac{p}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + j$$

Nous avons en I' :

$$\left\{\begin{array}{ll} z' = H + H_1 & \\ p' = p_a & \\ V' = 0 & \text{(origine du mouvement)} \\ j' = 0 & (\quad -\text{d}^\circ- \quad) \end{array}\right.$$

en I : $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ p = p_a + \varpi H_1 \text{ (loi de l'hydrostatique)} \\ V \\ j \simeq 0 \quad \text{(approximation)} \end{array}\right.$

d'où :

$$H + H_1 + \frac{p_a}{\varpi} = \frac{p_a}{\varpi} + H_1 + \frac{V^2}{2g}$$

$$V = \sqrt{2gH}$$

Cette formule est la même que celle obtenue pour l'orifice non noyé mais ici H est la différence des niveaux des deux biefs ; c'est d'ailleurs effectivement la hauteur dont le liquide est tombé, on l'appelle aussi la *charge*.

La vitesse V ne dépend donc que de la *charge H*. Elle est la même pour toutes les molécules qui traversent la section contractée quelles que soient les dimensions et la position de l'orifice.

Le débit élémentaire à travers la section $d\omega$ entourant I est :

$$dq = \sqrt{2gH}\, d\omega$$

et le débit total à travers la section contractée Ω' sera

$$Q = \int_{\Omega'} \sqrt{2gH}\, d\omega = \Omega' \sqrt{2gH}$$

Comme pour l'orifice non noyé, on pose $\Omega' = m\Omega$; le coefficient de contraction m a pratiquement la même valeur que pour le même orifice en écoulement non noyé (en fait il est légèrement inférieur).

La formule du débit est donc, en définitive :

$$\boxed{Q = m\Omega\sqrt{2gH}}$$

C'est la même formule que pour l'orifice non noyé mais il faut bien noter la signification différente de la charge H qui, ici, représente la différence de niveau des deux biefs.

Applications

a) *Tuyère noyée* (fig. VIII.3.2). On devrait théoriquement avoir

$$Q = \Omega\sqrt{2gH}$$

En raison des légers frottements qui se produisent contre les parois de la tuyère, on a en fait

$$Q = 0{,}98\,\Omega\sqrt{2gH}$$

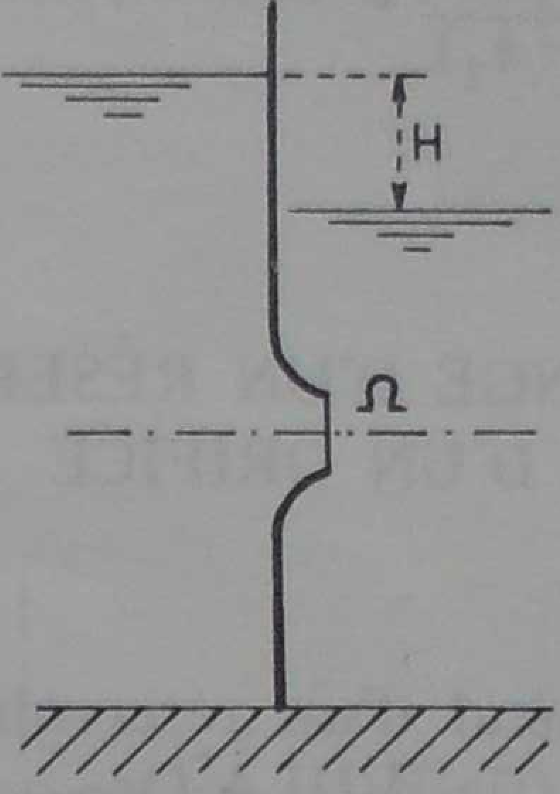


Fig. VIII.3.2 – Tuyère noyée

b) *Vannes noyées* (fig. VIII.3.3). On utilise les mêmes coefficients que pour les vannes non noyées.

La charge H qui intervient dans la formule donnant le débit est alors la différence de niveau entre les surfaces libres des biefs amont et aval.

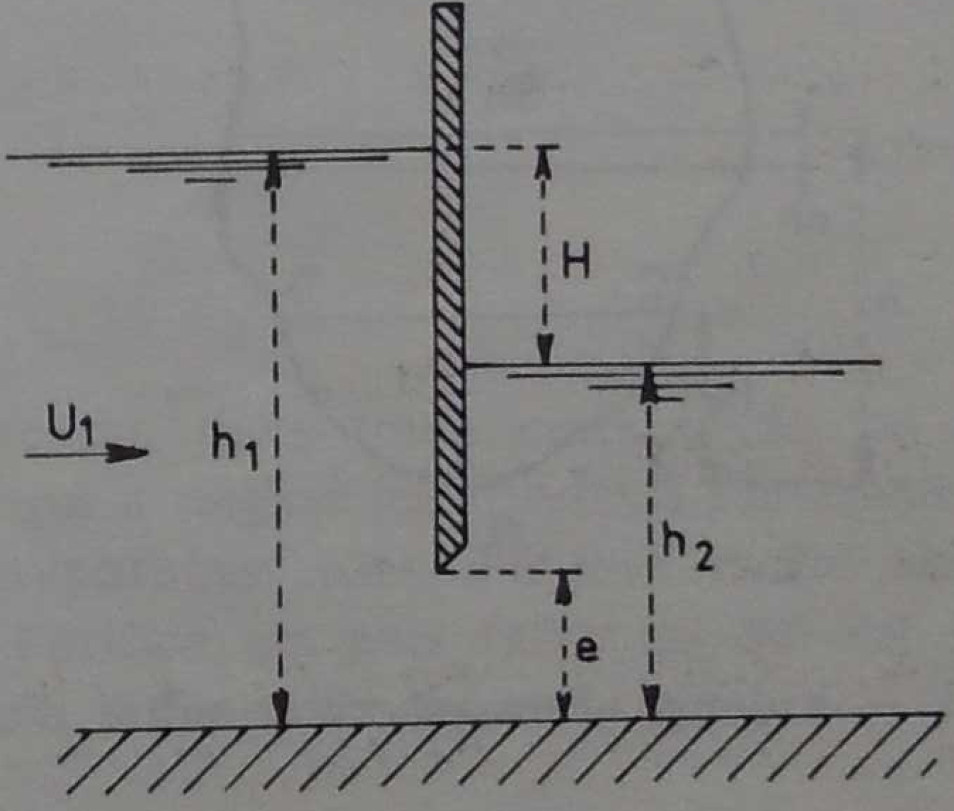


Fig. VIII.3.3 – Vanne noyée

On utilisera donc dans ces conditions les formules de Poncelet (§ VIII.2.3). Dans le cas d'une vanne verticale on pourra également utiliser la formule plus précise suivante (fig. VIII.3.3) :

$$Q = mLe\sqrt{2g\left(h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2\right)}$$

Q = débit (en m^3/s),

m = coefficient de débit = 0,61 pour une vanne verticale avec contraction sur le bord inférieur de la vanne,

L = largeur de l'ouverture de la vanne (égale à la largeur du canal) (en m),

e = levée de la vanne (en m),

h_1 = profondeur amont (en m),

h_2 = profondeur aval (en m),

U_1 = vitesse moyenne à l'amont dans la section du canal de largeur L et de profondeur h_1 (en m/s).

Le terme $U_1^2/2g$ pourra parfois être négligé si U_1 est suffisamment faible ; on retombe alors sur la formule usuelle $Q = mLe\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$.

VIII.4. VIDANGE D'UN RÉSERVOIR MUNI D'UN ORIFICE

VIII.4.1. Cas général d'un réservoir de forme quelconque (fig. VIII.4.1)

Soit un réservoir non alimenté, rempli jusqu'en AB à une hauteur H au-dessus du centre de gravité de l'orifice. Après l'ouverture de l'orifice, le niveau va s'abaisser progressivement et le régime ne sera donc plus permanent.

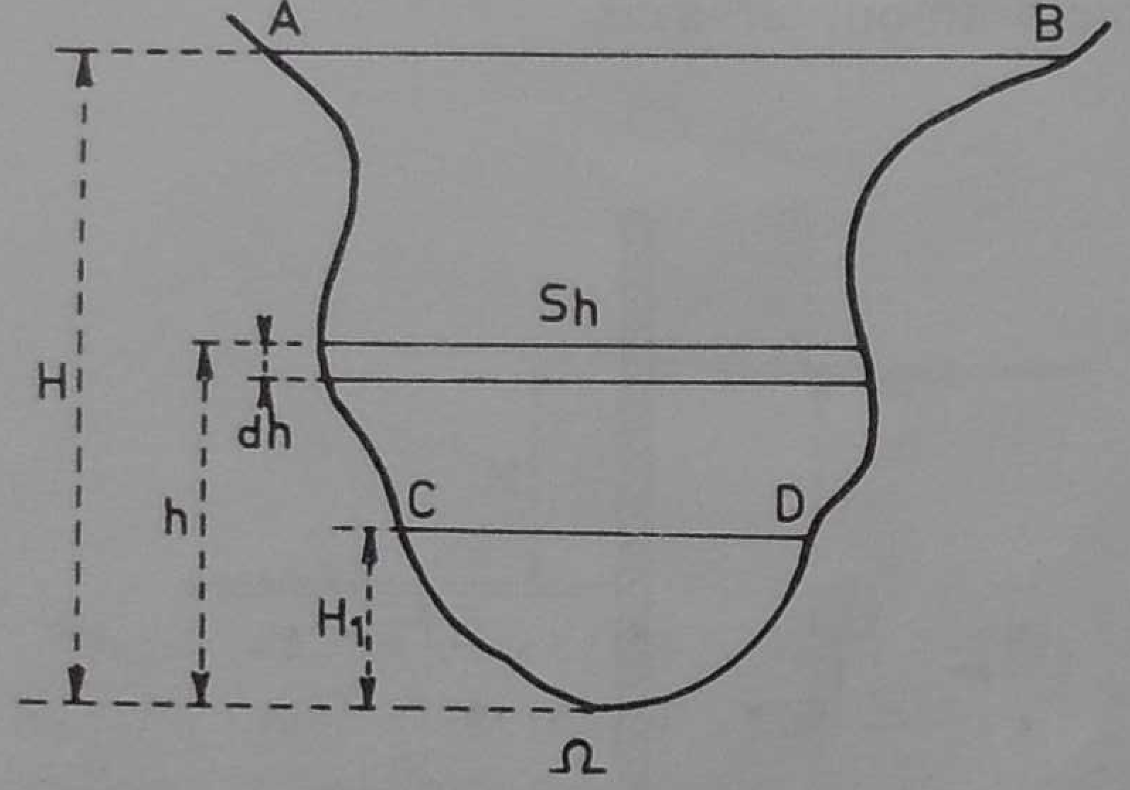


Fig. VIII.4.1 – Vidange d'un réservoir muni d'un orifice

Si la section transversale est toujours assez grande pour que les vitesses des molécules liquides à l'intérieur du réservoir soient constamment négligeables quand le niveau s'abaisse, on a constamment pour toute hauteur d'eau h :

$$Q = m\Omega\sqrt{2gh}$$

Pendant le temps dt le niveau s'abaisse de dh ; soit S_h l'aire de la surface libre pour cette hauteur h. L'équation de continuité s'écrit :

$$Q\,dt = -S_h\,dh$$

ou

$$m\Omega\sqrt{2g}\,dt = -S_h\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

Le temps nécessaire pour que le niveau s'abaisse de AB à CD sera (en supposant m constant) :

$$m\Omega\sqrt{2g}t = -\int_H^{H_1}\frac{S_h}{\sqrt{h}}dh$$

ce qui donne :

$$t = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H}\frac{S_h}{\sqrt{h}}dh$$

et le temps T nécessaire à la vidange complète sera donné par la formule :

$$T = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{S_h}{\sqrt{h}}dh$$

L'intégrale du second membre dépend de la loi $S_h = f(h)$ c'est-à-dire de la forme du réservoir.

VIII.4.2. Cas particulier d'un réservoir prismatique ou cylindrique vertical (section droite constante)

a) *Durée de vidange totale.* Soit S la section droite constante du réservoir.

Le même raisonnement que précédemment permet d'écrire ;

$$m\Omega\sqrt{2g}\,dt = -S\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

Intégrons en supposant m constant :

$$\frac{1}{S}m\Omega\sqrt{2g}t = -2\sqrt{h} + C^{te}$$

pour $t = 0$, $h = H$, donc $C^{te} = 2\sqrt{H}$

et l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{S}m\Omega\sqrt{2g}t = 2(\sqrt{H} - \sqrt{h}) \qquad [VIII.4.2.1]$$

La durée de vidange totale T s'obtient en faisant $h = 0$, soit :

$$T = \frac{2SH}{m\Omega\sqrt{2gH}}$$

Mais $SH = A$ volume utile du réservoir

et $m\Omega\sqrt{2gH} = Q_0$, débit initial.

Donc $$T = \frac{2A}{Q_0}$$

C'est le double du temps nécessaire pour vider le réservoir avec un débit constant égal au débit initial.

b) *Loi de vidange h(t).* L'équation [*VIII.4.2.1*] peut s'écrire :

$$t = \frac{2SH}{m\Omega\sqrt{2gH}} - \frac{2S}{m\Omega\sqrt{2g}}\sqrt{h} \qquad [VIII.4.2.2]$$

avec $T = \dfrac{2SH}{m\Omega\sqrt{2gH}}$ ou $\dfrac{2S}{m\Omega\sqrt{2g}} = \dfrac{T}{\sqrt{H}}$

en remplaçant dans [*VIII.4.2.2*] :

$$t = T - \frac{T}{\sqrt{H}}\sqrt{h}$$

ou

$$h = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 H \qquad [VIII.4.2.3]$$

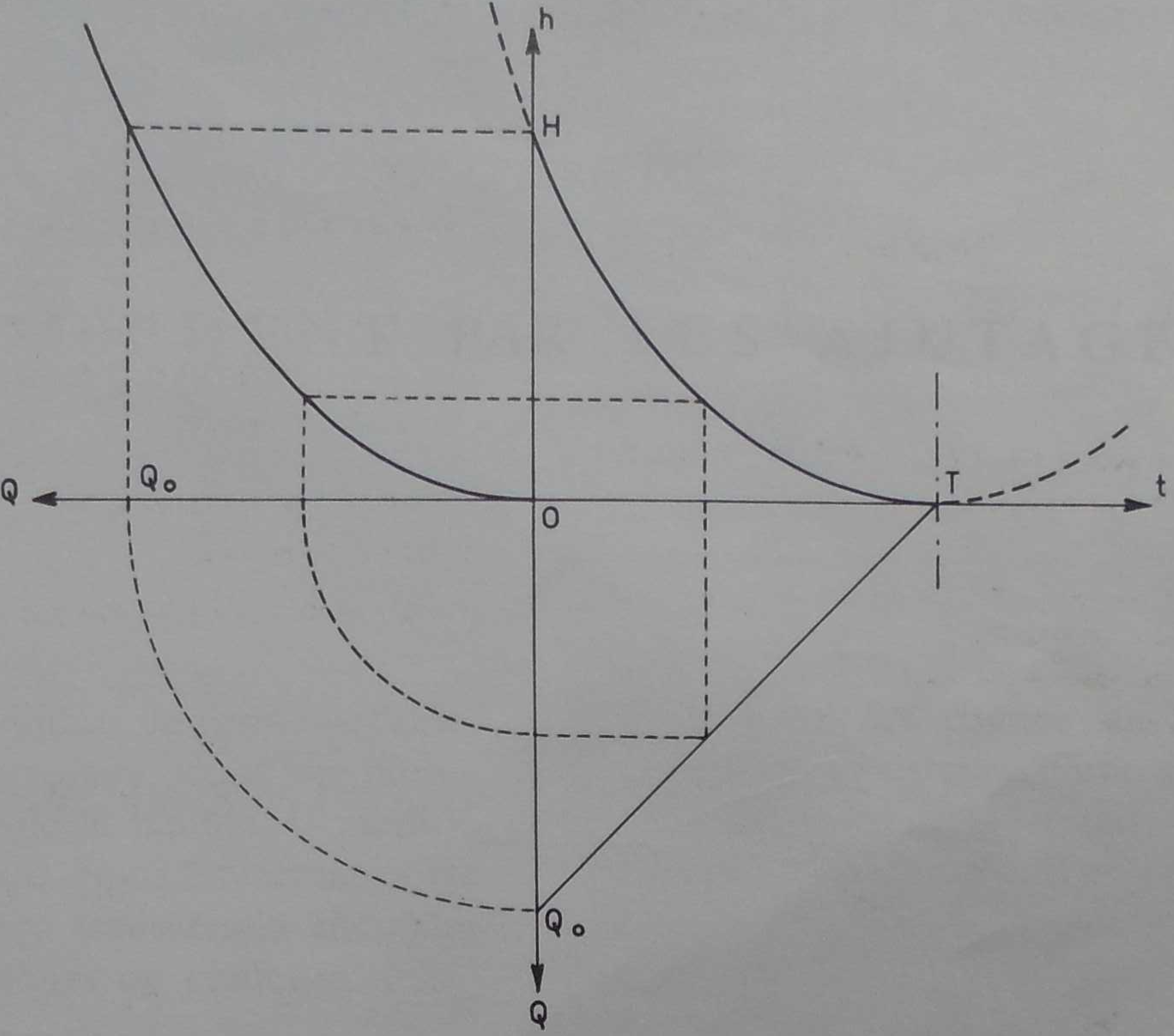


Fig. VIII.4.2

La courbe correspondante est une parabole dont le sommet est sur l'axe des t et a pour abscisse T (fig. VIII.4.2).

c) *Loi* $Q(t)$. Connaissant la loi $h(t)$ on peut en déduire la loi $Q(t)$.

En effet on sait que :

$$Q = -S\frac{dh}{dt} = 2S\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{H}{T}$$

$$Q = 2\frac{SH}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

$$Q = Q_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

La courbe $Q(t)$ est donc une droite (fig. VIII.4.2).

En éliminant graphiquement t entre les deux courbes $h(t)$ et $Q(t)$ on retrouve la parabole $Q(h)$.

En chaque point de la courbe $h(t)$ le débit est égal au coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point correspondant changé de signe et multiplié par S, soit

$$Q = -S\frac{dh}{dt}$$

Cette valeur est égale à celle lue sur la courbe $Q(t)$ au même instant t.

Bien entendu, dans toute cette étude, on a supposé m constant et on a négligé les vitesses à l'intérieur du réservoir. Ces deux hypothèses sont d'autant moins valables que la charge sur l'orifice est plus faible ce qui est le cas en fin de période de vidange du réservoir.

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre VIII

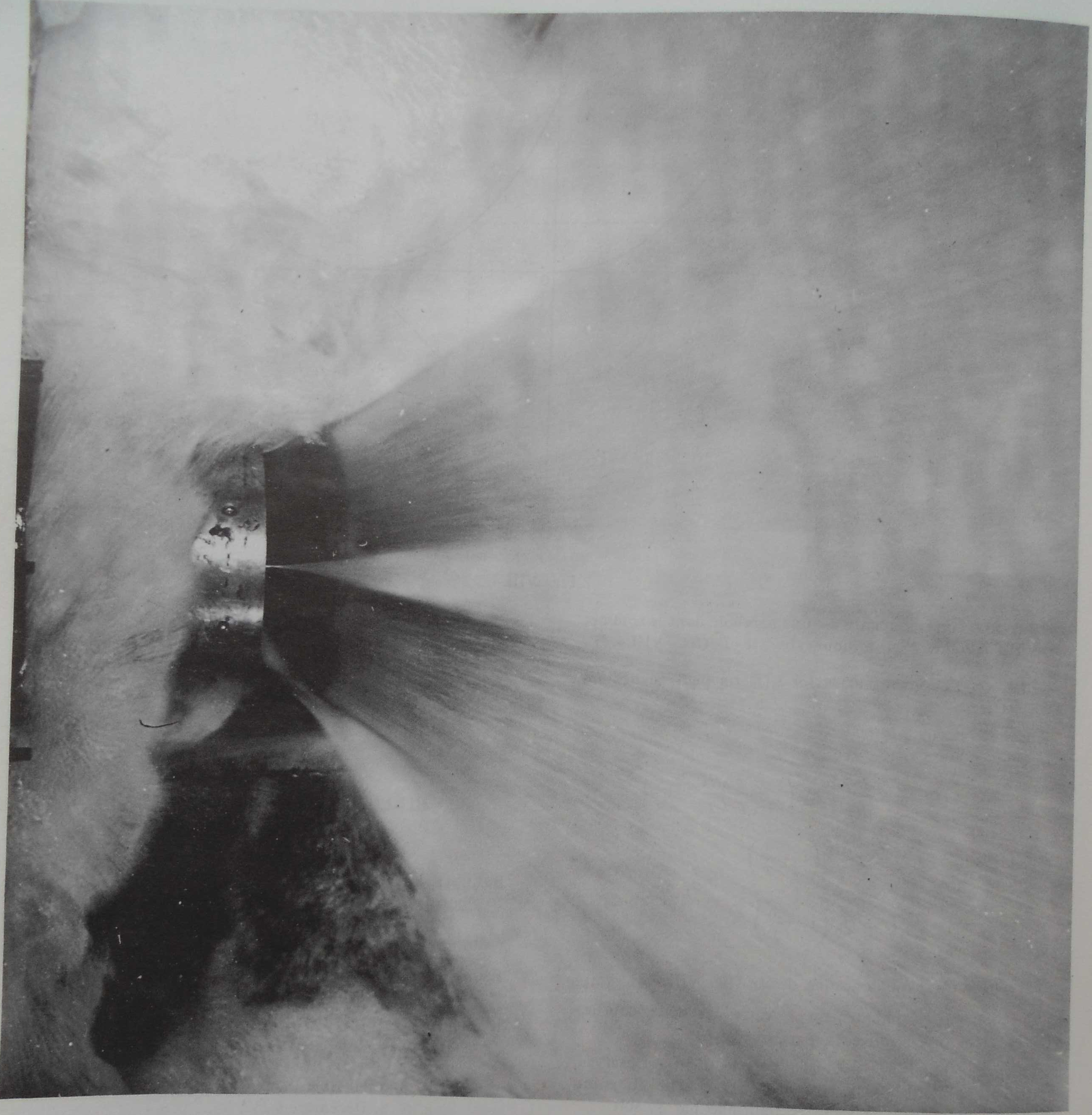
BELL (K.J.) et BERGELIN (O.P.).— Flow through annular orifices (Ecoulement à travers des orifices annulaires). *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* n° 3, Avril 1957.

ESCANDE (L.).— Dispositifs d'aération des vannes mobiles. *Le Génie Civil*, 15 Juin 1950.

KOLF (R.C.) et STEVENS (J.C.).— Vortex flow through horizontal orifices (Ecoulement avec vortex par des orifices horizontaux). *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Sanit, Engng. Division*, n° 6, Décembre 1957.

SCHMIDT (M.).— Ecoulement dénoyé et écoulement noyé sous les vannes, *Die Bautechnik*, n° 8, Août 1957.

STRACHILOFF (E.).— Théorie de l'écoulement libre sous une vanne de fond. *Wasserwirtschaft-Wassertechnik*, n° 12, Décembre 1958.



Ecoulement noyé par un robinet à jet creux

SOGREAH – Service Photo-Cinéma

CHAPITRE IX

ÉCOULEMENT PAR LES AJUTAGES

Un ajutage est un petit conduit de forme variable, de section généralement circulaire, dont on munit un orifice par lequel s'écoule le liquide. Il modifie les conditions de l'écoulement. Nous limiterons notre étude aux ajutages de section transversale circulaire et qui peuvent être cylindriques ou coniques.

IX.1. AJUTAGE CYLINDRIQUE

Suivant sa position par rapport au sens de l'écoulement, l'ajutage cylindrique peut être

— intérieur ou rentrant,

— extérieur ou sortant.

IX.1.1. Ajutage intérieur ou rentrant ou ajutage de Borda

IX.1.1.1. *Ajutage court, à veine non adhérente* (fig. IX.1.1.1)

Supposons la section circulaire Ω de l'ajutage très petite par rapport à la section droite horizontale du réservoir et l'ajutage suffisamment court pour que la veine n'adhère pas à ses parois intérieures.

On constate expérimentalement que la présence de cet ajutage a pour effet de rendre immobile le liquide tout le long des parois, en particulier autour de CD. Les vitesses ne deviennent appréciables que dans la section EF.

Dans ces conditions, dans le réservoir les pressions se répartissent suivant la loi hydrostatique, le long de la paroi BN comme sur les autres. On constate également l'existence d'une section contractée $C'D'$ où les vitesses des filets liquides sont parallèles et à l'intérieur de laquelle règne donc la pression atmosphérique.

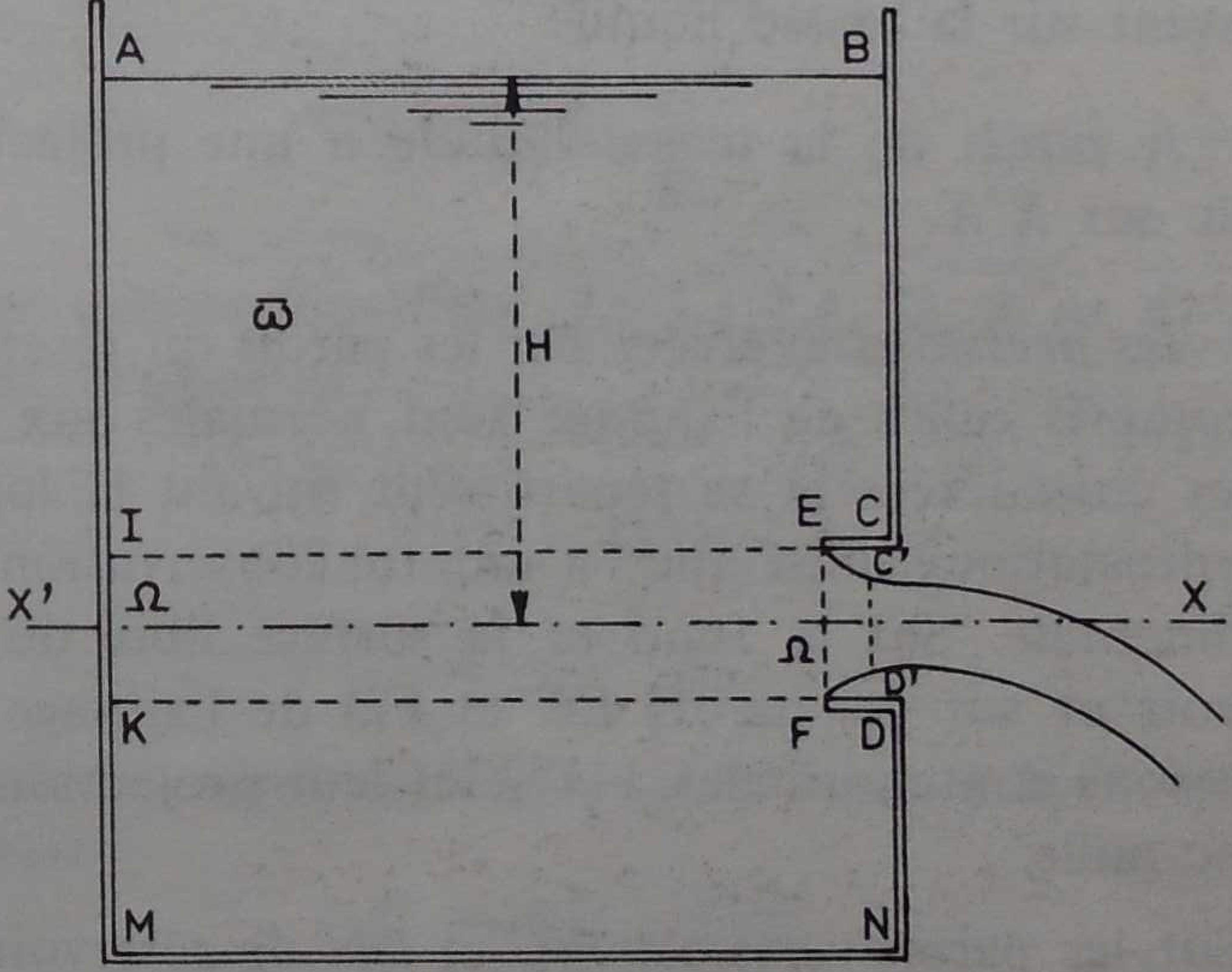


Fig. IX.1.1.1 – Ecoulement par un ajutage rentrant à veine non adhérente

Appliquons le *théorème d'Euler*, en projection sur l'axe horizontal $X'X$ confondu avec l'axe de l'ajutage, à la masse liquide limitée par le contour $ABCEC'D'FDNMA$; il vient :

$$\frac{\overline{\omega}}{g} Q\beta(U_2 - U_1) = \Sigma F_x$$

U_1 est ici la vitesse d'abaissement de la surface libre AB ; sa projection sur $X'X$ est nulle et le premier terme se réduit à $\frac{\overline{\omega}}{g} QU$ en désignant par U la vitesse

moyenne dans la section contractée et en supposant le coefficient $\beta = 1$.

Désignons par m le coefficient de contraction ; le débit dans la section contractée d'aire $m\Omega$ est donc :

$$Q = m\Omega U$$

Le *théorème de Bernoulli* appliqué entre deux points d'un filet liquide pris l'un sur la surface libre AB, l'autre dans la section contractée MN, donne

$$U = \sqrt{2gH}$$

en assimilant la vitesse en un point quelconque de la section contractée à la vitesse moyenne dans cette section et en négligeant les pertes de charge.

Le premier membre de l'équation d'Euler s'écrit donc :

$$\frac{\varpi}{g} m\Omega U^2 = 2m\varpi\Omega H$$

Faisons l'inventaire des forces extérieures ΣF_x agissant sur la masse liquide :

— *le poids* de la masse liquide a une projection nulle sur $X'X$,

— *les pressions* exercées par les parois du réservoir y compris celles de l'ajutage sont normales aux surfaces considérées et se répartissent suivant la loi de l'hydrostatique ainsi que l'a montré l'observation expérimentale. Sur le fond et la surface libre du réservoir et sur les parois EC et FD de l'ajutage ces pressions sont normales à $X'X$ et leur projection est donc nulle.

Sur les parois verticales BC et DN du réservoir les pressions sont égales et opposées à celles s'exerçant sur la face opposée.

Il subsiste donc seulement la résultante des pressions exercées par la portion IK de la paroi opposée à la section EF de l'ajutage et sur la surface extérieure de la veine limitée par le contour $EC'D'F$ ainsi que sur la section contractée $C'D'$.

Comme la veine s'écoule dans l'atmosphère et n'adhère pas aux parois intérieures de l'ajutage, la pression atmosphérique s'exerce sur les contours EC' et $D'F$ de la veine ; elle s'exerce aussi dans la section contractée $C'D'$.

En définitive la résultante des pressions appliquées à la masse liquide considérée se réduit à la pression totale effective exercée par la portion IK de la paroi et a pour projection sur $X'X$:

$$\varpi H\Omega$$

Le *théorème d'Euler* s'écrit donc :

$$2m\varpi\Omega H = \varpi\Omega H$$

$$m = 0{,}5$$

et

$$\boxed{Q = 0{,}5\ \Omega\sqrt{2gH}}$$

Pratiquement on réduit ce résultat de 1 à 2 % pour tenir compte de la perte de charge de AB à $C'D'$.

Remarque :

Dans le cas d'un orifice en mince paroi on ne peut évidemment pas appliquer aussi facilement le théorème d'Euler, car les vitesses sont appréciables au voisinage de l'orifice et le long des parois et la loi de l'hydrostatique ne peut plus s'appliquer. C'est donc à cause de cette immobilité du liquide dans le réservoir au voisinage de l'ajutage que $m = 0{,}5$. Mais ces conditions sont assez difficiles à réaliser car si l'ajutage est suffisamment long pour faire "écran" de façon à avoir $m = 0{,}5$, il risque d'être trop long pour éviter l'adhérence de la veine et l'écoulement à "gueule bée" que nous allons maintenant examiner.

IX.1.1.2. *Ajutage long, à veine adhérente* (fig. IX.1.1.2)

Dans ce cas, le tube doit être suffisamment long pour que la veine adhère à tout son pourtour à la sortie ; l'ajutage débite "à gueule bée".

Soit U la vitesse moyenne dans la section de sortie CD.

Appliquons le *théorème d'Euler* en projection sur $X'X$ à la masse liquide limitée par le contour $ABCEE'CDF'FDNMA$.

Il vient, comme précédemment :

$$\frac{\varpi}{g} QU = \varpi\Omega H$$

Mais ici

$$Q = \Omega U$$

On en déduit :

$$U = \sqrt{gH} \qquad [IX.1.1.2.1]$$

Soient :

$E'F'$ la section contractée d'aire $K\Omega$ (K = coefficient de contraction c'est-à-dire de réduction de section),

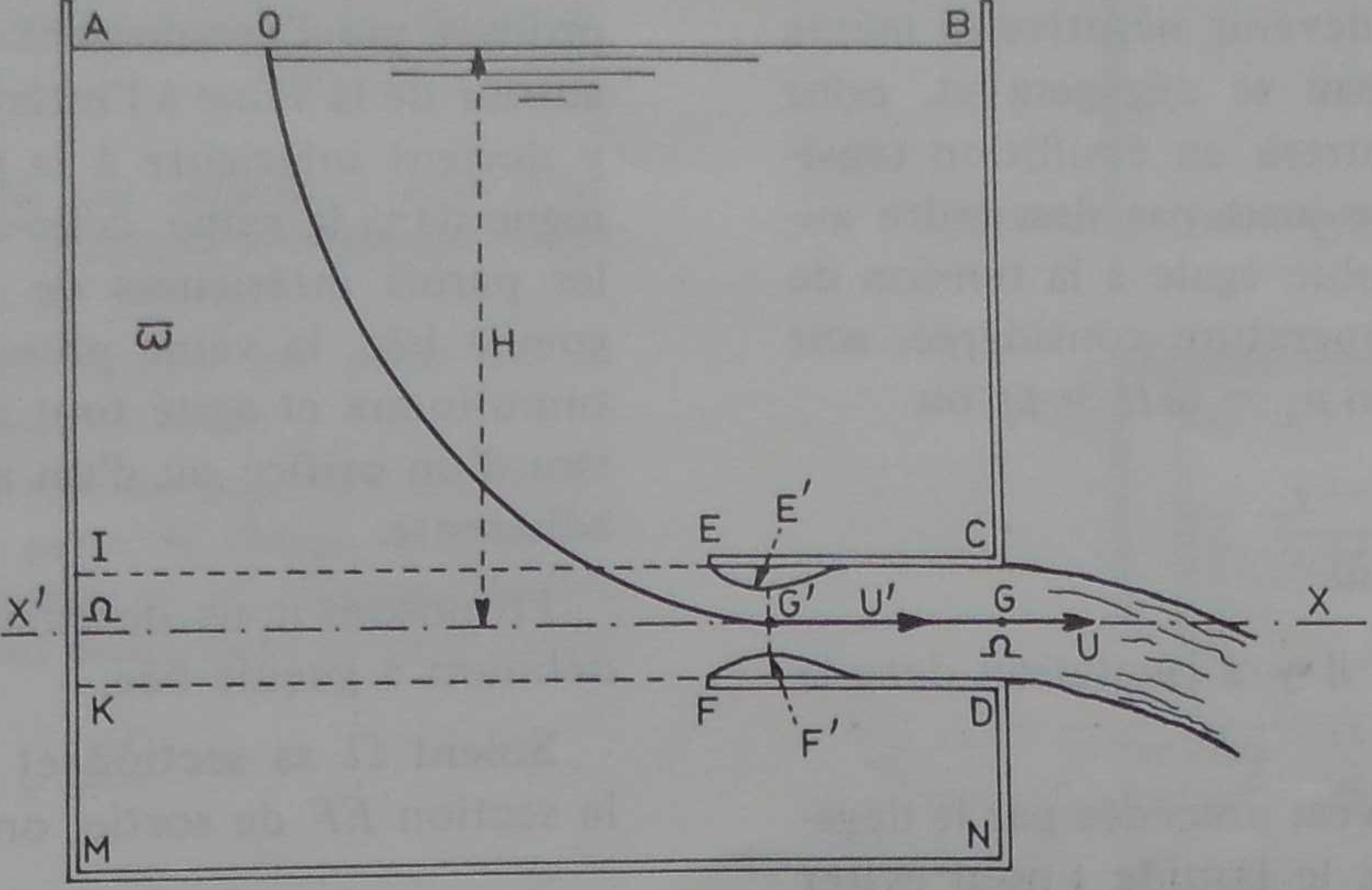


Fig. IX.1.1.2 – Ecoulement par un ajutage rentrant à veine adhérente

$\varpi h'$ la pression effective régnant autour de la section contractée $E'F'$,

U' la vitesse moyenne dans la section contractée $E'F'$.

Appliquons le *théorème de Bernoulli* entre les trois points suivants d'un même filet liquide :

– 0 sur la surface libre,

– G' centre de gravité de la section contractée,

– G centre de gravité de la section de sortie.

Entre 0 et G' la perte de charge est négligeable, donc

$$H = h' + \frac{U'^2}{2g} \qquad [IX.1.1.2.2]$$

Entre G' et G

$$h' + \frac{U'^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} + j$$

Ici, la perte de charge j due à l'élargissement brusque de la veine vive entre les sections $E'F'$ et CD n'est pas négligeable ; elle peut être calculée par la *formule de Borda* en négligeant le terme correctif $\frac{1}{9}\frac{U^2}{2g}$; il vient ainsi :

$$h' + \frac{U'^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} + \frac{(U' - U)^2}{2g} \qquad [IX.1.1.2.3]$$

Par ailleurs nous avons posé

$$\text{aire } E'F' = K\Omega$$

Donc l'*équation de continuité* s'écrira :

$$U'K\Omega = U\Omega$$

$$U' = \frac{U}{K} \qquad [IX.1.1.2.4]$$

Des quatre relations [*IX.1.1.2.1, 2, 3 et 4*] on déduit facilement

$$K = 0{,}5$$

d'où

$$\Omega' = \Omega/2$$

et

$$h' = -H$$

Enfin, si nous appliquons à cet ajutage la formule générale

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH}$$

m étant le *coefficient de débit*, il vient :

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH} = \Omega U = \Omega\sqrt{gH}$$

soit

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

En définitive, pour un tel ajutage :

1 – Le coefficient de contraction $K = 0{,}5$ n'est pas modifié par rapport à l'ajutage rentrant à veine non adhérente,

2 – Le coefficient de débit est distinct du coefficient de contraction et vaut 0,707,

3 – La dépression dans la zone déprimée de l'ajutage est égale à H ; ce dernier résultat limite la charge

H étant donné que la pression absolue $p_a - \overline{\omega} H$ dans la zone déprimée ne peut devenir négative ni même nulle, l'air dissout dans l'eau se dégagera et, pour de fortes charges, l'eau entrera en ébullition (cavitation). Pratiquement on ne peut pas descendre au-dessous d'une pression absolue égale à la tension de vapeur du liquide à la température considérée, soit t_v, ce qui impose la condition $p_a - \overline{\omega} H > t_v$ ou

$$H < \frac{p_a - t_v}{\overline{\omega}}$$

Si H atteint cette limite, il y a cavitation dans la zone déprimée $E'F'$.

Pratiquement la cavitation est précédée par le dégagement des gaz dissous dans le liquide ; pour éviter le dégazage on impose à t_v une valeur minimale supérieure à la tension de vapeur, par exemple pour de l'eau à la température ordinaire on pourra prendre $t_v/\overline{\omega}$ de l'ordre de 3 m. D'où $H < 7$ m. Pour des charges supérieures le phénomène de dégazage contribue à maintenir la pression constante autour de la section contractée et le débit n'augmente plus.

IX.1.2. Ajutage extérieur ou sortant

L'ajutage doit avoir une longueur au moins égale à une fois et demie la plus grande dimension de sa section transversale (fig. IX.1.2.1).

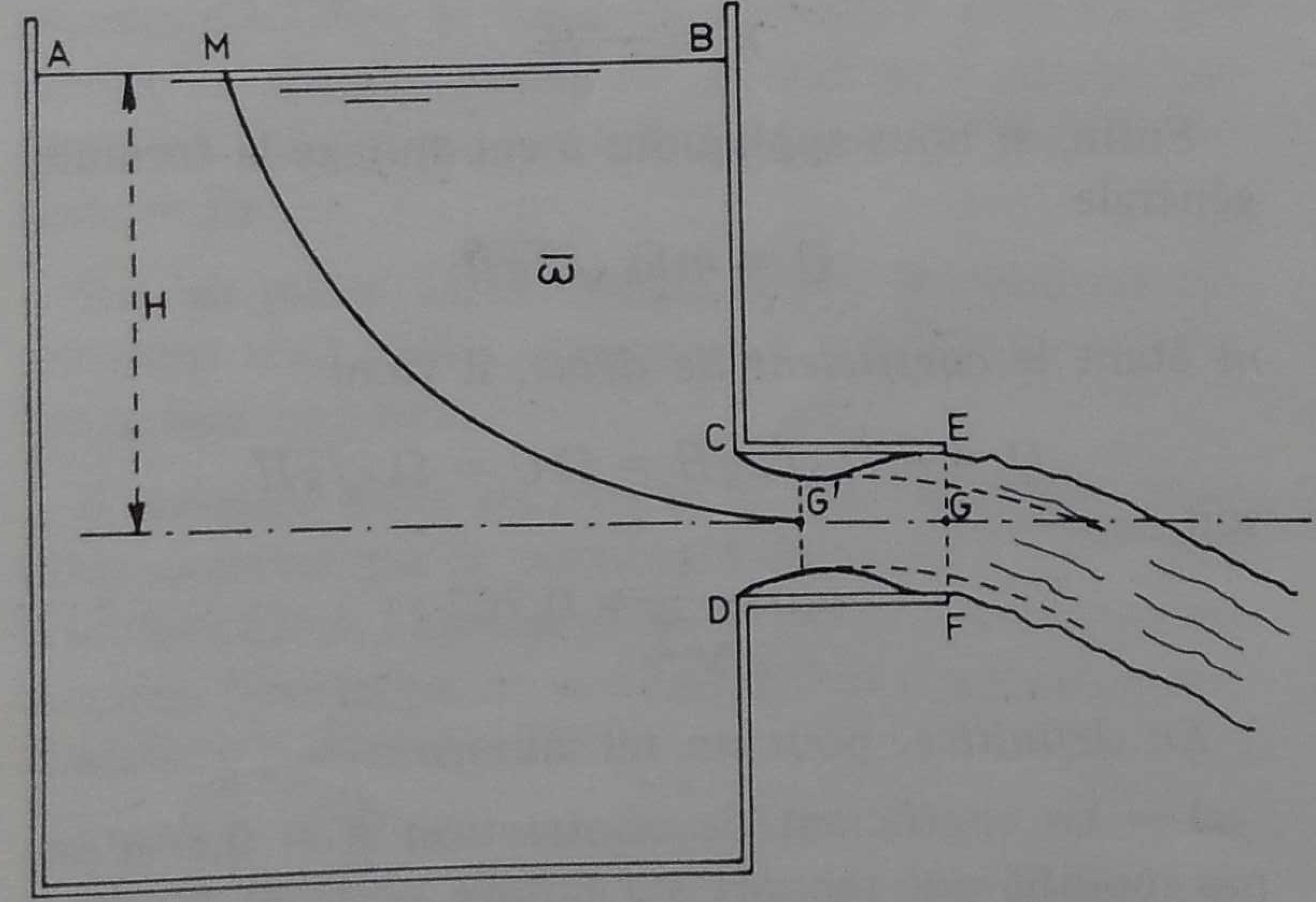


Fig. IX.1.2.1 – Ecoulement par un ajutage sortant

Le réservoir étant rempli jusqu'au niveau AB maintenu constant, si on démasque brusquement l'orifice CD, la première veine qui sort de l'ajutage présente le phénomène de contraction et ne touche pas les bords du tube (tracé en pointillé). L'effet de trompe produit par l'écoulement entraîne l'air qui se trouve autour de la veine à l'intérieur de l'ajutage, la pression y devient inférieure à la pression atmosphérique qui règne dans la veine, celle-ci se dilate et vient toucher les parois intérieures de l'ajutage qui débite alors à gueule bée, la veine présentant à la sortie un aspect tumultueux et agité tout à fait différent du tube lisse issu d'un orifice ou d'un ajutage rentrant à veine non adhérente.

Proposons-nous de calculer *le débit* de cet ajutage débitant à gueule bée.

Soient Ω sa section et U la vitesse moyenne dans la section EF de sortie, on a :

$$Q = \Omega U$$

Pour calculer U, appliquons le théorème de Bernoulli le long du filet liquide passant par le centre de gravité G de la section EF ; soit M le point origine de ce filet sur la surface libre ; prenons pour plan de comparaison le plan horizontal passant par G et soit H sa distance à la surface libre AB.

Nous admettrons que la vitesse en G est égale à la vitesse moyenne U dans la section EF dans laquelle, les filets étant redevenus parallèles, règne la pression atmosphérique.

En désignant par j la perte de charge entre M et G, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$H + \frac{p_a}{\overline{\omega}} = \frac{p_a}{\overline{\omega}} + \frac{U^2}{2g} + j$$

soit

$$H = \frac{U^2}{2g} + j$$

Or la perte de charge j entre M et G se réduit pratiquement à la perte de charge due au rétrécissement brusque du courant à l'entrée dans l'ajutage. Elle a été calculée au § VII.6.3.3.2 et estimée à :

$$j = 0{,}49 \frac{U^2}{2g}$$

Par suite :

$$H = 1{,}49 \frac{U^2}{2g}$$

ou

$$U = 0{,}82 \sqrt{2gH}$$

et donc :

$$\boxed{Q = 0{,}82\, \Omega \sqrt{2gH}} \qquad [IX.1.2.1]$$

étant rappelé que 0,82 est ici un *coefficient de débit résultant de la diminution de vitesse* et non un coefficient de contraction.

Cette augmentation du débit par rapport à celui d'un orifice en mince paroi tient à ce que la *pression qui règne autour de la section contractée est diminuée.*

En effet, considérons le filet liquide qui passe par le centre de gravité G' de la section contractée.

Entre le point origine de ce filet sur la surface libre et G' il n'y a pratiquement pas de perte de charge, si donc U' et h' sont respectivement la vitesse et la pression effective (en mètres d'eau) en G', on peut écrire entre les deux points considérés :

$$H = h' + \frac{U'^2}{2g}$$

mais l'équation de continuité permet d'écrire :

$$\frac{U'}{U} = \frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{\Omega}{m\Omega} = \frac{1}{m}$$

$$U' = \frac{U}{m}$$

et

$$H = h' + \frac{U^2}{2gm^2}$$

$$H = h' + \frac{(0,82)^2\, 2gH}{2gm^2}$$

$$h' = H\left[1 - \left(\frac{0,82}{m}\right)^2\right]$$

Si on adopte pour m la valeur 0,62, on trouve

$$h' = -\,0,75\,H$$

En fait $m = 0,62$ correspond à la contraction d'une veine dans l'air ; ici la pression qui règne autour de la section contractée est plus faible que la pression atmosphérique ce qui contribue à augmenter légèrement m ; on aura donc :

$$h' > -\,0,75\,H$$

Cette dépression $-\,\varpi h'$ autour de la veine vive a été mise en évidence par Venturi qui brancha un manomètre dans la zone déprimée de l'ajutage (fig. IX.1.2.2).

IX.2. AJUTAGE CONIQUE

Nous nous limiterons à l'ajutage conique *extérieur* et nous examinerons successivement

— l'ajutage conique convergent,
— l'ajutage conique divergent.

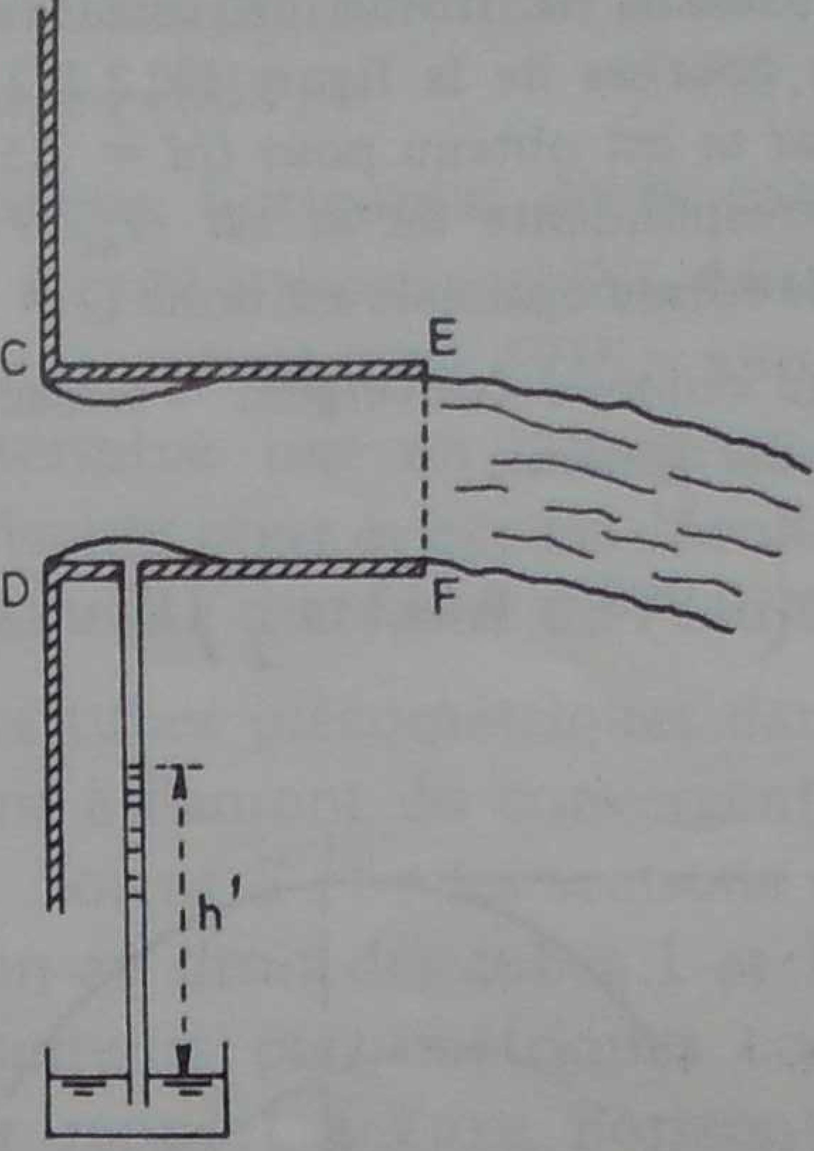


Fig. IX.1.2.2 – Expérience de Venturi

IX.2.1. Ajutage conique convergent (fig. IX.2.1.1)

Supposons le raccordement de l'ajutage avec la paroi du réservoir convenablement arrondi pour mouler la veine et éviter les décollements et désignons par

l la longueur de l'ajutage,

α l'angle au sommet du cône,

d le diamètre de la section de sortie.

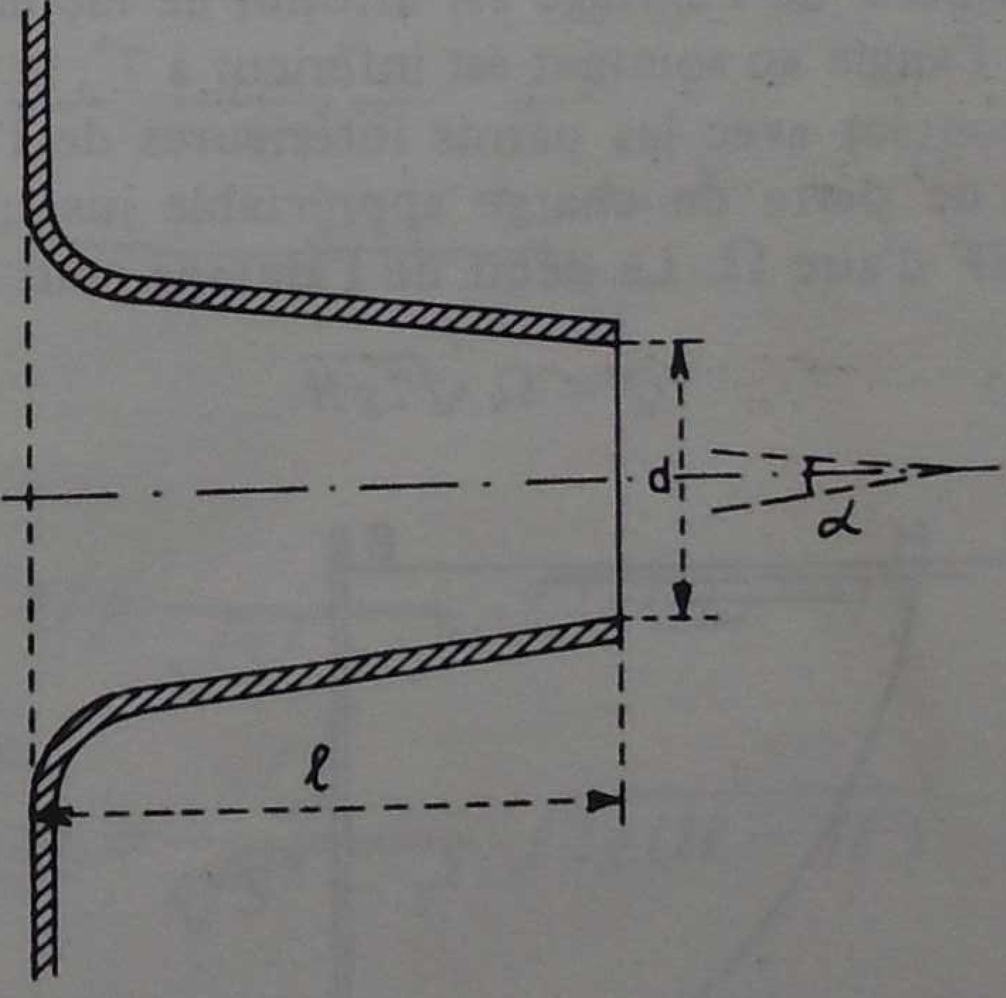


Fig. IX.2.1.1 – Ajutage conique convergent à veine moulée

Pour une charge H, le débit est de la forme

$$Q = m\Omega\sqrt{2gH}$$

avec

$$\Omega = \frac{\pi d^2}{4}$$

et m, coefficient de débit, fonction des caractéristiques de l'ajutage c'est-à-dire de l, α et d. Comme m est adimensionel la relation entre ces paramètres doit pouvoir se mettre sous la forme

$$m = f\left(\alpha, \frac{l}{d}\right)$$

L'expérience donne la forme de cette relation qui est traduite par les courbes de la figure IX.2.1.2. Le maximum maximorum pour m est obtenu pour $l/d = 2{,}5$ et $\alpha = 13°30'$ et la valeur correspondante de m est $m_m = 0{,}97$. Le débit de cet ajutage de forme optimale est donc $Q = 0{,}97\ \Omega \sqrt{2gH}$.

Pour l'ajutage conique convergent Weisbach a également proposé la formule générale

$$Q = \left(0{,}966 - 0{,}213 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \Omega \sqrt{2gH}$$

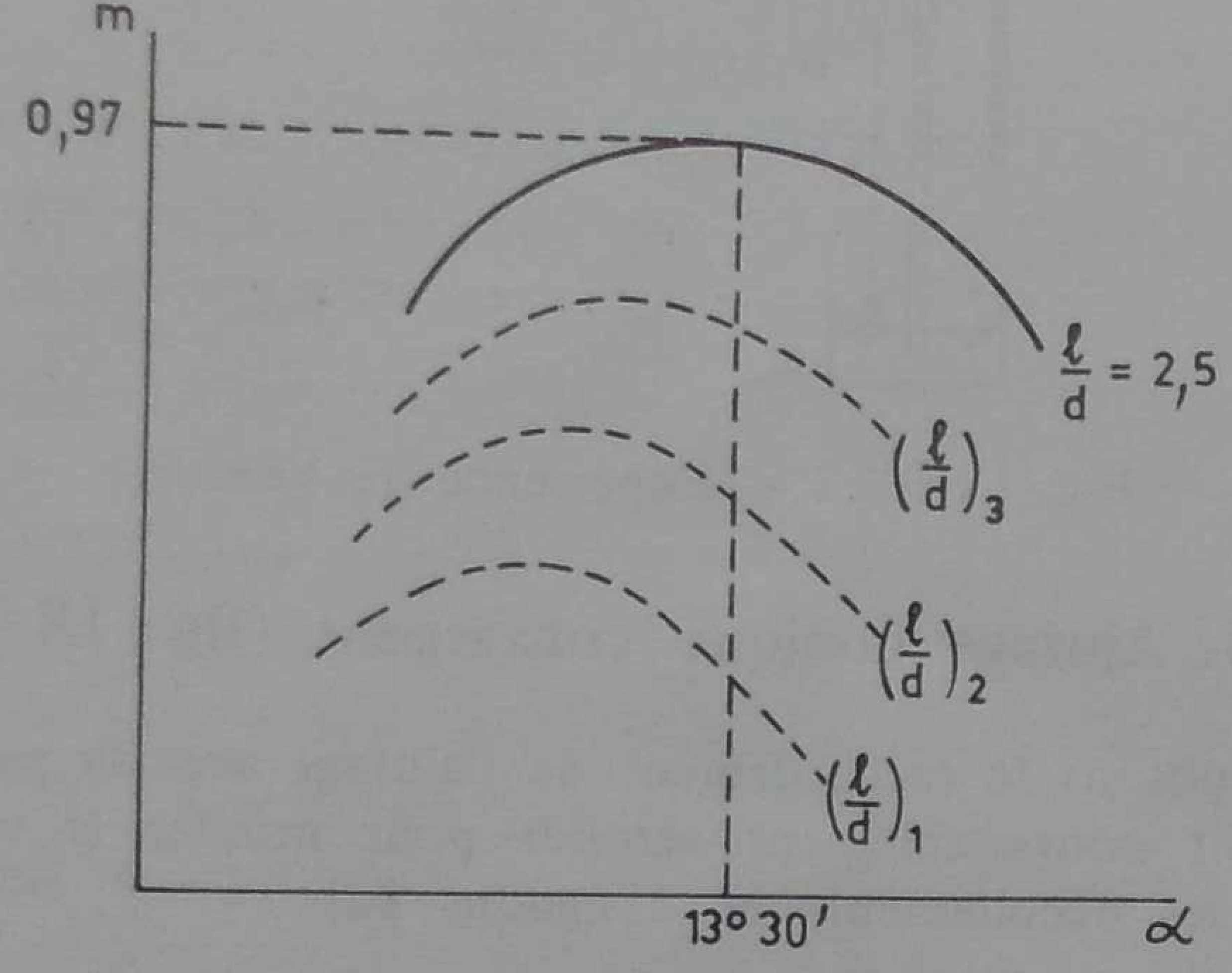


Fig. IX.2.1.2

IX.2.2. Ajutage conique divergent (fig. IX.2.2)

Si le raccord de l'ajutage est arrondi de façon à mouler la veine et si l'angle au sommet est inférieur à 7°, la veine liquide reste en contact avec les parois intérieures de l'ajutage et il n'y a pas de perte de charge appréciable jusqu'à la section de sortie *EF* d'aire Ω. Le débit de l'ajutage peut donc s'écrire

$$Q = \Omega \sqrt{2gH}$$

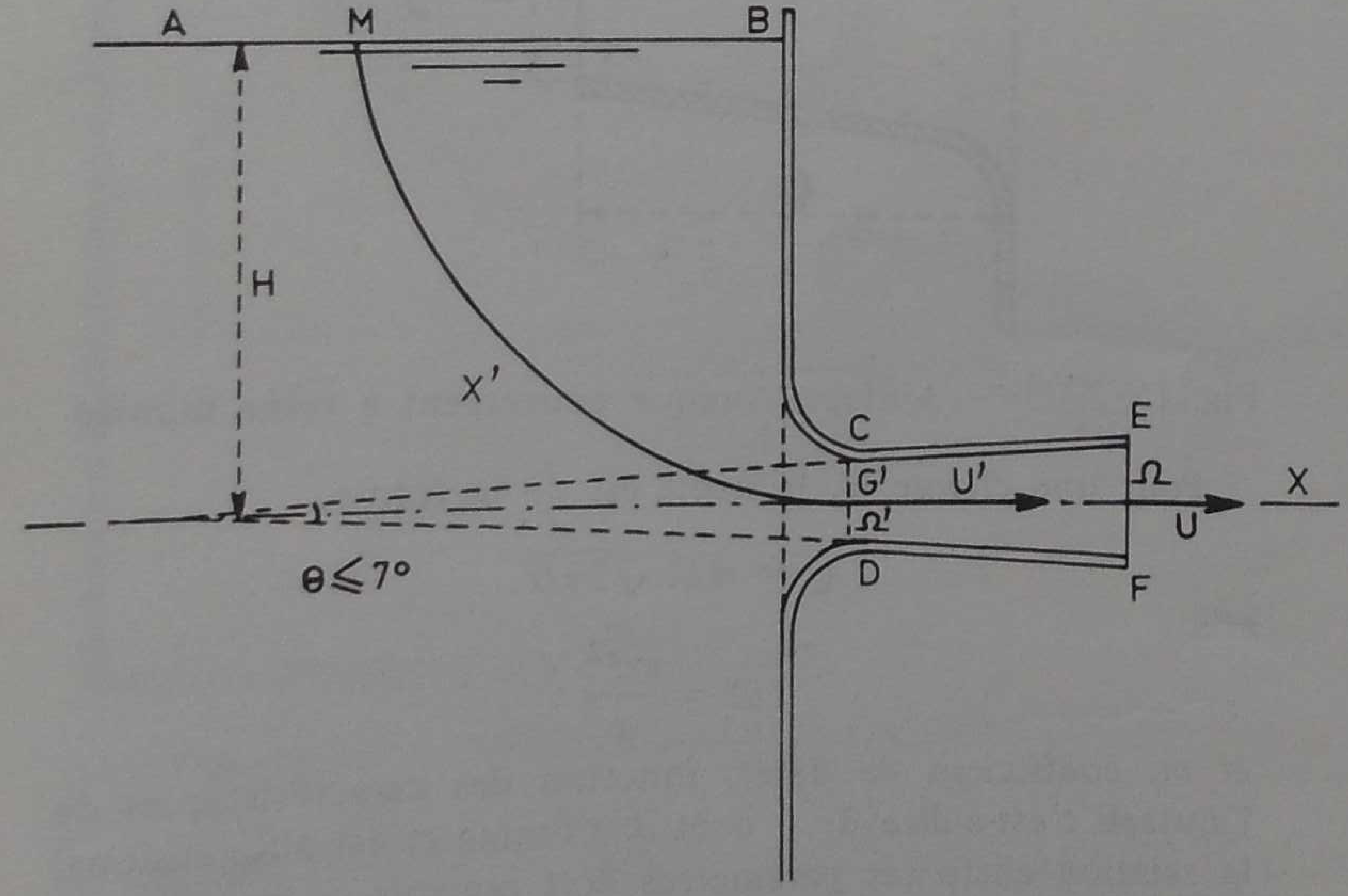


Fig. IX.2.2 – Ecoulement par un ajutage conique divergent à veine moulée

En augmentant indéfiniment la longueur de l'ajutage on augmenterait donc indéfiniment le débit.

En fait ce n'est pas possible car dans la plus petite section *CD* de l'ajutage la vitesse est $U' > U$. Donc, dans cette section, la pression absolue p' est inférieure à la pression atmosphérique.

Or il est évident que p' ne peut être négative ni même nulle.

Cherchons donc, dans ces conditions, la valeur maximale de Ω.

Appliquons le *théorème de Bernoulli* à un filet liquide qui, partant de M sur la surface libre AB, passe en G' centre de gravité de *CD* et désignons par h' la hauteur représentative de la pression effective dans la section contractée *CD* ; il vient :

$$H = h' + \frac{U'^2}{2g}$$

d'où

$$U' = \sqrt{2g(H - h')}$$

Comme pour l'étude analogue faite sur l'ajutage cylindrique intérieur (§ IX.1.1.2), admettons pour valeur minimale de la hauteur représentative de la pression absolue 3 m d'eau pour prévenir le dégazage, soit $h' \simeq 7$ m.

La valeur maximale de U' sera alors

$$U'_{max} = \sqrt{2g(H + 7)}$$

et, par suite, la plus grande aire possible de *EF* sera Ω_{max} telle que, en désignant par Ω' l'aire de la section *CD* :

$$U'_{max}\,\Omega' = U\,\Omega_{max}$$

$$\Omega_{max} = \Omega' \frac{U'_{max}}{U}$$

$$\Omega_{max} = \Omega' \sqrt{\frac{H + 7}{H}}$$

Au-delà le mouvement cesse d'être permanent ; l'air se dégage au niveau de la section *CD*, la veine se détache de la paroi, puis cet air est entraîné par la veine qui se gonfle et remplit de nouveau l'ajutage et le phénomène recommence.

Le *débit maximal* d'un tel ajutage divergent dont la plus petite section intérieure est Ω' est donc donné par la formule :

$$Q_{max} = \Omega' \sqrt{2g(H + 7)}$$

En fait, en raison de la légère perte de charge due aux frottements le long des parois intérieures de l'ajutage, on a pratiquement :

$$Q_{max} = 0{,}96 \text{ à } 0{,}98\ \Omega' \sqrt{2g(H + 7)}$$

(les unités sont le mètre et la seconde).

Bien entendu, il faut pour cela que l'air ne pénètre pas dans l'ajutage où la pression doit être inférieure à la pression atmosphérique. Si la pression atmosphérique règne autour de

la veine liquide, le débit n'augmente pas ainsi que l'a montré Venturi en perçant la paroi de l'ajutage de petits trous.

L'ajutage divergent est employé pour augmenter le débit des vannes de chasse destinées au dévasement de réservoirs (barrages de Djidiouia et Hamiz en Algérie). C'est là une application intéressante car on obtient un gros débit avec une vanne de section réduite.

IX.3. APPLICATION DES AJUTAGES

IX.3.1. Débitmètre Venturi

Le phénomène de variation de pression dans les dispositifs convergent-divergent a été utilisé par l'Ingénieur américain Clemens Herschell dans le débitmètre dit "Venturi" pour mesurer le débit d'une canalisation en charge (1887).

Sur un tronçon horizontal de la canalisation (fig. IX.3.1.1) on monte un *convergent ABCD* suivi d'une courte longueur cylindrique *CDEF* appelée le *col* du Venturi et terminé par un *divergent EFGK* d'une longueur suffisante pour éviter les décollements (angle au sommet du cône divergent de l'ordre de 7° à 8°).

Plaçons des tubes piézométriques dans les sections (1) légèrement à l'amont du convergent et (1′) au niveau du col. Soient S et s les sections respectives de la canalisation au droit des tubes 1 et 1′ et soient H et H' les hauteurs piézométriques correspondantes mesurées par rapport à l'axe horizontal $X'X$ de la canalisation.

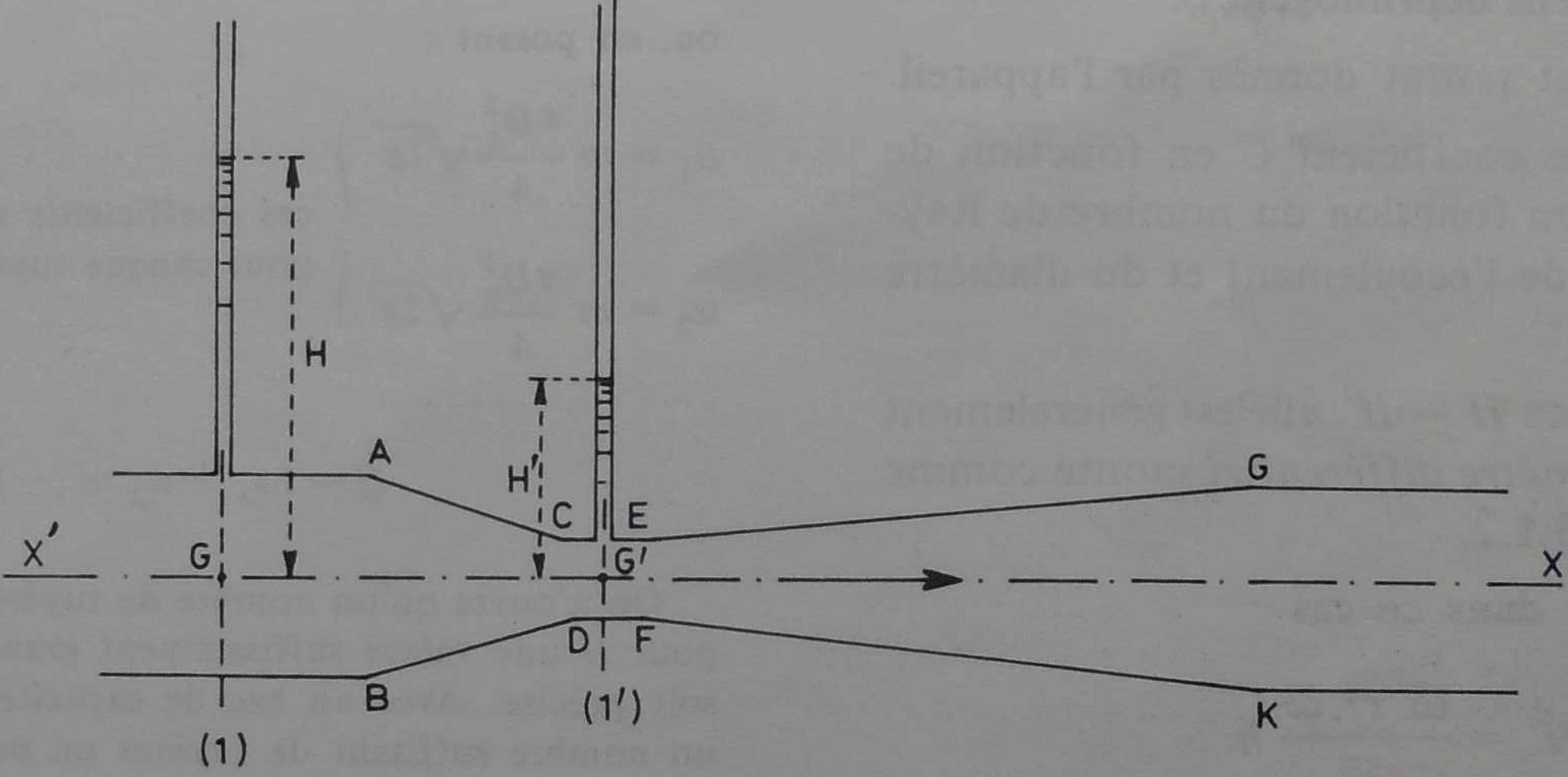


Fig. IX.3.1.1 – Venturi

Appliquons le *théorème de Bernoulli* au filet liquide passant par les centres de gravité G et G' des sections (1) et (1′) entre lesquels nous négligerons la perte de charge ; prenons $X'X$ comme axe de référence :

$$\frac{p_a}{\varpi} + H + \frac{\alpha U^2}{2g} = \frac{p_a}{\varpi} + H' + \frac{\alpha' U'^2}{2g}$$

Faisons l'approximation $\alpha = \alpha' = 1$

$$U^2 = U'^2 - 2g(H - H') \qquad [IX.3.1.1]$$

Or

$$SU = sU'$$

$$U' = U\frac{S}{s}$$

En remplaçant dans l'équation [*IX.3.1.1*] on obtient, tous calculs faits :

$$U = \frac{s}{\sqrt{S^2 - s^2}}\sqrt{2g(H - H')}$$

et par suite

$$Q = \frac{Ss}{\sqrt{S^2 - s^2}}\sqrt{2g(H - H')}$$

On pose généralement

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = m$$

d'où

$$Q = \frac{s}{\sqrt{1 - m^2}}\sqrt{2g(H - H')}$$

On affecte ce résultat de deux *coefficients correctifs* voisins de 1 :

C = coefficient tenant compte des pertes par frottements et tourbillons et de l'inégale répartition

des vitesses et des pressions dans les sections (1) et (1'),

J = coefficient tenant compte de la rugosité et de l'acuité des arêtes.

On pose, en outre :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}$$

E s'appelle le *coefficient de vitesse d'approche* et on obtient ainsi la formule complète du débit :

$$\boxed{Q = CJEs\sqrt{2g(H - H')}}$$

C'est la formule de la *norme NF X 10-101* (Mesure des débits à l'aide d'appareils déprimogènes).

E (c'est-à-dire m) et s sont donnés par l'appareil.

La norme donne le coefficient C en fonction de m et le coefficient J en fonction du nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement et du diamètre D de l'appareil.

Quant à la différence $H - H'$ elle est généralement mesurée par un *manomètre différentiel* monté comme l'indique la figure IX.3.1.2.

Rappelons qu'on a dans ce cas :

$$H - H' = \frac{\overline{\omega}' - \overline{\omega}}{\overline{\omega}} h$$

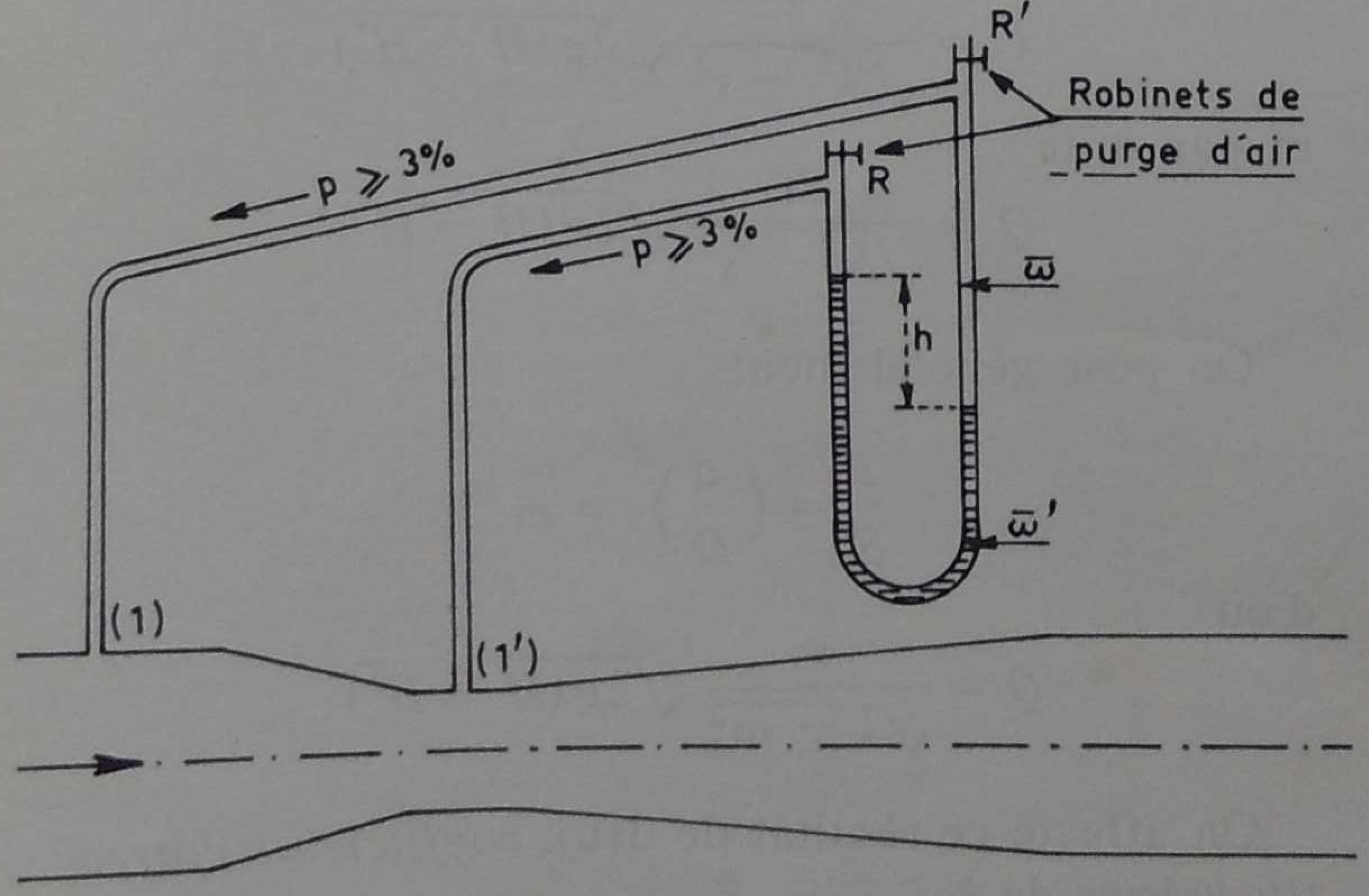


Fig. IX.3.1.2 – Utilisation d'un manomètre différentiel sur un Venturi

IX.3.2. Bac de jaugeage

On utilise parfois pour la mesure des débits, par exemple pour les essais de pompes, un bac dont le fond horizontal est muni d'ajutages ou tuyères de même type que l'on ouvre ou ferme à l'aide de robinets-vannes.

On envoie dans le bac le débit à mesurer et en ouvrant un nombre plus ou moins grand d'orifices on stabilise le niveau dans le bac.

Le débit cherché est alors égal à la somme des débits des tuyères.

Comme ces tuyères sont toutes de même type on peut admettre qu'elles ont même coefficient de débit, soit m ; on l'a tout d'abord déterminé expérimentalement.

Si $D_1, D_2, D_3, \ldots$ sont les diamètres des tuyères et H la charge commune à toutes les tuyères, on a :

$$Q = m \frac{\pi}{4} (D_1^2 + D_2^2 + \cdots) \sqrt{2gH}$$

ou, en posant :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= m \frac{\pi D_1^2}{4} \sqrt{2g} \\ \alpha_2 &= m \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2g} \end{aligned}\right\} \text{ces coefficients sont calculés à l'avance pour chaque tuyère.}$$

....

$$Q = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots) \sqrt{H}$$

On n'ouvre qu'un nombre de tuyères permettant d'obtenir pour H une valeur suffisamment grande pour que la mesure soit précise. Avec un bac de capacité réduite (1 à 2 m^3) et un nombre suffisant de tuyères on peut ainsi mesurer toute une gamme de débits.

IX.3.3. Pompe à piston sans soupape

A titre de curiosité signalons la pompe imaginée par M. Gino Morandi dont le principe résulte du schéma de la figure IX.3.3.

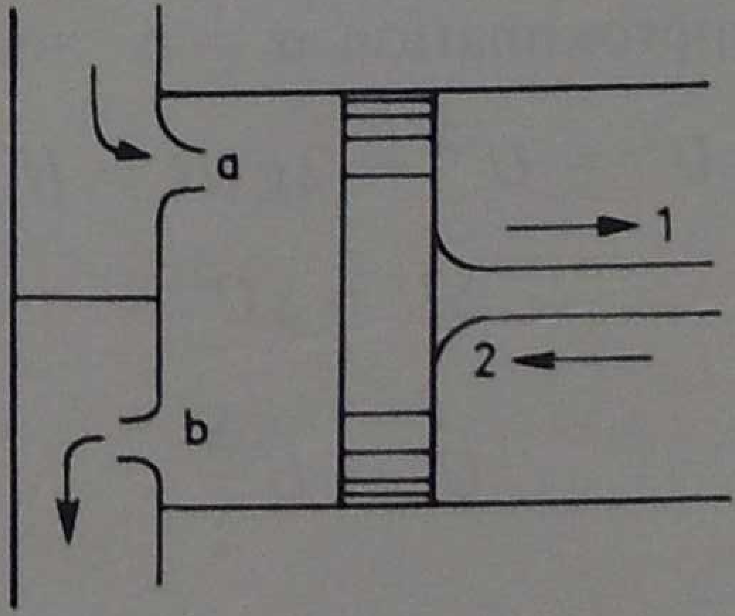


Fig. IX.3.3 – Principe de la pompe Morandi

Les deux tuyères *a* et *b* sont identiques. Quand le piston se déplace dans le sens 1, la tuyère *a* fonctionne comme un ajutage sortant et son débit Q_a est supérieur à celui Q_b de la tuyère *b* qui fonctionne comme un ajutage rentrant.

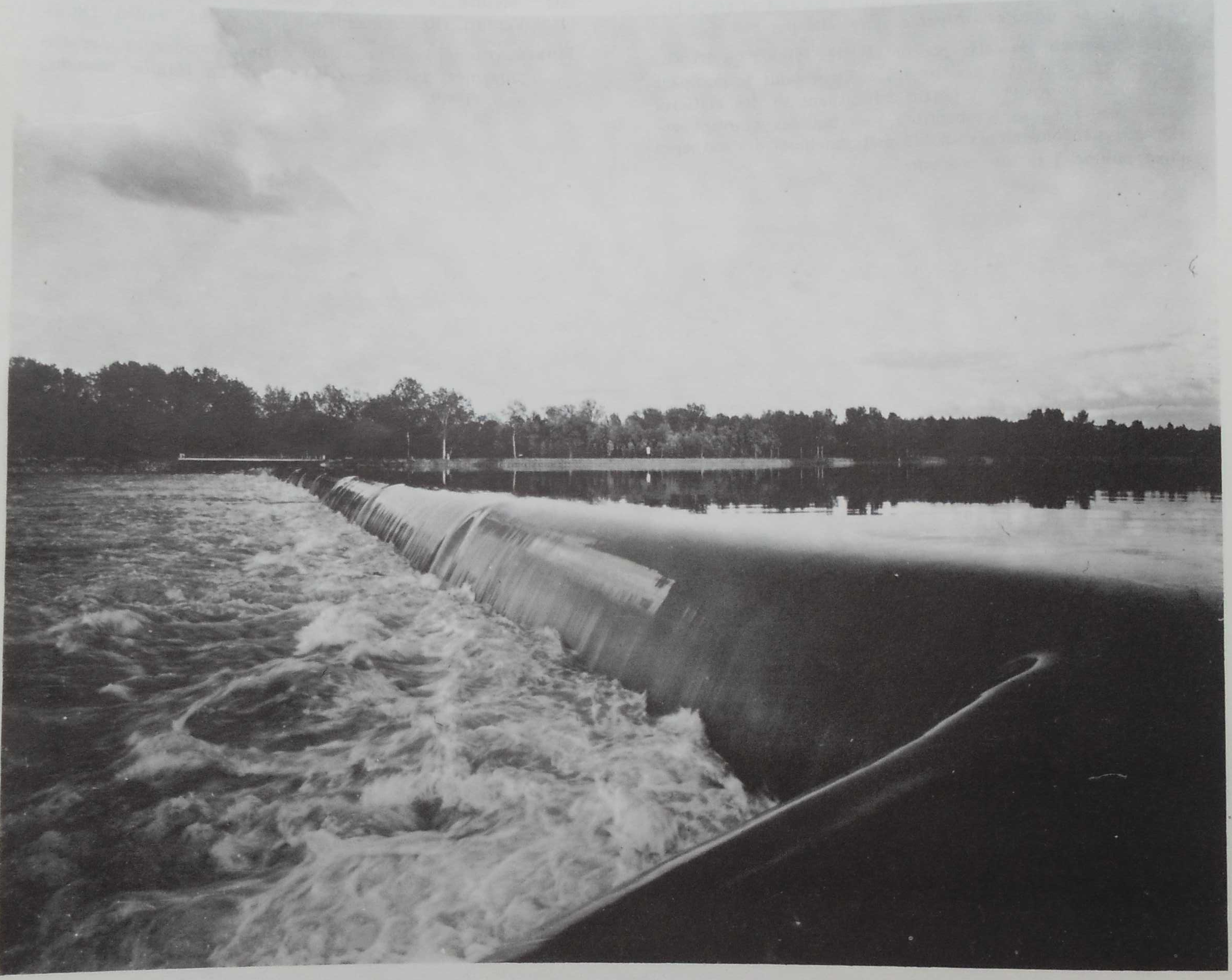
Dans le sens 2, c'est l'inverse qui se produit et $Q_b > Q_a$. Le liquide est donc aspiré par *a* et refoulé par *b*.

Le rendement de cette pompe est très faible (7 à 10 %) ; elle pourrait toutefois rendre des services pour le pompage de liquides corrosifs ou tenant en suspension des matières solides ou à haute température, ces liquides pouvant entraîner des inconvénients sur le fonctionnement des soupapes d'une pompe à piston ordinaire.

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre IX

ISO — Mesure de débit des fluides au moyen de tubes de Venturi (Recommandation ISO R 781, Juillet 1968).

THIBESSARD (G.).— Etat actuel de la normalisation des diaphragmes, tuyères et Venturis. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.



Déversoir sur le RHIN dans la région de GERSTHEIM

Photothèque EDF

CHAPITRE X

ÉCOULEMENT PAR LES DÉVERSOIRS

X.1. DÉFINITIONS – DIFFÉRENTS TYPES DE NAPPES

Un déversoir est un orifice superficiel ouvert à sa partie supérieure et pratiqué dans une paroi généralement verticale (fig. X.1.1).

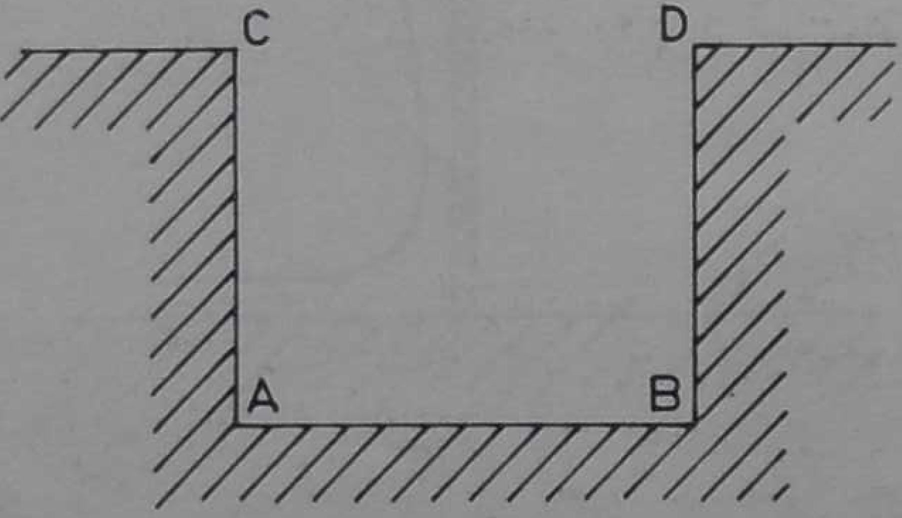


Fig. X.1.1 – Déversoir rectangulaire

Lorsque le profil de l'échancrure est rectangulaire

AB est le *seuil* ou *crête*

AC et BD sont les *joues*.

Examinons l'*aspect qualitatif de l'écoulement* successivement à l'amont et à l'aval du déversoir.

X.1.1. A l'amont

On constate que le niveau supposé constant à l'amont s'abaisse sensiblement au-dessus du seuil (fig. X.1.2).

La hauteur H du niveau constant d'amont au-dessus du seuil est la charge.

L'abaissement au-dessus du seuil dépend de la charge H et des caractéristiques du déversoir.

En effet un déversoir peut être *vertical* ou *incliné*, soit *vers l'amont*, soit *vers l'aval*, sa crête peut être *épaisse* ou *mince*. Il peut, en outre, y avoir ou non *contraction latérale*. Enfin, la forme de l'échancrure peut être très diverse (rectangle, triangle, cercle, etc . . .).

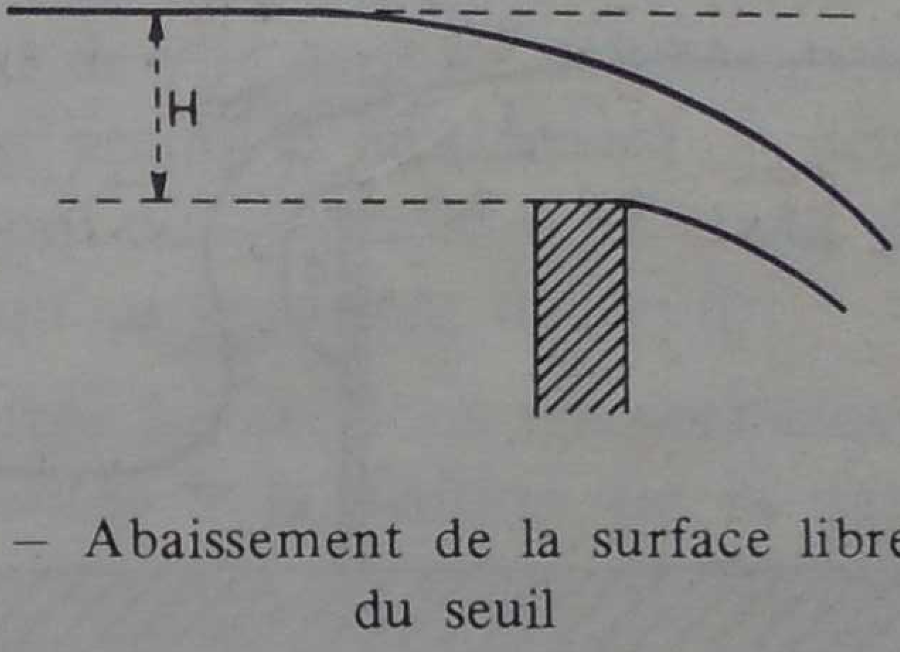


Fig. X.1.2 – Abaissement de la surface libre à l'amont du seuil

X.1.2 – A l'aval

Après son passage sur le seuil, la lame déversante ou *nappe déversante* peut présenter différentes formes en rapport avec la *charge* et le *niveau d'aval*.

X.1.2.1. *Influence de la charge*

Si la charge est suffisante pour que la nappe soit projetée assez loin du déversoir et si l'air peut accéder librement sur tout son pourtour, la nappe est *libre*. Elle paraît *immobile* et est *lisse*, à quelques stries près dans le sens du courant (fig. X.1.3).

Si l'air ne peut pas accéder facilement sous la nappe en a, par exemple lorsqu'il n'y a pas contraction latérale et qu'aucun dispositif spécial ne permet l'accès de l'air, la nappe se déprime. On a affaire à une *nappe déprimée*. Les variations de pression en a provoquent des battements de la nappe (fig. X.1.4).

Cette dépression en a fait que dans cette région l'eau s'élève au-dessus du niveau d'aval et que la nappe se rapproche du pied du barrage. Si l'air ne peut pas

du tout se renouveler sous la nappe et si la charge est suffisamment faible, la nappe se déprime de plus en plus jusqu'à devenir *adhérente* (fig. X.1.5)

Dès l'origine de l'écoulement on observe une nappe adhérente si la charge est très faible, car la vitesse de l'eau est insuffisante pour éloigner la nappe et

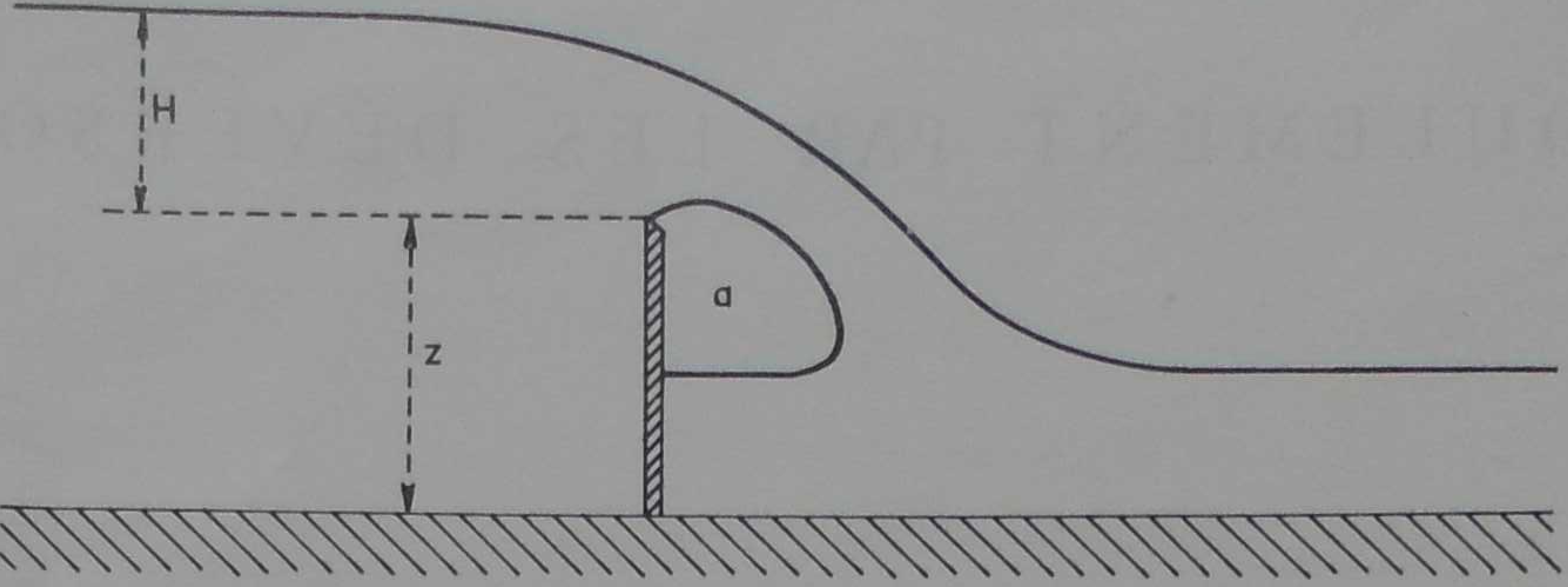


Fig. X.1.3 – Nappe libre

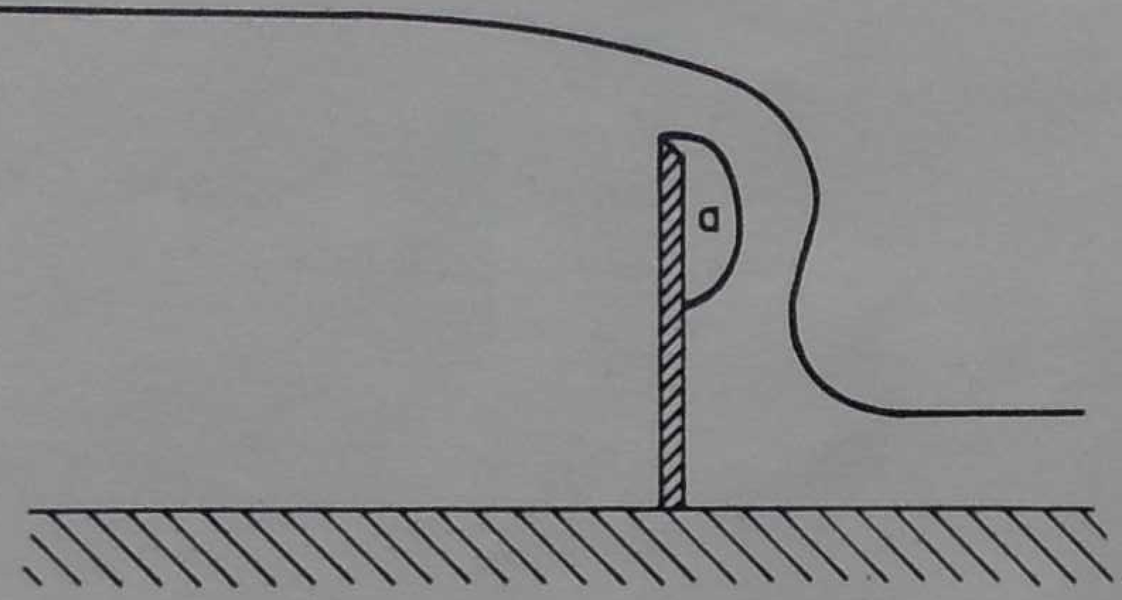


Fig. X.1.4 – Nappe déprimée

Fig. X.1.5 – Nappe adhérente à faible charge

la tension capillaire maintient la nappe adhérente. Dans ces conditions, si la charge augmente sans que l'air puisse pénétrer sous la nappe, cette dernière reste adhérente en se plissant verticalement et le pied de la nappe se rapproche du déversoir (fig. X.1.6).

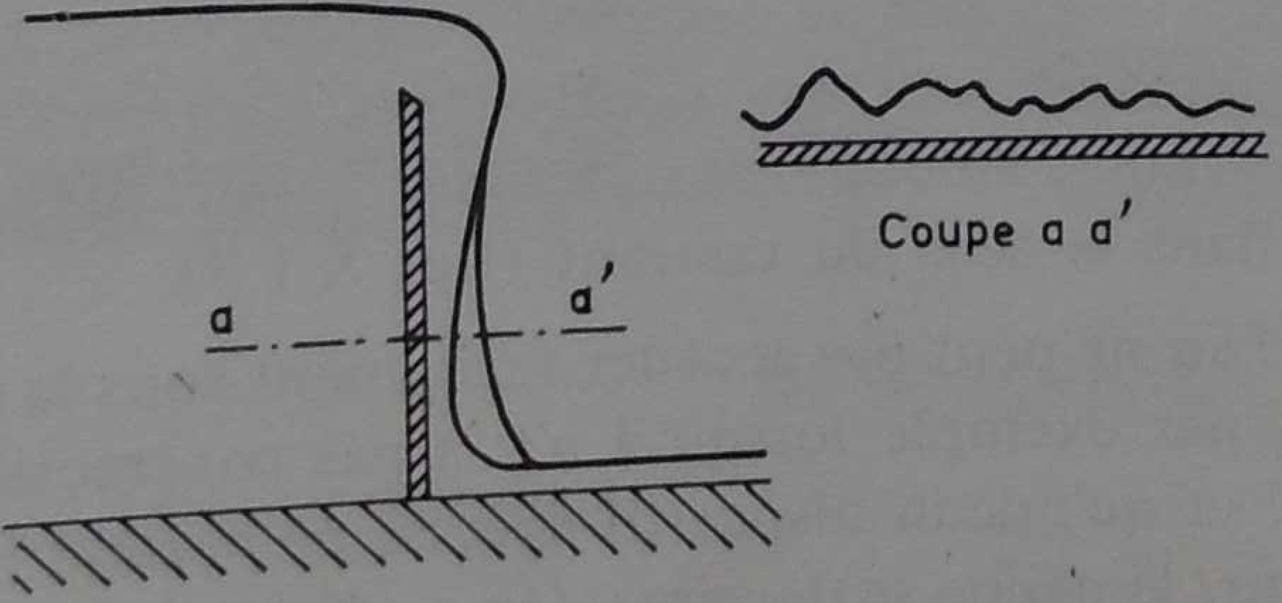


Fig. X.1.6 – Nappe adhérente plissée verticalement

Enfin, la charge continuant d'augmenter, il arrive un moment où la nappe s'allonge brusquement vers l'aval et devient *noyée en dessous*. La zone *a* est remplie d'eau animée de mouvements tourbillonnaires mais qui ne participent pas à l'écoulement.

Suivant les conditions d'écoulement dans le bief aval, il peut arriver que le niveau se relève brusquement vers l'aval produisant un *ressaut*. Si le ressaut ne vient pas recouvrir le pied de la nappe on a une nappe à *ressaut éloigné* (fig. X.1.7), le ressaut n'a alors aucune influence sur l'écoulement.

Si au contraire ce ressaut recouvre le pied de la nappe, le niveau d'aval, bien qu'au-dessous de la crête, influe sur l'écoulement notamment sur le débit (fig. X.1.8).

Cette influence du ressaut sur les conditions d'écoulement, notamment sur l'interdépendance des niveaux amont et aval, sera précisée au chapitre XII (Ecoulements à surface libre).

Si la charge diminue, les mêmes phénomènes se reproduisent en sens inverse.

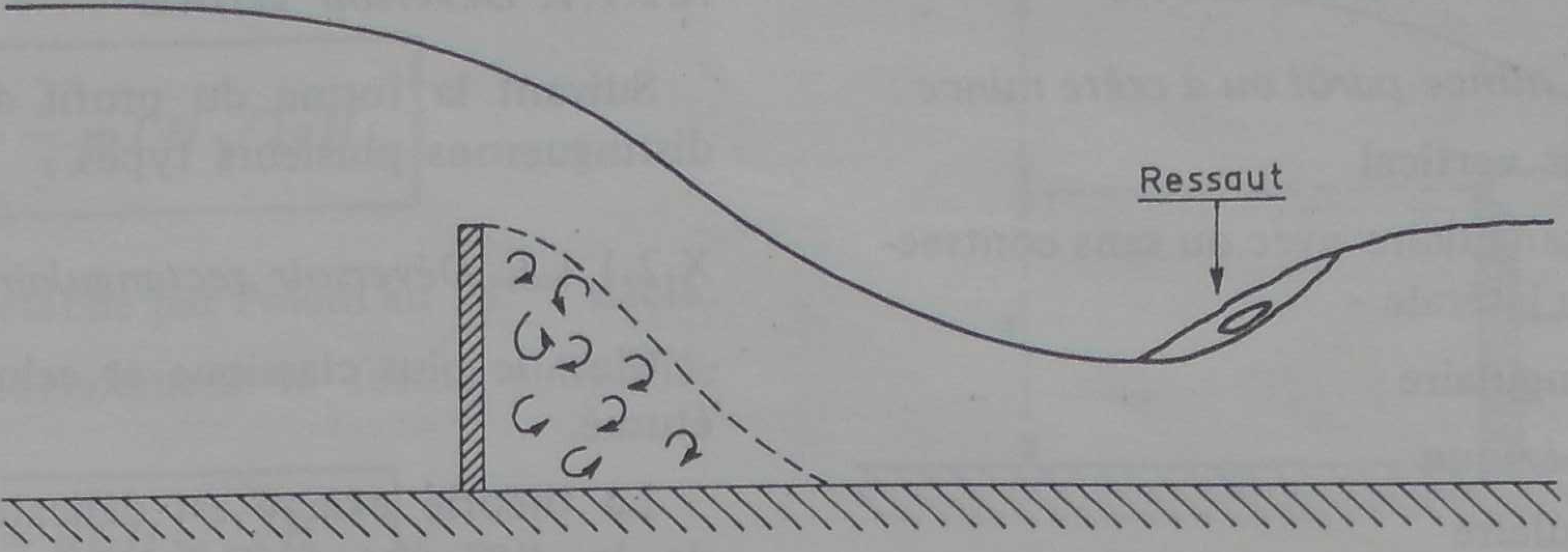


Fig. X.1.7 – Nappe noyée en dessous à ressaut éloigné

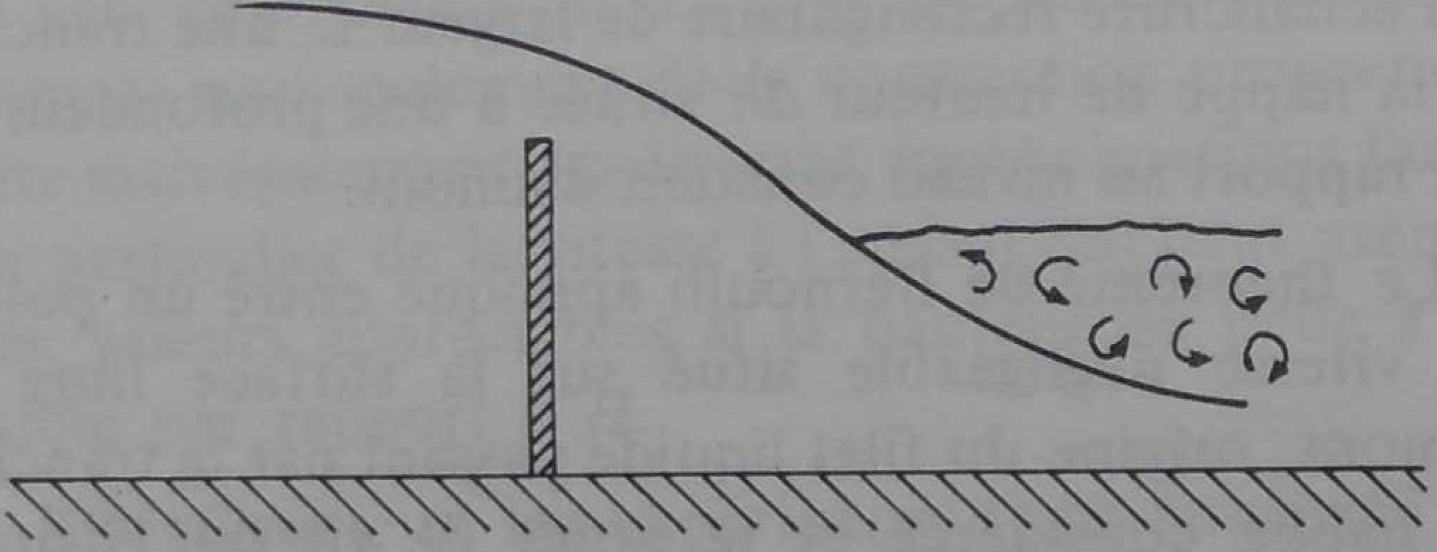


Fig. X.1.8 – Nappe noyée en dessous avec ressaut recouvrant le pied de la nappe

Le passage d'une forme d'écoulement à la suivante est relativement imprécis et, suivant un phénomène d'hystérésis très général en hydraulique, le passage d'une forme de nappe à une autre se fait avec un certain retard, pour des valeurs différentes des cotes des plans d'eau aval et amont, suivant que l'on opère par valeurs croissantes ou décroissantes de la charge H et du niveau aval, c'est-à-dire suivant le sens dans lequel on provoque la variation des paramètres de l'écoulement.

X.1.2.2. ***Influence du niveau d'aval***

On observe la même transformation d'une nappe adhérente en nappe noyée en dessous lorsque le niveau d'aval s'élève progressivement. S'il s'élève au-dessus du seuil du déversoir on dit que le déversoir est *noyé*, on observe alors une *nappe ondulée* (fig. X.1.9).

La hauteur z du seuil au-dessus du fond à l'amont, appelée "hauteur de pelle", intervient également et à un autre point de vue dans les conditions de l'écoulement. Si z est grand le liquide est à peu près immobile à l'amont du déversoir et ne prend des vitesses appréciables qu'au voisinage du seuil.

Si z est faible les sections transversales à l'amont sont comparables à la section de la nappe sur le déversoir de sorte que les vitesses à l'amont sont appréciables, il faudra en tenir compte dans les formules du débit.

Si on tient compte, enfin, de ce que le déversoir peut être à *mince paroi* ou à *paroi épaisse, vertical* ou *incliné vers l'amont* ou *vers l'aval, avec* ou *sans contraction latérale*, que la forme de l'échancrure peut être rectangulaire, triangulaire, trapézique, circulaire, etc . . . , on voit combien sont multiples les combinaisons possibles et combien le problème de l'écoulement est complexe .

Nous allons passer en revue les principaux cas en adoptant le plan que voici :

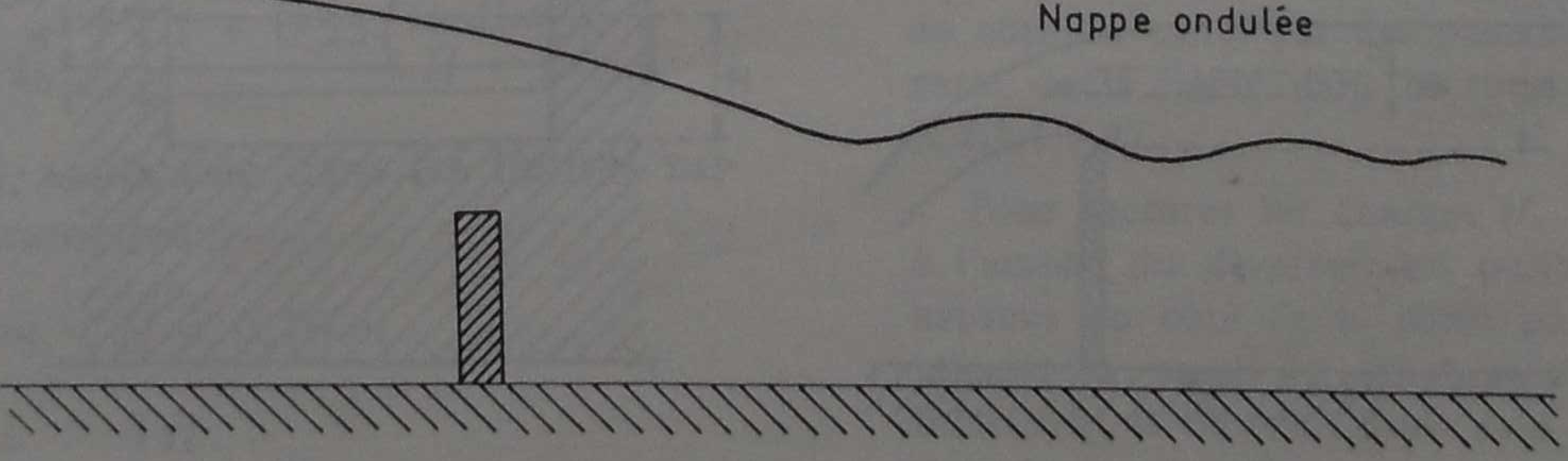


Fig. X.1.9 – Déversoir noyé et nappe ondulée

X.2. ÉCOULEMENT PAR NAPPE LIBRE

X.2.1. *Déversoir en mince paroi ou à crête mince :*

X.2.1.1. Déversoir vertical

X.2.1.1.1. rectangulaire avec ou sans contraction latérale

X.2.1.1.2. triangulaire

X.2.1.1.3. trapézique

X.2.1.1.4. circulaire

X.2.1.1.5. réalisant une loi $Q(h)$ donnée

X.2.1.2. Déversoir incliné

X.2.1.3. Déversoir latéral

X.2.1.4. Déversoir oblique

X.2.2. *Déversoir à crête épaisse*

X.3. ÉCOULEMENT PAR NAPPE DEPRIMÉE

X.4. ÉCOULEMENT PAR NAPPE NOYÉE EN DESSOUS

X.5. DÉVERSOIR NOYÉ

X.2. ÉCOULEMENT PAR NAPPE LIBRE

X.2.1. Déversoir à mince paroi ou à crête mince

Le déversoir est à mince paroi ou à crête mince si l'épaisseur de la crête est inférieure à la moitié ou même quelquefois aux deux tiers de la charge.

La limite est indécise comme nous le verrons plus loin pour les barrages à poutrelles.

Le déversoir peut être vertical ou incliné. Examinons d'abord le cas du déversoir vertical.

X.2.1.1. *Déversoir vertical*

Suivant la forme du profil de l'échancrure nous distinguerons plusieurs types.

X.2.1.1.1. *Déversoir rectangulaire*

C'est le plus classique et celui qui a été le mieux étudié.

La théorie exacte est délicate à établir en raison de la difficulté à définir une section transversale perpendiculaire à tous les filets. En voici une approchée :

Considérons (fig. X.2.1.1.1.1) dans le plan vertical de l'échancrure rectangulaire de largeur L, une tranche de la nappe de hauteur dh située à une profondeur h par rapport au niveau constant d'amont.

Le théorème de Bernoulli appliqué entre un point de vitesse négligeable situé sur la surface libre à l'amont, origine du filet liquide passant par la tranche de nappe considérée et le point de vitesse V situé dans cette tranche et en négligeant la perte de charge entre ces deux points, permet d'écrire :

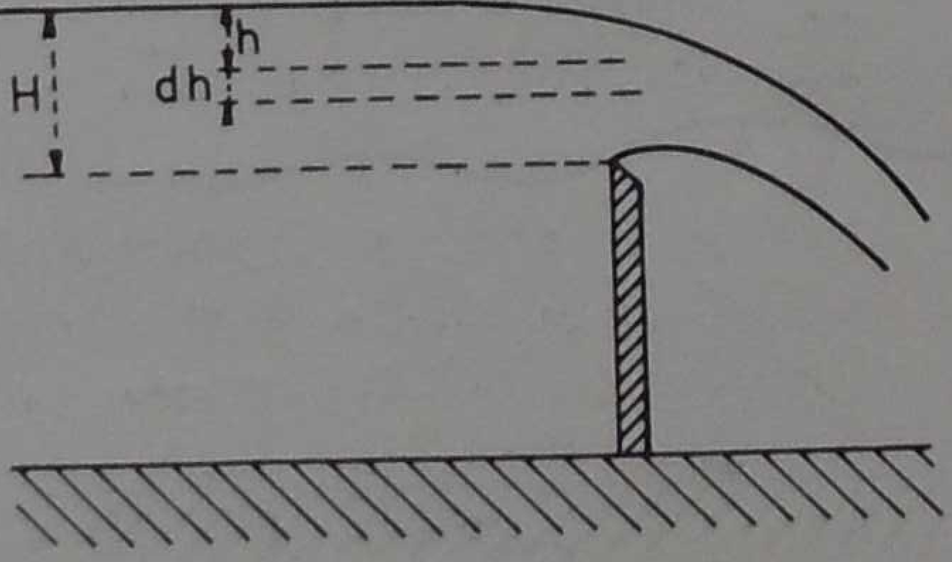
$$V = \sqrt{2gh}$$

Le débit élémentaire de la tranche de nappe considérée est égal à la vitesse commune V de ses divers points multipliée par la section $L\,dh$ que nous affecterons d'un coefficient m pour tenir compte de la contraction de la nappe à son passage dans l'échancrure pratiquée dans une paroi mince, soit :

$$dQ = mL\sqrt{2gh}\,dh$$

Le débit du déversoir sera donc :

$$Q = \int_0^H mL\sqrt{2gh}\,dh$$



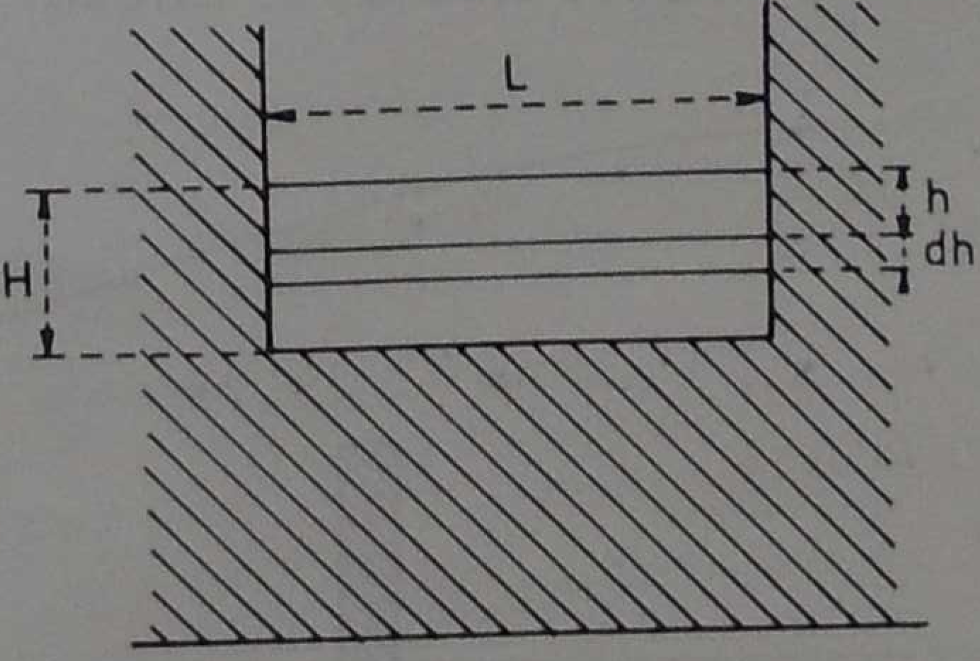


Fig. X.2.1.1.1.1 – Débit du déversoir rectangulaire à crête mince et à nappe libre

ou, en supposant m contant avec h :

$$Q = \frac{2}{3}\, mLH\sqrt{2gH}$$

C'est la formule établie par Poleni au 18ème siècle.

On lui donne généralement la forme simplifiée suivante :

$$Q = \mu LH\sqrt{2gH}$$

qui rappelle la formule du débit des orifices et des ajutages.

Les coefficients m et $\mu = 2/3\ m$ devront tenir compte non seulement de la contraction proprement dite mais également des diverses approximations faites, en particulier de la vitesse à l'amont qui peut prendre des valeurs appréciables si la hauteur de pelle z est faible par rapport à H.

Par ailleurs, et les expériences l'ont confirmé, de même que pour les orifices m varie avec les caractéristiques locales de l'écoulement, de même μ variera avec la *charge* H, avec la *largeur* L du déversoir, avec la hauteur de pelle z et, s'il y a contraction latérale, avec la largeur *relative* des joues par rapport à la largeur du canal.

Nous examinerons successivement le cas d'un déversoir rectangulaire sans contraction latérale et avec contraction latérale.

X.2.1.1.1.1. Déversoir rectangulaire sans contraction latérale

Formule de Bazin (1888).

Après de nombreuses expériences réalisées avec un *déversoir vertical, en mince paroi, à nappe libre, sans contraction latérale,* Bazin a proposé en 1888 la formule suivante (fig. X.2.1.1.1.2) :

$$\mu = \left(0{,}405 + \frac{0{,}003}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+z}\right)^2\right]$$

Cette formule est applicable dans les limites suivantes des divers paramètres :

$$0{,}08\ m < H < 0{,}70\ m$$

$$L > 4H$$

$$0{,}2\ \ m < z < 2\,m$$

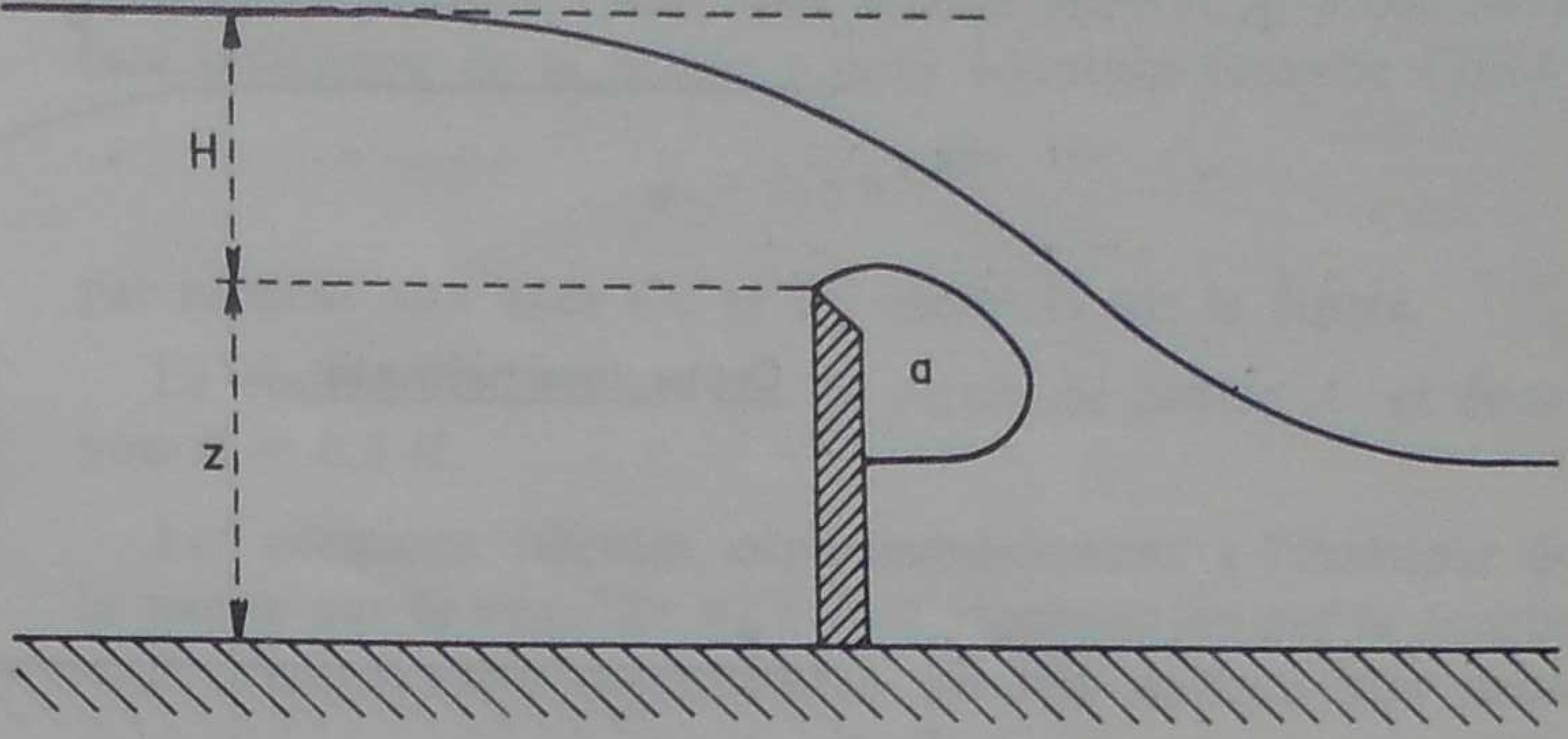


Fig. X.2.1.1.1.2 – Déversoir vertical, rectangulaire, à crête mince et à nappe libre

Par ailleurs, pour utiliser cette formule à bon escient, il est bon de rappeler les *conditions dans lesquelles les expériences de Bazin ont été poursuivies.*

Elles eurent lieu de 1888 à 1898 sur un canal dérivé du canal de Bourgogne près de Dijon. Ce canal rectiligne sur une grande longueur (23 m) avait une section rectangulaire de 2 m de largeur et 1,60 m de profondeur. Il était soigneusement enduit de ciment lissé.

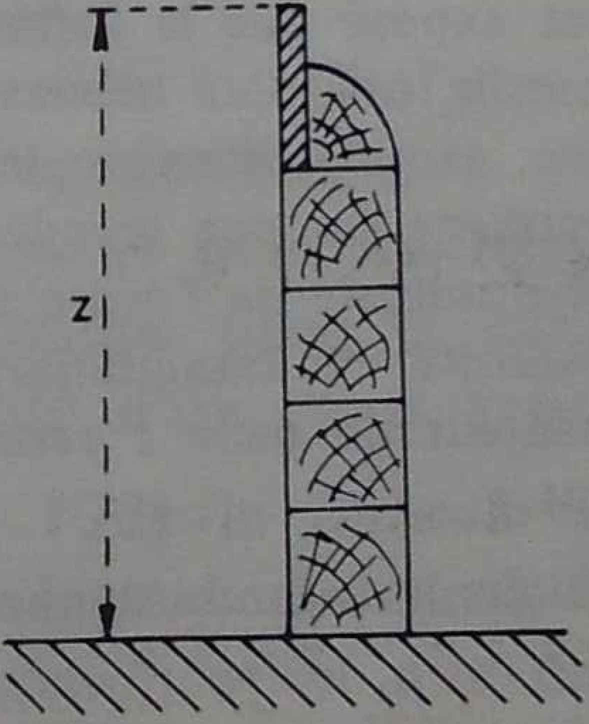


Fig. X.2.1.1.1.3 – Déversoir de Bazin. Profil de la crête

Le déversoir (fig. X.2.1.1.1.3) était réalisé par un barrage vertical constitué de poutrelles en bois de 0,10 m de côté, muni à sa partie supérieure d'une tôle de 7 mm d'épaisseur à bord rigoureusement horizontal constituant mince paroi, la face amont de la tôle était dans le même plan que la face amont du barrage. La hauteur z du barrage a varié de 0,25 m à 1,30 m. Il n'y avait pas de contraction latérale et la ventilation de la nappe était assurée par deux puits latéraux fermés du côté du canal par des planches P rabotées rétablissant la paroi de la rigole dans la zone où s'écoulait la nappe (fig. X.2.1.1.1.4).

Pour mesurer les charges H, Bazin avait pratiqué à 5 m à l'amont du déversoir un puits latéral fermé sur toute sa hauteur du côté de la paroi par une planche rabotée rétablissant la paroi du canal et percée d'un trou à la partie inférieure. Il obtenait ainsi dans ce puits le niveau du liquide dans le canal et évitait les oscillations dues à l'écoulement et au vent. Les variations de la charge H étaient indiquées par un

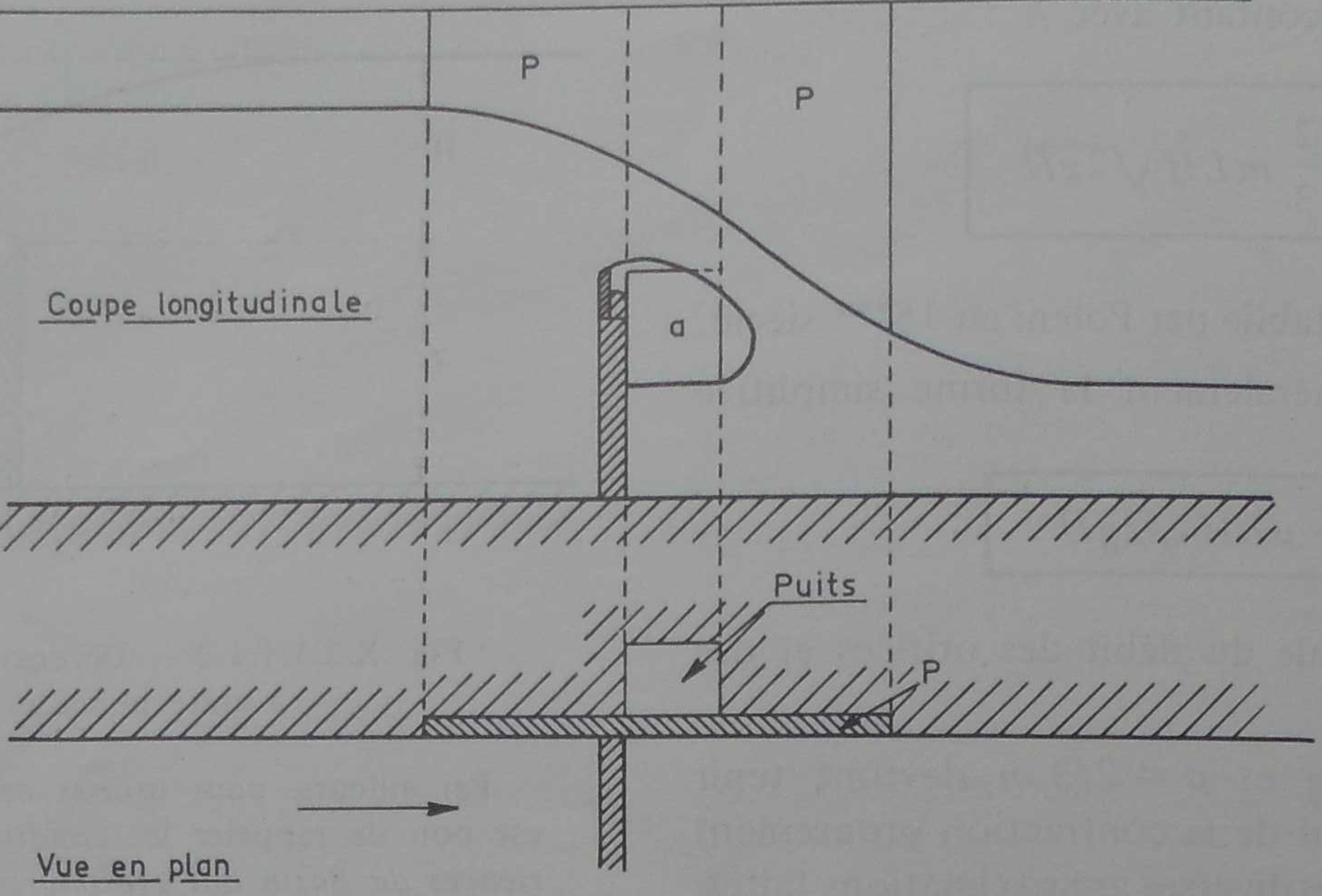


Fig. X.2.1.1.1.4 – Déversoir de Bazin. Aération de la nappe

flotteur actionnant une aiguille et la mesure exacte de H, quand un régime permanent était bien établi, était faite à l'aide d'une aiguille à pointe recourbée.

Il résulte de cet exposé que la formule de Bazin pourra être appliquée dans le cas d'un déversoir vertical à crête mince, rectangulaire, sans contraction latérale, placé en travers d'un canal rectiligne sur une grande longueur à l'amont avec une pente longitudinale de l'ordre de 1 ‰ et ne comportant pas de dispositif de tranquillisation, la charge H, la largeur L et la hauteur de pelle z restant dans les limites indiquées plus haut.

Dans ces conditions la formule donne des résultats exacts à 1 ou 2 % près.

Formule de la S.I.A. (Société suisse des Ingénieurs et Architectes).

Cette formule est applicable à un déversoir du même type que précédemment mais précédé, à l'amont, d'un canal de faible longueur, à fond sensiblement horizontal et comportant un dispositif de régularisation des vitesses (grilles de barreaux, nids d'abeilles ou guideaux et éventuellement radeau tranquilliseur de surface). Ce dispositif est appelé "type Rehbock" par opposition au "type Bazin". C'est le plus fréquent dans la pratique des mesures, notamment en laboratoire.

Dans ces conditions la formule de la S.I.A. s'écrit :

$$\mu = 0{,}410\left(1 + \frac{1}{1000\,H + 1{,}6}\right)\left[1 + 0{,}5\left(\frac{H}{H+z}\right)^2\right]$$

Limites d'application :

$$0{,}025\ m < H < 0{,}8\ m$$

$$z > 0{,}3\ m$$

$$H \leqslant z$$

Formule de Rehbock (1929).

Applicable au déversoir type Rehbock dont la crête présente le profil de la figure X.2.1.1.1.5.

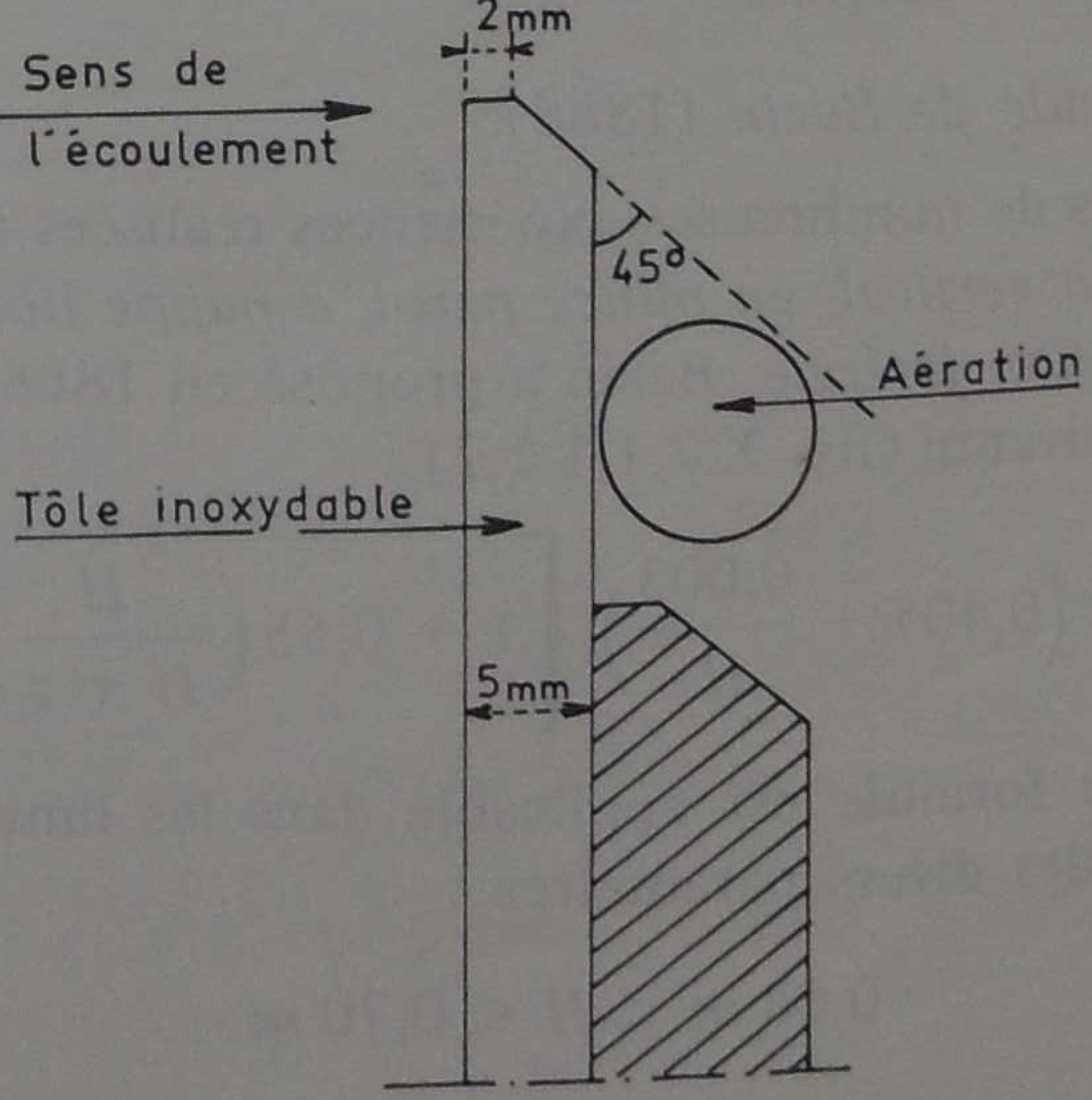


Fig. X.2.1.1.1.5 – Déversoir de Rehbock

La formule de Rehbock s'écrit :

$$Q = \mu L H_e \sqrt{2gH_e}$$

avec :

$$\mu = 0{,}4023 + 0{,}0542 \frac{H_e}{z}$$

et $H_e = H + 0{,}0011$ (H et H_e en m).

En principe, cette formule est valable pour toute la gamme de variations des paramètres notamment de la charge, mais il est préférable de ne pas l'utiliser pour $H < 0{,}05\ m$.

Caractéristiques de la nappe libre du déversoir type Bazin.

Le profil de la nappe libre obtenue avec un déversoir vertical à crête mince sans contraction latérale (type Bazin) varie très peu avec le rapport H/z pour une gamme étendue des valeurs de la charge (pratiquement pour

$$0{,}12\ m < H < 2{,}30\ m)$$

Les expériences de Bazin et Scimeni ont montré que les coordonnées du profil de la nappe ne dépendent donc que de H ; elles sont indiquées sur la figure X.2.1.1.1.6.

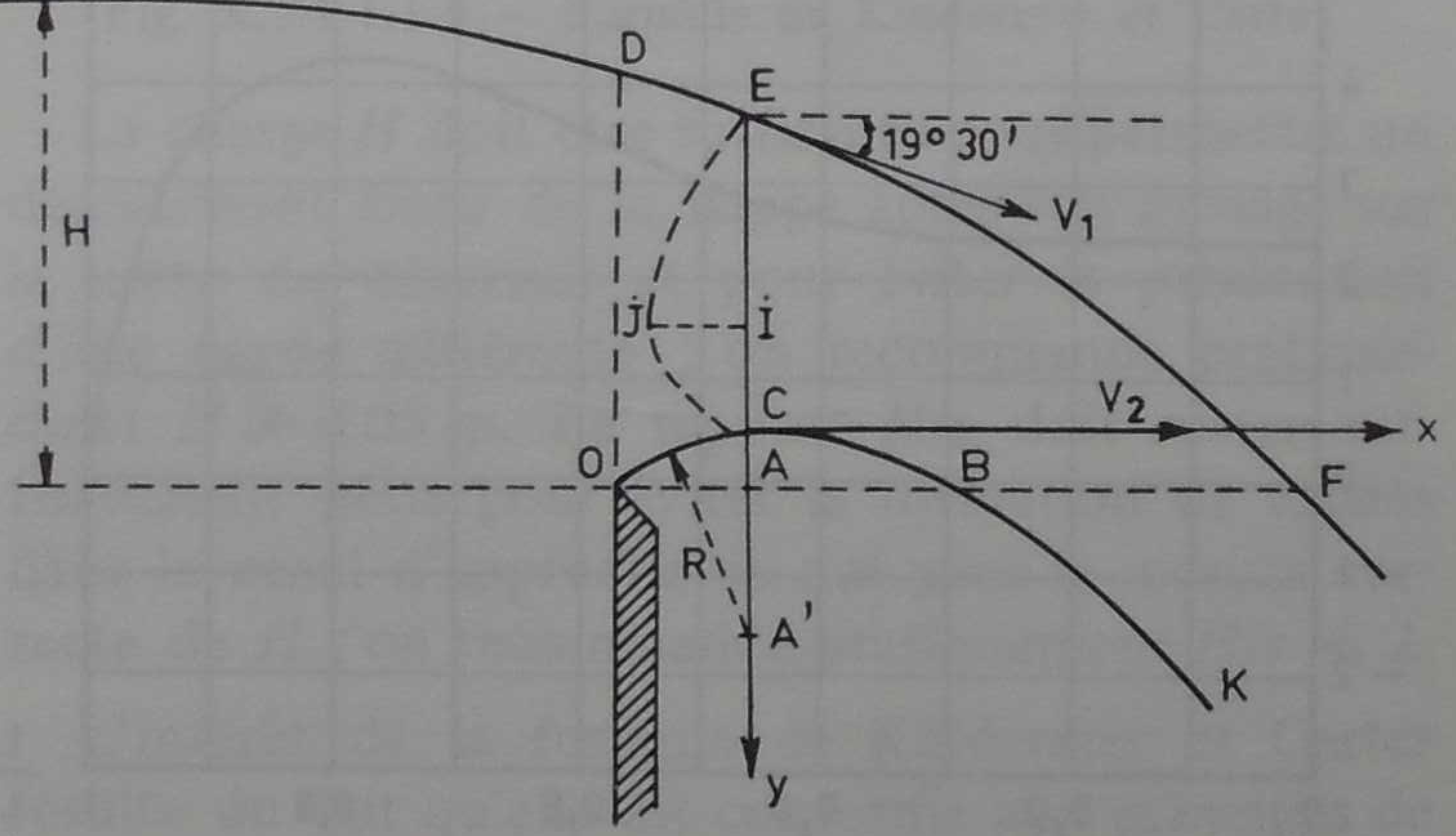


Fig. X.2.1.1.1.6 – Profil de la nappe libre du déversoir type Bazin

$OA = 0{,}25\ H$

$OD = 0{,}85\ H$

$OB = 0{,}67\ H$

$OF = 1{,}38\ H$

$AC = 0{,}112\ H$

$CE = 0{,}65\ H$

$CI = \frac{CE}{3} = 0{,}22\ H$

$IJ = 0{,}18\ H$

$V_1 = 0{,}475 \sqrt{2gH}$

$V_2 = 0{,}946 \sqrt{2gH}$

D'après Scimeni, pour une charge $H = 1$, le profil de la face inférieure de la nappe a pour équation (courbe CBK) :

$$y = 0{,}5\, x^{1{,}85}$$

par rapport aux axes Cx et Cy indiqués sur la figure.

La courbe OC est un arc de cercle de centre A' et de rayon $R = 0{,}4\ H$.

Les pressions relevées expérimentalement à l'intérieur de la nappe sur la verticale ACE sont représentées par la courbe CJE ; la pression maximale se produit environ aux deux tiers de la profondeur $\left(EI = \frac{2}{3} EC\right)$ et a pour valeur $IJ = 0{,}18\ H$ (en hauteur d'eau).

Si on trace la courbe des $V^2/2g$ on peut vérifier que la somme $z + \frac{p}{\omega} + \frac{V^2}{2g}$ reste pratiquement constante, ce qui montre que l'écoulement est conservatif et à potentiel des vitesses.

X.2.1.1.1.2. Déversoir rectangulaire avec contraction latérale

Formule de Hégly.

M. Hégly, Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, collaborateur de Bazin, a effectué près de Langres des mesures avec un déversoir vertical à crête mince, à nappe libre, à contraction latérale placé à l'extrémité d'un canal type Bazin.

Il proposa en 1921 la formule suivante dans laquelle L_1 est la largeur du canal, les autres lettres ayant la même signification que dans les formules précédentes (fig. X.2.1.1.1.7) :

$$\mu = \left[0{,}405 + \frac{0{,}0027}{H} - 0{,}03 \frac{L_1 - L}{L_1}\right] \left[1 + 0{,}55 \left(\frac{LH}{L_1(H + z)}\right)^2\right]$$

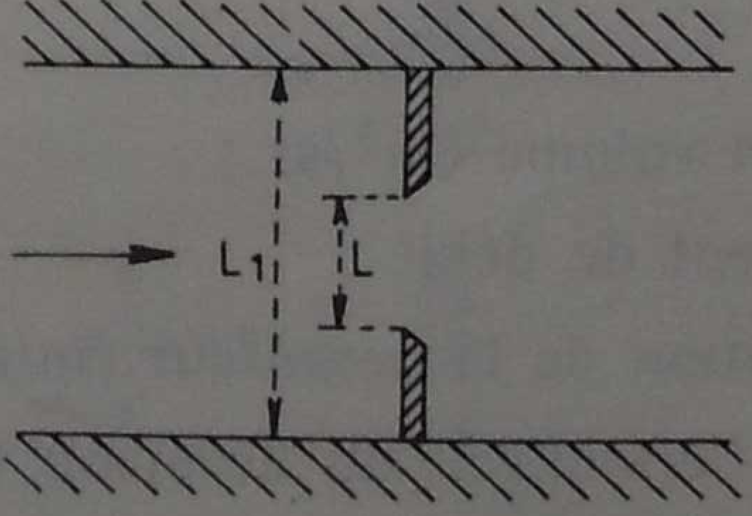


Fig. X.2.1.1.1.7 – Déversoir avec contraction latérale (vue en plan)

Limites d'application :

$$0{,}1\,m < H < 0{,}6\,m$$

$$0{,}4\,m < L < 1{,}8\,m$$

$$0{,}4\,m < z < 0{,}8\,m$$

$$0 < \frac{L_1 - L}{L_1} < 0{,}9$$

Formule de la S.I.A.

Applicable à l'installation type Rehbock pour un déversoir vertical à crête mince, à nappe libre, à contraction latérale.

$$\mu = \left[0{,}3853 + 0{,}0246\left(\frac{L}{L_1}\right)^2 + \frac{2{,}410 - 2\left(\frac{L}{L_1}\right)^2}{1.000\,H + 1{,}6}\right]\left[1 + 0{,}5\left(\frac{L}{L_1}\right)^4\left(\frac{H}{H+z}\right)^2\right]$$

Limites d'application :

$$0{,}025\,\frac{L_1}{L} < H < 0{,}8\,m$$

$$z \geqslant 0{,}3\,m$$

$$H \leqslant z$$

$$0{,}3 < \frac{L}{L_1} < 0{,}8$$

X.2.1.1.1.3. Formule de Kindsvater et Carter (U.S.A. 1957)

L'Association Internationale de Normalisation (I.S.O.) a adopté cette formule pour constituer la base de normalisation des mesures des débits à l'aide de déversoirs rectangulaires à crête mince *avec ou sans contraction latérale*. La formule s'écrit :

$$Q = C_e\,\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,L_e H_e^{3/2}$$

avec

Q = débit en volume (m^3/s) ;

C_e = coefficient de débit ;

g = accélération de la pesanteur (m/s/s) ;

L_e = largeur "effective" du déversoir (m) ;

H_e = charge "effective" du déversoir (m) ;

On a : $L_e = L + k_l$

avec

L = largeur réelle de la crête du déversoir et k_l longueur supplémentaire définie plus loin.

De même : $H_e = H + k_h$

avec

H = charge réelle sur la crête du déversoir et k_h longueur supplémentaire.

Les longueurs k_l et k_h dont les valeurs ont été déterminées expérimentalement tiennent compte de l'influence de la tension superficielle et de la viscosité du liquide.

Pour k_h on peut prendre la valeur 1 mm pour toutes les valeurs de L/L_1 (L_1 = largeur du canal) et de H/z (z = hauteur de pelle).

La valeur de k_l est fonction du rapport L/L_1 et est donnée par la courbe de la figure X.2.1.1.1.8.



Fig. X.2.1.1.1.8 – Formule de Kindsvater et Carter

Le coefficient de débit C_e est une fonction linéaire du rapport H/z, suivant la loi

$$C_e = \alpha + \beta\,\frac{H}{z}$$

les coefficients α et β variant avec le rapport L/L_1 suivant les courbes de la figure X.2.1.1.1.9.

Limites d'application de la formule de Kindsvater et Carter :

$$L \geqslant 0{,}15\,m$$

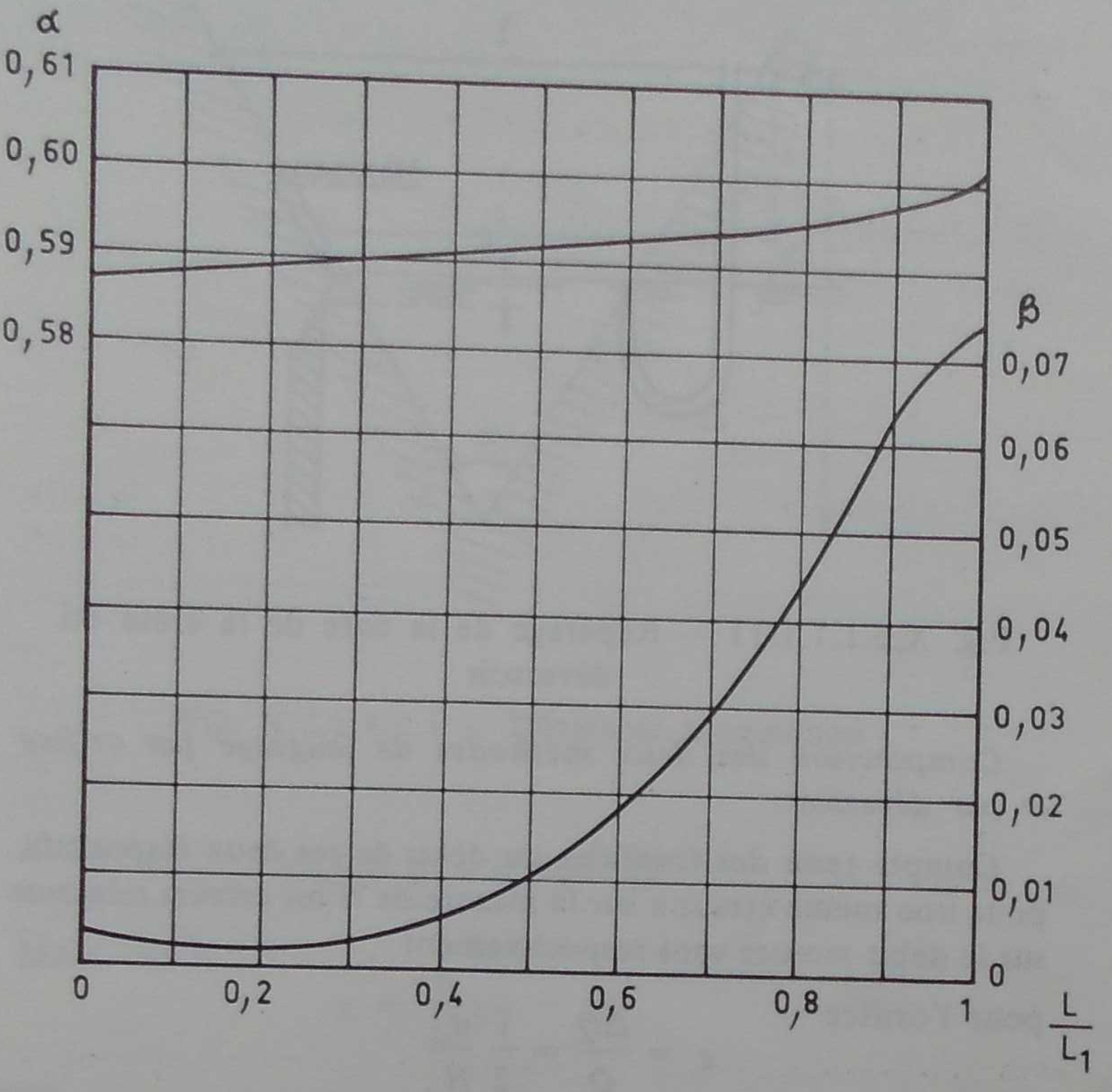


Fig. X.2.1.1.1.9 – Formule de Kindsvater et Carter

La charge H doit être suffisante pour permettre un décollement franc de la nappe après son passage sur la crête du déversoir et pour éviter la production d'une nappe adhérente ; on recommande pratiquement $H \geqslant 0{,}03$ m. Le rapport H/z doit rester suffisamment petit pour éviter la formation de vagues dans le canal d'approche ce qui gêne la mesure correcte de H ; on recommande pratiquement $H/z \leqslant 2$.

L'intérêt de la formule de Kindsvater et Carter résulte du fait qu'elle est conforme aux principes de la similitude mécanique (les facteurs 2/3 et $\sqrt{2g}$ sont explicités) et les valeurs des coefficients sont appuyées sur un ensemble très complet de mesures expérimentales.

X.2.1.1.1.4. Valeurs usuelles du coefficient de débit μ de la formule générale $Q = \mu L H \sqrt{2gH}$

Dans la pratique courante pour une première approximation, dans le cas d'un *déversoir en mince paroi vertical à nappe libre, rectangulaire,* on peut prendre :

sans contraction latérale $\mu = 0{,}43$
avec contraction latérale $\mu = 0{,}40$

Ceci revient à négliger dans les formules données précédemment le terme en z ce qui est acceptable dès que $z > 4H$ et à arrondir le premier terme de l'expression de μ en lui donnant une valeur moyenne.

X.2.1.1.1.5. Application du déversoir rectangulaire vertical à crête mince au jaugeage rapide d'un petit cours d'eau

Au chapitre XII (jaugeage des canaux et rivières) nous indiquerons comment on peut utiliser un déversoir pour jauger avec la meilleure précision possible un écoulement à surface libre.

Les formules données précédemment, utilisées dans leurs limites d'application et sur des installations soigneusement réalisées, peuvent permettre dans les meilleures conditions d'obtenir sur le débit mesuré une précision de l'ordre de 1 à 2 %.

Toutefois comme nous avons signalé l'application des orifices au jaugeage des petits débits (orifice de jauge) nous indiquerons ici comment on peut utiliser un déversoir pour jauger rapidement un petit cours d'eau (fig. X.2.1.1.1.10).

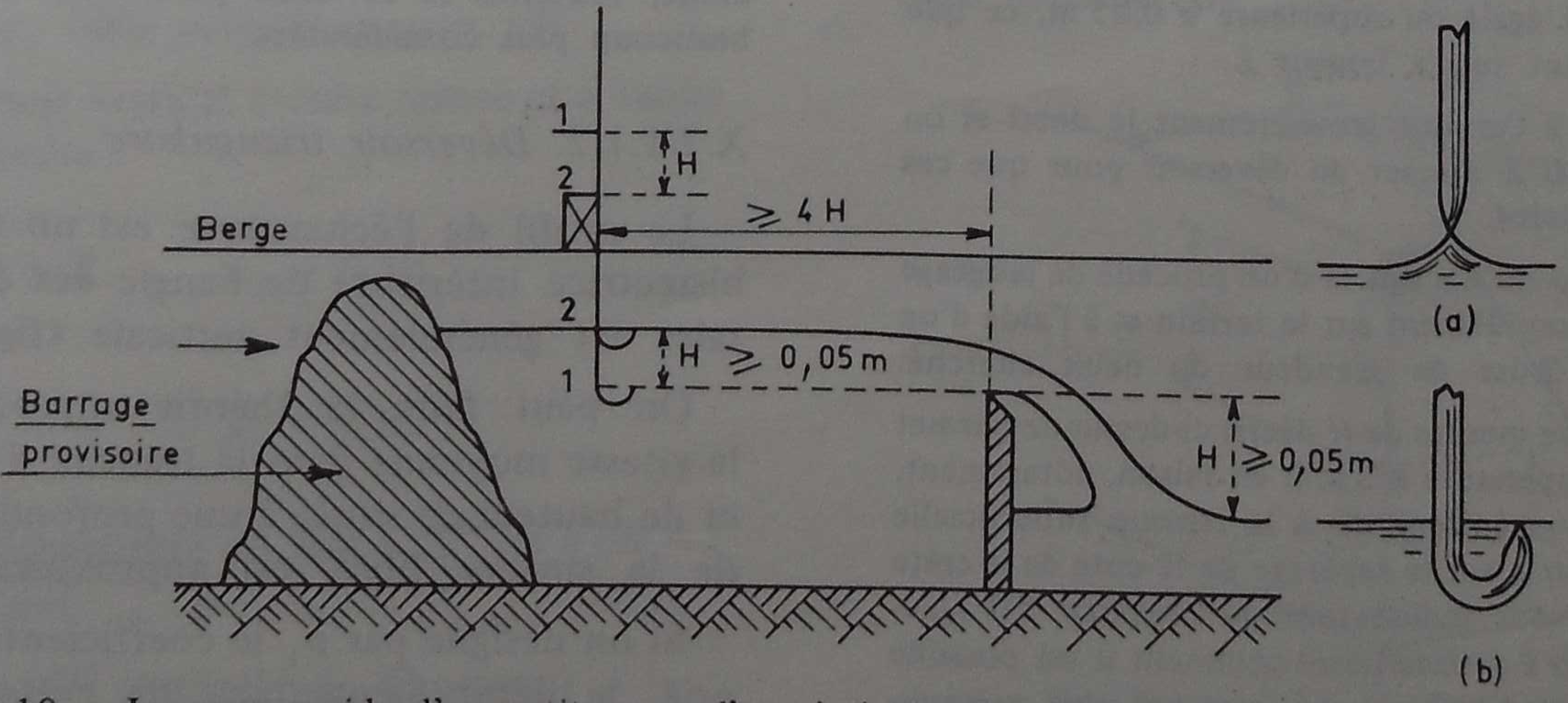


Fig. X.2.1.1.1.10 – Jaugeage rapide d'un petit cours d'eau à l'aide d'un déversoir. (a) Tige droite, (b) Tige recourbée

On réalise un déversoir à contraction latérale pour que l'air circule librement autour de la nappe (on peut aisément fabriquer sur place un tel déversoir en planches et on munit le seuil et les joues, côté amont, d'une plaque de tôle pour réaliser une paroi mince).

Avec ce dispositif on barre le cours d'eau et on obtiendra le débit en mesurant la charge H.

Mais cette mesure de H est délicate car, contrairement au cas du jaugeage par un orifice, c'est ici la distance verticale de deux points qui ne sont pas dans une même section transversale.

Si on dispose d'un niveau on fera sans difficulté une mesure précise.

Mais si on ne dispose pas d'un niveau, pour obtenir une précision suffisante, on peut procéder de la façon suivante :

A une distance au moins égale à 4 H à l'amont du déversoir, on dispose en travers du ruisseau et sur la berge une poutre rigide ; contre une face de cette poutre peut se déplacer verticalement une tige métallique appointée et recourbée à son extrémité.

Puis, par un barrage provisoire, on arrête l'eau en amont de cette poutre et on accélère la vidange du bief situé entre le barrage et le déversoir jusqu'à ce que le plan d'eau s'établisse au niveau du seuil du déversoir. On fait affleurer la tige recourbée au niveau de l'eau. Cette disposition de la tige recourbée présente sur la tige droite l'avantage d'éviter le phénomène de capillarité qui empêche de déterminer très exactement la position de la tige pour laquelle l'extrémité de la pointe est dans la surface libre. On trace alors un trait de lime sur la tige à l'affleurement de la poutre.

On supprime le barrage provisoire, on laisse établir le régime permanent, on fait affleurer la pointe, on trace un un deuxième trait de lime.

La distance entre les deux traits de lime est égale à H.

Pour que la mesure soit acceptable *il faut que la nappe soit libre*. Pour cela, il est indispensable que :

1) la hauteur du seuil au-dessus du niveau d'aval soit au moins égale à 0,05 m,

2) la charge H soit égale ou supérieure à 0,05 m, ce que l'on obtient en agissant sur la largeur L.

En fait, on évalue à l'avance grossièrement le débit et on en déduit la largeur L à donner au déversoir pour que ces conditions soient réalisées.

Précisons à nouveau qu'il s'agit là d'un procédé de jaugeage permettant d'obtenir rapidement sur le terrain et à l'aide d'un matériel simple un ordre de grandeur du débit cherché.

En fait le procédé de mesure de H décrit ci-dessus ne permet guère une précision supérieure à 2 mm en raison, notamment, de la production d'un ménisque dû à la tension superficielle qui entraîne une erreur ϵ sur le repérage de la cote de la crête (fig. X.2.1.1.1.11). Nous indiquerons au chapitre XII (jaugeage des écoulements à surface libre) comment il est possible de supprimer cette erreur pour des mesures plus précises.

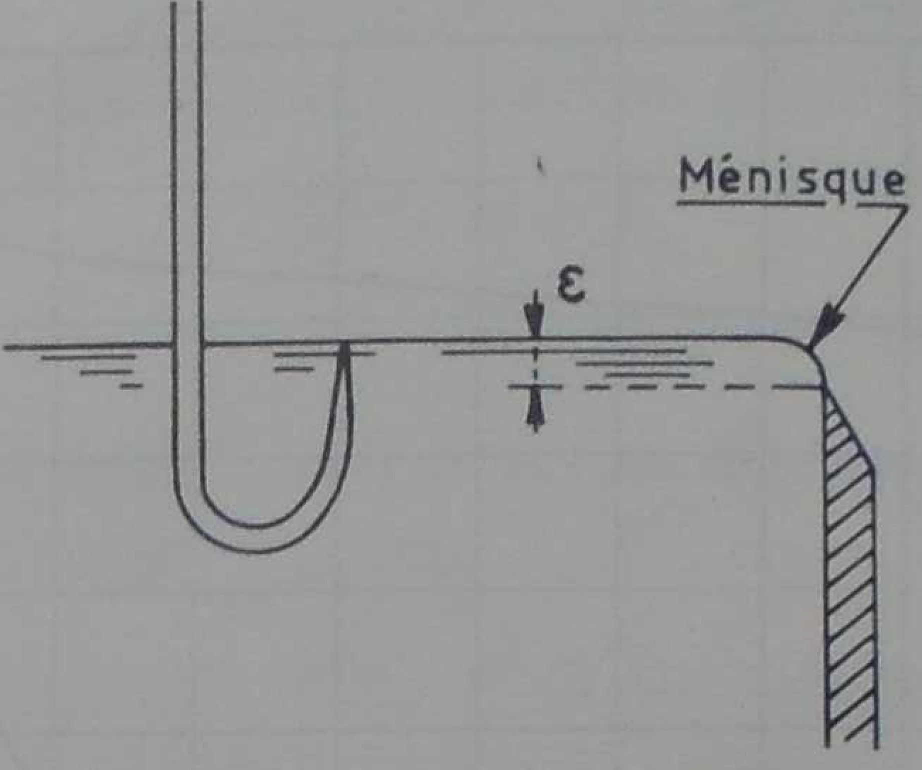


Fig. X.2.1.1.1.11 – Repérage de la cote de la crête du déversoir

Comparaison des deux méthodes de jaugeage par orifice et par déversoir.

Compte tenu des formules du débit de ces deux dispositifs, pour une même erreur ϵ sur la mesure de H les erreurs relatives sur le débit mesuré sont respectivement

pour l'orifice
$$e = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{2}\,\frac{\epsilon}{H}$$

pour le déversoir
$$e' = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3}{2}\,\frac{\epsilon}{H} = 3\,e$$

Donc, quel que soit le signe de ϵ, l'erreur relative provoquée par la mesure de H est trois fois plus grande en valeur absolue avec le déversoir qu'avec l'orifice.

En second lieu, la mesure de H avec un orifice est plus commode qu'avec un déversoir, car il s'agit dans le premier cas de mesurer la distance verticale séparant deux points qui sont dans un même plan perpendiculaire à la direction du cours d'eau et matérialisé par le dispositif, alors qu'avec le déversoir les deux points entre lesquels on mesure la distance verticale ne sont pas dans un même plan perpendiculaire à l'axe du cours d'eau.

La mesure avec l'orifice est donc plus précise et plus commode, toutefois le déversoir permet de mesurer des débits beaucoup plus considérables.

X.2.1.1.2. *Déversoir triangulaire*

Le profil de l'échancrure est un triangle dont la bissectrice intérieure de l'angle des deux joues latérales est généralement verticale (fig. X.2.1.1.2.1).

On peut faire la théorie approchée suivante : la vitesse moyenne dans la tranche d'eau de largeur x et de hauteur dz située à une profondeur z au-dessous de la surface libre, est approximativement $\sqrt{2gz}$.

Si on désigne par μ_1 le coefficient de débit approprié, le débit élémentaire de cette tranche sera :

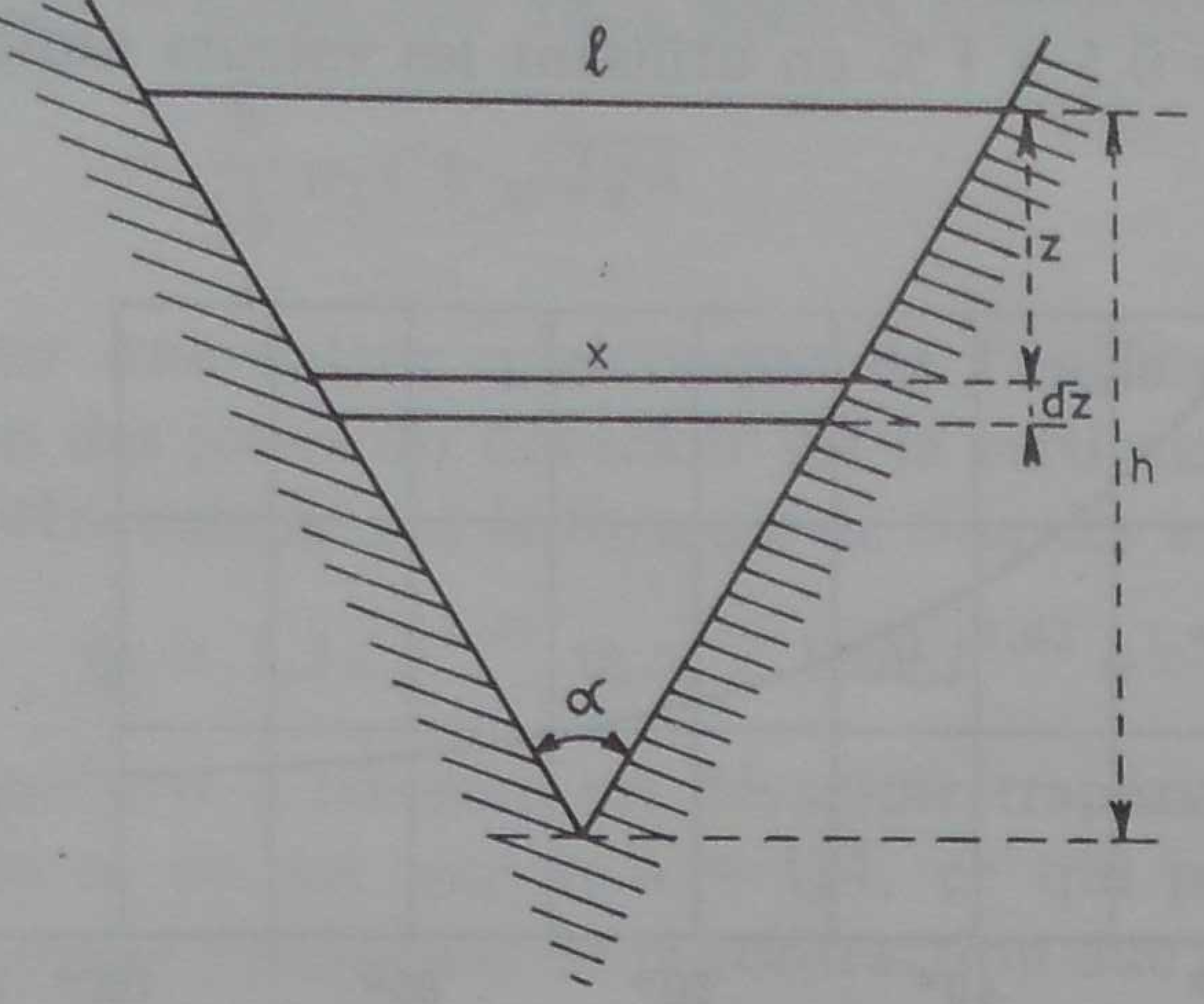


Fig. X.2.1.1.2.1 – Déversoir triangulaire

$$dQ = \mu_1 x \, dz \sqrt{2gz}$$

Mais on a :

$$x = \frac{l}{h}(h - z)$$

donc

$$dQ = \mu_1 \frac{l}{h}(h - z)\sqrt{2gz}\, dz$$

et

$$Q = \int_0^h \mu_1 \frac{l}{h}(h - z)\sqrt{2gz}\, dz$$

En supposant μ_1 constant, l'intégration donne

$$Q = \frac{4}{15}\mu_1 l h \sqrt{2gh}$$

ou, en introduisant l'angle α de l'échanrure :

$$Q = \frac{8}{15}\mu_1 h^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2gh}$$

La valeur de μ_1 varie avec le rapport l/h.

Pour un déversoir vertical à crête mince et à nappe libre, on peut prendre :

pour $\frac{l}{h} = 2 \qquad \mu_1 = 0{,}59$

pour $\frac{l}{h} = 4 \qquad \mu_1 = 0{,}62$

Si l'angle de l'échancrure est égal à 90°, on a $l/h = 2$ et la formule devient :

$$Q = 1{,}40\, h^{5/2} \text{ (formule de Thomson)}$$

valable pour

$$0{,}05 \text{ m} < h < 0{,}18 \text{ m}.$$

Heyndrickx a proposé en 1948 la formule suivante pour μ_1 :

$$\mu_1 = (0{,}5775 + 0{,}214\, h^{-1,25})\left(1 + \frac{h^2}{l^2(h + z)^2}\right)$$

l = largeur superficielle

z = hauteur de la pointe de l'échancrure au-dessus du fond du canal à l'amont.

Formule de Cone (U.S.A. 1916)

$$Q = \left(0{,}3065 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} h^{5/2}\sqrt{2g} + 0{,}0031\, h^{5/2}\sqrt{2g}\right)(3{,}28\, h)^{-\frac{0{,}0195}{0{,}75 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$$

Limites d'application :

$$28° < \alpha < 90°$$

$$0{,}06 \text{ m} < h < 0{,}41 \text{ m}$$

Cone a également proposé la formule simplifiée suivante qui, pour $\alpha = 90°$, donne des résultats aussi précis que la formule précédente :

$$Q = 0{,}303\, h^{-0,02} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}\, h^{5/2}$$

Formule de Kindsvater (U.S.A. 1957)

L'Association Internationale de Normalisation (I.S.O.) a recommandé cette formule qui, pour un déversoir triangulaire vertical à crête mince, s'écrit :

$$Q = C_e \frac{8}{15} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{2g}\,(h + k_h)^{5/2}$$

dans laquelle (fig. X.2.1.1.2.2) :

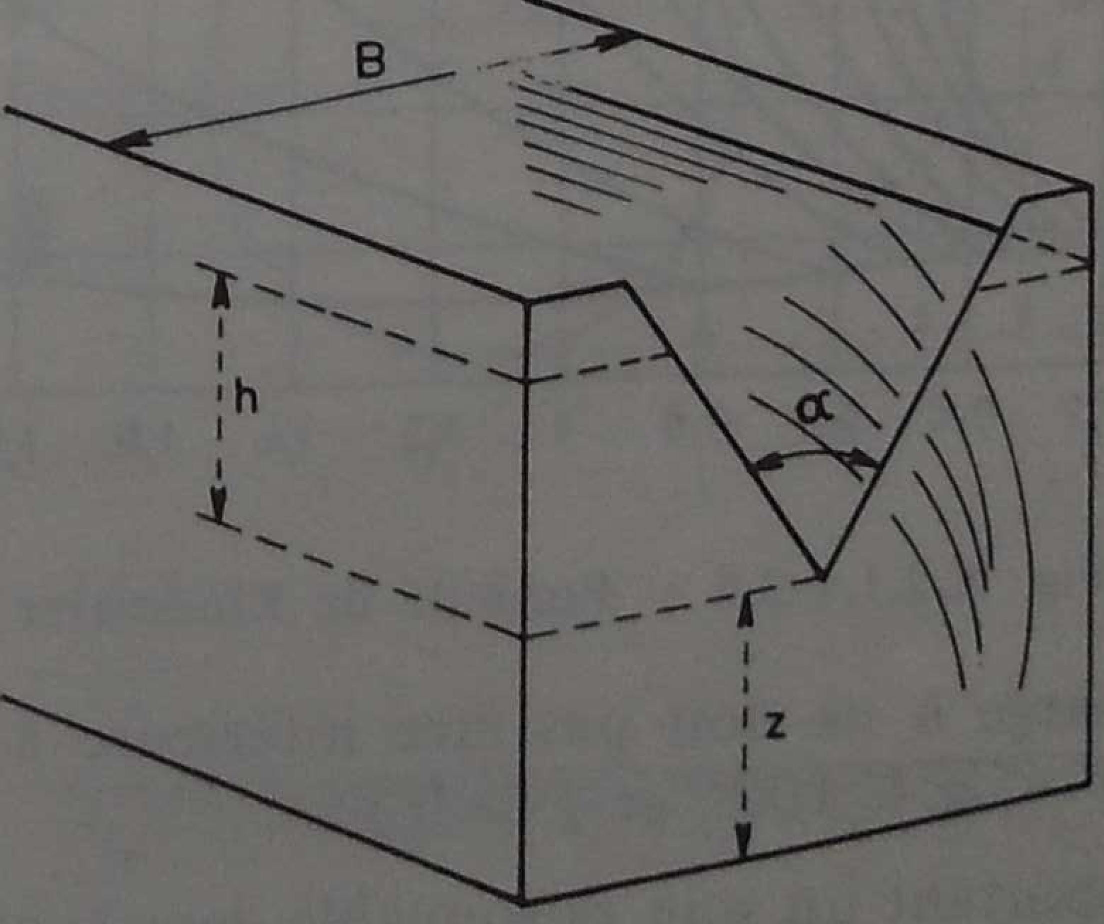


Fig. X.2.1.1.2.2 – Formule de Kindsvater

— h est la charge au-dessus de la pointe de l'échancrure ;

— α est l'angle d'ouverture de l'échancrure ;

— C_e est le coefficient de débit, fonction de α et des rapports h/z et z/B

(z = hauteur de la pointe de l'échancrure au-dessus du fond du canal ; B = largeur du canal à l'amont du déversoir) ; les figures X.2.1.1.2.3 et 4 donnent les valeurs de C_e en fonction de ces divers paramètres ;

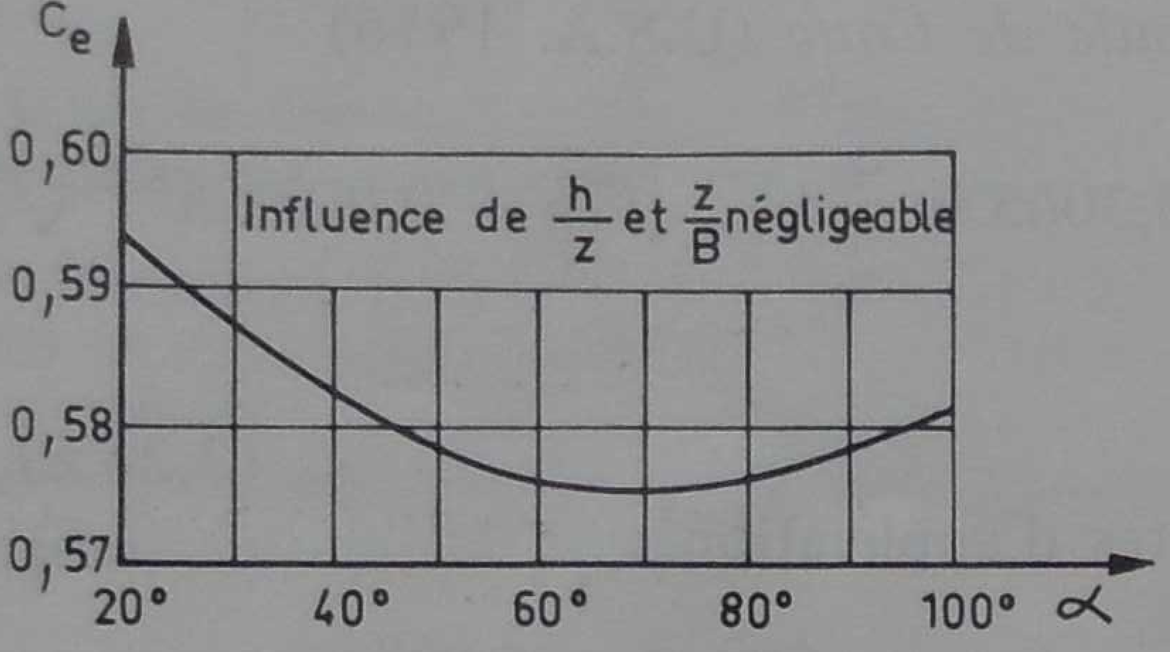


Fig. X.2.1.1.2.3 – Formule de Kindsvater

— k_h est une longueur tenant compte de l'influence de la tension superficielle et de la viscosité ; pour un liquide donné et dans une marge limitée de température k_h est seulement fonction de α.

Pour $\alpha = 90°$ et pour de l'eau à la température ordinaire on peut prendre $k_h = 0{,}85$ mm.

Pour les autres valeurs de α la courbe de la figure X.2.1.1.2.5 donne les valeurs de k_h en fonction de α.

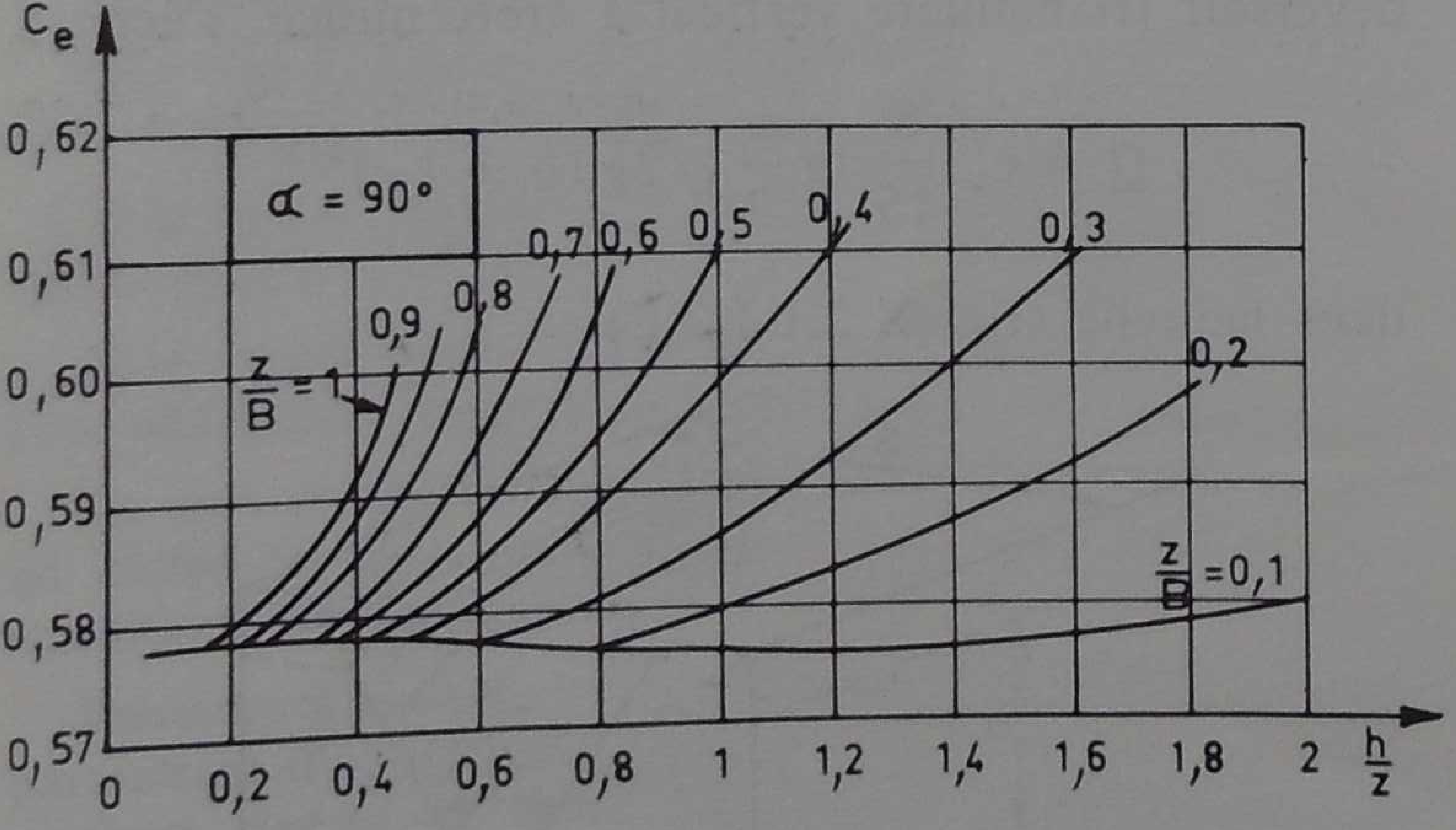


Fig. X.2.1.1.2.4 – Formule de Kindsvater

La charge h ne doit pas être inférieure à 0,06 m pour $20° < \alpha < 100°$ et $z > 0{,}1$ m.

En apportant un soin raisonnable dans la construction et la réalisation du déversoir, on peut considérer que le coefficient de débit C_e est connu avec une précision de 0,5 à 1 % en utilisant les valeurs indiquées.

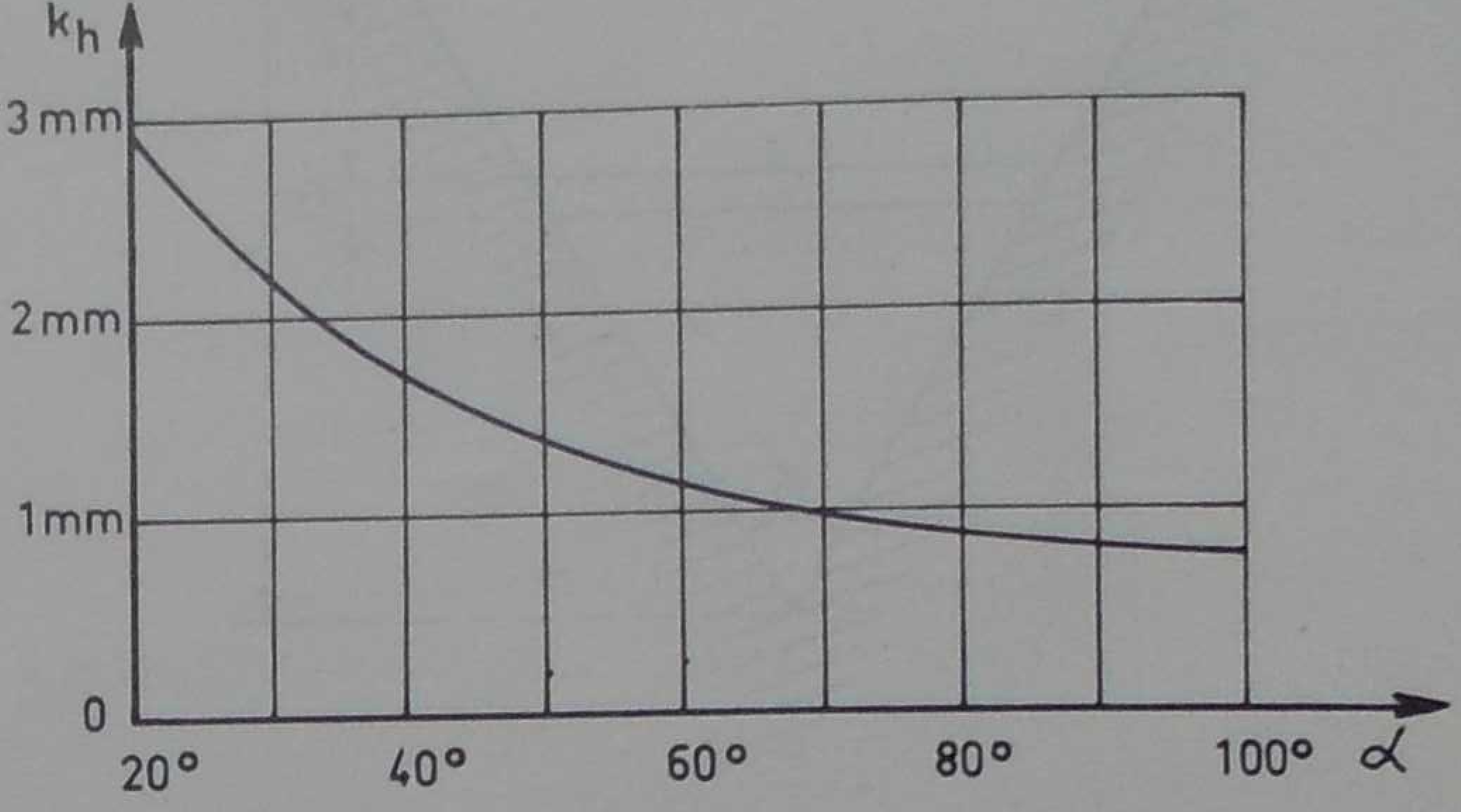


Fig. X.2.1.1.2.5 – Formule de Kindsvater

D'une manière générale, les déversoirs triangulaires sont souvent utilisés pour la mesure des faibles débits, la charge h étant relativement grande ce qui diminue l'erreur sur le débit mesuré.

X.2.1.1.3. *Déversoir trapézique*

Si l'échancrure du déversoir a la forme d'un trapèze isocèle évasé vers le haut (fig. X.2.1.1.3.1) le débit total est la somme des débits Q_1 et Q_2

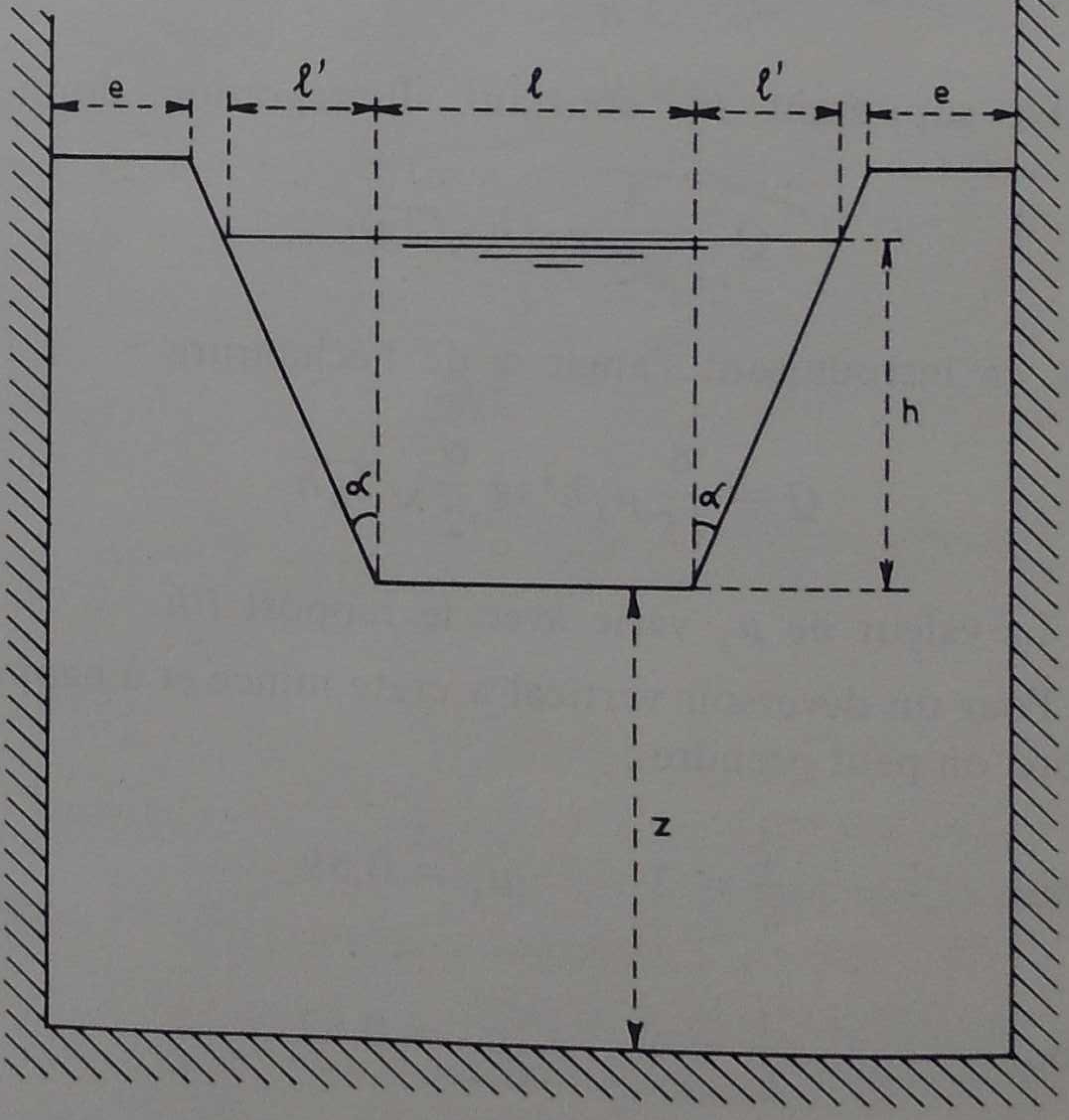


Fig. X.2.1.1.3.1 – Déversoir trapézique

avec Q_1 = débit de la partie rectangulaire

$= \mu l h \sqrt{2gh}$

Q_2 = débit des deux parties triangulaires

$$= \frac{8}{15} \mu_1 l' h \sqrt{2gh}$$

Pour une valeur quelconque de l'angle α d'inclinaison des joues du déversoir sur la verticale le débit peut être calculé par la formule de *Gourley et Crimp* :

$$Q = 1{,}32\, h^{2,47} \operatorname{tg} \alpha + 1{,}69\, l^{1,02}\, h^{1,47}$$

Cipolletti a imaginé un déversoir trapézique dont l'angle α est tel que $\operatorname{tg} \alpha = 1/4$, ce qui permet de compenser l'influence de la contraction due aux joues par l'augmentation de la largeur superficielle de la nappe due à la forme de l'échancrure, de manière à conserver un coefficient μ constant pour une large plage de variation de la charge h.

Le débit du déversoir trapézique de Cipolletti est donc donné par la formule générale :

$$Q = \mu l h \sqrt{2gh}$$

l = largeur de la crête horizontale (petite base du trapèze)

$\mu = C^{te}$ quelle que soit h (voisin de 0,422)

La formule de Cipolletti s'écrit donc sous forme simplifiée :

$$Q = 1{,}86\, l h^{1,5}$$

Elle est valable dans les limites suivantes de h (fig. X.2.1.1.3.1) :

$$0{,}08 \text{ m} < h < 0{,}60 \text{ m}$$

$$h < \frac{e}{2}$$

$$h < \frac{l}{3}$$

$$h < \frac{z}{3}$$

Déversoir trapézique à profil convergent vers le haut (fig. X.2.1.1.3.2) :

Son débit est donné par la formule :

$$Q = \frac{2}{3} \mu l h \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{h}{l} \operatorname{tg} \alpha\right)$$

La courbe $Q(h)$ présente un point d'inflexion pour la valeur de h qui annule la dérivée seconde d^2Q/dh^2 qu'on calcule aisément après avoir remplacé l par $2H \operatorname{tg} \alpha$ dans la formule du débit ; on obtient ainsi $h = H/2$.

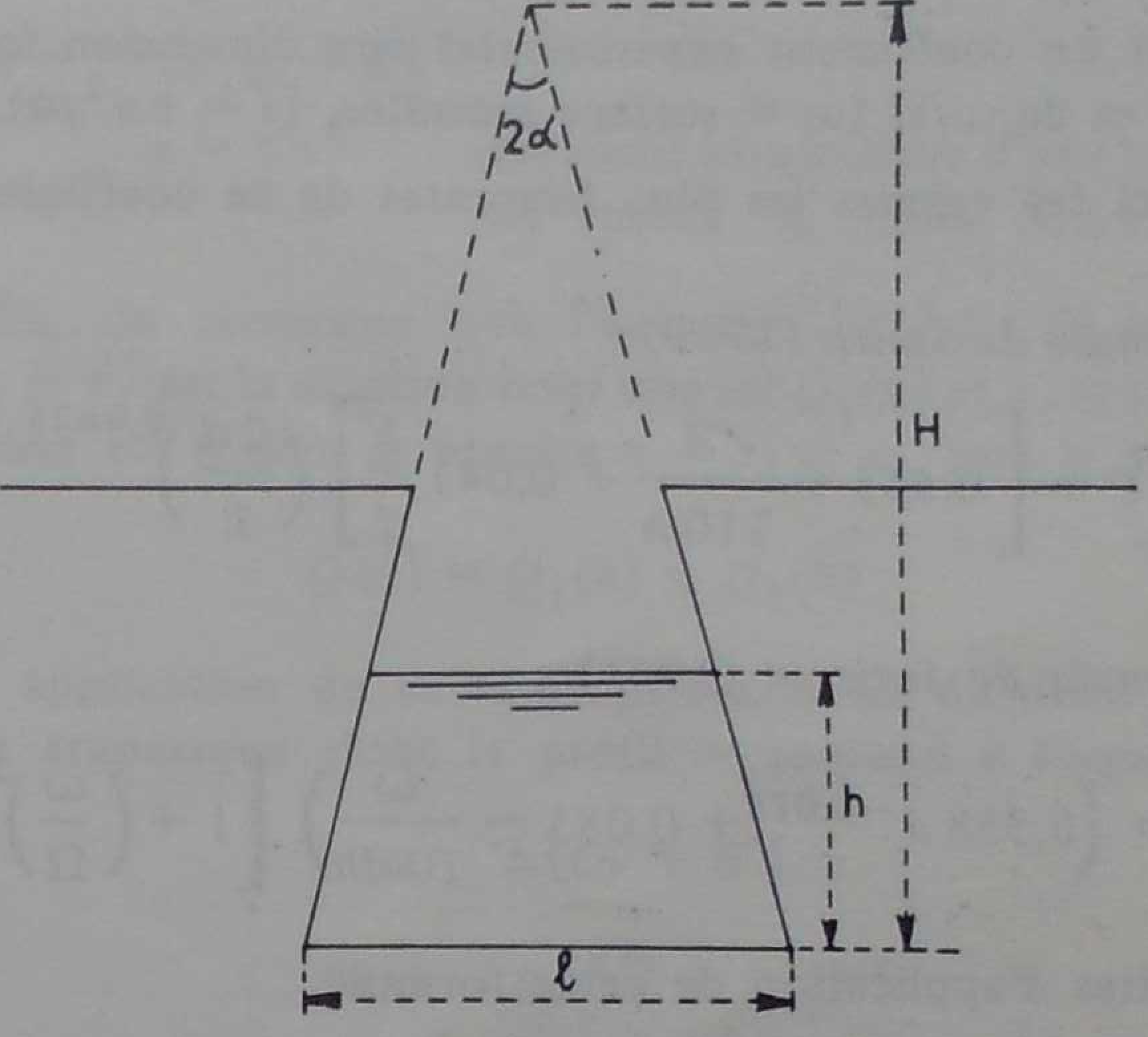


Fig X.2.1.1.3.2 – Déversoir trapézique à profil convergent vers le haut

Par ailleurs, pour $2\alpha = 50°$ la courbe $Q(h)$ est presque rectiligne ce qui présente l'avantage de faciliter l'enregistrement du débit par un limnigraphe ordinaire.

X.2.1.1.4. *Déversoir circulaire* (fig. X.2.1.1.4)

La *formule générale* du débit du déversoir circulaire est donnée généralement sous la forme suivante, d'après les résultats de *Stauss et Von Sanden* :

$$Q = C K d^{5/2}$$

K est une fonction compliquée de h/d dont la valeur résulte de considérations théoriques : ce serait le débit d'un déversoir de diamètre unitaire et sans contraction ; il est donné par des tables numériques ou par la formule approximative de *Ramponi* :

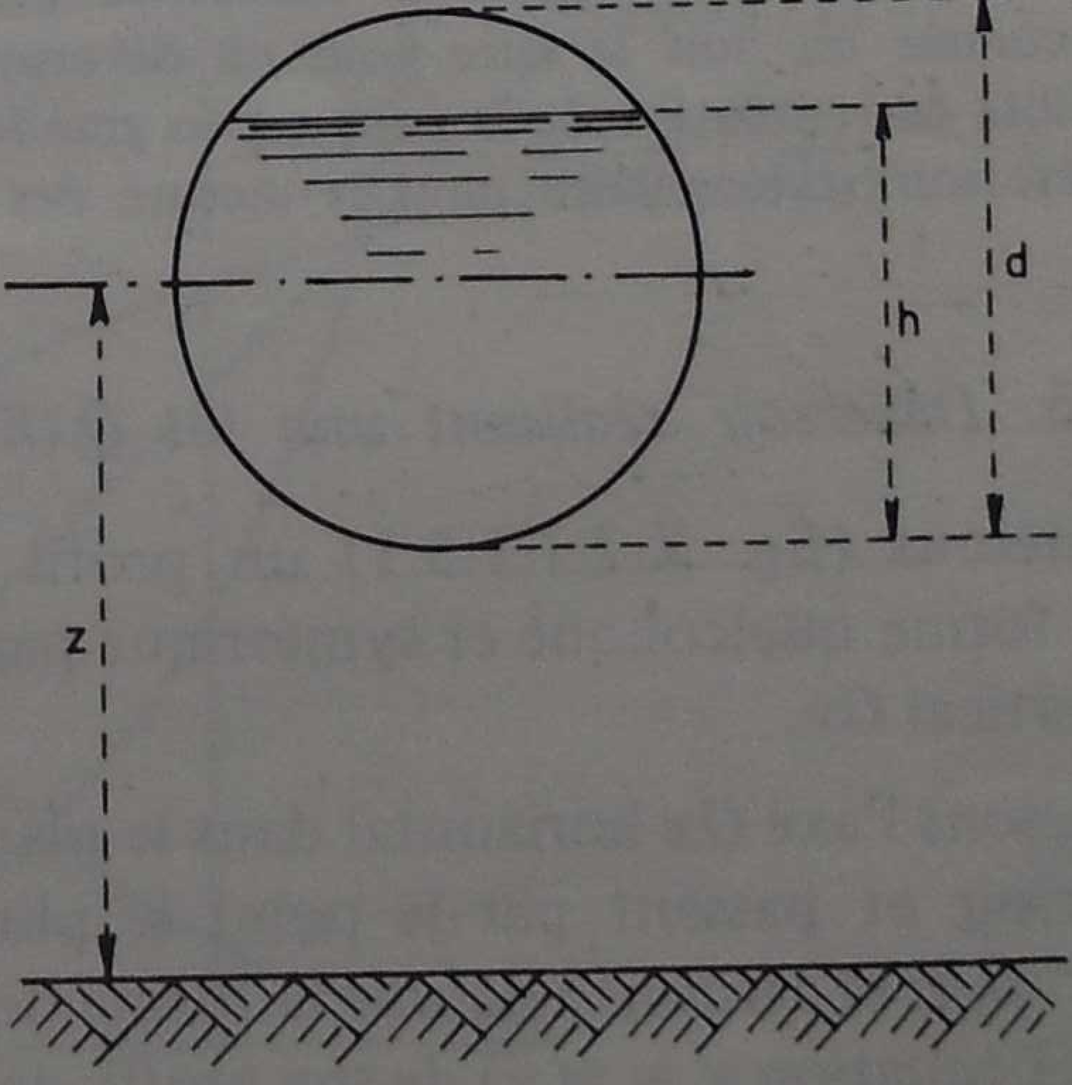


Fig. X.2.1.1.4 – Déversoir circulaire

$$K = 3{,}203\left(\frac{h}{d}\right)^{1{,}975} - 0{,}842\left(\frac{h}{d}\right)^{3{,}78}$$

C est un coefficient expérimental sans dimension fonction de h/d et de ω/Ω (ω = surface mouillée, $\Omega = \pi d^2/4$).

Voici les valeurs les plus courantes de ce coefficient C :

Formule de Stauss (1930) :

$$C = \left[0{,}555 + \frac{d}{110\,h} + 0{,}041\,\frac{h}{d}\right]\left(\frac{2\,d}{L}\right)^{0{,}0625}$$

Formule de Jorissen (1941) ;

$$C = \left(0{,}558\,d^{-0{,}025} + 0{,}085 - \frac{\omega}{10\,dh}\right)\left[1 + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right]$$

Limites d'application de cette formule :

$$0{,}1 \text{ m} < d < 1 \text{ m}$$

$$\frac{L}{z} < 2$$

avec

L = largeur du canal d'amenée en amont du déversoir.

z = distance du centre du déversoir au fond du canal.

Hégly (1921) a appliqué au déversoir circulaire la formule générale des déversoirs :

$$Q = \mu\,\omega\,\sqrt{2gh}$$

et a proposé pour μ la valeur suivante :

$$\mu = \left(0{,}350 + \frac{2}{1.000\,h}\right)\left[1 + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2\right]$$

Par rapport aux autres types de déversoirs le déversoir circulaire présente les *avantages* suivants : simplicité, facilité d'exécution et de mise en place (il n'y a ni à placer le seuil parfaitement horizontal comme on doit le faire pour un déversoir rectangulaire, ni à placer la bissectrice parfaitement verticale comme on doit le faire pour un déversoir triangulaire), facilité de ventilation de la nappe, plus grande précision que le déversoir rectangulaire pour la mesure des petits débits.

X.2.1.1.5. *Déversoir réalisant une loi $Q(h)$ donnée*

Considérons (fig. X.2.1.1.5.1) un profil d'échancrure de forme quelconque et symétrique par rapport à l'axe vertical Oy.

Choisissons l'axe Ox horizontal dans le plan vertical du déversoir et passant par le point le plus bas de l'échancrure et cherchons à définir la forme de l'échancrure par l'équation $x = f(y)$ de son profil, de manière que le débit Q obéisse à une loi $Q(h) = 0$ donnée.

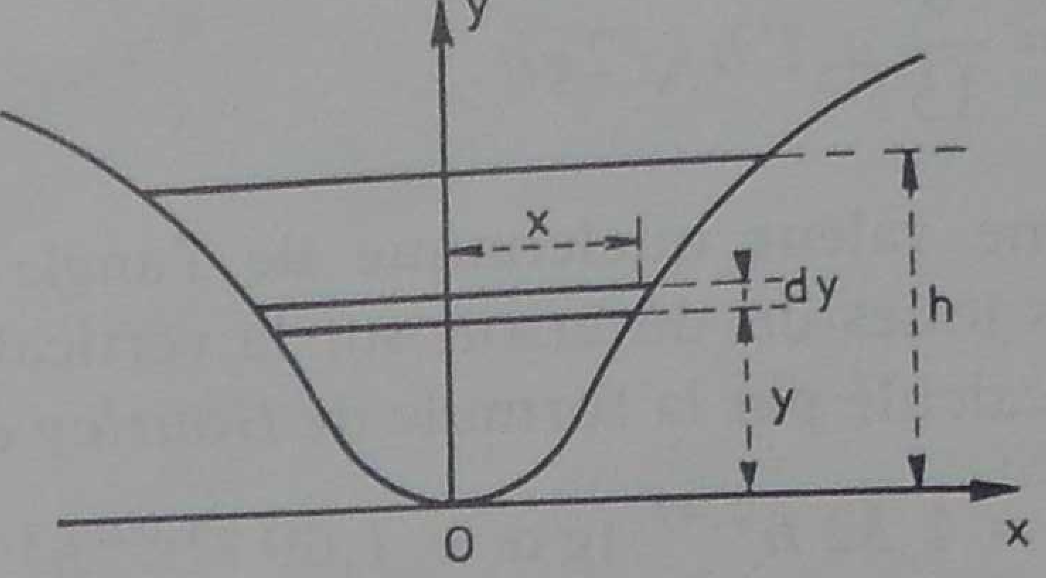


Fig. X.2.1.1.5.1

Négligeons, en première approximation, la contraction de la nappe à la traversée du déversoir ; elle interviendra, en fin de calcul, par un coefficient μ.

Pour une section $dS = 2\,x\,dy$ située à une distance verticale $(h - y)$ de la surface libre à l'amont, le débit élémentaire a pour expression

$$dS = 2\,x\,dy\,\sqrt{2g\,(h-y)}$$

et le débit total du déversoir est donc (en introduisant un coefficient μ approprié) :

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}\int_0^h x\,\sqrt{h-y}\,dy$$

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}\int_0^h f(y)\,\sqrt{h-y}\,dy \qquad [X.2.1.1.5]$$

La condition $Q(h) = 0$ peut s'écrire :

$$Q = 2\sqrt{2g}\,\varphi(h)$$

La comparaison des deux équations précédentes permet d'écrire :

$$\varphi(h) = \mu\int_0^h f(y)\,\sqrt{h-y}\,dy$$

La solution $x = f(y)$ de cette équation intégrale linéaire donnera l'équation du profil de l'échancrure compte-tenu de l'approximation faite sur la valeur constante du coefficient μ.

L'intégration de cette équation est généralement compliquée.

Dans le cas où la loi $Q(h) = 0$ est de la forme $Q = Kh^{n/2}$ avec n entier et positif, en écrivant l'équation du profil de l'échancrure $x = f(y)$ sous la forme d'une série

$$x = a_1 y^{-1/2} + a_2 + a_3 y^{1/2} + a_4 y + a_5 y^{3/2} + a_6 y^2 + \cdots$$

l'intégration est possible et conduit aux résultats suivants :

1) $n = 2$ *ou* $Q = Kh$: *déversoir proportionnel*

$$x = \frac{C}{\sqrt{y}} \quad \text{(profil 1, figure X.2.1.1.5.2)}$$

L'intérêt du déversoir proportionnel est de réaliser une sensibilité constante pour tous les débits, l'erreur absolue ΔQ étant proportionnelle à Δh c'est-à-dire constante quelle que soit h (fig. X.2.1.1.5.3).

2) $n = 3$ ou $Q = Kh^{3/2}$

$x = C^{te}$ c'est le déversoir *rectangulaire* classique (profil 2, figure X.2.1.1.5.2).

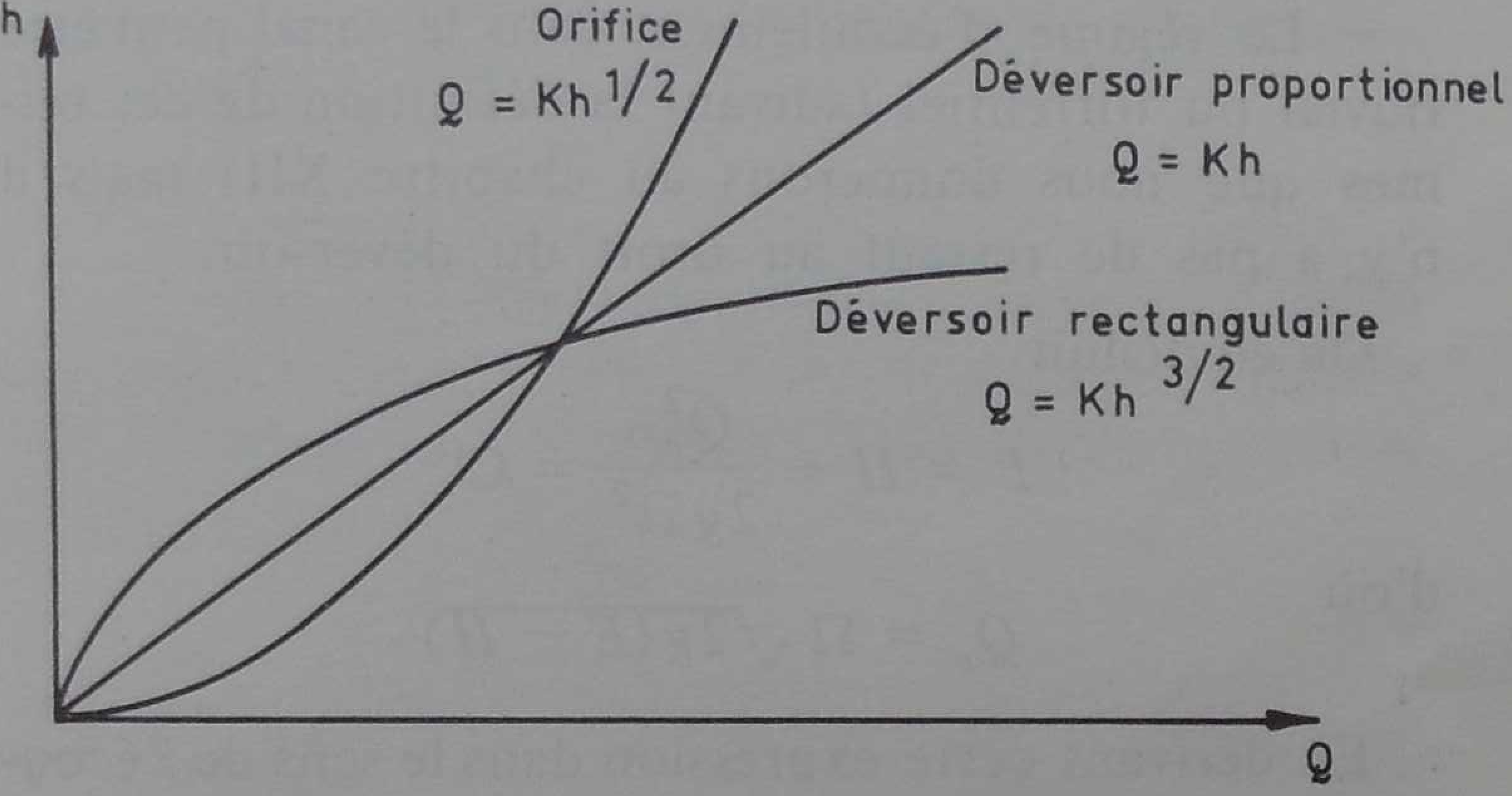


Fig. X.2.1.1.5.3

3) $n = 4$ ou $Q = Kh^2$

$x = C\sqrt{y}$ déversoir *parabolique* d'axe vertical (profil 3, figure X.2.1.1.5.2).

4) $n = 5$ ou $Q = Kh^{5/2}$

$x = Cy$ déversoir *triangulaire* (profil 4, figure X.2.1.1.5.2).

5) $n = 7$ ou $Q = Kh^{7/2}$

$x = Cy^2$ déversoir *parabolique* d'axe horizontal (profil 5, figure X.2.1.1.5.2).

Enfin, on remarque que l'équation [*X.2.1.1.5*] étant linéaire, si x_1 est la solution pour une loi $Q_1(h)$ et x_2 la solution pour une loi $Q_2(h)$, la somme $x = x_1 + x_2$ sera la solution pour

$$Q(h) = Q_1(h) + Q_2(h)$$

En application de cette propriété, la loi du débit du déversoir trapézique dont le profil correspond à l'équation :

$$x = \pm (Cy + C')$$

sera

$$Q(h) = Kh^{5/2} + K'h^{3/2}$$

X.2.1.2. *Déversoir incliné* (fig. X.2.1.2)

Soit un déversoir à crête mince et à nappe libre dont la crête est perpendiculaire à l'axe du canal mais le plan du déversoir étant incliné sur la verticale d'un angle i.

D'après une théorie de Boussinesq, le coefficient μ_1 applicable au débit de ce déversoir serait égal au coefficient μ qui conviendrait pour le déversoir vertical, multiplié par le coefficient

$$K_1 = 1 - 0{,}3902 \frac{i}{180}$$

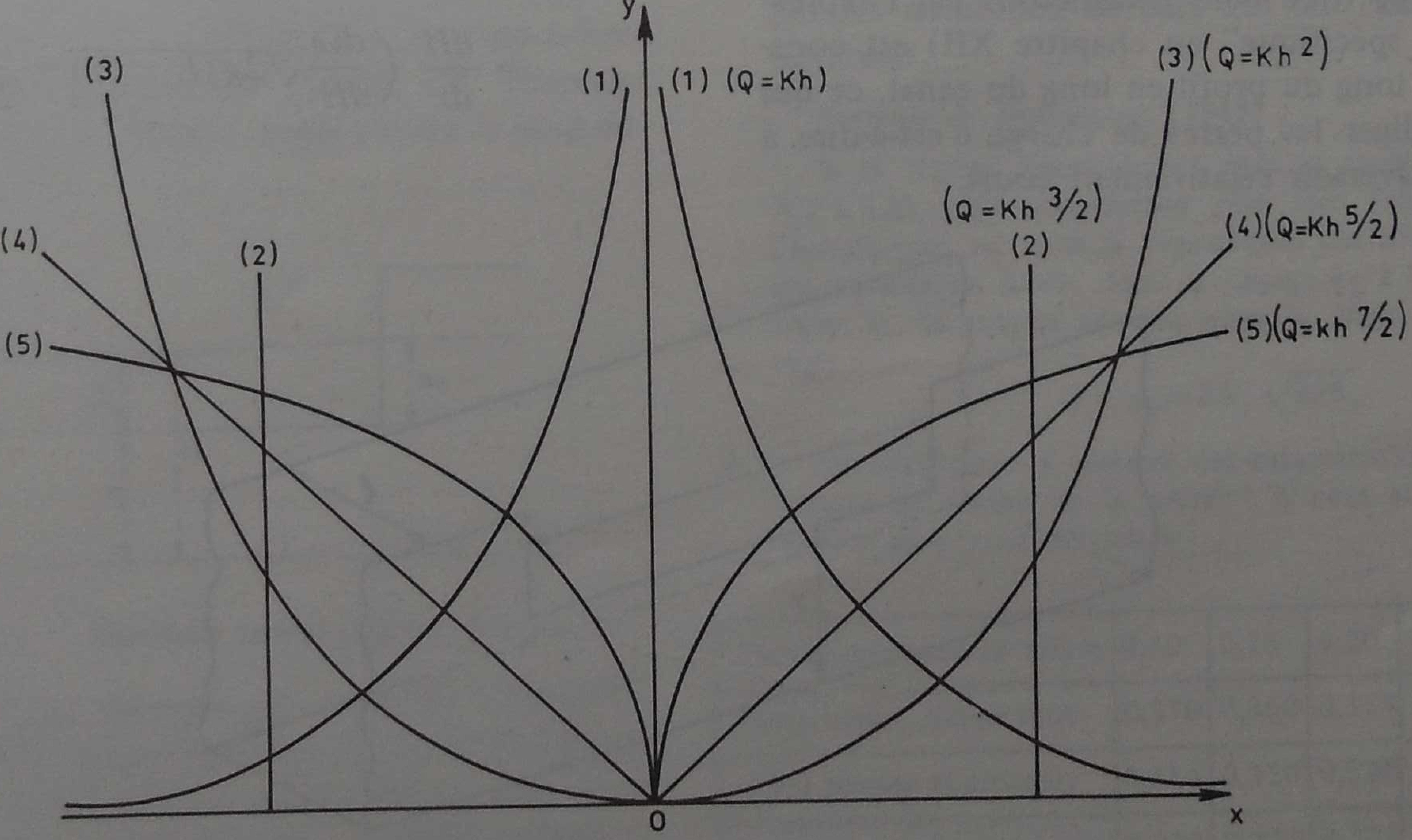


Fig. X.2.1.1.5.2 – Exemples de profils d'échancrures réalisant une loi $Q(h)$ donnée

i en degrés, compté positivement si le déversoir est incliné vers l'amont (dans ce cas le débit est diminué) et compté négativement si le déversoir est incliné vers l'aval (dans ce cas le débit est augmenté).

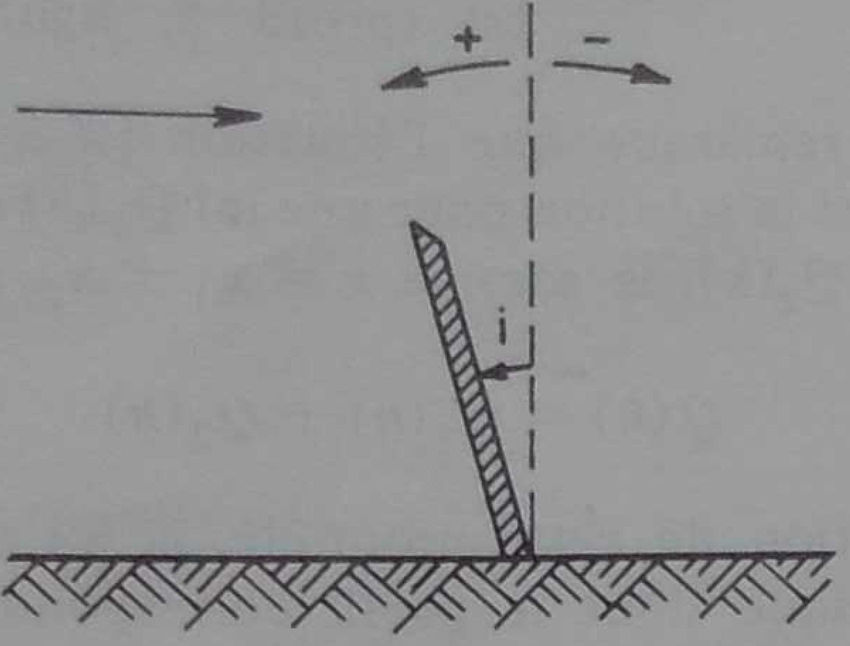


Fig. X.2.1.2 – Déversoir incliné

X.2.1.3. ***Déversoir latéral*** (fig. X.2.1.3.1)

C'est un déversoir ménagé dans la paroi latérale d'un canal. Nous supposerons sa crête horizontale de longueur L et désignerons par z la hauteur de pelle . Le fond du canal sera supposé horizontal sur la courte distance considérée.

Forme de la ligne d'eau et variation du débit déversé le long du seuil.

Nous admettrons les hypothèses suivantes :

— Dans une section transversale du canal prise le long du seuil du déversoir, en désignant par H le tirant d'eau et par U la vitesse moyenne, la quantité $E = H + U^2/2g$ (que nous désignerons par l'expression "énergie spécifique" au chapitre XII) est constante tout le long du profil en long du canal, ce qui revient à négliger les pertes de charge c'est-à-dire à supposer le déversoir relativement court.

— Les composantes transversales des vitesses sont négligeables, sauf au voisinage immédiat du déversoir.

— Dans une section transversale du canal la vitesse longitudinale de tous les filets liquides est constante et égale à la vitesse moyenne $U = Q_c/\Omega$ en désignant par Q_c le débit dans le canal et par Ω la section mouillée au droit de la section transversale considérée.

— Le tirant d'eau H est constant dans une section transversale du canal (on ne néglige pas toutefois la variation de H dans le sens longitudinal).

— La répartition des pressions est hydrostatique sauf aux abords immédiats du déversoir.

— Le régime d'écoulement dans le canal peut être fluvial ou torrentiel (suivant la définition de ces termes que nous donnerons au chapitre XII) mais il n'y a pas de ressaut au droit du déversoir.

On en déduit

$$E = H + \frac{Q_c^2}{2g\Omega^2} = C^{te}$$

d'où

$$Q_c = \Omega\sqrt{2g(E-H)}$$

En dérivant cette expression dans le sens de l'écoulement, c'est-à-dire par rapport à l'abscisse s mesurée le long de l'axe longitudinal du canal, Ω et H étant les seules variables puisque E est constant, il vient :

$$\frac{dQ_c}{ds} = \frac{dQ_c}{dH} \times \frac{dH}{ds}$$

$$= \frac{dH}{ds}\left(\frac{d\Omega}{dH}\sqrt{2g(E-H)} - \frac{2g\Omega}{2\sqrt{2g(E-H)}}\right)$$

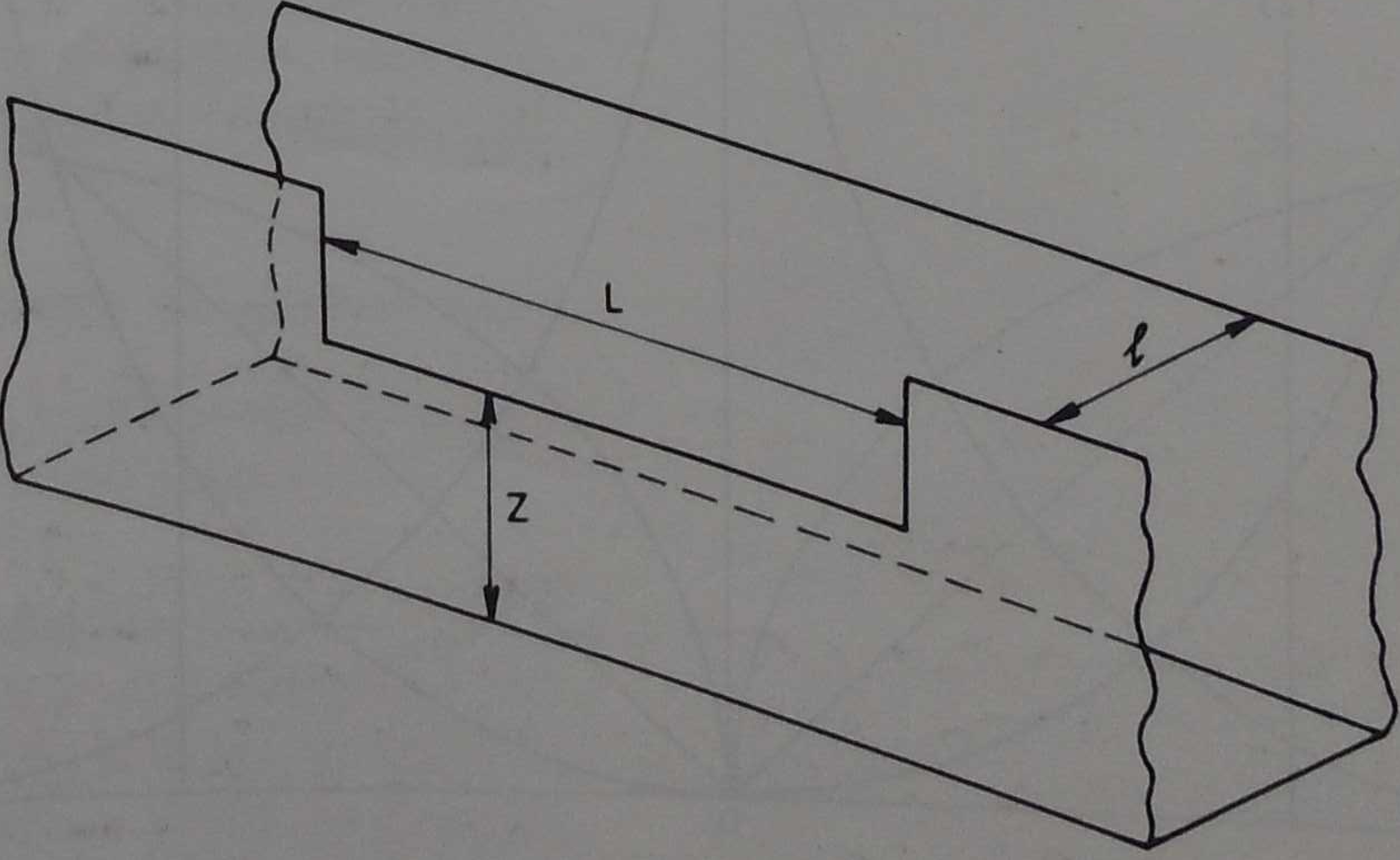


Fig. X.2.1.3.1 – Déversoir latéral

Mais

$$\frac{d\Omega}{dH} = l \text{ largeur superficielle du canal}$$

et

$$\sqrt{2g(E-H)} = \frac{Q_c}{\Omega}$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient après simplification :

$$\frac{dQ_c}{ds} = \frac{dH}{ds}\,\frac{lQ_c^2 - g\Omega^3}{\Omega Q_c}$$

Comme Q_c diminue lorsque s croît par suite de l'existence du débit déversé, dQ_c/ds est obligatoirement négatif.

On en déduit que

a) si $lQ_c^2 - g\Omega^3 > 0$ ou $Q_c^2 l/g\Omega^3 > 1$, c'est-à-dire si le régime dans le canal est torrentiel (cf. chapitre XII), on a $dH/ds < 0$, *la ligne d'eau s'abaisse le long du seuil* (fig. X.2.1.3.2).

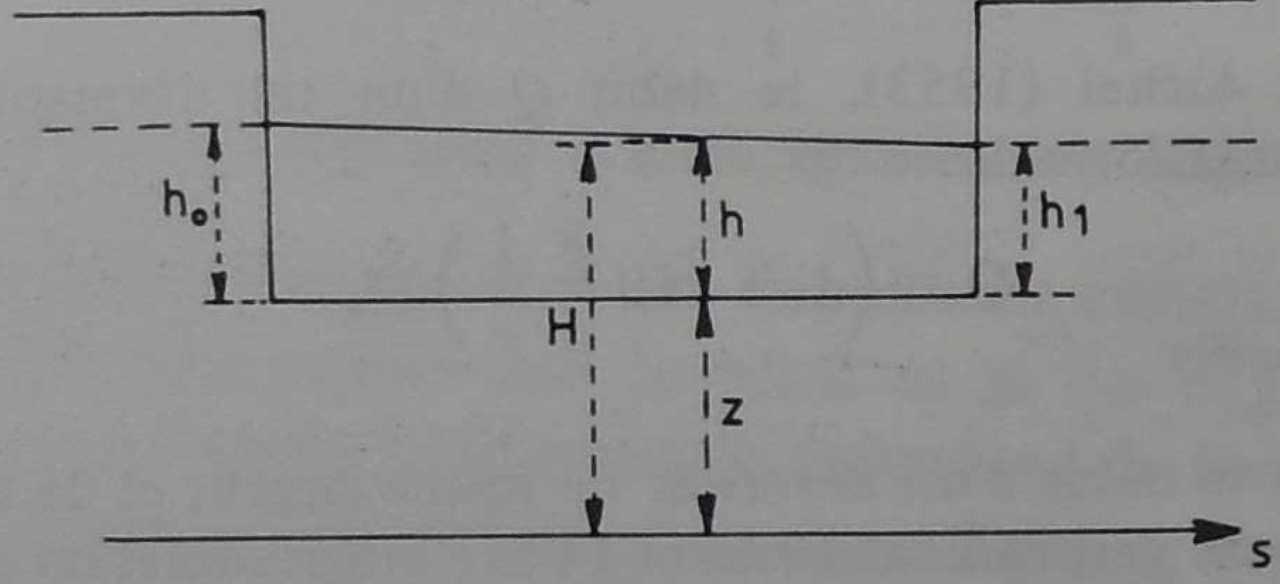


Fig. X.2.1.3.2 – Déversoir latéral (régime torrentiel)

b) si $lQ_c^2 - g\Omega^3 < 0$ ou $Q_c^2 l/g\Omega^3 < 1$, c'est-à-dire si le régime dans le canal est *fluvial* (cf. chapitre XII), on a $dH/ds > 0$, *la ligne d'eau s'élève le long du seuil* (fig. X.2.1.3.3).

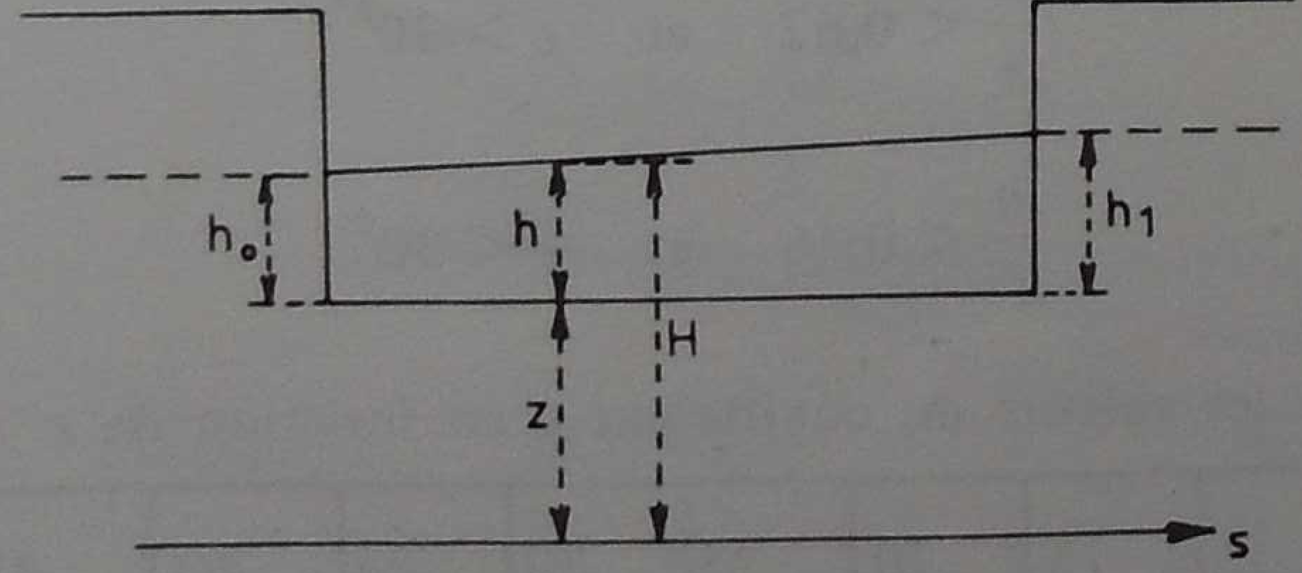


Fig. X.2.1.3.3 – Déversoir latéral (régime fluvial)

Comme le débit déversé par unité de largeur du seuil varie dans le même sens que la charge h c'est-à-dire que H, on en déduit qu'en régime torrentiel $dH/ds < 0$, donc le débit déversé par unité de largeur du seuil décroît le long du seuil dans le sens de l'écoulement ; c'est l'inverse en régime fluvial. La variation du débit total déversé Q en fonction de l'abscisse mesurée parallèlement au seuil est représentée, dans les deux cas considérés, par les courbes de la fig. X.2.1.3.4.

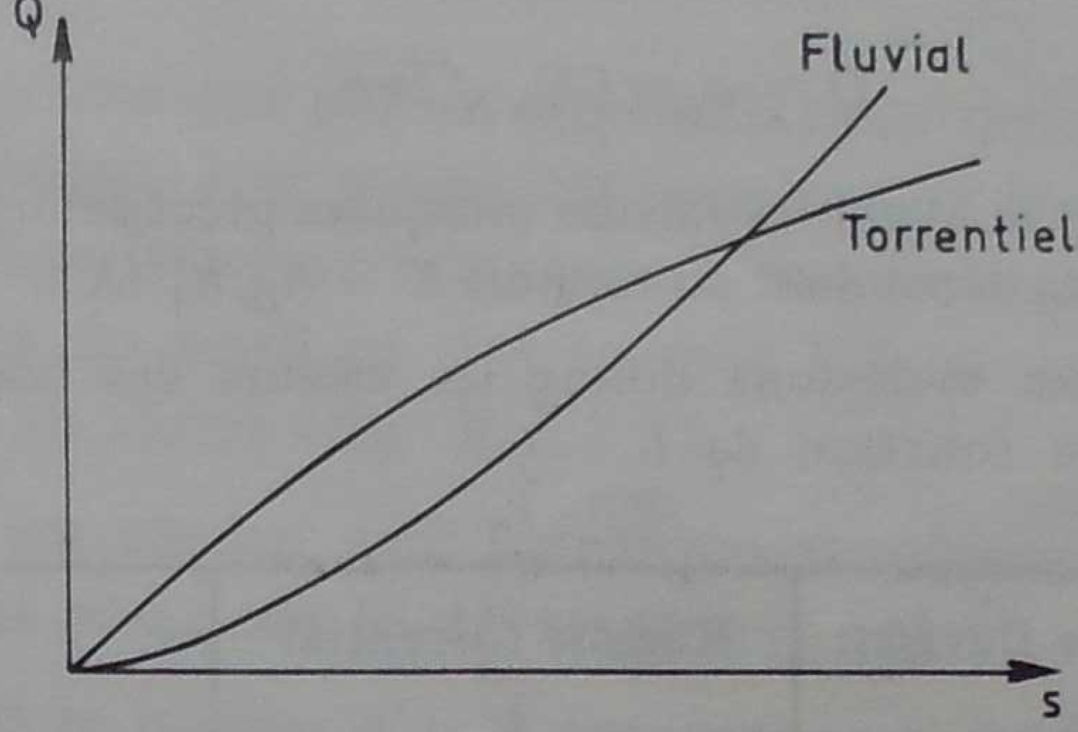


Fig. X.2.1.3.4 – Déversoir latéral. Variation du débit déversé le long du seuil

Débit du déversoir latéral.

La *formule générale* du débit du déversoir latéral est celle des déversoirs ordinaires, soit

$$Q = mLh\sqrt{2gh}$$

Selon les auteurs, la charge h est celle mesurée à l'extrémité amont ou à l'extrémité aval ou au milieu de l'échancrure et le coefficient de débit m est fonction de z, des vitesses d'approche, de l'obliquité du déversoir, du rapport du débit déversé Q au débit du canal à l'amont du déversoir, etc . . .

Nous citerons les principales formules proposées par les nombreux auteurs qui ont étudié ce type de déversoir.

Formule de Dominguez (1945) :

Si le régime d'écoulement dans le canal est fluvial (fig. X.2.1.3.3) nous montrerons plus loin (chapitre XII) que l'écoulement est sous la dépendance des conditions à l'aval, ces conditions fixent donc la charge h_1 à l'aval de l'échancrure et on pourra adopter pour le débit une formule du type :

$$Q = \varphi_1 mLh_1\sqrt{2gh_1}$$

Le coefficient m dépend des caractéristiques du déversoir (charge et forme de la crête) ; il peut être pris égal aux valeurs moyennes suivantes

Charge moyenne en mètre	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,70
Crête mince, nappe libre	0,370	0,360	0,355	0,350	0,350	0,350
Crête épaisse et arrondie	0,315	0,320	0,320	0,325	0,325	0,330
Crête épaisse à arêtes vives	0,270	0,270	0,273	0,275	0,276	0,280

Le coefficient φ_1 est fonction du rapport $K = h_0/h_1$ ($K < 1$) (les valeurs de φ_1 sont données plus loin).

Si le régime dans le canal est torrentiel (fig. X.2.1.3.2) l'écoulement est sous la dépendance des conditions à l'amont qui fixeront donc la charge h_0 à l'amont de l'échancrure et on pourra adopter pour le débit une formule du type :

$$Q = \varphi_0 m L h_0 \sqrt{2gh_0}$$

le coefficient m ayant les valeurs indiquées précédemment et le coefficient φ_0 dépendant du rapport $K = h_0/h_1$ ($K > 1$).

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des coefficients φ_1 et φ_0 en fonction de K.

Régime fluvial $K\left(=\frac{h_0}{h_1}\right) < 1$	Régime torrentiel $K\left(=\frac{h_0}{h_1}\right) > 1$	φ_1 ou φ_0
0	∞	0,400
0,05	20	0,417
0,1	10	0,443
0,2	5	0,491
0,3	3,33	0,543
0,4	2,50	0,598
0,5	2	0,659
0,6	1,67	0,722
0,7	1,43	0,784
0,8	1,25	0,856
0,9	1,11	0,924
1	1	1

Formule d'Engels (Laboratoire d'Hydraulique de Dresde ; 1917-1920). Pour un régime *fluvial* dans le canal :

$$Q = 0{,}414\left(\frac{h_1}{l}\right)^{0,166} L h_1 \sqrt{2gh_1}$$

avec h_1 = charge à l'aval de l'échancrure (fig. X.2.1.3.3) le parement aval du barrage était incliné à 45°. Selon De Marchi, la formule d'Engels serait valable pour

$$z > 4h_1$$

et

$$2z < L < 40z$$

Formule de G.S. Coleman et Dempter Smith (Londres ; 1910-1923). Pour un régime *torrentiel* dans le canal (fig. X.2.1.3.2) :

$$Q = 2{,}583\, l L^{0,72} h_0^{1,645}$$

avec

$$L = 86{,}08\, l^{1,40} h_0^{0,513}$$

soit, en éliminant l :

$$Q = 0{,}1073\, L^{1,434} h_0^{1,2786}$$

Formule de E. Balmaceda et F. Gonzalès (Chili ; 1930-1931). Pour un régime *fluvial* dans le canal (fig. X.2.1.3.3) :

Déversoir à crête mince :

$$Q = 1{,}53\, L h_1 + 0{,}00304\left(\frac{L}{h_1}\right)^{1/2}$$

Déversoir à crête moyenne et épaisse :

$$Q = 1{,}43\, L h_1 + 0{,}00171\left(\frac{L}{h_1}\right)^{1/2}$$

X.2.1.4. *Déversoir oblique*

C'est un déversoir vertical dont la crête est disposée obliquement par rapport à l'axe longitudinal du canal dans lequel il est placé (fig. X.2.1.4).

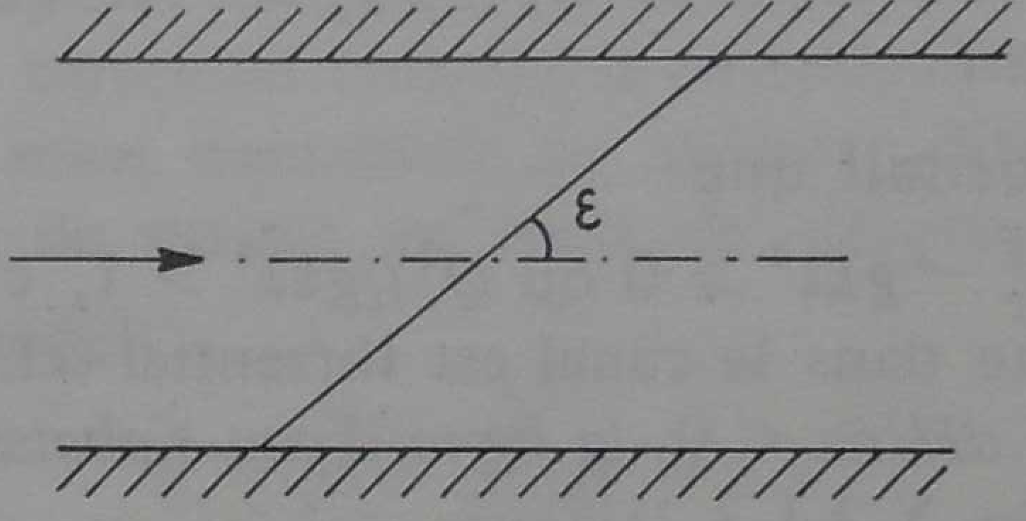


Fig. X.2.1.4 – Déversoir oblique (vue en plan)

Selon Aichel (1953), le débit Q d'un tel déversoir est donné par la formule

$$Q = \left(1 - 250\,\frac{h}{z}\,\frac{1}{e}\right) Q_n$$

dans laquelle

Q_n est le débit d'un déversoir de même largeur et de même type disposé perpendiculairement à l'axe longitudinal du canal,

h est la charge,

z est la hauteur de pelle,

e est un coefficient adimensionnel fonction de l'angle aigu ϵ de la crête du déversoir avec l'axe longitudinal du canal (fig. X.2.1.4).

Cette formule est valable pour

$$\frac{h}{z} < 0{,}62 \quad \text{et} \quad \epsilon > 30°$$

ou

$$\frac{h}{z} < 0{,}46 \quad \text{et} \quad \epsilon < 30°$$

Voici les valeurs du coefficient e en fonction de ϵ :

ϵ en degrés	15	20	25	30	35	40	45
e	362	475	595	700	840	1025	1 250
ϵ en degrés	50	55	60	65	70	75	90 (déversoir normal)
e	1 510	1 795	2 275	2 980	4 125	6 570	∞

X.2.2. Déversoir à crête épaisse ou à large seuil (fig. X.2.2.1)

X.2.2.1. *Description de l'écoulement*

Après avoir subi un abaissement, la nappe déversante prend sur le seuil une forme régulière ; dans cette partie régulière les filets liquides sont parallèles et horizontaux ; la présence du seuil qui introduit une convergence des filets liquides provoque une égalisation de leurs vitesses suivant la propriété générale des dispositifs convergents (cf. § VII.6.3.5). Désignons par U la vitesse supposée commune des filets liquides sur le seuil.

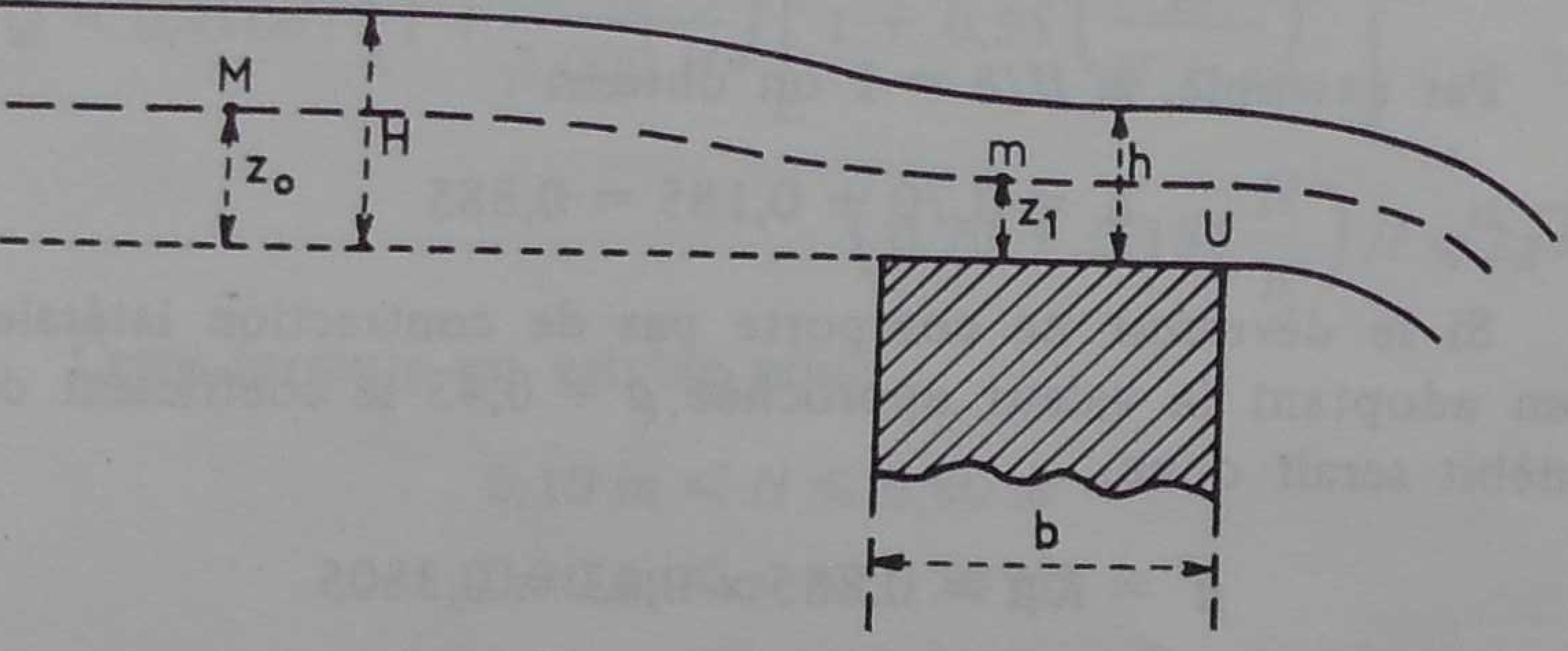


Fig. X.2.2.1 – Déversoir à crête épaisse ou à large seuil

H étant la charge, si h est l'épaisseur constante de la nappe déversante sur le seuil et si on néglige la vitesse du liquide à l'amont, le théorème de Bernoulli appliqué en deux points d'un filet liquide, l'un M à l'amont de l'abaissement, l'autre m au-dessus du seuil, donnera, en négligeant la perte de charge très faible entre M et m :

$$U = \sqrt{2g(H-h)}$$

et pour une largeur L le débit sera :

$$Q = L\,h\sqrt{2g(H-h)}$$

Il reste à déterminer, en fonction de H, l'épaisseur h de la nappe au-dessus du seuil pour n'avoir pas à la mesurer.

X.2.2.2. *Principe du débit maximal*

Supposons que par un dispositif approprié le niveau amont puisse être maintenu constant et le niveau du bief aval puisse être maintenu à une hauteur variable au-dessus du seuil ce qui revient à faire varier h ; le débit Q va varier (fig. X.2.2.2).

Pour un niveau aval identique au niveau amont le débit qui passe sur le déversoir est nul.

Quand le niveau d'aval commence à s'abaisser il se produit une chute, le débit cesse d'être nul. Au fur et à mesure que le niveau d'aval s'abaisse et que la chute augmente, la vitesse croît mais, en même temps, la section de la lame déversante au-dessus du seuil diminue. Si donc le niveau sur le déversoir pouvait s'abaisser jusqu'au seuil, le débit s'annulerait ce qui est impossible à concevoir. On ne peut admettre qu'au fur et à mesure qu'on augmente la possibilité du liquide de s'écouler, le débit s'annule.

Il faut donc qu'à un moment donné le débit cesse de croître pour rester constant ; or ce sera le moment où il a atteint son maximum car si on peut admettre qu'il croisse au fur et à mesure que le niveau d'aval s'abaisse, on ne peut admettre qu'il diminue à partir d'un certain moment.

Donc, quand le débit aura atteint sa valeur maximale, le niveau restera constant au-dessus du seuil, le niveau d'aval continuant à descendre il y aura rupture hydraulique entre l'amont et l'aval.

Autrement dit, au moment où le débit atteint sa valeur maximale le niveau d'aval devient indépendant du niveau d'amont.

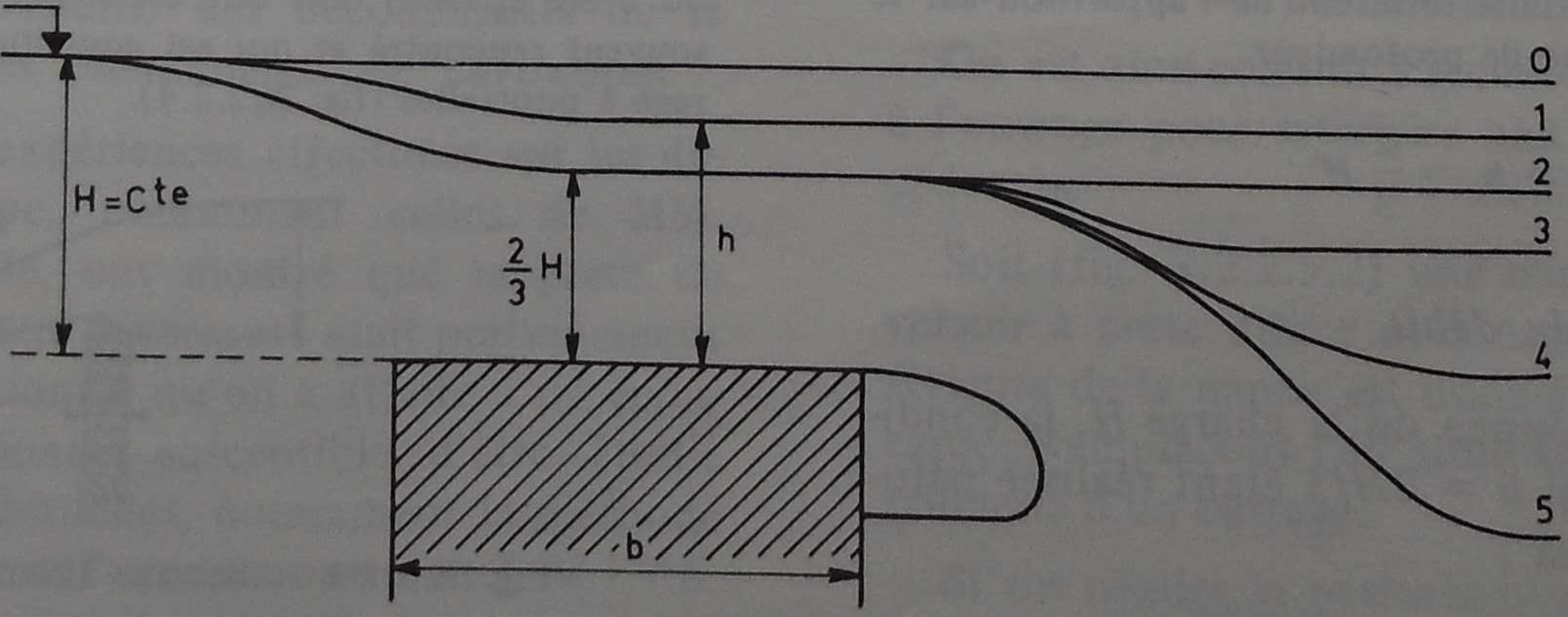


Fig. X.2.2.2 – Principe du débit maximal sur un déversoir à large seuil

Ecrivons donc que, pour L et H constants, la fonction $Q(h)$ est maximale, soit $\partial Q/\partial h = 0$ ce qui conduit à

$$h = \frac{2}{3} H$$

Si donc le niveau d'aval s'abaisse graduellement, quand sa hauteur au-dessus du seuil atteindra la valeur $2H/3$ le débit sera maximal.

Le niveau s'abaissant encore, contrairement à ce qu'indique l'équation mathématique le débit ne peut pas diminuer, la lame déversante conservera l'épaisseur $h = 2H/3$ et il se créera à l'aval une différence de niveau entre elle et la surface libre du liquide. Le niveau d'aval deviendra indépendant du niveau d'amont, il y aura en quelque sorte une rupture hydraulique entre les deux biefs *et le débit restera constant.*

Il y a lieu, d'ailleurs, de noter au passage que cette tendance de la nature à réaliser la dénivellation correspondant au maximum de débit fait en quelque sorte l'objet d'un postulat d'hydraulique appelé *principe du débit maximal.*

Déjà, *Léonard de Vinci* écrivait en 1500 : "Les phénomènes de la nature se produisent toujours par la voie la plus courte". Fermat, en 1661, reprit cette loi qui s'apparente au principe de Mécanique du *maximum de travail* de Gauss.

En étudiant l'écoulement graduellement varié dans un canal horizontal (chapitre XII) nous montrerons que la surface libre s'abaisse progressivement de l'amont vers l'aval où se produit une "section critique" dans laquelle le tirant d'eau est minimal.

L'écoulement considéré ici a permis de mettre en évidence une manifestation du principe général du débit maximal que Bélanger signala pour la première fois en 1850 précisément à propos de l'écoulement sur un déversoir à large seuil. Au chapitre XII (Ecoulements à surface libre) nous montrerons qu'un déversoir de cette nature peut être considéré comme un canal de faible longueur et de pente nulle et que l'interdépendance des écoulements amont et aval et la réalisation simultanée du débit maximal résultent de l'apparition sur le seuil de la section critique de profondeur

$$h = h_c = \frac{2}{3} H$$

X.2.2.3. *Expression du débit*

Pour une valeur donnée de la charge H, la condition de débit maximal $h = 2H/3$ étant réalisée naturellement, le débit sera :

$$Q = \frac{2}{3} LH \sqrt{\frac{2}{3} gH}$$

$$\boxed{Q = 0{,}385\ LH\sqrt{2gH}}$$

Les expériences de Bazin ont donné pour le coefficient μ applicable à un déversoir *à crête épaisse* des valeurs comprises entre 0,37 et 0,39, ce qui confirme le raisonnement ci-dessus.

En fait, pour serrer de plus près la réalité, il faut tenir compte de l'épaisseur b du seuil et de la vitesse de l'eau à l'amont, de sorte que Bazin propose d'adopter la valeur de μ correspondant au déversoir en mince paroi (de même inclinaison) et de lui appliquer le coefficient suivant :

$$K = 0{,}70 + 0{,}185 \frac{H}{b}$$

Par exemple, si $H/b = 1$ on obtient :

$$K = 0{,}70 + 0{,}185 = 0{,}885$$

Si le déversoir ne comporte pas de contraction latérale, en adoptant la valeur approchée $\mu = 0{,}43$ le coefficient de débit serait donc

$$\mu' = K\mu = 0{,}885 \times 0{,}43 = 0{,}3805$$

effectivement très proche de la valeur théorique 0,385.

En outre, si l'arête d'amont du seuil est *arrondie* suivant un quart de cercle de 0,05 m à 0,10 m de rayon (fig. X.2.2.3), il faut multiplier encore ce coefficient K par 1,12 ou 1,14.

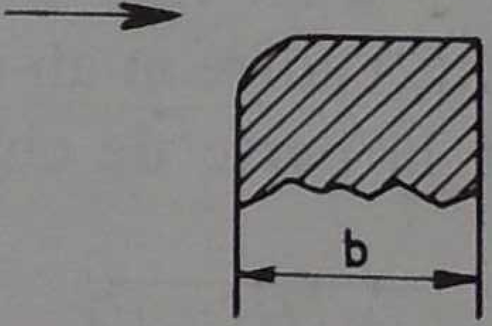


Fig. X.2.2.3 – Déversoir à crête épaisse et arrondie

X.2.2.4. *Barrage-déversoir à poutrelles*

On peut se demander dans quelle catégorie (mince paroi ou crête épaisse) doit être classé un type de déversoir assez souvent rencontré et qui est constitué par la crête d'un barrage à poutrelles (fig. X.2.2.4).

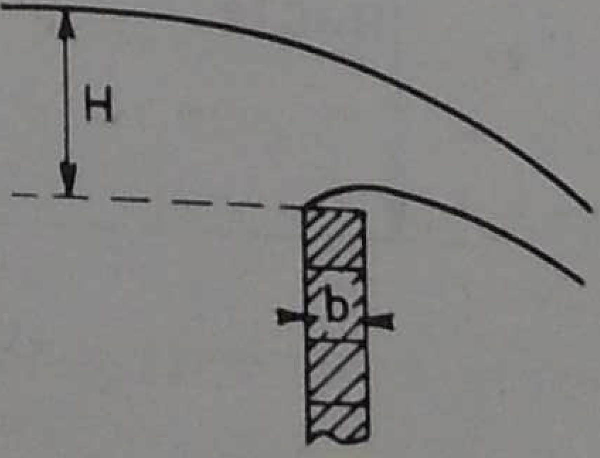


Fig. X.2.2.4 – Barrage-déversoir à poutrelles

Soit b l'épaisseur des poutrelles et H la charge.

Nous avons indiqué (§ X.2.1) que le déversoir était en mince paroi si son épaisseur était inférieure à la moitié et quelquefois aux deux tiers seulement de la charge.

Si donc $H > 2b$ le déversoir est nettement en mince paroi, la nappe franchit le seuil sans le toucher et on appliquera la formule du déversoir en mince paroi.

Si $H < 1{,}5b$ le déversoir est nettement à crête épaisse et on appliquera la formule correspondante.

Enfin, si $1{,}5b < H < 2b$ les deux modes d'écoulement peuvent se produire et on prendra la valeur de μ correspondant au mode d'écoulement constaté.

D'une manière générale, on peut calculer le débit d'un déversoir à poutrelles par la *formule de Bazin et de la Société belge des mécaniciens* qui s'écrit :

$$Q = 0{,}41067\left(1 + \frac{1{,}8}{1.000\,H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+z}\right)^2\right]\left(0{,}70 + 0{,}185\frac{H}{b}\right)H\sqrt{2gH}$$

Cette formule est valable pour

$$0{,}10 \text{ m} \leqslant H \leqslant 0{,}80 \text{ m}$$
$$0{,}30 \text{ m} \leqslant z \leqslant 1{,}50 \text{ m}$$
$$0{,}03 \text{ m} \leqslant b \leqslant 0{,}23 \text{ m}$$
$$H \leqslant z$$

X.2.2.5. ***Déversoir à seuil épais dont le parement aval guide la nappe (seuil déversant)***

Cet ouvrage est utilisé pour l'évacuation de gros débits (évacuateurs de crues) et son parement aval est profilé pour guider la nappe déversante et la conduire dans le bief aval de manière à diminuer ses effets destructeurs (fig. X.2.2.5.1).

Répartition des pressions sur le parement aval.

Suivant la forme du profil du parement et la valeur de la charge à l'amont, certaines zones du radier peuvent être soumises à des dépressions qui risquent de provoquer des vibrations, des décollements de la couche-limite et des phénomènes de cavitation.

Les nombreuses expériences effectuées sur les déversoirs de ce type, notamment celles de MM. Camichel et Escande, ont montré que la perte de charge le long de la lame déversante était pratiquement négligeable ce qui montre qu'on a affaire à un écoulement plan irrotationnel susceptible d'être étudié par les méthodes habituelles, notamment la méthode de Prasil. Comme nous l'avons montré au § V.1.7.5. ces méthodes permettent de tracer le réseau des lignes de courant et des lignes équipotentielles et d'en déduire la répartition des pressions par application du théorème de Bernoulli.

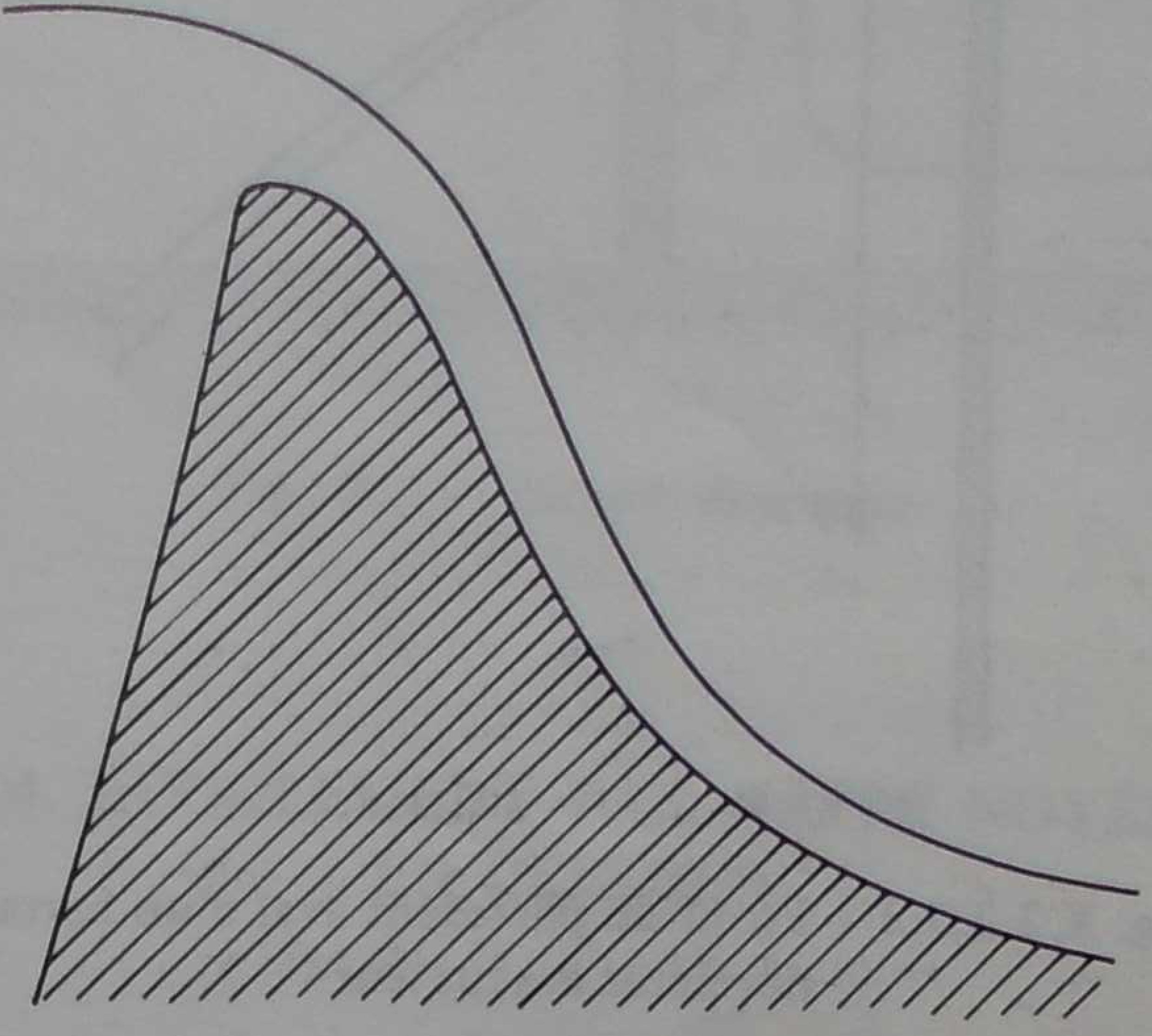


Fig. X.2.2.5.1 – Barrage-déversoir évacuateur

Qualités techniques d'un tel déversoir. Il faut que son coefficient de débit

$$\mu = \frac{Q}{LH\sqrt{2gH}}$$

soit aussi élevé que possible ce qui permet de réduire la largeur de l'ouvrage pour évacuer un débit donné sous une charge fixée ; il faut aussi que le profil du parement aval soit tel qu'il ne donne pas naissance à des dépressions risquant d'entraîner les conséquences néfastes indiquées plus haut.

Ces deux qualités sont en quelque sorte contradictoires ; en effet, l'écoulement étant irrotationnel et conservatif, l'équation de Bernoulli montre que si en une zone déterminée existe une dépression, elle sera compensée par une augmentation de vitesse donc une amélioration du coefficient de débit.

Recherche du profil-type d'un barrage-déversoir.

On est ainsi conduit à rechercher la forme à donner à l'ouvrage pour satisfaire aux deux conditions précédentes.

Soit (fig. X.2.2.5.2) une nappe déversante par déversoir à crête mince et à nappe libre ; la partie inférieure de la nappe est donc à la pression atmosphérique. Remplaçons l'air situé sous la nappe par la maçonnerie d'un barrage.

Si on néglige la perturbation due à la substitution du frottement de l'eau contre les parois au frottement de l'eau sur l'air, le déversoir ainsi réalisé est

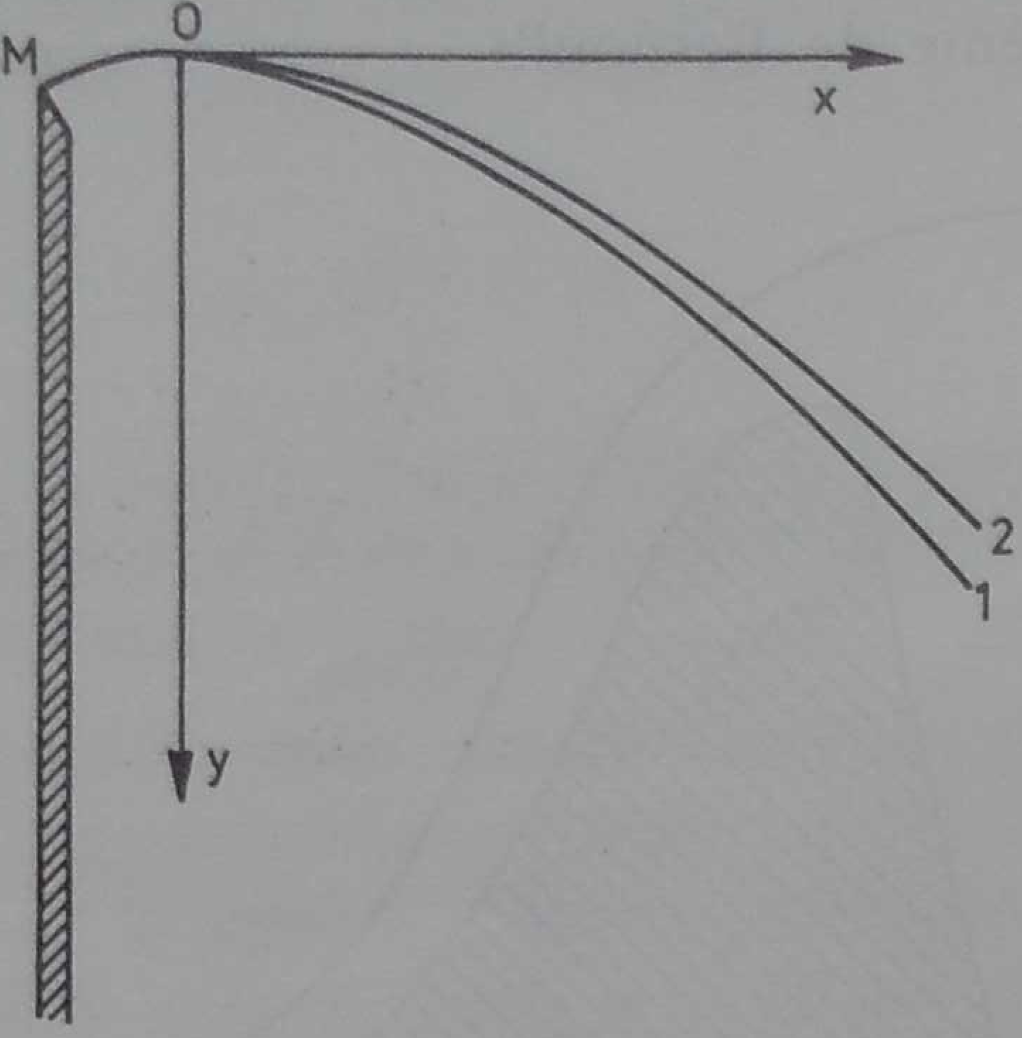


Fig. X.2.2.5.2 – Profil du parement aval d'un barrage-déversoir évacuateur

tel qu'en chaque point de son parement aval la pression soit égale à la pression atmosphérique. Tout profil situé au-dessus entraînera des surpressions donc une diminution du coefficient de débit et tout profil situé au-dessous entraînera des dépressions donc des risques de décollements.

Le profil réalisé par la nappe libre est donc le profil-type.

Scimemi a donné pour ce profil l'équation ci-après déjà signalée au § X.2.1.1.1.1 :

$$\frac{y}{H} = 0{,}50 \left(\frac{x}{H}\right)^{1,85}$$

(profil 1 de la figure X.2.2.5.2).

L'Ingénieur américain *Creager* a préconisé un profil situé légèrement au-dessus du profil-type de la nappe libre ; l'équation du profil Creager est :

$$\frac{y}{H} = 0{,}47 \left(\frac{x}{H}\right)^{1,8}$$

(profil 2 de la figure X.2.2.5.2).

Le profil Creager correspond à un coefficient de sécurité de 10 % par rapport à la charge.

Son coefficient de débit μ est de 0,49 à 0,495 pour la charge H correspondant à l'équation du profil.

Ce coefficient varie également suivant le tracé des parois latérales du coursier en raison de la contraction à l'entrée et des frottements sur les bajoyers. Pratiquement pour des piles amont bien profilées on peut adopter $\mu = 0{,}492$.

Pour une charge $H' \neq H$ le coefficient de débit devient

$$\mu' = \mu \left(\frac{H'}{H}\right)^{0,17}$$

Le profil du coursier ayant été déterminé pour une charge H, pour en déduire le profil correspondant à une charge différente H' on applique à l'écoulement considéré la loi de similitude de Reech-Froude, les forces de viscosité étant négligeables par rapport aux forces d'inertie et de pesanteur (cf. chapitre XIV). A partir du profil AOB calculé pour une charge H il suffit donc de multiplier les coordonnées x et y de chaque point de ce profil par le rapport H'/H pour obtenir le profil $A'O\,B'$ correspondant à une charge H' (fig. X.2.2.5.3). Il en résulte que si un profil cal-

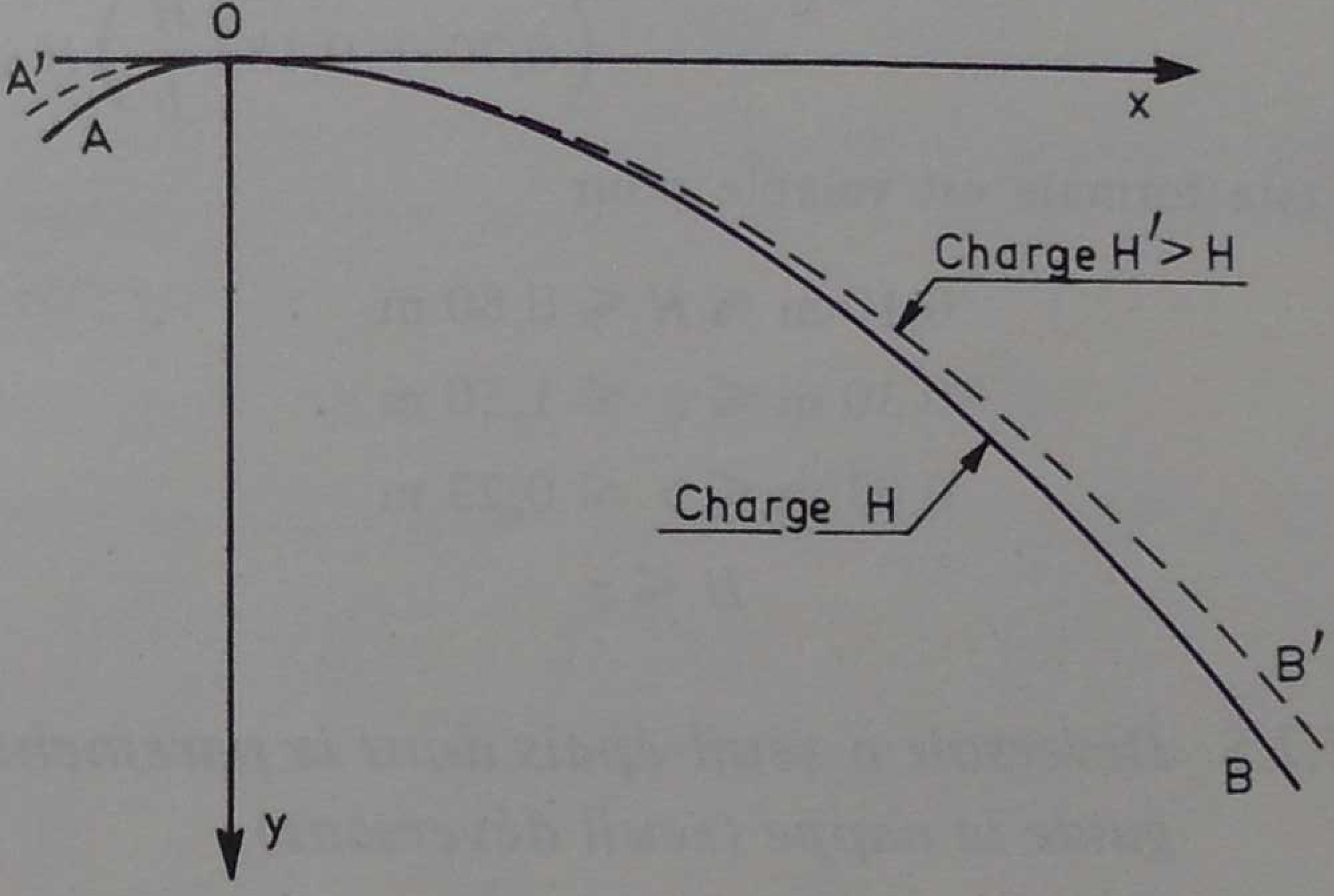


Fig. X.2.2.5.3

culé pour une charge H est amené à fonctionner sous une charge $H' > H$, il se comporte comme un profil "déprimé" ce qui améliore le coefficient de débit μ mais risque d'entraîner la production de dépressions, décollements, cavitations, etc . . .

X.2.2.6. *Profils déprimés avec aspiration de la couche-limite*

M. Escande a montré que de tels profils déprimés pouvaient être réalisés et permettaient une augmentation appréciable du coefficient de débit, à condition *d'aspirer la couche-limite* sur le seuil du barrage, ce qui peut être obtenu (fig. X.2.2.6) au moyen d'une fente F disposée au sommet du parement aval du déversoir ; un tube T permet l'évacuation de l'eau aspirée par la fente ; il suffit, dans ce but, de faire déboucher le tube T au-dessous du plan d'eau aval ; l'eau déversant sur le seuil pénètre dans la fente, remplit le collecteur C et le tube d'évacuation T de telle sorte que l'ensemble fonctionne comme un siphon et aspire le débit nécessaire à travers la fente F.

Un tel déversoir à profil très déprimé par rapport au profil Creager possède un coefficient de débit μ qui peut atteindre

0,6 (voire même 0,7 pour un parement aval vertical) ce qui représente une augmentation considérable du débit de l'ouvrage.

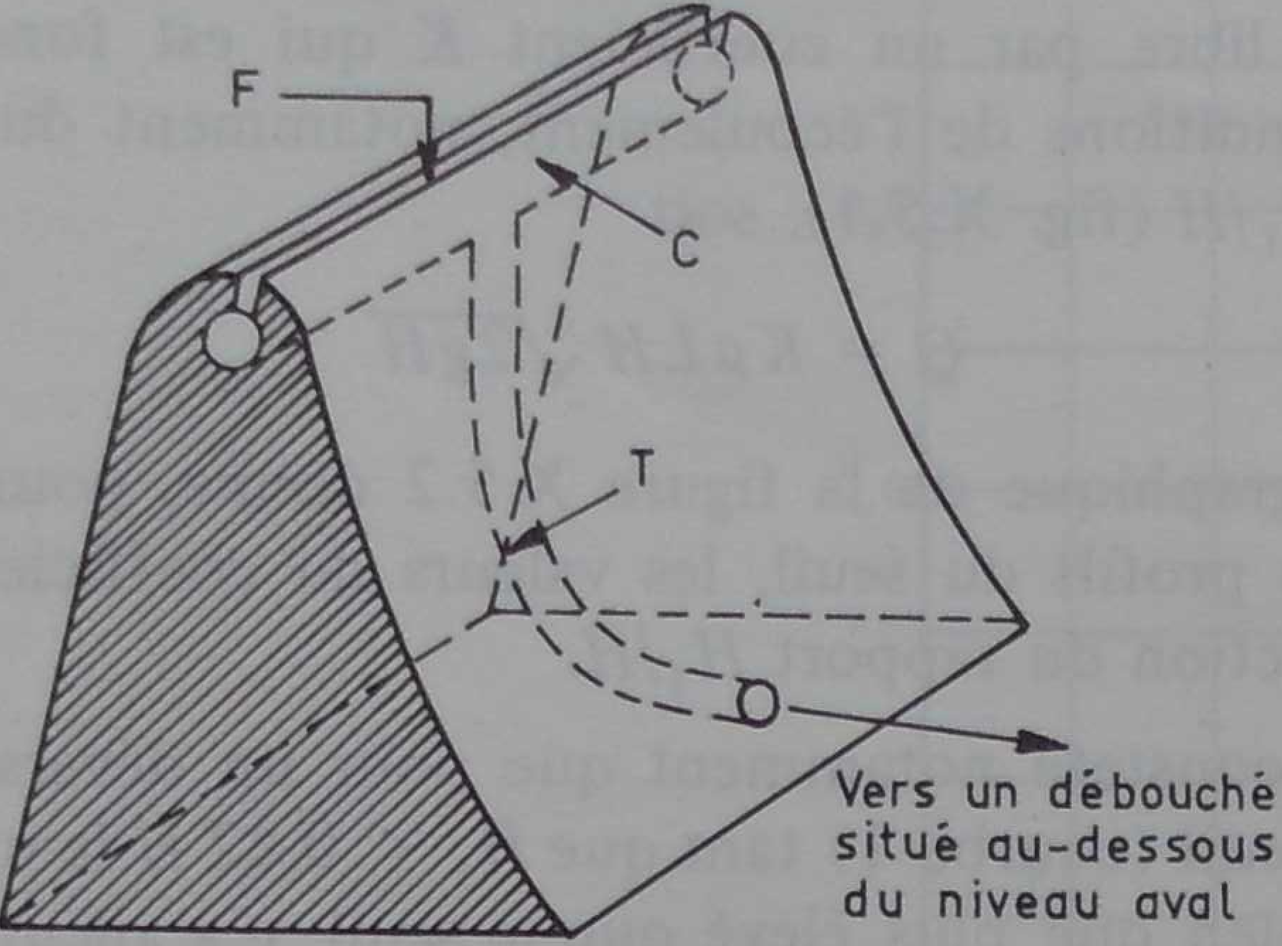


Fig. X.2.2.6 – Barrage-déversoir à fente aspiratrice

X.3. ÉCOULEMENT PAR NAPPE DÉPRIMÉE

L'existence d'une dépression sous la nappe (fig. X.3) entraîne un accroissement du coefficient de débit, mais une telle nappe n'est guère stable car des rentrées d'air accidentelles font varier la pression en *a* donc le débit, et il n'est par conséquent pas possible de donner avec précision la valeur de μ.

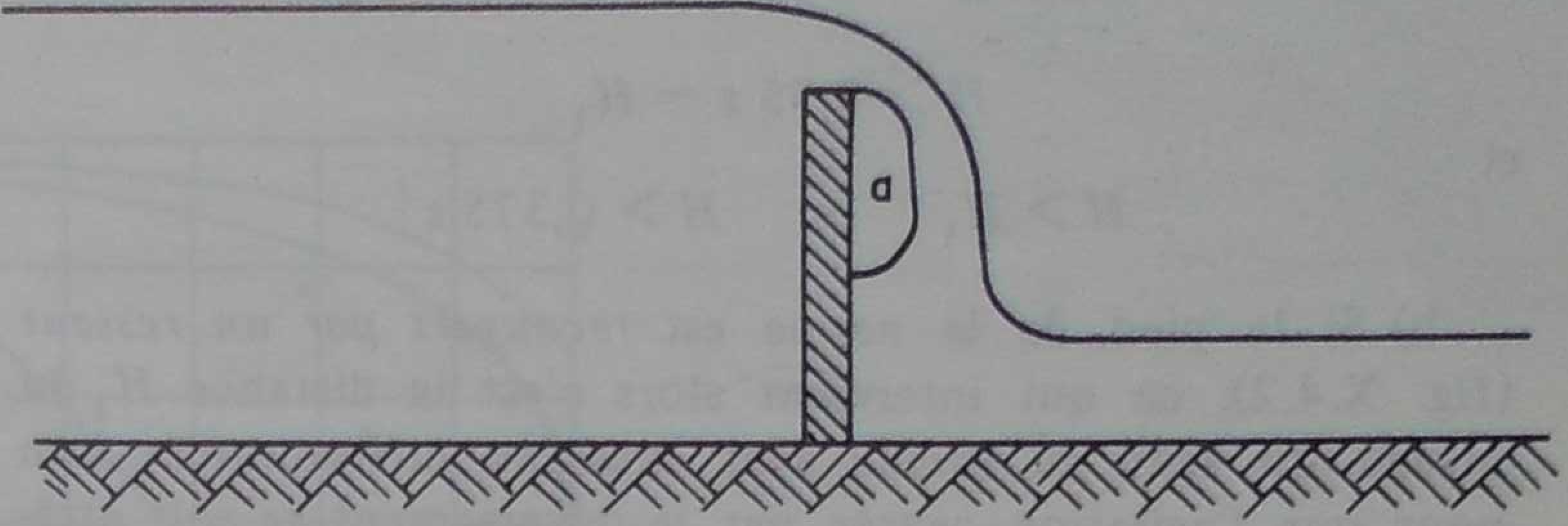


Fig. X.3 – Nappe déprimée

X.4. ÉCOULEMENT PAR NAPPE NOYÉE EN DESSOUS

Rappelons qu'une telle nappe ne peut se produire que si la charge est suffisante et si aucun dispositif d'aération ne permet le renouvellement de l'air sous la nappe.

Bazin, à la suite de ses expériences, a évalué somme suit les coefficients par lesquels il faut multiplier le coefficient de débit qui conviendrait pour un déversoir de même type avec nappe libre.

a) Si la nappe est *sans ressaut* ou à *ressaut éloigné* (fig. X.4.1) :

$$K = 0{,}878 + 0{,}128\,\frac{z}{H}$$

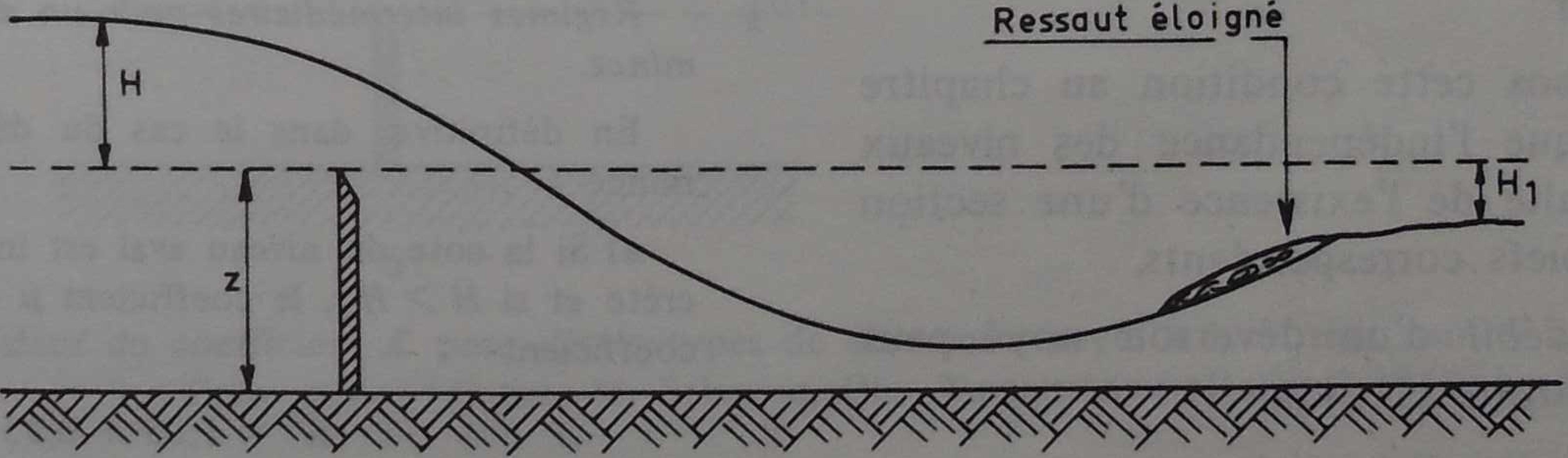


Fig. X.4.1 – Nappe noyée en dessous à ressaut éloigné

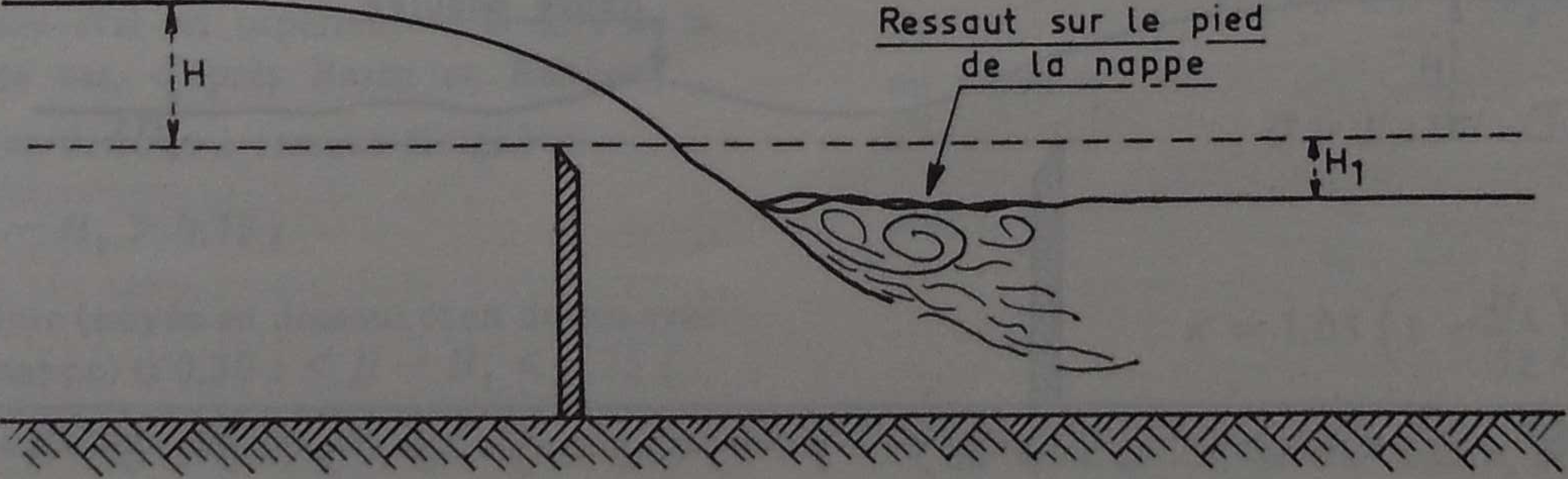


Fig. X.4.2 – Nappe noyée en dessous à ressaut recouvrant le pied de la nappe

avec comme conditions :

$$H > 0{,}75\,z - H_1$$

et

$$H > H_1 \quad \text{ou} \quad H > 0{,}375\,z$$

b) Si le pied de la nappe est *recouvert par un ressaut* (fig. X.4.2), ce qui intervient alors c'est la distance H_1 du niveau du seuil au niveau aval, mesurée suffisamment loin pour que l'agitation causée par le déversement se soit atténuée ; le coefficient K' par lequel il faut multiplier μ est alors :

$$K' = 1{,}05 + 0{,}15\,\frac{H_1}{H}$$

formule qui n'est valable que pour $H > H_1$.

X.5. DÉVERSOIR NOYÉ

Nous l'avons défini au §.X.1.2.2 comme un déversoir pour lequel la cote du niveau aval est supérieure à la cote de la crête. Il en résulte que la cote du niveau aval va intervenir dans l'expression du débit. En fait cette définition n'est pas très exacte car il existe des cas où le niveau d'aval, même lorsqu'il est plus élevé que la crête du déversoir, est néanmoins sans influence sur le débit. Il est donc préférable d'adopter la *définition* suivante : Un déversoir est noyé quand le niveau amont est influencé par le niveau aval ou (ce qui revient au même) quand le niveau aval réagit sur le débit du déversoir.

Nous généraliserons cette condition au chapitre XII en précisant que l'indépendance des niveaux amont et aval résulte de l'existence d'une section critique entre les biefs correspondants.

La *formule du débit* d'un déversoir noyé peut être mise sous la forme classique :

$$Q = \mu' L H \sqrt{2gH}$$

Le coefficient de débit μ' est le produit du coefficient μ applicable à un déversoir de même type et à nappe libre par un coefficient K qui est fonction des conditions de l'écoulement, notamment du rapport H_1/H (fig. X.5.1), soit

$$Q = K \mu L H \sqrt{2gH}$$

Le graphique de la figure X.5.2 donne, pour différents profils du seuil, les valeurs du coefficient K en fonction du rapport H_1/H.

On constate notamment que pour un déversoir à large seuil (courbe 1) tant que $H_1 < 0{,}82\,H$ le niveau aval, bien que plus élevé que le seuil, n'a aucune influence sur le niveau amont ni sur le débit qui est le même que pour un écoulement en nappe libre ; ceci résulte de l'existence d'une section critique au niveau du seuil.

Par contre, pour un déversoir à crête mince (courbe 3) le niveau aval réagit sur le niveau amont et sur le débit avant même d'atteindre la cote de la crête ; ceci résulte du fait que la nappe déversante n'est pas guidée par le parement aval du déversoir et est, de ce fait, beaucoup plus sensible à l'influence des conditions de pression du bief aval ; de plus, sous la nappe, le niveau est toujours plus élevé que dans le bief aval et il réagit plus tôt sur le débit et sur le niveau amont lorsque le niveau aval s'élève.

Régimes intermédiaires pour un déversoir vertical à crête mince.

En définitive, dans le cas du déversoir vertical à crête mince :

a) Si la cote du niveau aval est inférieure à la cote de la crête et si $H > H_1$, le coefficient μ doit être multiplié par le coefficient

$$K' = 1{,}05 + 0{,}15\,\frac{H_1}{H}$$

(formule donnée précédemment § X.4).

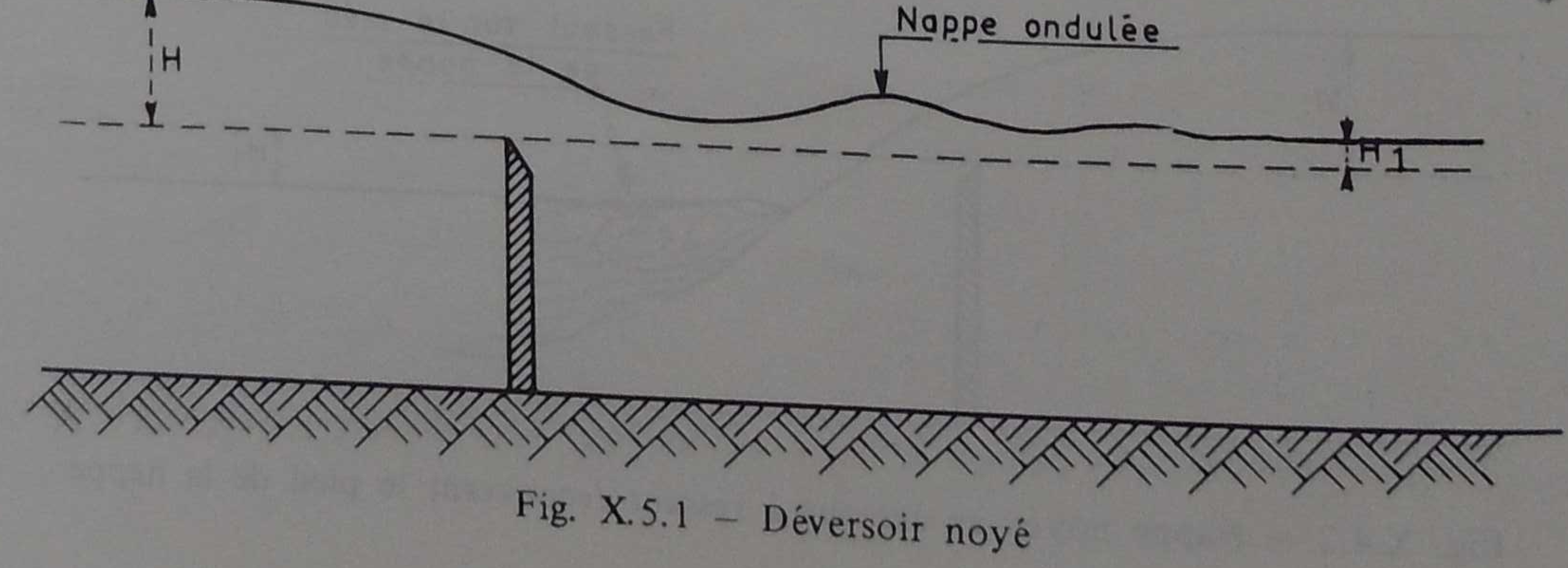


Fig. X.5.1 – Déversoir noyé

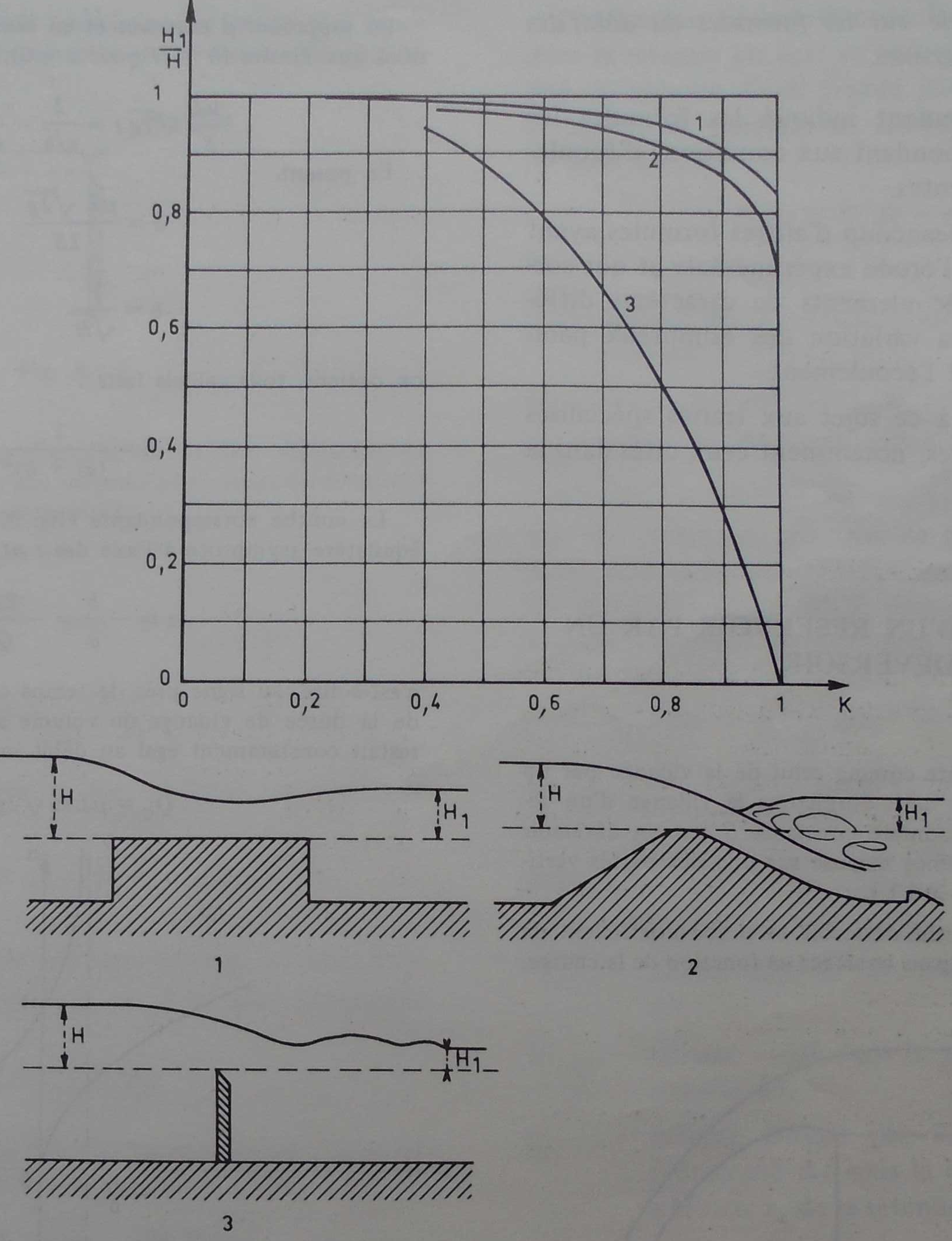


Fig. X.5.2 – Valeur du coefficient K pour divers types de déversoirs noyés : 1 : Large seuil – 2 : Barrage-toit – 3 : Crête mince (d'après M. Schmidt, Die Wasserwirtschaft, avril 1957)

La nappe est noyée en dessous et recouverte par un ressaut (fig. X.4.2) ; le débit est augmenté par rapport à la nappe libre.

b) Si la cote du niveau aval est supérieure à la cote de la crête, on a, suivant les cas, d'après Bazin et Rehbock :

— une nappe noyée en dessous à ressaut éloigné si

$$H - H_1 > 0{,}75\,z$$

— une nappe plongeante (noyée en dessous et en dessus avec ressaut sur le pied de la nappe) si $0{,}30\,z < H - H_1 \leqslant 0{,}75\,z$

— une nappe plongeante ou ondulée si

$$0{,}17\,z < H - H_1 \leqslant 0{,}30\,z$$

— une nappe ondulée si $H - H_1 \leqslant 0{,}17\,z$

D'après Bazin, pour le domaine

$$0{,}25\,z < H - H_1 < 0{,}75\,z$$

on aurait

$$Q = K \mu L H \sqrt{2gH}$$

avec

$$K = 1{,}05\left(1 + \frac{H_1}{5z}\right)\sqrt[3]{1 - \frac{H_1}{H}}$$

La courbe 3 de la figure X.5.2 traduit la formule $K(H_1/H)$ ci-dessus.

Remarque générale sur les formules du débit des divers types de déversoirs.

Nous avons seulement indiqué les formules les plus usuelles correspondant aux conditions d'écoulement les plus fréquentes.

En fait il existe beaucoup d'autres formules ayant toujours pour base l'étude expérimentale et qui correspondent à des écoulements de caractères différents résultant de la variation des nombreux paramètres dont dépend l'écoulement.

Nous renvoyons à ce sujet aux traités spécialisés et aux aides-mémoires, notamment ceux cités dans la bibliographie.

X.6. VIDANGE D'UN RÉSERVOIR PAR UN DÉVERSOIR

Le problème se traite comme celui de la vidange par un orifice. Pour simplifier nous étudierons la vidange d'un réservoir de section horizontale constante S par un déversoir rectangulaire à crête mince disposé sur une des parois verticales du réservoir (fig. X.6.1.).

Soient L la largeur du déversoir et μ son coefficient de débit que nous supposerons constant en fonction de la charge.

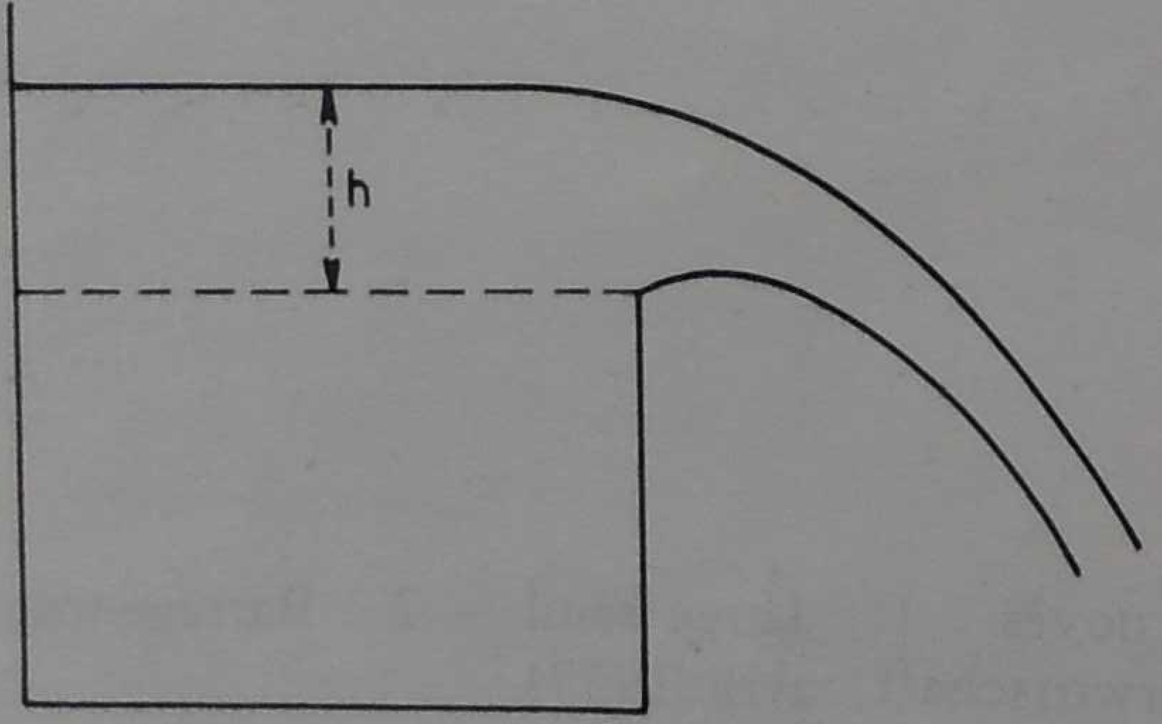


Fig. X.6.1 – Vidange d'un réservoir par un déversoir

a) *Courbe* $h(t)$

A l'instant t la charge est h et le débit est

$$Q = \mu L h \sqrt{2gh}$$

En associant l'équation de continuité

$$Q\,dt = -S\,dh$$

on obtient l'équation différentielle

$$\frac{\mu L}{S}\sqrt{2g}\,dt = -h^{-3/2}\,dh$$

En supposant μ constant et en tenant compte des conditions aux limites ($h = H$ pour $t = 0$), l'intégration conduit à

$$\frac{\mu L}{S}\sqrt{2g}\,t = \frac{2}{\sqrt{h}} - \frac{2}{\sqrt{H}}$$

En posant

$$a = \frac{\mu L\sqrt{2g}}{2S}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

on obtient, tous calculs faits :

$$h = \frac{1}{(at + b)^2}$$

La courbe correspondante (fig. X.6.2) est une hyperbole équilatère asymptote à l'axe des t et à la droite

$$t = -\frac{b}{a} = -\frac{2A}{Q_0}$$

c'est-à-dire, au signe près, le temps correspondant au double de la durée de vidange du volume utile $A = SH$ si le débit restait constamment égal au débit initial :

$$Q_0 = \mu L H\sqrt{2gH}$$

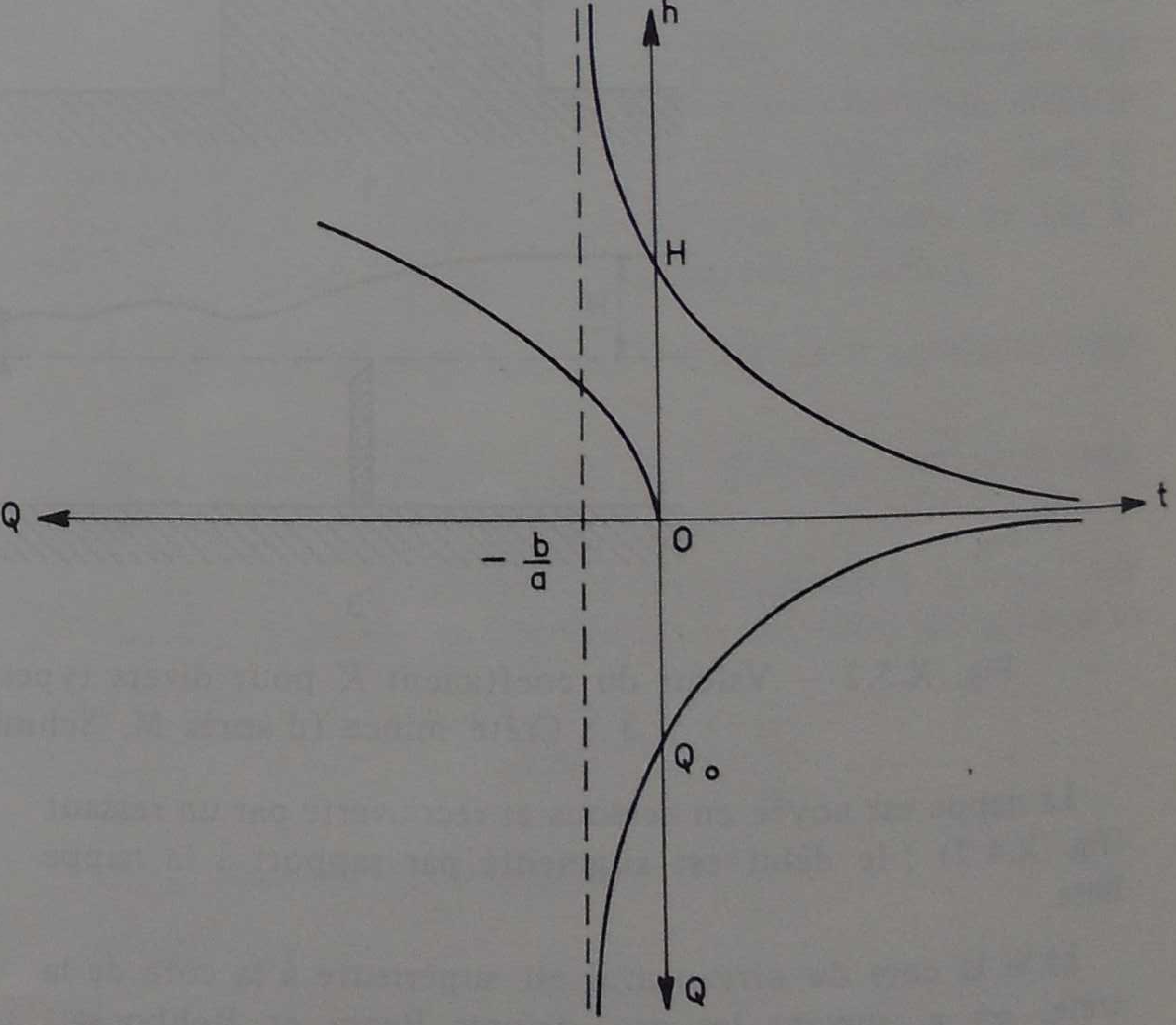


Fig. X.6.2 – Vidange d'un réservoir par un déversoir

La courbe $h(t)$ coupe l'axe des h à l'ordonnée correspondans à $t = 0$, soit $h = 1/b^2 = H$.

La durée de la vidange complète est donc théoriquement infinie. En fait cette durée est longue mais pratiquement il arrive un moment où l'écoulement s'arrête car la charge est

très petite et la capillarité intervient pour maintenir la nappe suspendue au-dessus de la crête du déversoir (fig. X.6.3).

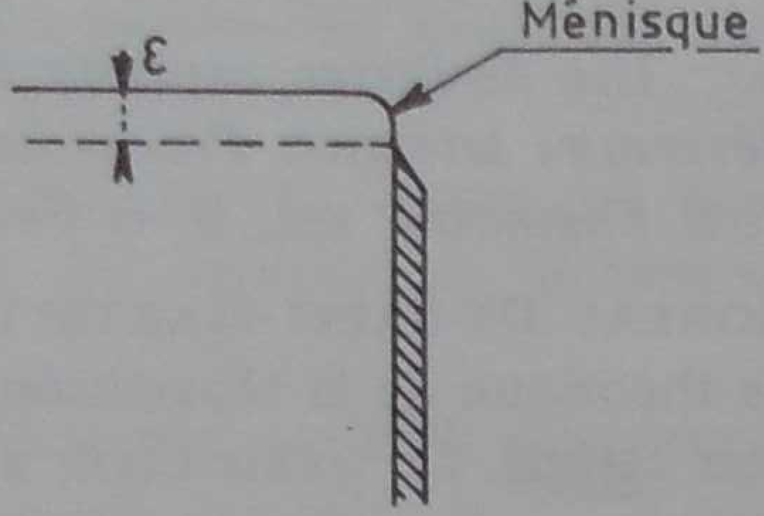


Fig. X.6.3

Quoiqu'il en soit, le déversoir est un bon régulateur de niveau car, au-dessous d'une certaine cote, le niveau à l'amont ne s'abaisse plus que très lentement.

b) *Courbe* $Q(t)$. On sait que

$$Q = -S\frac{dh}{dt} \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{(at+b)^2}$$

donc

$$Q = \frac{2aS}{(at+b)^3}$$

La courbe correspondante (fig. X.6.2) est une hyperbole asymptote à l'axe des t et à la droite

$$t = -\frac{b}{a} = -\frac{2SH}{Q_0} = -\frac{2A}{Q_0}$$

c'est-à-dire la même droite que l'asymptote de la courbe $h(t)$.

La courbe $Q(t)$ coupe l'axe des Q au point d'ordonnée

$$Q = \frac{2aS}{b^3} = Q_0$$

c) *Courbe* $Q(h)$ — En éliminant graphiquement t entre les courbes $h(t)$ et $Q(t)$, on retrouve la courbe $Q(h)$:

$$Q = \mu L h\sqrt{2gh} \qquad \text{(fig. X.6.2)}$$

On pourra comparer les résultats obtenus avec ceux relatifs à l'étude analogue concernant la vidange d'un réservoir par un orifice (§ VIII.4.2 et figure VIII.4.2).

X.7. UTILISATION DES DÉVERSOIRS COMME OUVRAGES RÉGULATEURS DES PLANS D'EAU

Supposons une retenue d'eau créée par un barrage muni d'un déversoir utilisé comme évacuateur de crue et comme régulateur du plan d'eau.

Pendant une période donnée, le volume d'eau stocké dans la retenue est égal au volume d'eau entré diminué du volume d'eau évacué par le déversoir. Si on considère un intervalle de temps infiniment petit dt, on peut écrire :

$$S_z dz = Q_t dt - q_z dt \qquad [X.7.1]$$

avec

S_z = surface de la retenue pour la cote z atteinte à l'instant t,

Q_t = débit entrant dans la retenue à l'instant t,

q_z = débit du déversoir pour la cote z.

L'équation [*X.7.1*] est résolue par *différences finies* en choisissant un "pas de temps" Δt suffisamment petit pour que, pendant cet intervalle de temps, les variations Q_t, q_z et S_z puissent être considérées comme linéaires ; on écrit alors :

$$S\Delta z = Q_{t+\frac{\Delta t}{2}}\Delta t - \frac{q_t + q_{t+\Delta t}}{2}\Delta t \qquad [X.7.2]$$

ou

$$\Delta V = V_{t+\frac{\Delta t}{2}} - \frac{v_t + v_{t+\Delta t}}{2} \qquad [X.7.3]$$

avec

ΔV = accroissement ou diminution du volume stocké dans la retenue pendant l'intervalle Δt.

$V_{t+\frac{\Delta t}{2}}$ = volume entré dans la retenue pendant l'intervalle Δt,

v_t = volume évacué par le déversoir pendant l'intervalle Δt sous la charge correspondant à la cote z_t de la retenue au temps t,

$v_{t+\Delta t}$ = volume évacué par le déversoir pendant l'intervalle Δt sous la charge correspondans à la cote $z_{t+\Delta t}$ de la retenue au temps $t + \Delta t$.

Le volume V de la retenue est fonction de la cote z, la fonction $V(z)$ est représentée par la courbe de remplissage de la retenue.

$V_{t+\frac{\Delta t}{2}}$ est connu lorsque, pour l'intervalle de temps Δt, on connaît l'hydrogramme de crue à l'entrée dans la retenue.

v est fonction de la cote z et est donnée par la courbe de fonctionnement $q(z)$ ou $q(h)$ du déversoir.

Résoudre les équations [*X.7.2. ou 3*] revient à résoudre le problème suivant :

Connaissant la cote de la retenue à l'instant t et l'hydrogramme à l'entrée de la retenue, déterminer la cote $z_{t+\Delta t}$ de la retenue à l'instant $t + \Delta t$.

Deux groupes de méthodes sont utilisées pour résoudre ce problème du laminage d'une crue par une retenue :

— Méthodes numériques par approximations successives,

— Méthode graphique utilisant l'épure de Blackmore.

Nous renvoyons aux ouvrages spécialisés d'hydrologie pour la description de ces méthodes.

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre X

BARBE (A), BOYER (P.), COULOMB (R.), MOREAU DE SAINT-MARTIN (J.) et NOUGARO (J.).— Loi hauteur-débit d'un déversoir en mince paroi fonction de la charge totale *H* et valable dans une large plage d'utilisation. *La Houille Blanche*, n° 3, 1967.

BARBE (A.), CASTINEL (G.) et NOUGARO (J.).— Etude de déversoirs inclinés par rapport au radier d'un canal. *Le Génie Civil*, n° 4, Avril 1970.

BONAFE (M.T.), NOUGARO (J.) et SANANNES (F.).— Contribution à l'étude des seuils déversants type Creager, fonctionnant avec une retenue aval importante. *C.R. des séances de l'Académie des Sciences*, 28 Mai 1958, t. 246, n° 21.

BOS (R.J.) et VAN ROSSUM (H.).— Le déversoir type Romijn. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 15, n° 222, Mai 1962.

BOYER (P.), CASTINEL (G.), NOUGARO (J.) et REYES CARRASCO (L.).— Application d'une sonde anémoclinométrique à un problème de déversement latéral. *Le Génie Civil*, n° 11, Novembre 1968.

BOYER (P.), CASTINEL (G.) et NOUGARO (J.).— Répartition du débit le long d'un déversoir latéral à mince paroi . *Buletinul Institutului Politehnic Diniasi*, Roumanie, tome 15 (18), fasc. 3-4, 1968.

CARTER (R.W.) et KINDSVATER (C.E.).— Discharge characteristics of rectangular thin-plate weirs. *Caractéristiques de débit des déversoirs en mince paroi rectangulaires. Journal of Hydraulics Division*, 83, n° HY6, Décembre 1957.

CASTEX (L.).— Quelques nouveautés sur les déversoirs pour la mesure des débits. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.

CLARIA (J.), ESCANDE (L.) et SANANNES (F.).— Etude de l'influence du niveau aval sur les conditions d'écoulement au-dessus d'un seuil déversant type Creager. *Le Génie Civil*, n° 4, 15 Février 1966.

COLLINGE (V.K.).— The discharge capacity of side weirs. *Le débit des déversoirs latéraux. Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 6, 6 Février 1957.

COULOMB (R.), MOREAU DE SAINT-MARTIN (J.) et NOUGARO (J.).— Etude théorique de la répartition du débit le long d'un déversoir latéral. *Le Génie Civil*, n° 4, Avril 1967.

DOMINGUEZ (J.).— Déversoirs latéraux. *Hidraulica*. 1945.

ENGEL (F.V.A.) et STAINSBY (W.).— Weirs for flow measurement in open channels. *Déversoirs pour la mesure des débits dans les canaux découverts. Water and Water Engineering*, vol. 62, n° 746 à 750, Avril à Août 1958.

ESCANDE (L.).— Etude sur les barrages-déversoirs à seuil Creager déprimé. *Le Génie Civil*, 15 Février et 1er Mars 1951.

ESCANDE (L.).— Etude sur les barrages-déversoirs à fente aspiratrice. *Le Génie Civil*, 15 Avril 1951, 15 Avril et 1er Mai 1952.

ESCANDE (L.) et SANANNES (F.).— Etude des seuils déversants à fente aspiratrice. *La Houille Blanche*, n° B, Décembre 1959.

GOVINDA RAO (N.S.) et MURALIDHAR (D.).— Discharge characteristics of weirs of finite-crest width. *Caractéristiques de débit des déversoirs à seuil d'épaisseur finie. La Houille Blanche*, n° 5, Août-Septembre 1963.

HLAVEK (R.).— Contribution à l'étude théorique et expérimentale des déversoirs à variation linéaire. *La Houille Blanche*, n° 4, Août-Septembre 1961.

HOWE (J.W.), OBADIE (A.) et SHIEH (G.C.).— Aeration demand of a weir calculated. *Calcul du débit d'air nécessaire à l'aération d'un déversoir. Civil Engineering*, vol 25 , n° 5, Mai 1955.

JUNIEWICZ (S.).— Sur l'adaptation de formes profilées pour la protection des barrages contre les affouillements. *La Houille Blanche*, n° 3, 1964.

KOZENY (J.).— Le dimensionnement des déversoirs latéraux *Osterreichische Bauzeitschrift*, Août-Septembre 1954 .

LAQUERRE (M.), NGUYEN VAN QUE et NOUGARO (J.).— Contribution à l'étude des déversoirs latéraux. *Le Génie Civil*, 1er Juin 1966.

MARECHAL (H.).— Abaques et graphiques pour le calcul du débit des déversoirs. *La Technique de l'eau* ; Octobre 1953.

MEYER (C.L.).— L'amélioration du débit des déversoirs hydrauliques. *Le Génie Civil*, 1er Juin 1952.

MORIN (P.).— Déversoir à variations linéaires et sensibilité constante. *Annales techniques du Génie Rural*, fasc. 73, année 1953.

PARHAMI (F.).— Contribution à l'étude des déversoirs obliques. *Thèse de Doctorat d'Université, Faculté des Sciences de Toulouse*, 1965.

ROCHE (M.).— Nouvelle méthode graphique pour le calcul de l'amortissement des crues dans un réservoir. *Cahiers Orstom Hydrologie*, n° 1, Janvier 1964.

SCHLAG (A.).— La mesure des débits par déversoirs en mince paroi. *Bulletin trimestriel du Cebedeau*, n° 51, 1961.

SCHLAG (A.).— Note sur la mesure des débits par déversoir triangulaire. *La Tribune du Cebedeau*, n° 218, Janvier 1962.

SCHLAG (A.).— Formule de débit de déversoirs dont le seuil est constitué par une série de dents situées dans un plan horizontal. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 15, n° 221, Avril 1962.

SCHLAG (A.).— Recherches expérimentales sur l'écoulement par déversoir-puits. *La Houille Blanche*, n° 2, 1969.

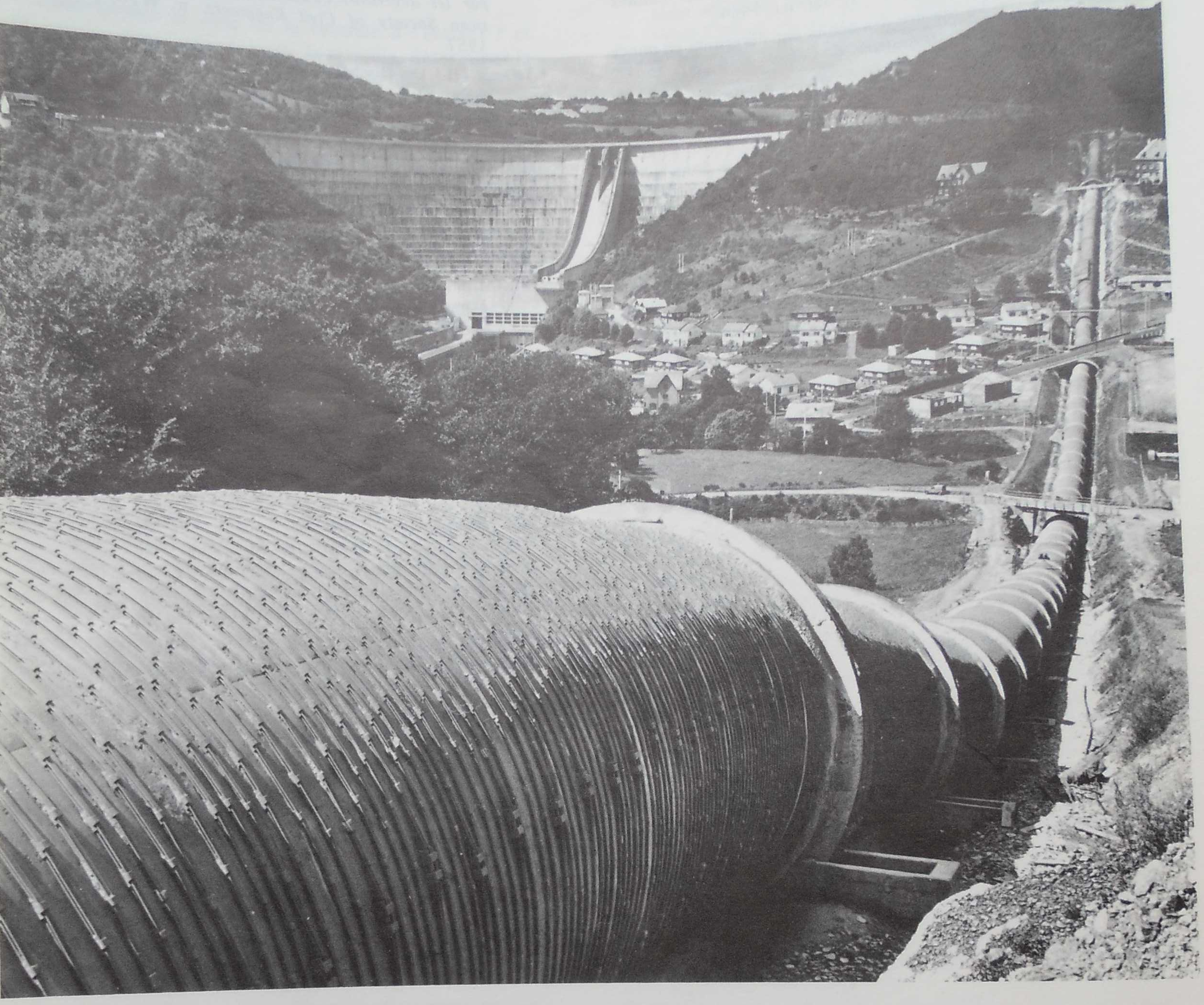
SCHMIDT (M.).— Die Berechnung unvollkommener Uberfälle. *Calcul des déversoirs noyés. Die Wasserwirtschaft*, Avril 1957.

STEVENS (J.C.).— Flow through circular weirs. *Ecoulement par les déversoirs circulaires. Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, n° HY6, Décembre 1957.

TRACY (H.J.).— Discharge characteristics of broad – crested weirs. *Caractéristiques du débit des déversoirs à seuil épais. U.S. Department of Interior, Geological Survey*, circular 397, U.S.A., 1959.

U.R.S.S.— (Ministère de l'Energie électrique) – Code of practice for the design of hydraulic structures ; hydraulic computation of weirs. *Guide pratique pour l'étude des ouvrages hydrauliques ; calcul hydraulique des déversoirs. Traduction anglaise d'un ouvrage russe.*

WINGHART (J.).— Etude du coefficient de débit du déversoir à pertuis. *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 11, Mars-Avril 1965.



Canalisation d'amenée des eaux de la TARENTAINE dans la retenue du barrage de BORT-LES-ORGUES

Photothèque EDF – J.P. Sudre

CHAPITRE XI

ÉCOULEMENT DANS LES CANALISATIONS EN CHARGE

XI.1. FORMULES GÉNÉRALES DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT EN RÉGIME TURBULENT DANS LES CANALISATIONS CYLINDRIQUES DE DIAMÈTRE CONSTANT

Compte-tenu des résultats du § VI.2.2 concernant l'écoulement laminaire dans un tube cylindrique nous n'envisagerons ici que l'écoulement en régime turbulent.

XI.1.1. Equation générale de l'écoulement

Elle résulte de l'équation générale du courant liquide en régime permanent établie au § VII.4 et que nous rappelons ci-dessous :

$$\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}} \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{B}{\Omega} \varphi(U) + \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

Le mouvement considéré étant uniforme et la section transversale circulaire $\left(\frac{B}{\Omega} = \frac{4}{D}\right)$ cette équation devient :

$$\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}} \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{4}{D} \varphi(U)$$

Comme nous l'avons remarqué, le premier membre représente la variation de l'énergie potentielle (c'est-à-dire de l'énergie totale puisque l'énergie cinétique est constante en régime uniforme) d'une particule de poids unité sur une distance unité, c'est donc la perte de charge par mètre J.

Donc :

$$J = \frac{4}{D} \varphi(U)$$

ou :

$$\boxed{\frac{1}{4} DJ = \varphi(U)} \qquad [XI.1.1]$$

La fonction $\varphi(U)$ est donc homogène à une longueur.

Remarque.— Introduction de la tension unitaire de frottement à la paroi τ_0.

Ainsi que l'ont fait plusieurs auteurs, introduisons la force de frottement par unité de surface de la paroi ou *tension unitaire de frottement à la paroi*, soit τ_0.

L'effort total de frottement sur la tranche de liquide est donc $-\tau_0 sB$ au lieu de $-Bs\,\overline{\omega}\,\varphi(U)$ d'où

$$\boxed{\varphi(U) = \frac{\tau_0}{\overline{\omega}}}$$

Il reste à expliciter la fonction $\varphi(U)$.

De nombreuses formules ont été proposées depuis plus d'un siècle. On peut les grouper en deux catégories :

— Formules anciennes,

— Formules modernes,

XI.1.2. Formules anciennes

Pendant très longtemps et jusqu'à ces dernières années, la fonction $\varphi(U)$ a été déterminée expérimentalement et les auteurs ont posé d'une manière quasi-générale :

$$\varphi(U) = b_1 U^2$$

La formule générale de l'écoulement s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2} \qquad [XI.1.2.1]$$

Le "coefficient" b_1 apparaît ainsi comme ayant pour dimensions :

$$b_1 \sim \frac{1}{LT^{-2}}$$

il est donc homogène à l'inverse d'une accélération ; ce n'est donc pas un nombre pur et lorsqu'on en donnera la valeur il faudra préciser les unités utilisées dans la formule générale [*XI.1.2.1*] (en principe le mètre et la seconde).

Suivant les auteurs, ce "coefficient" b_1 sera constant ou, le plus souvent, fonction des caractéristiques de l'écoulement c'est-à-dire de la nature et de l'état des parois du tuyau, de la vitesse moyenne U, du diamètre D et même de J.

Nous citerons ci-après les principales formules anciennes de caractère empirique.

a) *Formule de Prony* (1803)

$$b_1 = \frac{a}{U} + b$$

avec

$$a = 0{,}000\,017$$
$$b = 0{,}000\,348$$

Prony propose donc un coefficient constant pour toutes les natures de paroi ; il ne fait pas intervenir l'état de rugosité.

L'équation générale devient donc avec cette expression de b_1 :

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2$$

b) *Formule de Dupuit* (1854)

Dupuit propose de donner à b_1 une valeur constante :

$$b_1 = 0{,}000\,386$$

ce qui donne

$$U = 51 \sqrt{\frac{1}{4} DJ}$$

C'était une formule simple mais par trop inexacte.

c) *Formule de Darcy* (1852-57)

A la suite de nombreuses expériences effectuées de 1852 à 1857 sur des tuyaux de diamètres variant de 0,16 m à 0,50 m, Darcy estima que le coefficient b_1 devait tenir compte à la fois du diamètre et de l'état de rugosité de la paroi. Il proposa pour b_1 la formule :

$$b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$$

avec, comme valeurs numériques de α et β :

— Pour des tuyaux de fonte neufs et lisses :

$$\alpha = 0{,}000\,253\,5$$
$$\beta = 0{,}000\,006\,47$$

— Pour des tuyaux de fonte recouverts de dépôts il propose de doubler ces coefficients et de prendre :

$$\alpha = 0{,}000\,507$$
$$\beta = 0{,}000\,012\,94$$

Bien entendu comme, sauf pour des canalisations provisoires, toute conduite est destinée à servir longtemps, on calcule les conduites usuelles à l'aide de ces derniers coefficients, quitte à obtenir à la mise en service un débit supérieur à celui désiré.

La valeur de b_1 donnée par Darcy pour des conduites en service est d'ailleurs pratiquement toujours plus grande que celle proposée par Dupuit, puisque le terme fixe $\alpha = 0{,}000\,507$ de Darcy est supérieur à la valeur de b_1 de Dupuit (0,000 386).

La formule de Darcy est encore couramment utilisée de nos jours, elle a été traduite en tables et abaques ; les résultats qu'elle donne ont le plus de chance d'être exacts pour des diamètres compris entre 50 et 200 mm.

d) *Formule de Maurice Lévy* (1867)

En évaluant les actions mutuelles de frottement de deux couches cylindriques infiniment voisines à partir de l'hypothèse de Navier, Maurice Lévy obtient par le calcul la valeur suivante de b_1 :

$$b_1 = \frac{1}{\alpha' + \beta' \sqrt{\frac{D}{2}}}$$

α' et β' sont des coefficients numériques dont les valeurs sont telles que U est donnée par les formules suivantes plus couramment utilisées :

— Conduites en fonte neuves :

$$U = 36{,}4 \sqrt{\frac{D}{2} J \left(1 + \sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$$

— Conduites en fonte recouvertes de dépôts (c'est le cas général dans la pratique) :

$$U = 20,5 \sqrt{\frac{D}{2} J \left(1 + 3 \sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$$

La formule de Maurice Lévy est encore parfois utilisée ; les résultats qu'elle donne ont le plus de chances d'être valables pour des diamètres supérieurs à 200 mm.

Estimant que la formule de Lévy pour des tuyaux usagés conduit à des diamétres surabondants, surtout avec l'utilisation de plus en plus fréquente des procédés de traitement des eaux qui contribuent à réduire l'importance des dépôts sur les parois des canalisations, M. Decrest(1) propose pour les canalisations en service la formule suivante, intermédiaire entre les deux formules précédentes :

$$U = 25 \sqrt{\frac{D}{2} J \left(1 + 2 \sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$$

e) *Formule de Ganguillet et Kutter* (1869)

Ces deux auteurs proposent la formule suivante applicable à la fois aux canalisations sous pression et aux canaux :

$$b_1 = \frac{1}{C^2}$$

ce qui donne :

$$U = C \sqrt{\frac{1}{4} DJ}$$

qui est effectivement analogue à la formule générale de Chézy applicable aux écoulements à surface libre : $U = C\sqrt{RI}$ (cf. chapitre XII).

Le coefficient C est une fonction de J, de D et de l'état des parois. Il s'exprime ainsi :

$$C = \frac{23 + \dfrac{0,001\,55}{J} + \dfrac{1}{n}}{1 + \left(23 + \dfrac{0,001\,55}{J}\right)\dfrac{2n}{\sqrt{D}}}$$

Avec, pour les tuyaux de fonte en service :

$$n = 0,011 \quad \text{ou} \quad 0,012 \, .$$

f) *Formule de Flamant* (1892)

Après une étude détaillée des résultats de très nombreuses expériences Flamant proposa pour b_1 l'expression suivante :

$$b_1 = \frac{a}{4\sqrt[4]{DU}}$$

avec

$a = 0,000\,74$ pour des tuyaux très lisses à l'intérieur

et

$a = 0,000\,92$ "pour des tuyaux légérement incrustés comme le sont au bout de quelque temps de service tous ceux qui conduisent de l'eau quelque peu calcaire".

Flamant propose d'ailleurs d'utiliser toujours le coefficient correspondant aux tuyaux en service car un dépôt imperceptible d'une petite fraction de millimètre d'épaisseur suffit, d'après les expériences de Darcy, pour modifier les conditions de l'écoulement en augmentant la résistance.

L'équation générale [*XI.1.2.1*] devient donc avec Flamant :

$$\frac{1}{4} DJ = \frac{a}{4\sqrt[4]{DU}} U^2$$

soit

$$D^{5/4} J = a U^{7/4}$$

Cette formule se met plus couramment pour les tuyaux en service ($a = 0,000\,92$), sous la forme :

$$DJ = 0,000\,92 \sqrt[4]{\frac{U^7}{D}}$$

La formule de Flamant convient, en fait, pour les diamètres inférieurs à 50 mm. Elle est encore parfois utilisée pour le calcul des installations intérieures d'immeubles (branchements, colonnes montantes, canalisations desservant les appareils ménagers ou sanitaires).

g) *Formule de René Koechlin*

C'est une formule valable pour les canalisations sous pression et pour les canaux ; pour les tuyaux elle s'écrit :

$$U = K_1 \left(1 + 0,6 \sqrt{\frac{D}{4}}\right) \sqrt{\frac{1}{4} DJ}$$

qui est bien de la forme $U = C\sqrt{RI}$ (formule de Chézy)

Le coefficient K_1 a les valeurs suivantes :

— tuyaux peu usagés : $K_1 = 51$

— tuyaux usagés : $K_1 = 42$

---

(1) Chabot (J.).— Considérations nouvelles sur la formule de Lévy. *Revue "l'Eau"*, Août 1958.

La formule de Koechlin peut se mettre sous la forme usuelle $\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2$ en posant :

$$b_1 = \left[\frac{1}{K_1 \left(1 + 0,6 \sqrt{\frac{D}{4}}\right)} \right]^2$$

h) *Formule de Manning-Strickler* (1923)

Cette formule, valable également pour les tuyaux et les canaux, s'écrit :

$$U = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} J^{1/2}$$

ou

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2}$$

avec

$R = \frac{D}{4}$ (rayon hydraulique moyen d'une section circulaire de diamètre D).

Avec cette formule le "coefficient" b_1 a pour valeur :

$$b_1 = \frac{n^2}{\left(\frac{D}{4}\right)^{1/3}} = \frac{n^2}{R^{1/3}}$$

Le coefficient n caractérise la nature des parois du tuyau, il varie de 0,0140 (conduite très incrustée) à 0,005 (conduite faiblement incrustée).

i) *Autres formules empiriques*

Un grand nombre d'autres formules ont été également proposées (Weisbach, Hagen, Franck, Lampe, Unwin, Thrupp, Mougnié, Koseny, Scobey). Nous ne pouvons pas toutes les examiner ici ; nous en donnons le répertoire au § XI.1.4.

Toutes ces formules ont généralement pour base *l'expérience* qui, obligatoirement, ne couvre qu'une gamme limitée des débits, vitesses, diamètres, natures et rugosités des parois. Il n'est donc pas possible de les extrapoler au-delà du domaine de l'expérience qui a permis de les établir (et c'est pourtant ce qu'on fait trop souvent !).

Par ailleurs toutes ces formules sont très imprécises en ce qui concerne la définition de la nature et de la rugosité des parois du tuyau.

Il sera en grande partie remédié à ces inconvénients par les formules modernes que nous allons maintenant étudier.

XI.1.3. Formules modernes

XI.1.3.1. *Expression générale de la pertè de charge*

Nous avons établi au § VII.6.1.3 l'expression générale suivante de la perte de charge le long d'un courant liquide d'axe rectiligne et de section transversale constante :

$$\frac{B}{\Omega} \varphi(U) = J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}$$

Cette formule s'appliquera donc à un tronçon rectiligne de canalisation de diamètre constant D ; le coefficient adimensionnel λ s'appelle le *coefficient de résistance*.

La formule générale de l'écoulement s'écrira donc sous la forme moderne :

$$\boxed{J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}} \qquad [XI.1.3.1.1]$$

Remarques : 1 — En comparant les formules

$$\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2 \qquad [XI.1.2.1]$$

et

$$J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} \qquad [XI.1.3.1.1]$$

il vient :

$$\lambda = 8 g b_1$$

qui donne la relation entre les deux coefficients

b_1 des formules anciennes

λ des formules modernes

et montre que, comme nous l'avons souligné, le "coefficient" b_1 a les dimensions de l'inverse d'une accélération.

2 — Introduisons maintenant la *tension unitaire de frottement à la paroi* τ_0 que nous avons trouvé égale à $\overline{\omega}\varphi(U)$ (cf. § XI.1.2.1).

Avec

$$\varphi(U) = \frac{U^2}{8g} \lambda$$

il vient

$$\lambda = \frac{8\tau_0}{\rho U^2}$$

Prandtl a posé :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = U_f^2 \qquad [XI.1.3.1.2]$$

et il a désigné U_f par l'expression *"vitesse de frottement"*.

Cette définition de U_f se justifie en considérant que la perte d'énergie par unité de poids du liquide est proportion-

précédente et qui vérifie mieux les résultats expérimentaux :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \mathcal{R}\sqrt{\lambda} - 0{,}80 \qquad [XI.1.3.2.10]$$

qui peut s'écrire également

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2{,}51}{\mathcal{R}\sqrt{\lambda}} \qquad [XI.1.3.2.11]$$

Sur le diagramme logarithmique $\lambda = f(\mathcal{R})$ cette loi se traduit par la *courbe* (*VK*) (fig. XI.1.3.1) qui correspond, rappelons-le, à *l'écoulement en régime turbulent dans des tuyaux à parois lisses ou régime turbulent lisse.*

XI.1.3.2.2. *Formules du type* $\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$

λ n'étant pas explicité dans la formule de Prandtl-Von Karman, celle-ci est d'un usage difficile et ne peut être résolue que par voie graphique. Aussi lui préfère-t-on des formules plus simples de la forme $\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$ représentée par une droite dans le diagramme universel $\lambda = f(\mathcal{R})$.

L'allemand *Blasius* a ainsi proposé en 1913 la formule :

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathcal{R}^{0,25}} \qquad [XI.1.3.2.12]$$

qui est représentée par la droite (B) dans le diagramme universel (fig. XI.1.3.1).

Cette "droite de Blasius" est pratiquement confondue avec la courbe de Von Karman pour $\mathcal{R} \leqslant 10^5$.

A cette catégorie générale $\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$ appartiennent également les formules empiriques du type

$$J = k\frac{U^m}{D^p} \quad \text{avec} \quad m + p = 3\,.$$

En effet, dans ces conditions on peut écrire :

$$J = k\frac{U^m}{D^p} = \frac{\lambda}{D}\,\frac{U^2}{2g}$$

$$\lambda = \frac{2gkU^{m-2}}{D^{p-1}} \quad \text{avec} \quad m + p = 3$$

d'où

$$\lambda = \frac{2gkU^{1-p}}{D^{p-1}} = \frac{2gk\nu^{1-p}}{\mathcal{R}^{p-1}}$$

qui est bien de la forme :

$$\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$$

A ce type appartiennent les formules de

Reynolds (1883) : $J = \frac{k}{g\mathcal{R}^{2-n}}\,\frac{U^2}{D}$

ou

$$\lambda = \frac{2k}{\mathcal{R}^{2-n}} \quad \text{avec} \quad 1{,}82 < n < 2$$

Flamant (1892) : $J = k\frac{U^{7/4}}{D^{5/4}}$

Hagen (1854) :

$$U = kR^{5/7}J^{4/7} \quad \text{avec} \quad R = \frac{D}{2}$$

qui est bien de la forme :

$$J = A\frac{U^{7/4}}{D^{5/4}}$$

ou

$$\lambda = \frac{K}{\mathcal{R}^{0,25}}$$

Il faut adjoindre à ce groupe certaines formules du type $J = k\frac{U^m}{D^p}$ dans lesquelles $m + p$ varie de 2,90 à 3,50 selon la nature et la rugosité des parois, mais est égal à 3 dans le cas des parois lisses et se rattache alors à la relation $\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$. Parmi ces formules on peut citer celles de

Saph et Schoder (1903) : $J = k\frac{U^n}{D^{1,25}}$

Mougnié (1913) :

$$J = k\frac{U^n}{D^{1,25}} \quad \text{avec} \quad 620 < k \times 10^6 < 2.000, \quad 1{,}75 < n < 2$$

Biegeleisen-Bukowsky (1914) :

$$J = k\frac{U^{1,9}}{D^{1,1}} \quad \text{avec} \quad 1.200 < k \times 10^6 < 2.567$$

Betz (1925) :

$$J = k\frac{0{,}3164}{\mathcal{R}^{0,25}}\,\frac{U^2}{2gD} \quad \text{avec} \quad 1{,}1 < k < 1{,}5$$

Scobey (1930) :

$$J \times 10^6 = 2.587\,k\frac{U^{1,89}}{D^{1,09}}$$

avec $k = 0{,}32$ pour les conduites lisses.

XI.1.3.2.3. *Formules du type* $\lambda = \alpha + \frac{\beta}{\mathcal{R}^n}$

Comme nous l'avons noté l'approximation des formules précédentes du type $\lambda = \frac{A}{\mathcal{R}^n}$ n'est satisfaisante que pour des valeurs de $\mathcal{R}$ inférieures à 10^5. Au-delà de cette limite l'expérience s'en écarte progressivement et il faut alors recourir à des *formules du type binôme* :

$$\lambda = \alpha + \frac{\beta}{\mathcal{R}^n}$$

A ce groupe se rattachent les formules de

Lang (1896) : $\lambda = 8g\left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{\mathcal{R}\,\nu}}\right)$

Lees (1914) : $\lambda = 0{,}00714 + \frac{0{,}61}{\mathcal{R}^{0,35}}$

Schiller et Hermann :

$$\lambda = 0{,}0054 + \frac{0{,}396}{\mathcal{R}^{0,3}}$$

Nikuradse (1932) :

$$\lambda = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathcal{R}^{0,237}}$$

R. Lazard (1935) :

$$\lambda = 0{,}00372 + \frac{0{,}247}{\mathcal{R}^{0,25}}$$

Ces dernières formules et surtout celle de Nikuradse se confondent sensiblement avec la formule théorique de Prandtl-Von Karman pour les valeurs de $\mathcal{R}$ allant jusqu'à 3×10^6.

Plus récemment (1954-58) *Filonenko et Altschoul* (U.R.S.S) ont proposé la formule suivante, explicite en λ, donc d'un emploi plus commode que celle de Prandtl-Von Karman et dont les résultats ne diffèrent de cette dernière que de 2 à 3 % au maximum :

$$\lambda = (1{,}8 \log \mathcal{R} - 1{,}64)^{-2}$$

XI.1.3.2.4. *Conclusions sur les formules d'écoulement en régime turbulent lisse. Critique des formules logarithmiques*

De cette rapide analyse des nombreuses formules proposées, il faut retenir essentiellement que dans le cas des parois lisses le coefficient de résistance λ est indépendant de la nature de la paroi, n'est fonction que du nombre de Reynolds et décroît lorsque $\mathcal{R}$ augmente, c'est-à-dire que *J est proportionnel à* U^m *avec* $m < 2$.

Ajoutons enfin que des études expérimentales récentes[1] ont montré que la formule classique de Prandtl-Von Karman admise pendant longtemps ne traduisait pas très exactement les résultats observés ; la formule de Blasius serait mieux adaptée. On peut donc se demander si les formules logarithmiques ne doivent pas être abandonnées et s'il n'importe pas, maintenant que les présomptions de non-validité de ces formules s'accumulent de plus en plus, de rechercher une nouvelle théorie mieux conforme à la réalité.

XI.1.3.3. *Cas des tuyaux rugueux*

Avant d'aborder le problème plus complexe de l'écoulement en régime turbulent dans des conduites rugueuses, nous préciserons la définition de ce nouveau paramètre que constitue la *rugosité* de la paroi.

XI.1.3.3.1. *Notion de rugosité*

Contrairement à ce qui se passe dans le cas de surfaces lisses, une surface rugueuse implique un état de surface tel que ses irrégularités ont une action directe sur les forces de frottement, c'est-à-dire qu'au-delà d'un certain degré de rugosité la configuration mécanique de la surface exerce une influence bien déterminée sur ce qu'on appelle "l'intensité de l'agitation de turbulence". C'est à de telles surfaces rugueuses (qui sont d'ailleurs les seules intéressantes pratiquement pour l'Ingénieur) que Darcy, Lévy, Flamant et leurs continuateurs ont eu affaire. Comme nous l'avons observé précédemment ces auteurs avaient généralement coutume de définir la rugosité d'une manière purement descriptive en se référant à la nature du matériau constituant la paroi. On parlait ainsi de "fonte usagée", de "béton lisse", de tuyaux de fonte "en service", etc . . .

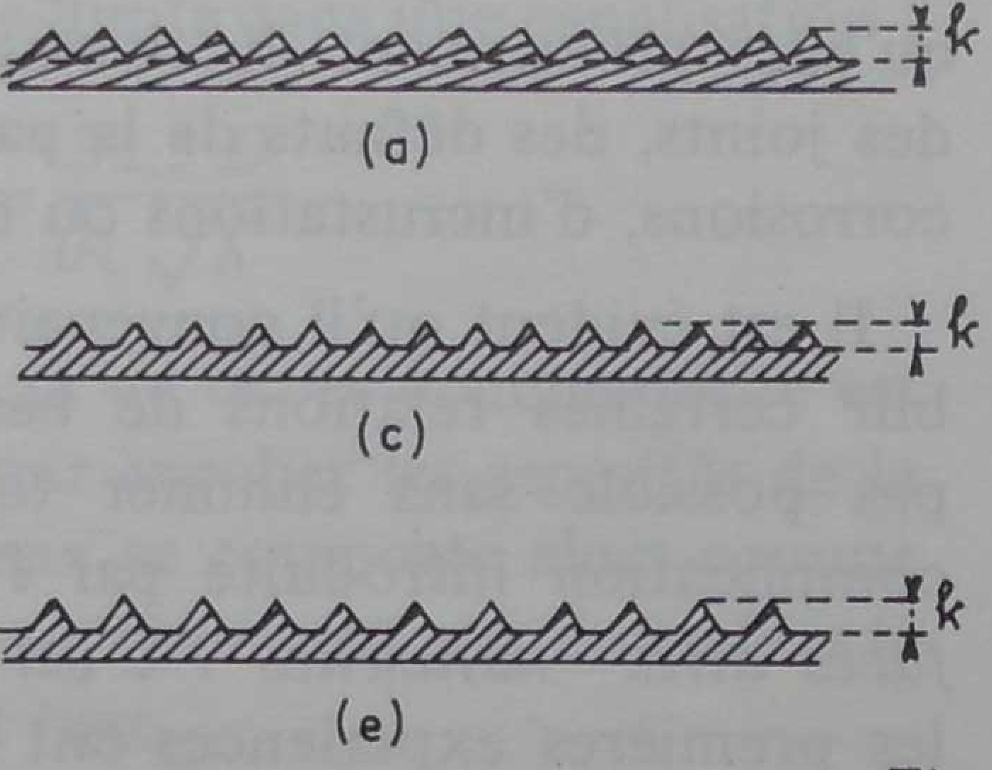
Il a fallu attendre les études systématiques de l'allemand *Von Mises* pour voir apparaître une définition plus rationnelle et plus précise de la notion de rugosité.

1 — Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires (fig. XI.1.3.3.1) caractérisées tout

(1) Lévin (L.) — Difficultés du calcul des pertes de charge linéaires dans les conduites forcées. *La Houille Blanche*, n° 1, 1966.

d'abord par une certaine *hauteur k* (désignée parfois par ϵ) ; quoique très petite, quelquefois de l'ordre d'une fraction de millimètre, c'est cette hauteur qui constitue le premier paramètre caractéristique.

2 — Le point suivant consiste à évaluer la rugosité par rapport au diamètre de la conduite. Par exemple dans un tuyau il est logique de comparer k au diamètre D (ou au rayon r). On introduit ainsi la notion de *rugosité relative* $\frac{k}{D}$ $\left(\text{ou } \frac{k}{r}\right)$ ou de poli relatif $\frac{D}{k}$ $\left(\text{ou } \frac{r}{k}\right)$.



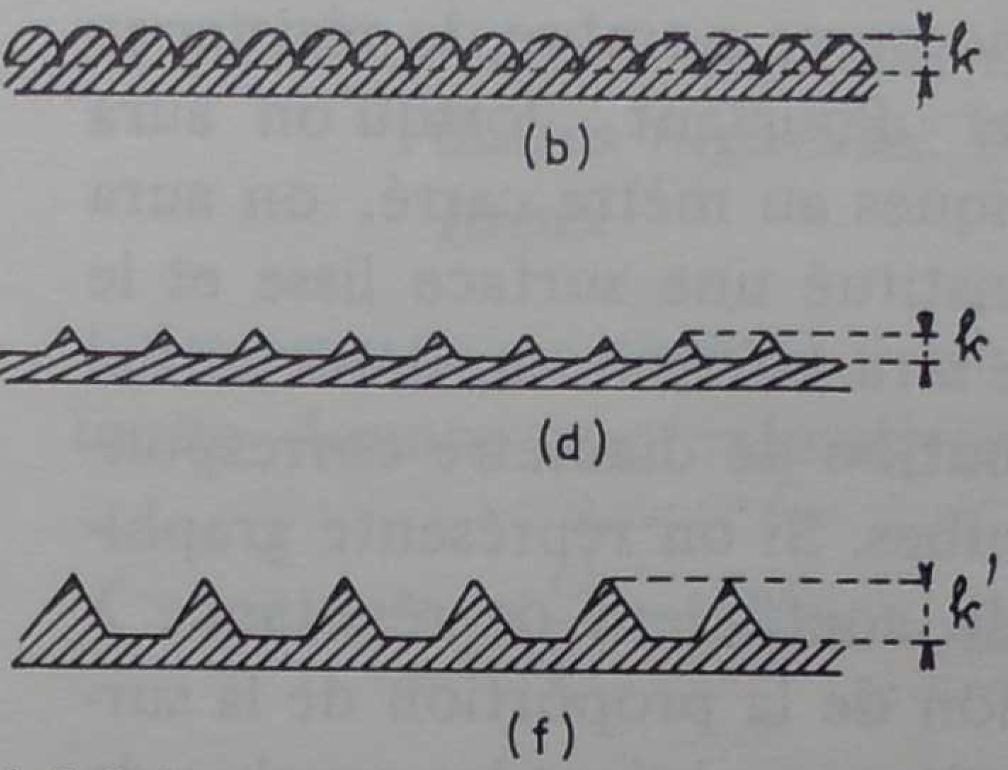


Fig. XI.1.3.3.1

3 — Il apparaît ensuite nécessaire de définir un troisième paramètre caractérisant une rugosité, à savoir la *forme* des protubérances. On peut concevoir, par exemple, une surface dont les éléments constituent une répétition régulière d'une même figure géométrique ; on peut avoir ainsi des protubérances de même hauteur mais de formes différentes (fig. XI.1.3.3.1, a et b).

De ce point de vue on peut distinguer la rugosité *d'aspérité* (zackenformig) de la rugosité *d'ondulation* (wellenformig) (fig. XI.1.3.3.2). On conçoit que, pour une même hauteur k, ces deux formes de rugosités n'auront pas la même influence sur l'écoulement et provoqueront une perte de charge différente pour une même valeur du nombre de Reynolds.

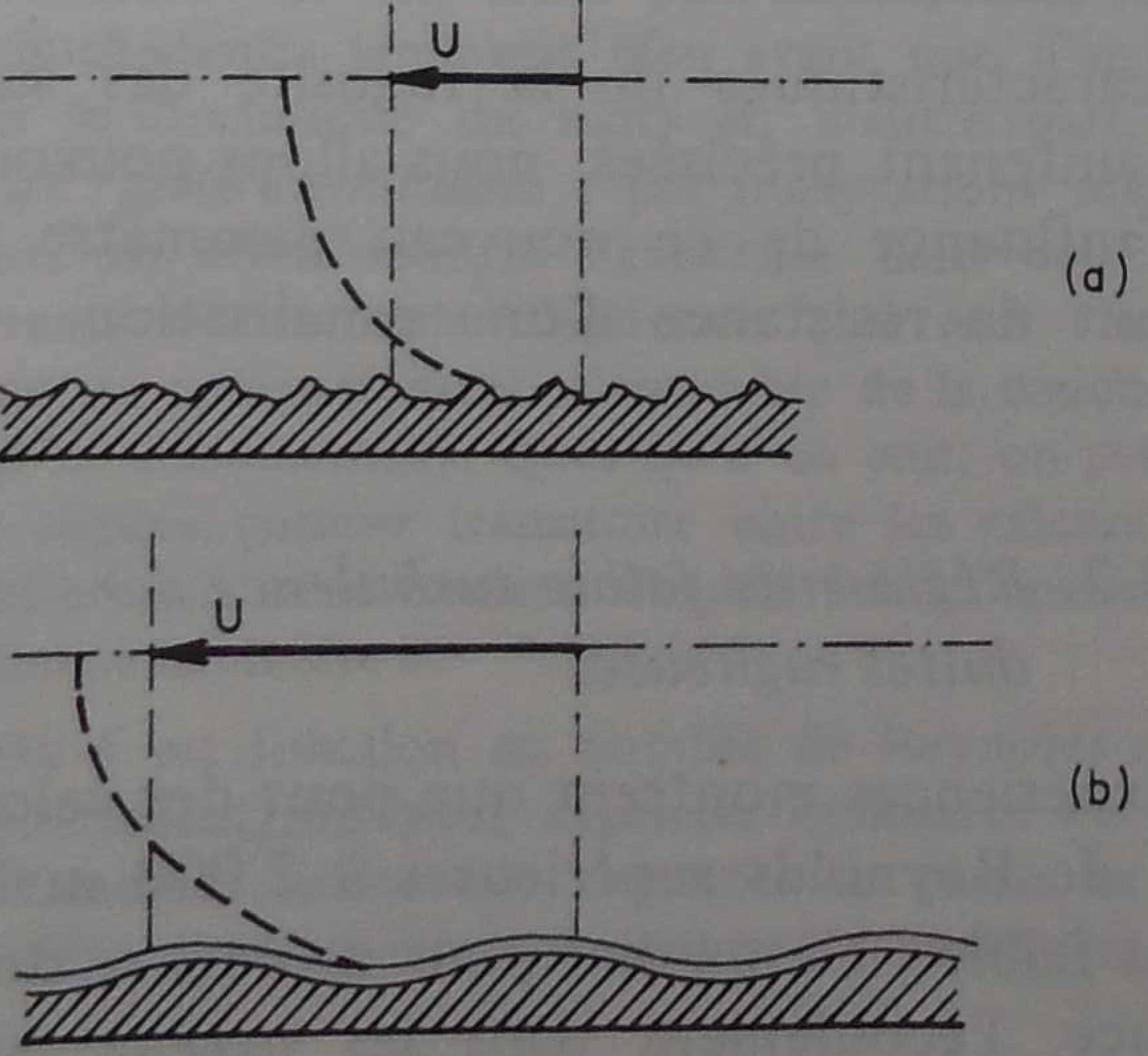


Fig. XI.1.3.3.2 – Rugosité d'aspérité (a) et rugosité d'ondulation (b)

Si la rugosité est ondulée le film laminaire pourra, dans une certaine mesure, se modeler sur les ondulations ; si au contraire elle présente des arêtes vives le film sera aisément écorché puis déchiré par les aspérités, l'influence de la viscosité dans la couche-limite sera annihilée et la vitesse moyenne fortement réduite. Or le caractère d'aspérité ou d'ondulation que peut présenter une rugosité dépend, pour une grande part, de la *structure* de la paroi. Quelle que soit la cause de la rugosité on peut dire qu'en général, réserve faite des apports étrangers, les structures cristallines (fonte, acier, ciment) engendreront une rugosité d'aspérité et les structures vitreuses ou visqueuses (verre, plomb, bitume, matière plastique) une rugosité d'ondulation.

4 — Enfin une dernière caractéristique de la rugosité sera la *répartition* des protubérances sur la surface. On peut concevoir, par exemple, des protubérances de même dimension et de même forme mais se reproduisant à des intervalles différents (fig. XI.1.3.3.1, c et d). On peut aussi considérer un groupe de surfaces géométriquement semblables à tous points de vue mais différentes dans leurs dimensions absolues (fig. XI.1.3.3.1, e et f), l'ensemble de ces surfaces constitue ce qu'on pourrait appeler un "type de rugosité". *L'importance de la répartition des protubérances* peut être mise en évidence par l'observation suivante que nous empruntons à l'étude de M. Roger Mathieu "Influence de la rugosité des conduites et de leur âge sur le rendement hydraulique" (1).

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, Octobre 1939.

Supposons qu'à l'intérieur de la paroi supposée lisse d'une conduite cylindrique on crée une rugosité artificielle en collant sur la paroi des dés cubiques de 1 cm de côté, à raison d'un dé par mètre carré. Chacun d'eux provoquera un remous qui se traduira par un accroissement de la résistance générale. Si on double le nombre des cubes, cet accroissement sera doublé. Si on augmente encore ce nombre, la résistance continuera à augmenter. Pourtant, lorsqu'on aura placé dix mille dés cubiques au mètre carré, on aura —théoriquement— reconstitué une surface lisse et le débit de la conduite ne sera inférieur au débit initial que du fait de la diminution de diamètre correspondant à l'épaisseur des cubes. Si on représente graphiquement la variation du coefficient de résistance λ et du débit Q en fonction de la proportion de la surface que recouvrent les dés, on obtient les courbes de la figure XI.1.3.3.3.

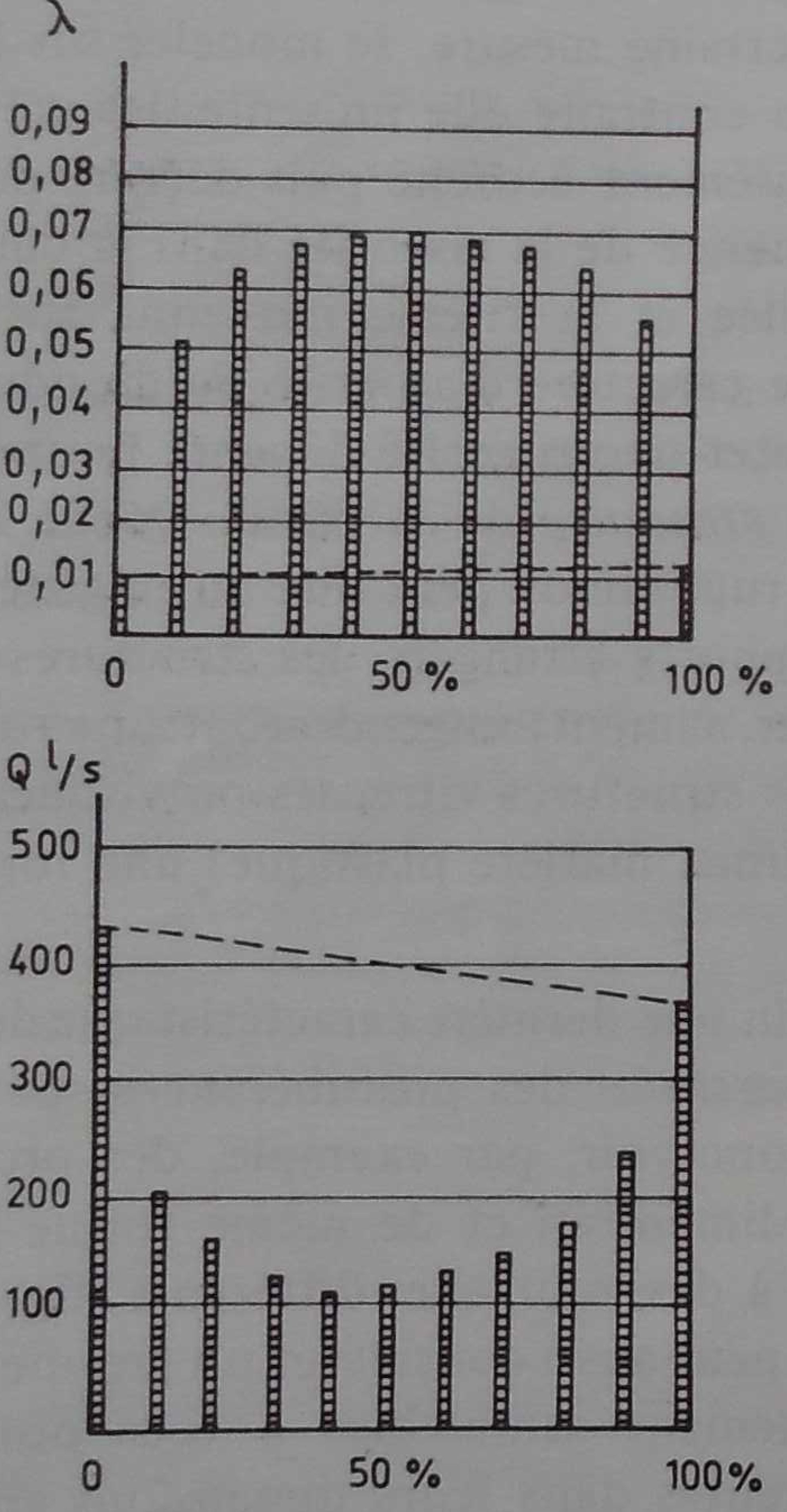


Fig. XI.1.3.3.3 – Variation du coefficient de résistance λ et du débit Q d'une conduite de diamètre 600 mm et de pente hydraulique $J = 0{,}002$, en fonction de la proportion de la surface intérieure couverte de dés cubiques de 1 cm de côté.

Le seul aspect de ces courbes suffit à montrer que *l'influence de la disposition des aspérités est plus considérable que celle de leur diamètre moyen.*

Enfin il est évident que les surfaces auxquelles on a affaire dans la pratique (béton, acier, fonte) ne présentent que tout à fait exceptionnellement des caractéristiques de rugosité aussi uniformes que celles considérées précédemment.

En effet, dans la pratique, les protubérances de la surface sont inégales et irrégulièrement distribuées, qu'elles proviennent du rivetage, des recouvrements, des joints, des défauts de la paroi, de pustules ou de corrosions, d'incrustations ou de tubercules.

Il est évident qu'il convenait en premier lieu d'établir certaines relations de base et que cela n'était pas possible sans éliminer tout d'abord la grande complication introduite par *l'hétérogénéité des surfaces dites "naturelles"*. C'est pour cette raison que les premières expériences ont été faites avec des surfaces rendues artificiellement rugueuses et constituant une rugosité essentiellement homogène. Ainsi, les célèbres expériences de Nikuradse dont nous donnerons plus loin les résultats se rapportent à une rugosité artificielle réalisée en collant sur une paroi lisse une couche continue de grains de sable ou de gravier soigneusement calibrés ; on obtient ainsi une sorte de papier de verre de grain plus ou moins gros ; la rugosité peut alors être définie par un seul paramètre et Nikuradse a choisi pour cela la rugosité relative, c'est-à-dire le rapport du diamètre k des grains au diamètre D de la conduite. En fait cette rugosité artificielle et homogène constitue un élément de comparaison particulièrement commode auquel on rapportera la rugosité naturelle et hétérogène des conduites usuelles ; on définira ainsi pour ces dernières une *rugosité équivalente* à la rugosité du type "grain de sable" de Nikuradse.

Les caractéristiques de la rugosité des surfaces étant maintenant précisées, nous allons pouvoir examiner l'influence de ce nouveau paramètre sur le coefficient de résistance d'une canalisation.

XI.1.3.3.2. *Régime de faible turbulence dans les conduites rugueuses*

Les expériences montrent que pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieures à 2.000 mais relativement faibles, c'est-à-dire pour un régime de faible turbulence, l'écoulement dans les tuyaux rugueux *suit les mêmes lois que pour les tuyaux lisses* (formule de Prandtl-Von Karman, Blasius, etc . . .).

Prandtl a donné de ce résultat expérimental l'explication suivante :

On sait que la couche-limite en régime laminaire au contact de la paroi a une épaisseur δ qui diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente.

On a d'ailleurs établi la formule suivante qui donne l'épaisseur δ de la couche-limite dans une canalisation :

$$\delta = \frac{32{,}5\, D}{\mathcal{R}\sqrt{\lambda}}$$

Pour de faibles valeurs de $\mathcal{R}$ la couche-limite est suffisamment épaisse pour enrober les aspérités de la paroi et le tuyau rugueux se comporte alors comme s'il était hydrauliquement lisse ; on est donc dans le cas du régime turbulent lisse.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'épaisseur de la couche-limite diminue et les aspérités commencent à réagir sur l'écoulement ; le point figuratif du diagramme universel $\lambda = f(\mathcal{R})$ quitte la courbe de Von Karman et on aborde une *zone de transition* jusqu'à ce que, le nombre de Reynolds continuant de croître, la couche-limite soit complètement arrachée, l'écoulement présentant alors le caractère de pleine turbulence.

La transition est essentiellement caractérisée par le fait que, la hauteur des aspérités étant de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche-limite laminaire, on voit intervenir simultanément les caractéristiques géométriques de la rugosité et le nombre de Reynolds. On a coutume de dire que les aspérités commencent à émerger de la couche-limite ; ce n'est évidemment que très grossièrement vrai. La couche-limite n'est pas une couche d'un fluide particulier tapissant simplement la paroi et dont les aspérités sortent à la manière d'îlôts rocheux. En fait, d'une part les aspérités réagissent sur la couche-limite laminaire bien avant que d'en émerger (au sens hydrostatique du mot) et, d'autre part, le mot "laminaire" prête à confusion ; des observations microscopiques ont, en effet, montré l'existence dans cette couche d'importants mouvements d'agitation ; le mot "laminaire" s'applique au comportement d'ensemble de la couche et non au détail de l'écoulement. Quoi qu'il en soit, on peut considérer le régime comme transitoire entre les valeurs 0,10 et 6 du rapport k/δ de la hauteur d'aspérité k à l'épaisseur de la couche-limite laminaire δ.

Comme δ est fonction du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement, on peut exprimer également en fonction de $\mathcal{R}$ la hauteur limite des rugosités à partir de laquelle le tuyau cesse de se comporter comme hydrauliquement lisse.

Cette limite est

$$k = 19{,}25\, \frac{D}{\mathcal{R}^{7/8}}$$

ou plus simplement :

$$k = 100\, \frac{\nu}{V}$$

Pour une hauteur moyenne de rugosité supérieure à cette limite, l'écoulement ne suit plus la loi des tuyaux lisses et on aborde la zone de transition.

XI.1.3.3.3. *Régime de pleine turbulence dans les conduites rugueuses ou régime turbulent rugueux*

Lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur limite donnée approximativement par la formule :

$$\mathcal{R} = 560\, \frac{D}{k} \quad \text{(Altschoul, U.R.S.S., 1957),}$$

la couche-limite laminaire est complètement arrachée et les aspérités réagissent directement sur le flot turbulent.

On quitte la zone de transition pour aborder la *zone de pleine turbulence en tuyau rugueux* (rugosités d'aspérité) appelée encore *zone du régime turbulent rugueux*.

Comme nous l'avons indiqué au § XI.1.3.2.1, l'allemand Fritsch a montré que la forme de la portion FK de la courbe des vitesses dans une section transversale d'un tuyau de diamètre donné ne dépendait ni de U (ou Q) ni de la rugosité k (fig. XI.1.3.3.4). La rugosité a simplement pour effet de déplacer la courbe FK parallèlement à l'axe de la canalisation.

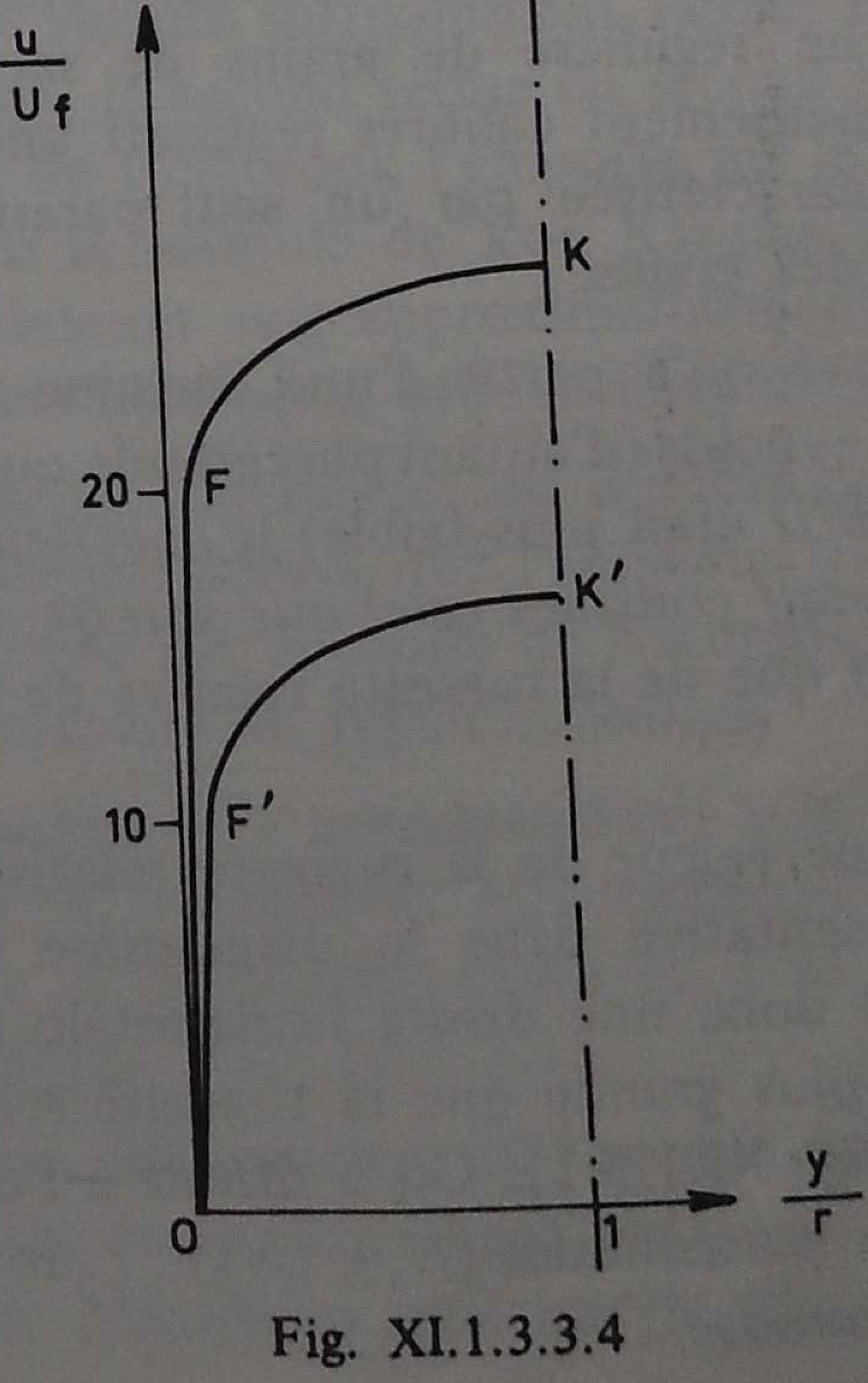


Fig. XI.1.3.3.4

Par exemple lorsque la rugosité relative k/D passe de 1/500 à 1/30, la courbe de répartition des vitesses passe de FK à $F'K'$.

Fritsch montre ainsi que la loi logarithmique de la vitesse déficitaire établie pour les tuyaux lisses reste vraie pour les tuyaux rugueux et il obtient la loi suivante :

$$\frac{u}{U_f} = 8{,}48 + 5{,}75 \log \frac{y}{k}$$

On peut à partir de cette relation refaire exactement le même raisonnement que celui adopté pour les tuyaux lisses (cf. § XI.1.3.2.1), c'est-à-dire intégrer la loi logarithmique de la vitesse déficitaire à toute la section de manière à introduire la vitesse moyenne U et le nombre de Reynolds. On obtient ainsi pour les tuyaux en régime de pleine turbulence la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}74 + 2 \log \frac{D}{2k} \qquad [XI.1.3.3.1]$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = - 2 \log \frac{k}{3{,}7\,D} \qquad [XI.1.3.3.2]$$

qui est l'homologue de la formule de Prandtl-Von Karman pour les tuyaux lisses (formules XI.1.3.2.10 et 11).

Ce résultat a été confirmé par les célèbres *expériences de Nikuradse* (1931-33) qui a effectué toute une série de mesures de pertes de charge pour des écoulements en régime de pleine turbulence dans des conduites dont la paroi intérieure était enduite d'une couche régulière de grains de sable ou de gravier soigneusement calibrés réalisant une rugosité homogène caractérisée par un seul paramètre : le diamètre k des grains.

Il a observé qu'à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds (d'autant plus grande que la rugosité relative k/D était plus faible) le *coefficient de résistance λ restait constant quel que soit $\mathcal{R}$*, sa valeur ne dépendant que de la rugosité relative de la canalisation.

Pour chaque valeur de la rugosité relative k/D la courbe représentative dans le diagramme universel $\lambda = f(\mathcal{R})$ est donc une droite horizontale d'ordonnée d'autant plus grande que la rugosité relative est plus élevée (fig. XI.1.3.1). On a donné à l'ensemble de ces droites horizontales (N_1), (N_2) . . . le nom de *"harpe de Nikuradse"*.

Pour un écoulement appartenant à ce régime, comme λ ne dépend que de la rugosité relative k/D, on déduit facilement λ de la valeur de D/k qu'on peut lire sur l'échelle horizontale supérieure du diagramme universel de la figure XI.1.3.1. La courbe correspondante (N) tracée en pointillé correspond à l'équation [*XI.1.3.3.1* ou *2*] ci-dessus.

Remarquons que, pour un tuyau de rugosité relative donnée, le fait d'écrire $\lambda = C^{te}$ revient à poser $J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} = K \frac{U^2}{D}$; la perte de charge est alors rigoureusement proportionnelle au carré de la vitesse ou au carré du débit ; on retombe donc sur les formules du type quadratique, telles celles de Prony, Dupuit, Darcy, Maurice Lévy, etc . . .

Remarquons également qu'étant donnée la disposition des grains de sable selon Nikuradse, la hauteur d'aspérité correspondant au sens habituel, c'est-à-dire la distance de creux à plein, est sensiblement égale à la moitié du diamètre d des grains de sable (fig. XI.1.3.3.5) ; dans ces conditions il aurait

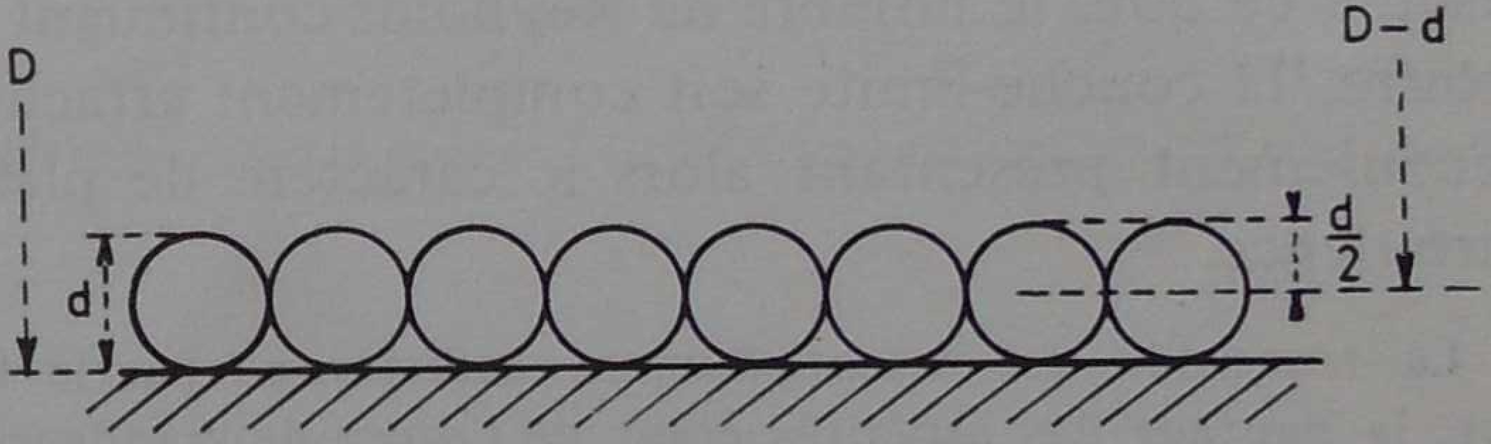


Fig. XI.1.3.3.5 – Rugosité artificielle des expériences de Nikuradse

été normal d'admettre une rugosité relative k/D égale à $\frac{d}{2(D-d)}$ car les grains étaient jointifs et les vides éventuels étaient remplis par le vernis dont Nikuradse avait enduit la paroi de la canalisation pour permettre l'adhérence des grains de sable. Nikuradse a adopté néanmoins la valeur d/D pour définir cette rugosité relative. Le véritable intérêt de ses travaux n'est pas d'avoir donné une nouvelle formule de perte de charge parmi tant d'autres mais bien d'avoir systématiquement étudié l'influence de la hauteur des aspérités sur la perte de charge. La formule à laquelle il a abouti n'est donc applicable que pour le type de rugosité de ses expériences, c'est-à-dire une rugosité de nature géométrique et essentiellement homogène.

L'application de cette formule ne peut être faite sans précaution aux divers cas usuels, les rugosités n'étant pas du tout comparables dans leur nature ; on peut même dire qu'en toute rigueur l'application de la formule de Nikuradse est très limitée car elle correspond à un type de rugosité qui se rencontre rarement dans la pratique, comme nous l'avons souligné précédemment.

Néanmoins, en raison du caractère systématique des expériences de Nikuradse, la rugosité artificielle et homogène qu'il a utilisée est couramment adoptée comme élément de référence. On définira ainsi pour une rugosité naturelle de caractère essentiellement hétérogène, une *rugosité équivalente* égale à celle du type "grain de sable" qui provoquerait la même perte de charge.

Le régime turbulent rugueux se rencontre fréquemment dans la pratique. Dans ce cas, un ordre de grandeur courant pour λ est 0,02 (correspondant à une rugosité relative $k/D = 0{,}001$). Il correspond à $J = \frac{\lambda}{D}\frac{U^2}{2g} = \frac{1}{50D}\frac{U^2}{2g}$ ce qui revient à dire que la perte de charge est égale à $\frac{U^2}{2g}$ sur une longueur rectiligne de canalisation égale à 50 diamètres.

XI.1.3.3.4. *Formule de Colebrook*

Tel était l'avancement du problème un peu avant la dernière guerre.

Pour une conduite de rugosité et diamètre déterminés, parcourue par un liquide donné, si on fait croître la vitesse (c'est-à-dire $\mathcal{R} = UD/\nu$) on observe successivement (fig. XI.1.3.1) :

1) Le *régime laminaire* bien connu (droite P) mais ne correspondant pas à des conditions d'utilisation courante.

2) Le *régime turbulent lisse* pour lequel le tuyau se comporte comme s'il était lisse par suite de l'existence de la couche-limite de Prandtl (courbe VK, formule de Von Karman) ou droite de Blasius (B) qui se confond pratiquement avec la courbe (VK) jusque $\mathcal{R} = 10^5$.

3) Un *régime transitoire* correspondant à la zone comprise entre la courbe (VK) et la droite (N_n) correspondant à la rugosité relative k/D du tuyau considéré.

4) Le *régime turbulent rugueux* correspondant à la droite (N_n) (formule de Nikuradse).

Les régimes n^{os} 1, 2 et 4 étaient connus et représentés par des formules satisfaisantes mais on ne connaissait pas de formule applicable à la zone n° 3 dite "zone intermédiaire" ou "zone de transition" et limitée par :

— la courbe de Von Karman d'équation

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2{,}51}{\mathcal{R}\sqrt{\lambda}}$$

— les extrémités $l_1, l_2 \ldots l_n$ des droites de Nikuradse dont le lieu est une courbe (M) dite "courbe de Moody" du nom de l'expérimentateur américain qui, en 1944, en a établi l'équation :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\mathcal{R}}{260}\frac{k}{D}$$

Cette zone de transition est très importante car très fréquemment utilisée en pratique.

En 1938-39, l'anglais Colebrook présenta le premier une formule rendant compte de l'écoulement dans la zone de transition entre (VK) et (M) ainsi d'ailleurs que pour $\mathcal{R}$ inférieur (courbe VK) et supérieur (harpe de Nikuradse). Voici la formule de Colebrook :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[\frac{k}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{\mathcal{R}\sqrt{\lambda}}\right]} \qquad (C)$$

On constate qu'elle associe en somme les formules de Von Karman

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2{,}51}{\mathcal{R}\sqrt{\lambda}} \qquad [XI.1.3.2.11]$$

et de Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{k}{3{,}7D} \qquad [XI.1.3.3.2]$$

Pour des valeurs suffisamment faibles du nombre de Reynolds, le second terme du second membre de la formule de Colebrook l'emporte sur le premier et on retrouve la formule de Von Karman, c'est-à-dire que l'écoulement suit approximativement la loi des tuyaux lisses comme le prouve l'expérience.

Pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds, c'est le premier terme qui l'emporte sur le second et on retombe sur la droite de Nikuradse correspondant à la rugosité du tuyau considéré.

Les courbes (C) correspondant à la formule de Colebrook se raccordent effectivement de manière progressive à la courbe (VK) et à la droite (N_n) correspondante (fig. XI.1.3.1).

Toutefois les courbes (C) sont assez différentes des courbes de raccordement obtenues expérimentalement par Nikuradse (courbes (N_n) figure XI.1.3.1).

La différence est due vraisemblablement au type de tuyau utilisé par Colebrook pour ses expériences (rugosité naturelle essentiellement hétérogène des conduites du commerce) alors que Nikuradse avait expérimenté sur des rugosités homogènes.

En fait, la formule de Colebrook est celle qui, actuellement, donne les résultats les plus proches de la réalité dans un vaste domaine de variation du nombre de Reynolds.

Valeur à adopter pour k.

Pour pouvoir appliquer correctement la formule de Colebrook il faut connaître la valeur à attribuer à la dimension moyenne des rugosités k.

Remarquons que k représente ici la rugosité homogène du type "grain de sable" équivalente à la rugosité naturelle et essentiellement hétérogène du tuyau considéré.

Dans son mémoire original Colebrook a donné les valeurs suivantes :

Fonte ordinaire : $k = 0{,}25$ mm
Fer galvanisé : $k = 0{,}15$ mm
Fonte goudronnée : $k = 0{,}12$ mm
Fer forgé : $k = 0{,}04$ mm

Il s'agissait de *tuyaux neufs*.

Dans la pratique il faut évidemment tenir compte de l'augmentation de la rugosité après la pose de la conduite, en raison, notamment, des incrustations.

Nous reviendrons sur ce problème au § XI.1.3.3.8.

Pour les *calculs pratiques* sur les canalisations on peut utiliser les valeurs suivantes :

$k = 2$ mm : Fonte non revêtue, acier non revêtu, béton grossier. Eau de moyenne agressivité.

$k = 1$ mm : Fonte non revêtue, acier non revêtu. Eau peu corrosive.

$k = 0{,}5$ mm : Fonte ou acier avec revêtement de ciment, béton (type Bonna-Socoman).

$k = 0{,}25$ mm : Fonte ou acier avec revêtement de bitume, béton centrifugé.

$k = 0{,}10$ mm : Acier laminé ou soudé (neuf), béton (paroi lisse).

$k = 0{,}05$ mm : Fonte ou acier avec revêtement centrifugé, béton précontraint (type Freyssinet).

$k = 0{,}025$ mm : Amiante-ciment.

Tables et abaques pour l'utilisation de la formule de Colebrook.

Cette formule est de plus en plus utilisée en raison de son caractère universel, de ses bases expérimentales et théoriques et de la large gamme de variation du nombre de Reynolds à laquelle elle s'applique.

Compte tenu de sa forme mathématique assez compliquée, son utilisation est facilitée par l'emploi de tables et abaques.

On trouvera, en annexe, une série d'*abaques dressés par M. Bardin*, Ingénieur des Travaux de la Ville de Paris, et qui permettent de calculer :

a) Le coefficient de résistance λ en fonction de D, U et k pour l'eau à des températures de 10° et 15°C (abaques I, I bis et I ter, ces deux derniers constituant des agrandissements successifs de la partie inférieure de l'abaque I et permettant une meilleure précision sur les faibles valeurs de λ).

b) La perte de charge linéaire J déduite de la formule universelle

$$J = \frac{\lambda}{D}\,\frac{U^2}{2g} \qquad \text{(abaque II)}$$

Cet abaque donne également la section du tuyau, le débit Q en l/s et en m³/jour et le nombre de Reynolds pour l'eau à des températures de 5° et 20°C.

On pourra également utiliser les tables proposées par MM. *Lechapt et Calmon* en 1965 en remplaçant la formule de Colebrook par une formule approchée de la forme $J = LQ^M D^{-N}$ où L, M et N sont constants pour une rugosité donnée k. Pour des valeurs de la vitesse moyenne comprises entre 0,4 et 2 m/s, cette formule conduit à des écarts relatifs inférieurs à 3 % par rapport à la formule de Colebrook ; sa forme monôme se prête à l'utilisation d'un ordinateur qui a permis de dresser les tables(1).

XI.1.3.3.5. *Formules dérivées de la formule de Colebrook*

Divers auteurs ont proposé des *formules explicites en* λ, donc d'un usage plus facile que la formule de Colebrook et susceptibles de traduire l'écoulement dans la zone de transition.

Nous citerons notamment :

La formule de MM. *Koch et Vibert* (France, 1947) :

---

(1) Les tables de Lechapt et Calmon ont été éditées par la Section Technique Centrale des Travaux d'hydraulique du Ministère de l'Agriculture.

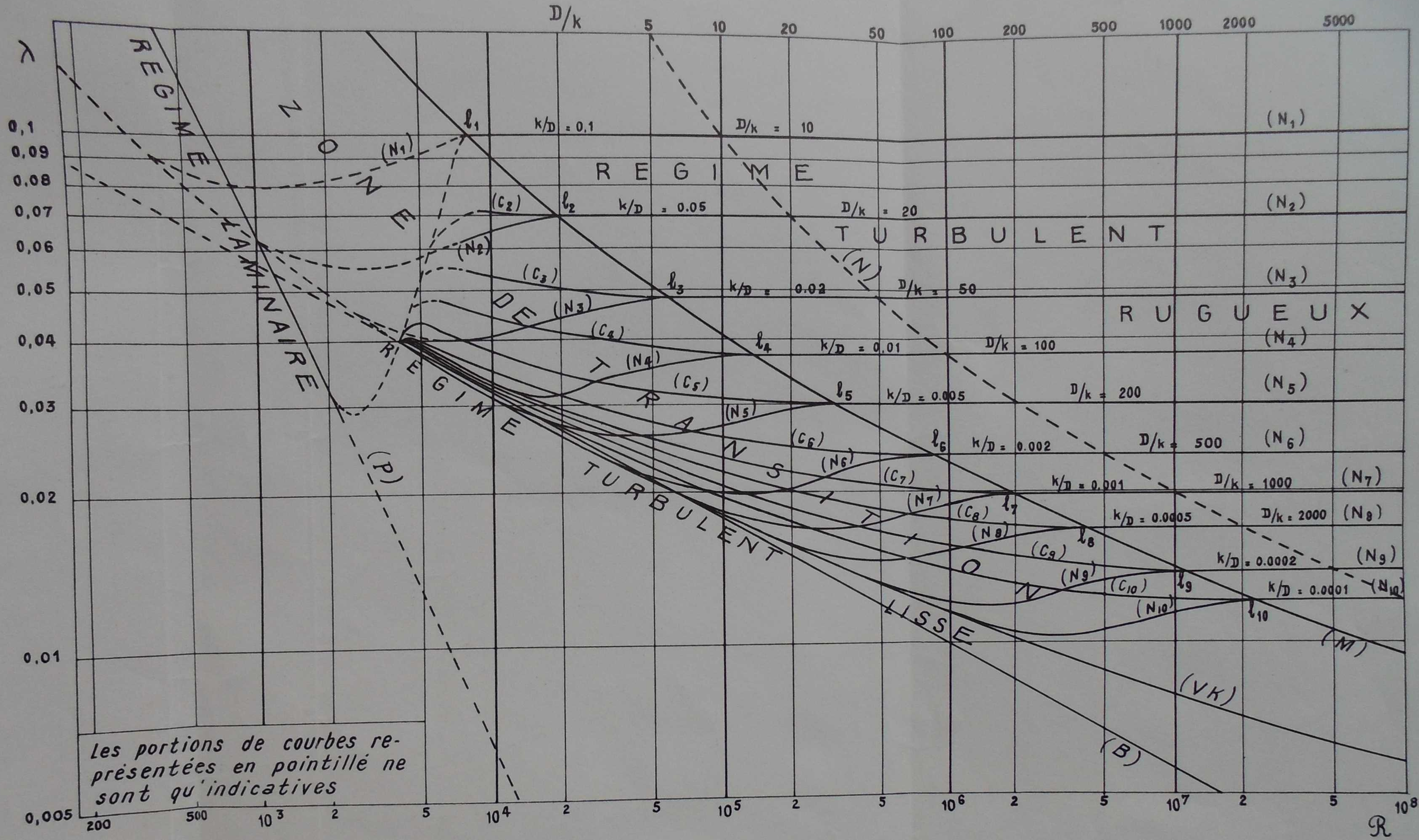


Fig. XI.1.3.1 – Diagramme universel $\lambda = f(\mathcal{R})$

(P) Droite de Poiseuille

(VK) Courbe de Prandtl-Von Karman

(B) Droite de Blasius

(M) Courbe de Moody

(N_1), (N_2), (N_3) ... Courbes (Harpe) de Nikuradse

(C_2), (C_3), (C_4) ... Courbes de Colebrook

(N) Courbe de Nikuradse (D/k est lu sur l'échelle supérieure horizontale)

$C = 105$ à 110 pour une eau faiblement corrosive,

$C = 75$ à 85 pour une eau modérément corrosive,

Pour des eaux plus corrosives il est conseillé de protéger les parois intérieures des canalisations par un revêtement.

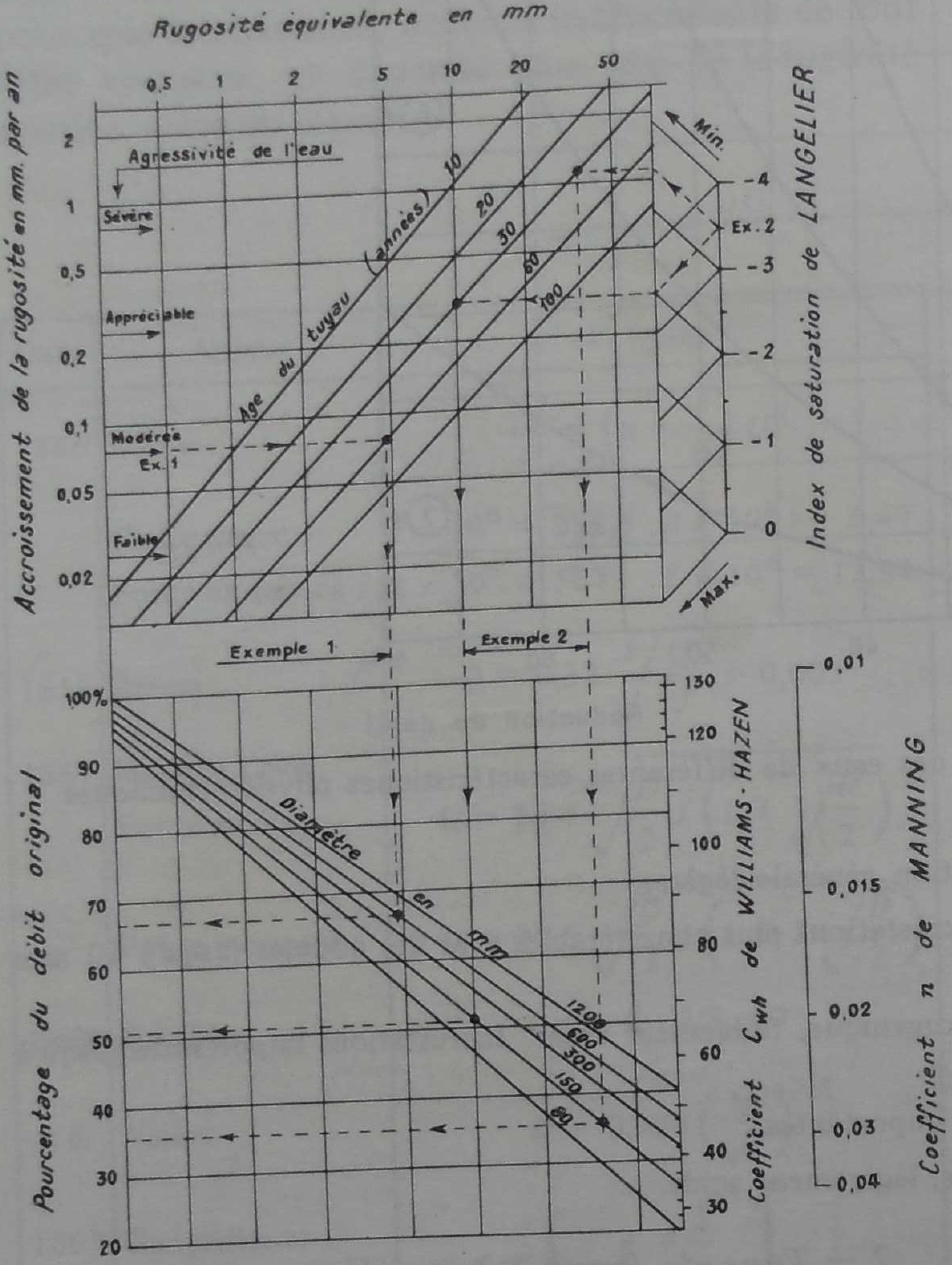


Fig. XI.1.3.3.9 – Diagramme donnant la réduction de débit en fonction de l'âge des canalisations (fonte revêtue) et des qualités de l'eau (d'après P. Lamont, 1952)

Exemple 1 : Pourcentage de débit d'une canalisation de 600 mm après 60 ans de service, dans le cas d'une eau modérément agressive (Réponse : 67 % du débit initial)

Exemple 2 : Pourcentage de débit d'une canalisation de 150 mm après 30 ans de service, dans le cas d'une eau dont l'index de Langelier est − 3,5 (Réponse : entre 36 % et 52 % du débit initial)

d) *Conclusions*

L'influence de l'âge d'une canalisation sur sa perte de charge, c'est-à-dire sur la valeur du coefficient de résistance λ ou la hauteur moyenne k des rugosités, dépend de trois groupes de paramètres :

— *paramètres physico-chimiques caractérisant la paroi* : matière de la canalisation et nature du revêtement ;

— *paramètres hydrauliques caractérisant l'écoulement* : vitesse moyenne, pression, diamètre de la canalisation ;

— *paramètres physico-chimiques de l'eau véhiculée* : acidité, minéralisation, teneur en matières organiques, en métaux (notamment en fer), etc. Ce sont surtout ces derniers paramètres qui ont une influence sur l'augmentation de la rugosité en fonction de l'âge de la conduite ; en particulier les caractéristiques suivantes jouent un rôle important : le pH, le *potentiel électronique* rH_2 qui indique le rapport entre l'hydrogène moléculaire H_2 dont le pouvoir est réducteur et l'oxygène moléculaire O_2 dont le pouvoir est oxydant, enfin la *résistivité* ρ qui mesure la pression osmotique du liquide due aux électrolytes de la solution(1).

XI.1.4. Récapitulation des diverses formules d'écoulement en régime turbulent

Pour synthétiser les indications qui précèdent, nous donnons ci-après un répertoire de formules choisies parmi les plus connues ou les plus usuelles pour le calcul des pertes de charge dans les canalisations en charge.

Elles sont classées suivant le type auquel elles ramènent le coefficient de résistance λ.

1 — *Type de Chézy ou de Dupuit* : $\lambda = C^{te}$

On y trouve les formules les plus anciennes dont la forme générale est celle donnée par Chézy en 1775 :

$$U = C\sqrt{RJ}$$

R désignant ici le rayon hydraulique c'est-à-dire $D/4$.

Donc

$$U = C\sqrt{\frac{D}{4}J} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}DJ = b_1 U^2$$

avec

$$b_1 = \frac{1}{C^2} = \frac{\lambda}{8g}$$

----

(1) M. Lévin.— Influence de l'âge d'une conduite sur sa perte de charge. *La Houille Blanche*, n° 1, 1966.

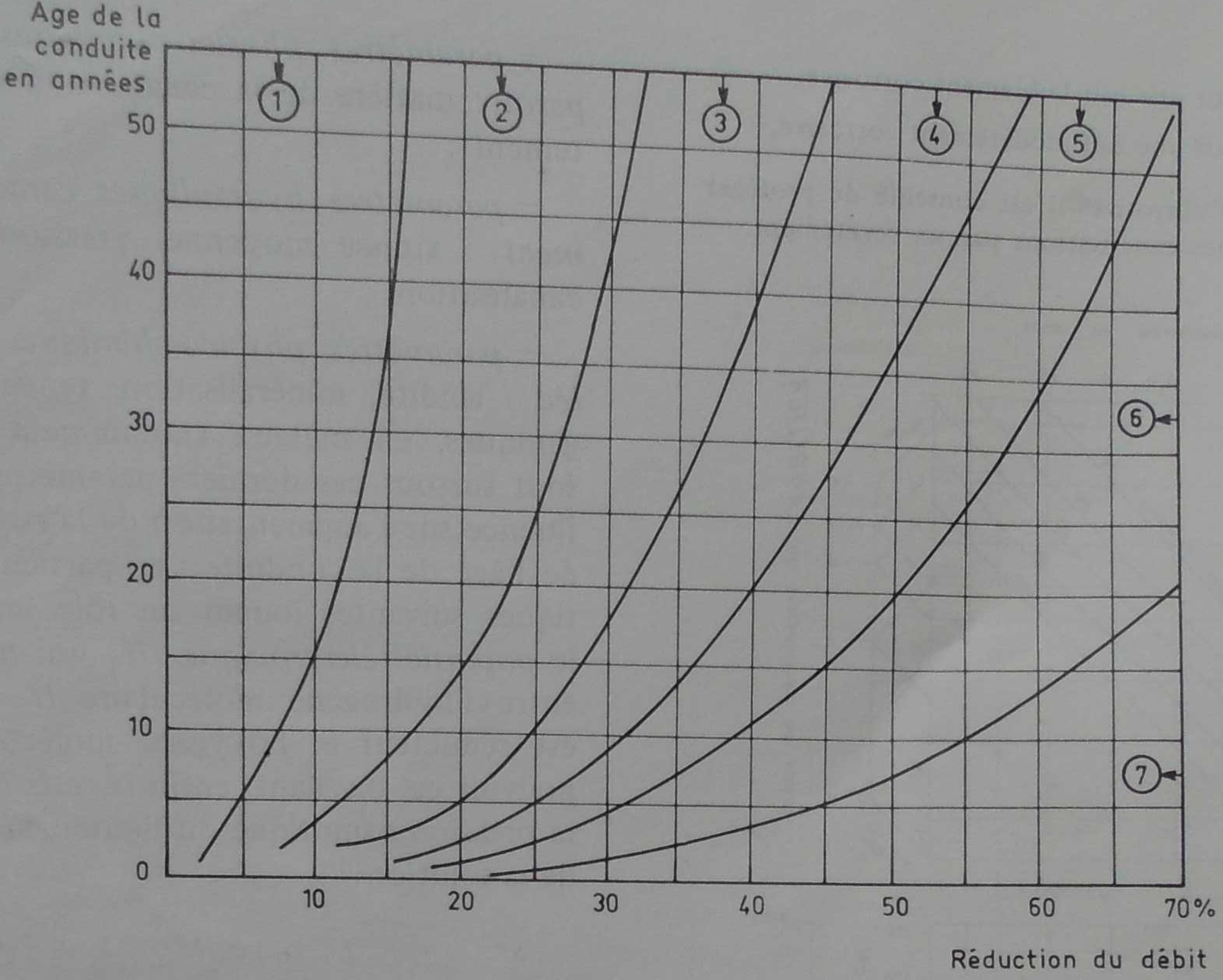


Fig. XI.1.3.3.10 – Réduction du débit d'une canalisation pour des eaux de différentes caractéristiques physico-chimiques

1 — Cas limite d'eaux peu agressives, petits nodules.

2 — Eau filtrée, non aérée et pratiquement non corrosive. Incrustation générale légère.

3 — Eau de puits ou eau dure à action corrosive peu accentuée. Incrustations plus considérables avec des nodules jusqu'à 12 mm de hauteur environ.

4 — Eau de régions marécageuses avec des traces de fer et matière organique, faiblement acide. Incrustations importantes jusqu'à 25 mm de hauteur environ.

5 — Eau acide de roches granitiques. Incrustations et tuberculisations importantes.

6 — Eau très corrosive. Canalisations de petit diamètre avec eau douce, légèrement acide.

7 — Cas limite d'eaux très agressives.

Tous ces coefficients (b_1, C ou λ) *sont constants* dans les formules de ce type, ce qui est contraire à l'expérience.

Date	Auteur	Formule
1775	Chézy	$\frac{DJ}{4} = b_1 U^2$
1786	Du Buat	
1791	Woltmann I	ou
1796	Eytelwein I	$U = C\sqrt{RJ}$
1844	Tadini	
1854	Dupuit	$222 < b_1 \times 10^6 < 400$
s.d.	Rankine	
s.d.	Colombo	$0{,}0174 < \lambda < 0{,}0314$

2 — *Type de Prony* : $\lambda = f(U)$

Pas plus que les formules du type précédent, celles de ce groupe ne répondent à la réalité.

Date	Auteur	Formule
1799	Woltmann II	$J \times 10^6 = 1240 \frac{U^{7/4}}{D}$
1803 1811	Prony Eytelwein II Aubuisson	$\frac{DJ}{4} = \alpha U + \beta U^2$
s.d.	Claudel	$U = 53{,}58\sqrt{RJ} - 0{,}025$
1845	Weisbach	$J \times 10^6 = \left(733 + \frac{483}{\sqrt{U}}\right)\frac{U^2}{D}$
1851	Barré de Saint-Venant	$J \times 10^6 = 1182 - \frac{U^{12/7}}{D}$

3 — *Type de Darcy* : $\lambda = f(D)$

Comme nous l'avons indiqué les formules de ce groupe s'appliquent au *régime turbulent rugueux*, c'est-à-dire aux conduites suffisamment rugueuses pour que la résistance, devenue indépendante de tout effet visqueux, ne dépende plus que de la rugosité relative, donc du diamètre.

Date	Auteur	Formule
1856	Darcy	$\frac{DJ}{4} = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) U^2$
	Fonte neuve :	$\alpha \times 10^6 = 253{,}5$; $\beta \times 10^6 = 6{,}47$
	Fonte en service :	$\alpha \times 10^6 = 507$; $\beta \times 10^6 = 12{,}94$
1858	Bresse	$D = 0{,}32 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{J}} + 0{,}005$
1867	Maurice Lévy	
	Fonte neuve :	$U = 36{,}4 \sqrt{\frac{D}{2} J \left(1 + \sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$
	Fonte incrustée :	$U = 20{,}5 \sqrt{\frac{D}{2} J \left(1 + 3\sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$
1868	Gauckler	$U = k R^{2/5} J^{1/2}$
s.d.	Vallot	$D = 0{,}324 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)^{3/8}$
1869	Ganguillet et Kutter (d'après Flamant, Horton et Gibson)	$U = \left[\frac{A + \frac{1}{n}}{1 + A \frac{n}{\sqrt{R}}}\right] \sqrt{RJ}$
		avec : $A = 23 + \frac{0{,}00155}{J}$
		$0{,}009 < n < 0{,}019$
1886	Franck	$\frac{DJ}{4} = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) U^2$
1897	Bazin }	$U = \frac{87\sqrt{RJ}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$
s.d.	Fantoli }	
1907	Sonne	$J \times 10^6 = \left(870 + \frac{120}{\sqrt{D}} + \frac{30}{D}\right) \frac{U^2}{D}$
s.d.	Forchheimer	$U = k R^{0{,}7} J^{0{,}5}$
1914	Tillmann	$U = \lambda_0 (1 - \lambda) R^{0{,}7} J^{0{,}5}$
s.d.	Manning I	$J \times 10^6 = 3120 \frac{U^2}{D^{1{,}5}}$
s.d.	Manning II	$U = k R^{2/3} J^{1/2}$
s.d.	Christen	$U = k R^{0{,}625} J^{0{,}5}$
1923	Strickler	$U = k R^{2/3} J^{1/2}$
		$70 < k < 200$
1925	Betz II	$J = 10^{-2} \left(\frac{k}{D}\right)^{0{,}314} \frac{U^2}{2gD}$
1947	Koch et Vibert	$\lambda = \frac{m}{D^{0{,}25}}$
		ou : $J = \frac{m}{D^{5/4}} \frac{U^2}{2g}$
		$0{,}012 < m < 0{,}024$

4 — *Type de Reynolds* : $\lambda = f(\mathcal{R}) = \varphi(\overline{UD})$

Comme nous l'avons indiqué les formules de ce type répondent au cas des *parois lisses* et à celui de la *rugosité d'ondulation* (wellenformig). A ce groupe se rattachent les formules du type $J = k \frac{U^m}{D^p}$ avec $m + p = 3$.

Date	Auteur	Formule
1854	Hagen	$U = k R^{5/7} J^{4/7}$ ou $J = A \frac{U^{7/4}}{D^{5/4}}$
1883	Reynolds	$J = \frac{k}{g\mathcal{R}^{2-n}} \frac{U^2}{D}$
		$1{,}82 < n < 2$
1892	Flamant }	$J = k \frac{U^{7/4}}{D^{5/4}}$
s.d.	Masoni }	
1896	Lang I	$\frac{DJ}{4} = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{UD}}\right) U^2$
1913	Blasius	$J = \frac{0{,}3164}{\mathcal{R}^{0{,}25}} \frac{U^2}{2gD}$
1914	Biegeleisen et Bukowski	$J = k \frac{U^{1{,}9}}{D^{1{,}1}}$
		$1200 < k \times 10^6 < 2567$
1914	Lees (parois lisses)	$J = \left(0{,}00714 + \frac{0{,}61}{\mathcal{R}^{0{,}35}}\right) \frac{U^2}{2gD}$

Date	Auteur	Formule
s.d.	Schiller et Hermann	$J = \left(0{,}0054 + \frac{0{,}396}{\mathcal{R}^{0,3}}\right)\frac{U^2}{2gD}$
1925	Betz I (welligkeit)	$J = \xi\,\frac{0{,}3164}{\mathcal{R}^{0,25}}\,\frac{U^2}{2gD}$
1930	Von Karman et Prandtl	$J = \lambda\,\frac{U^2}{2gD}$ avec : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\mathcal{R}\sqrt{\lambda} - 0{,}80$
1932	Nikuradse (parois lisses)	$J = \left(0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathcal{R}^{0,237}}\right)\frac{U^2}{2gD}$
1935	Lazard	$J = \left(0{,}00372 + \frac{0{,}247}{\mathcal{R}^{0,25}}\right)\frac{U^2}{2gD}$
1951	Scimemi	$U = 61{,}55\,D^{0,68}J^{0,56}$ ou : $\lambda = \frac{0{,}01266}{(\nu\mathcal{R})^{0,2142}}$ ou (pour de l'eau à 20° C) : $\lambda = \frac{0{,}2442}{\mathcal{R}^{0,2142}}$

5 — *Types divers* : $\lambda = f(U, D)$

Les formules classées dans ce groupe n'appartiennent à aucun des types précédents ; λ est fonction de U et D, ces deux variables étant indépendantes. C'est le type de formule *le plus complet et le plus général* et il peut servir de transition entre le type de Darcy et celui de Reynolds.

Date	Auteur	Formule
1873	Lampe	$J \times 10^6 = 755{,}5\,\frac{U^{1,802}}{D^{1,25}}$
1883	Hamilton Smith jnr.	$DJ \times 10^6 =$ $673\,U^2 + \left(460 + \frac{7{,}1}{D}\right)U^{3/2}$
1886 s.d.	Unwin } Thrupp et Tutton	$J = k\,\frac{U^n}{D^p}$ $930 < k \times 10^6 < 1860$ $1{,}85 < n < 2$ $1{,}13 < p < 1{,}17$
1902	Williams et Hazen	$U = 0{,}85\,C_{wh}R^{0,63}J^{0,54}$ ou : $\lambda = \frac{13{,}68\,g}{C_{wh}^{1,85}U^{0,15}D^{0,17}}$

Date	Auteur	Formule
1903	Saph et Schoder	$J = k\,\frac{U^n}{D^{1,25}}$
1907	Vidal et Kauffmann	$J = \frac{\alpha U^{1,5} + \beta U^4}{D^{1,25}}$
s.d.	Moritz	$J \times 10^6 = 715\,\frac{U^{1,801}}{D^{1,261}}$
s.d.	Brabbee I	$J \times 10^6 = 446\,\frac{U^{1,781}}{D^{1,26}}$
s.d.	Brabbee II	$J \times 10^6 = 382\,\frac{U^{1,86}}{D^{1,37}}$
1913	Mougnié	$J = k\,\frac{U^n}{D^{1,25}}$ $620 < k \times 10^6 < 2000$ $1{,}75 < n < 2$
1915	Lang II	$J = f\left(\frac{a}{\sqrt{D}}, \nu, \overline{UD}\right)\frac{U^2}{2gD}$
1920	Koseny	$U = 65\left[1 + \left(1 - \frac{4}{\sqrt{D}}\right)\frac{\sqrt{DJ}}{4}\right]$ $\frac{\sqrt{DJ}}{4}$
	Beyerhaus	$U = k\,R^{0,7}J^{0,6}$
1925	Wegmann et Aeryns	$J \times 10^6 = 724\,\frac{U^{1,856}}{D^{1,342}}$
1930	Scobey	$J \times 10^6 = 2587\,k_s\,\frac{U^{1,89}}{D^{1,09}}$ $0{,}32 < k_s < 0{,}52$ (conduites neuves)
1939	Colebrook	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\,2\log\left[\frac{k}{3{,}7\,D} + \frac{2{,}51}{\mathcal{R}\sqrt{\lambda}}\right]$ $0{,}1$ mm $< k <$ 2 à 10 mm (rugosité équivalente)
1957	Altschoul	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}8\log\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}\left(\frac{k}{10\,D}\right) + 7}$ $\lambda = 0{,}1\sqrt{\frac{1{,}46\,k}{D} + \frac{100}{\mathcal{R}}}$
1963	Citrini	$\lambda = \frac{1 + \frac{8}{\mathcal{R}^{k/D}}}{\left(2\log 3{,}71\,\frac{D}{k}\right)^2}$

XI.2. UTILISATION PRATIQUE DES FORMULES – PROBLÈMES USUELS

A l'équation générale :

$$\frac{1}{4} DJ = b_1 U^2 \quad \text{ou} \quad J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}$$

on associe l'équation :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U$$

En éliminant U entre ces deux équations on obtient une relation entre J, Q et D, soit :

$$J = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 D^5} \qquad [XI.2.1]$$

ou

$$J = \frac{8 \lambda Q^2}{g \pi^2 D^5} \qquad [XI.2.2]$$

L'une ou l'autre de ces relations permet de calculer l'une des trois variables J, Q ou D connaissant les deux autres.

Pour faciliter les calculs on utilise des tables ou des abaques dressés en utilisant la valeur de b_1 ou λ donnée par une des nombreuses formules étudiées précédemment.

Toutefois, dans un certain nombre de cas que nous étudierons en premier lieu, la perte de charge unitaire J est donnée a priori en fonction de considérations topographiques ou hydrauliques.

XI.2.1. Détermination de J et tracé de la ligne des niveaux piézométriques dans quelques cas usuels

XI.2.1.1. *Réservoir à niveau constant alimentant une canalisation rectiligne débouchant à l'air libre* (fig. XI.2.1.1.1)

Le niveau AB dans le réservoir étant maintenu constant, le régime est permanent et on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli tout le long d'un filet liquide CDO ayant son origine en C à la surface libre AB du réservoir et son extrémité en O au débouché aval de la canalisation où régne la pression atmosphérique.

Entre les points C (origine) et O (extrémité) le théorème donne :

$$j = H - \frac{\alpha U^2}{2g}$$

j est la perte de charge entre C et O ; elle se décompose en trois parties :

a) j_1 de C à D, résultant de la mise en vitesse de l'eau dans le réservoir ; elle est très faible, de l'ordre de $0{,}04 \dfrac{U^2}{2g}$

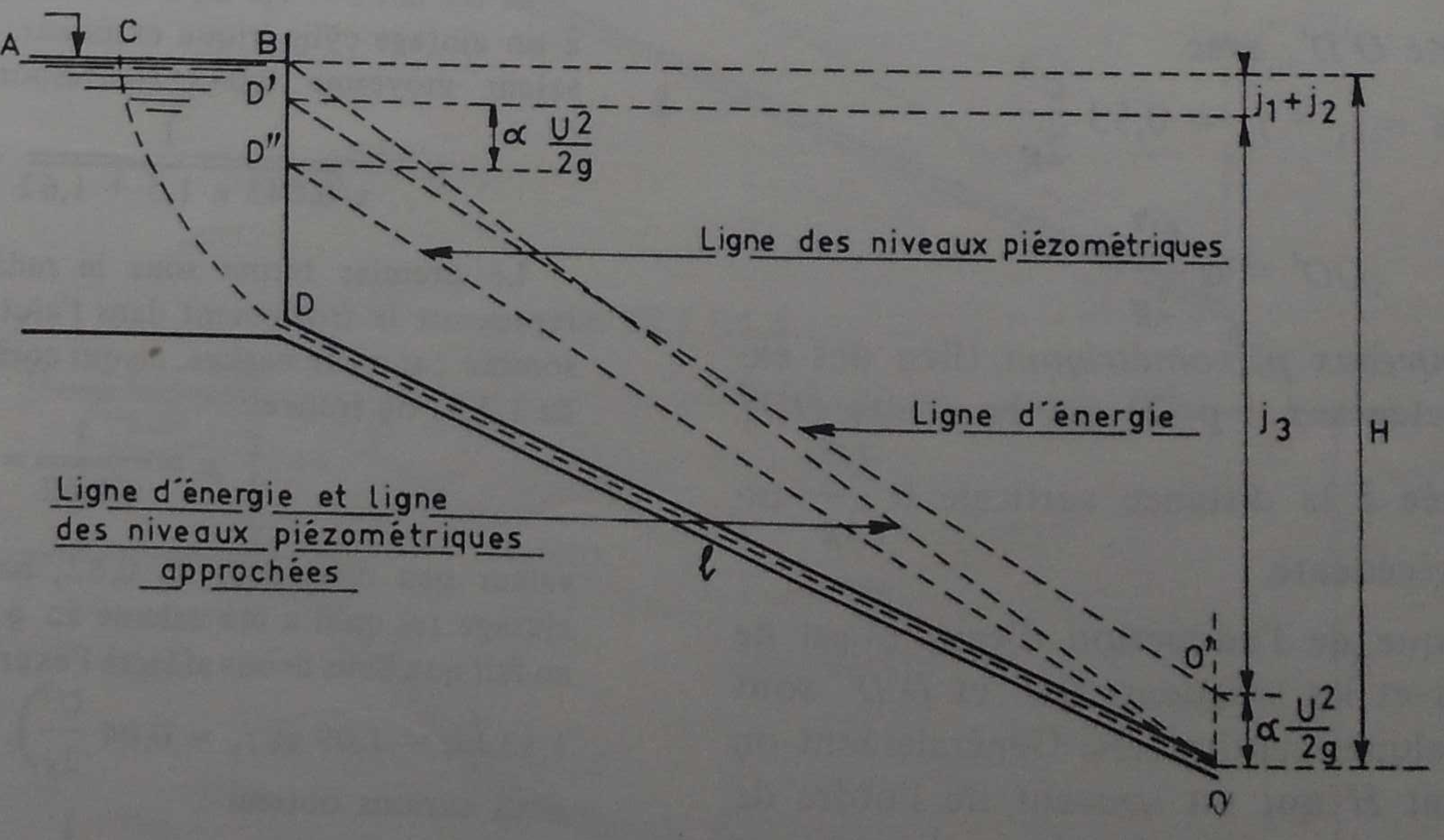


Fig. XI.2.1.1.1 – Réservoir à niveau constant alimentant une canalisation rectiligne débouchant à l'air libre

b) j_2 due au rétrécissement brusque en D à l'origine de la canalisation dans le fond du réservoir. La valeur de j_2 a été calculée au § VII.6.3.3.2 et estimée à $0,49 \frac{U^2}{2g}$

c) j_3 le long de la canalisation supposée rectiligne, de diamètre constant et de longueur l. C'est ce que nous cherchons.

On peut donc écrire

$$j_3 = H - \alpha \frac{U^2}{2g} - 0,53 \frac{U^2}{2g}$$

Le coefficient α est fonction de la plus ou moins grande régularité de répartition des vitesses à l'intérieur de la canalisation ; nous savons qu'il dépend notamment de la nature du régime d'écoulement caractérisé par le nombre de Reynolds UD/ν et du degré de rugosité des parois du tuyau. Si on adopte une valeur moyenne $\alpha = 1,09$, il vient :

$$j_3 = H - 1,62 \frac{U^2}{2g}$$

et la perte de charge par mètre de canalisation est donc :

$$J = \frac{j_3}{l} = \frac{H - 1,62 \frac{U^2}{2g}}{l}$$

La *ligne d'énergie* (lieu des extrémités des vecteurs $z + \frac{p}{\varpi} + \alpha \frac{U^2}{2g}$) est donc la droite $O'D'$, avec

$$D'B = j_1 + j_2 = 0,53 \frac{U^2}{2g}$$

et

$$OO' = \alpha \frac{U^2}{2g}$$

et la *ligne des niveaux piézométriques* (lieu des extrémités des vecteurs $z + p/\varpi$) est la droite OD'' parallèle et située à la distance verticale $\alpha \frac{U^2}{2g}$ au-dessous de la précédente.

Dans la pratique de l'adduction d'eau, U est de l'ordre de 1 m/s et les longueurs BD' et $D'D''$ sont de l'ordre de quelques centimètres. Généralement on les néglige devant H qui est souvent de l'ordre de plusieurs mètres et *on confond la ligne d'énergie et la ligne des niveaux piézométriques avec la droite* OB joignant l'extrémité aval de la canalisation à la surface libre du réservoir.

Dans ce cas la perte de charge par mètre le long de la canalisation est

$$\boxed{J = \frac{H}{l}}$$

Remarques :

a) *Calcul de la vitesse moyenne dans la canalisation.*

A l'équation générale :

$$J = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g}$$

associons l'expression exacte de J :

$$J = \frac{H - 1,62 \frac{U^2}{2g}}{l}$$

En éliminant J entre ces deux équations il vient, tous calculs effectués :

$$U = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{\frac{\lambda l}{D} + 1,62}}$$

ou plus simplement :

$$U = \mu \sqrt{2gH} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda l}{D} + 1,62}}$$

La vitesse moyenne dans la canalisation est donc celle que l'on aurait sans perte de charge ($U = \sqrt{2gH}$) affectée du *coefficient de réduction* μ. Examinons comment varie ce coefficient.

Si on fait $l = 1,5\ D$, c'est-à-dire si la canalisation se réduit à un ajutage cylindrique extérieur, on a en prenant pour λ la valeur moyenne 0,043 (correspondant à $b_1 = 0,00055$) :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{0,043 \times 1,5 + 1,62}} = \frac{1}{\sqrt{0,065 + 1,62}}$$

Le premier terme sous le radical correspond à $\lambda l/D$ et représente le frottement dans l'ajutage ; il est égal à 4 % de la somme ; si on le néglige, ce qui correspond pour μ à une erreur de 1,5 %, on trouve :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,62}} = 0,78$$

valeur peu différente de 0,82, coefficient de débit d'un tel ajutage tel qu'il a été calculé au § IX.1.2. La différence tient au fait que nous avons affecté l'expression $U^2/2g$ du coefficient $1,13 \left(\alpha = 1,09 \text{ et } j_1 = 0,04 \frac{U^2}{2g}\right)$. Si nous ne l'avions pas fait, nous aurions obtenu :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1,49}} = 0,82$$

Si le rapport l/D augmente, le coefficient μ diminue car le terme $\lambda l/D$ représentant les frottements le long de la canalisation prend de plus en plus d'importance par rapport au terme fixe 1,62 correspondant à la mise en vitesse et à la perte de charge à l'entrée de la canalisation.

Voici par exemple quelques valeurs de μ en adoptant pour λ la valeur moyenne 0,043 :

l/D	μ
10	0,70
15	0,66
20	0,63
30	0,58
40	0,54
50	0,51
100	0,41
200	0,31

Bien entendu ces valeurs ne sont qu'approximatives puisqu'on a donné à λ une valeur moyenne constante.

On comprend alors pourquoi Bélidor pouvait écrire vers 1750 dans son "Architecture hydraulique", en commentant des essais de Couplet sur les lois de l'écoulement dans les canalisations :

"Les expériences n'ont été faites que sur des conduites très courtes ou sur des conduites terminées par des ajutages, dans lesquelles conduites l'eau n'a pas, à beaucoup près, les mêmes frottements que dans les grandes et d'où l'eau sort à gueule bée, c'est-à-dire par un orifice égal au cercle du tuyau"

b) Soit $l_1 = BB_1$ la projection horizontale de la canalisation (fig. XI.2.1.1.2).

Si on admet les approximations précédentes on a :

$$J = \frac{H}{l} = \frac{H}{l_1} \cos i$$

en désignant par i l'angle de la canalisation avec le plan horizontal ; si comme c'est généralement le cas dans la pratique de l'adduction d'eau, cet angle est petit, on peut faire l'approximation :

$$\cos i \simeq 1 \quad \text{et} \quad J \simeq \frac{H}{l_1} = \operatorname{tg} \beta$$

en désignant par β l'angle de la ligne des niveaux piézométriques BO avec l'horizontale.

En définitive, dans le cadre des hypothèses et des approximations faites (en particulier lorsque la pente réelle de la canalisation est faible), *la perte de charge par mètre J le long de la canalisation est égale à la pente de la ligne des niveaux piézométriques* ; on désigne d'ailleurs quelquefois J par l'expression *"pente hydraulique"* de l'écoulement.

c) *Le résultat obtenu est indépendant de la forme du profil en long de la canalisation.* En particulier si la canalisation est constituée d'une série de tronçons rectilignes de même diamètre mais de pentes différentes (fig. XI.2.1.1.3), sous réserve

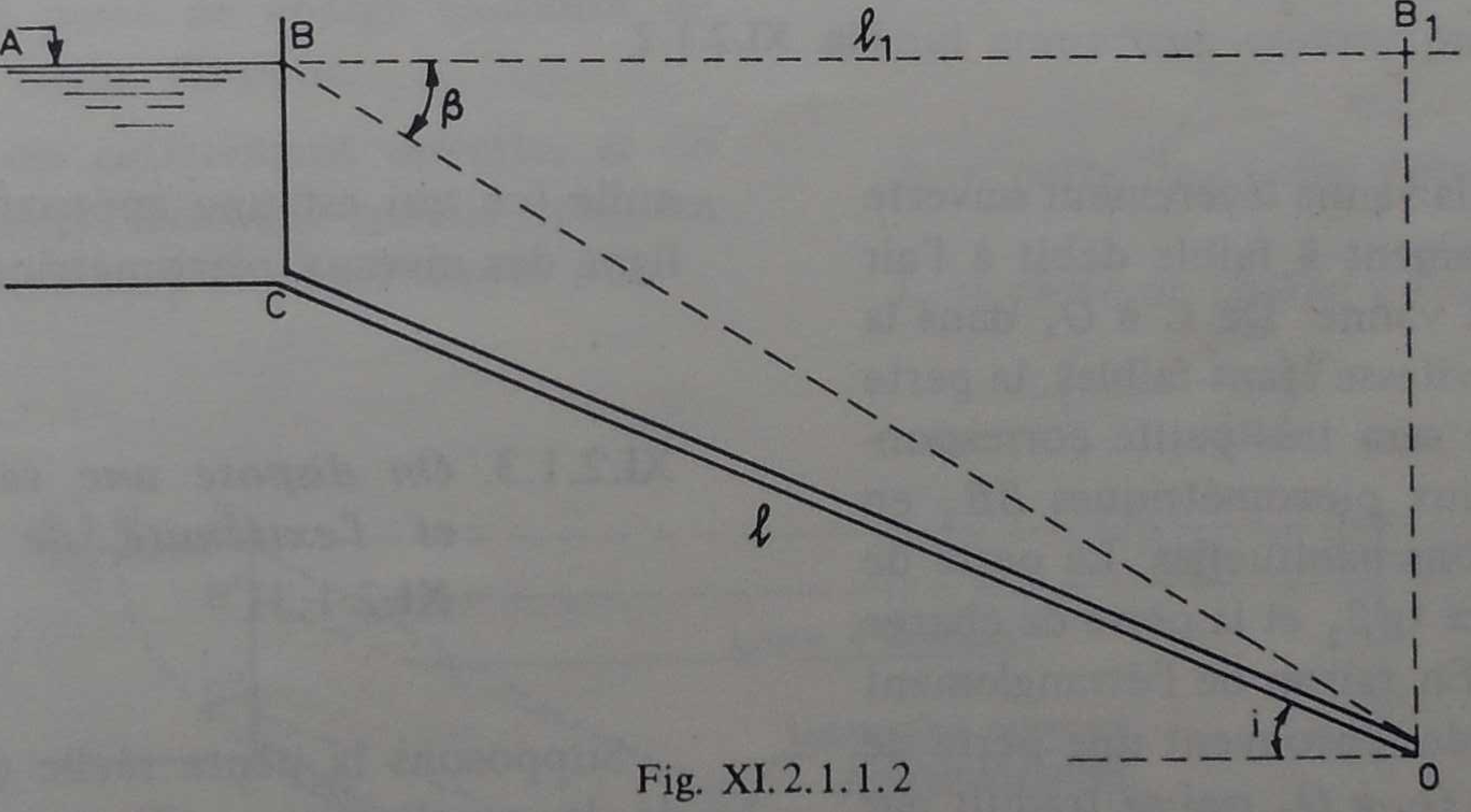


Fig. XI.2.1.1.2

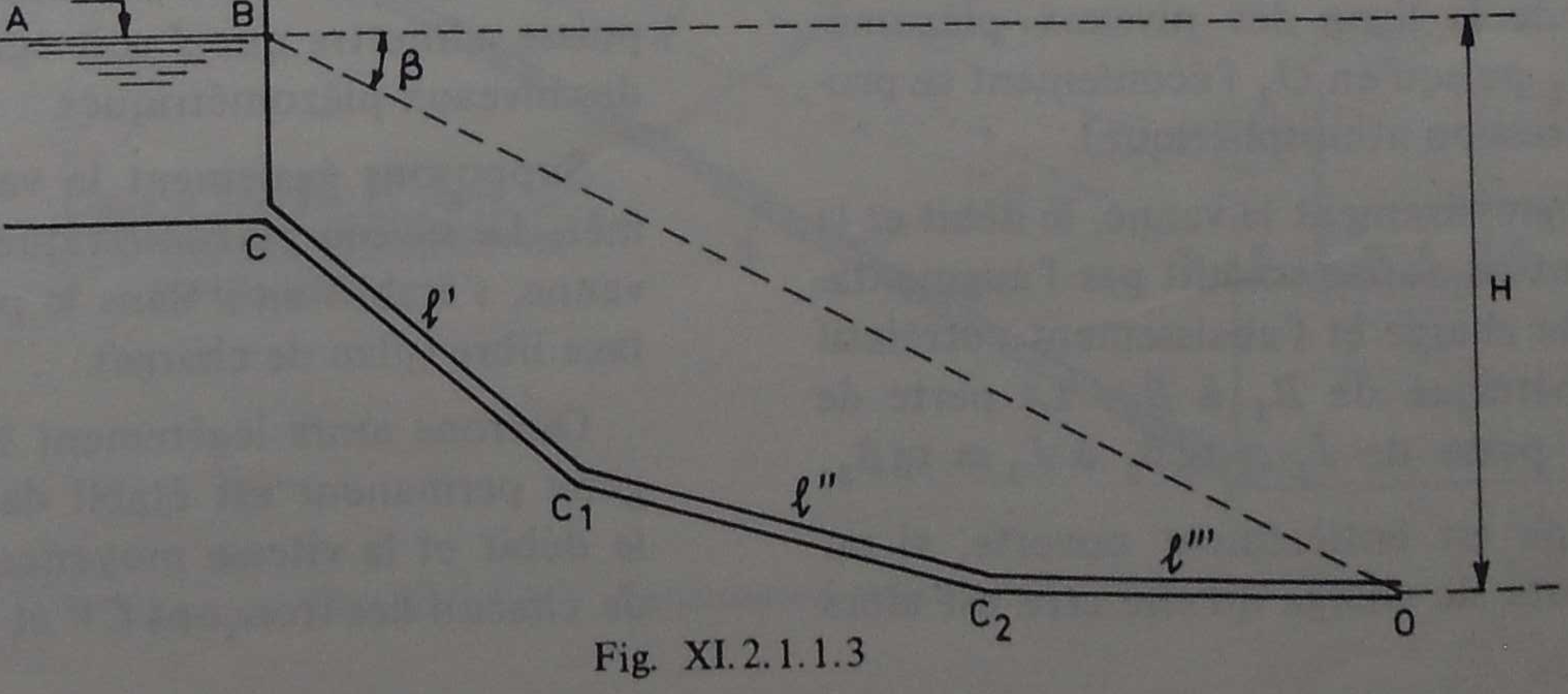


Fig. XI.2.1.1.3

que ces pentes réelles soient suffisamment faibles et que les pertes de charge dues aux coudes C_1, C_2 puissent être négligées, la ligne des niveaux piézométriques peut continuer d'être assimilée à la droite BO et on a encore

$$J \simeq \frac{H}{l' + l'' + l'''} \simeq \operatorname{tg} \beta .$$

d) *Si le niveau AB dans le réservoir n'est pas maintenu constant*, en particulier si le réservoir n'est pas alimenté, il se vidange par la canalisation et le régime n'est plus permanent mais *graduellement variable*. La loi de décroissance du débit en fonction du temps et la loi de vidange du réservoir peuvent être établies en intégrant les équations différentielles traduisant le régime supposé permanent dans un intervalle de temps très petit. Nous étudierons ce problème à propos du transvasement d'un liquide d'un réservoir dans un autre (cf. § XI.2.1.5).

XI.2.1.2. *On dispose une vanne à l'extrémité de la canalisation* (fig. XI.2.1.2)

Supposons la vanne fermée. Il n'y a pas d'écoulement dans la canalisation et la pression en O_1, immédiatement à l'amont de la vanne, est évidemment égale à $\overline{\omega} H$ (loi de l'hydrostatique) ; le niveau piézométrique correspondant est donc B_1.

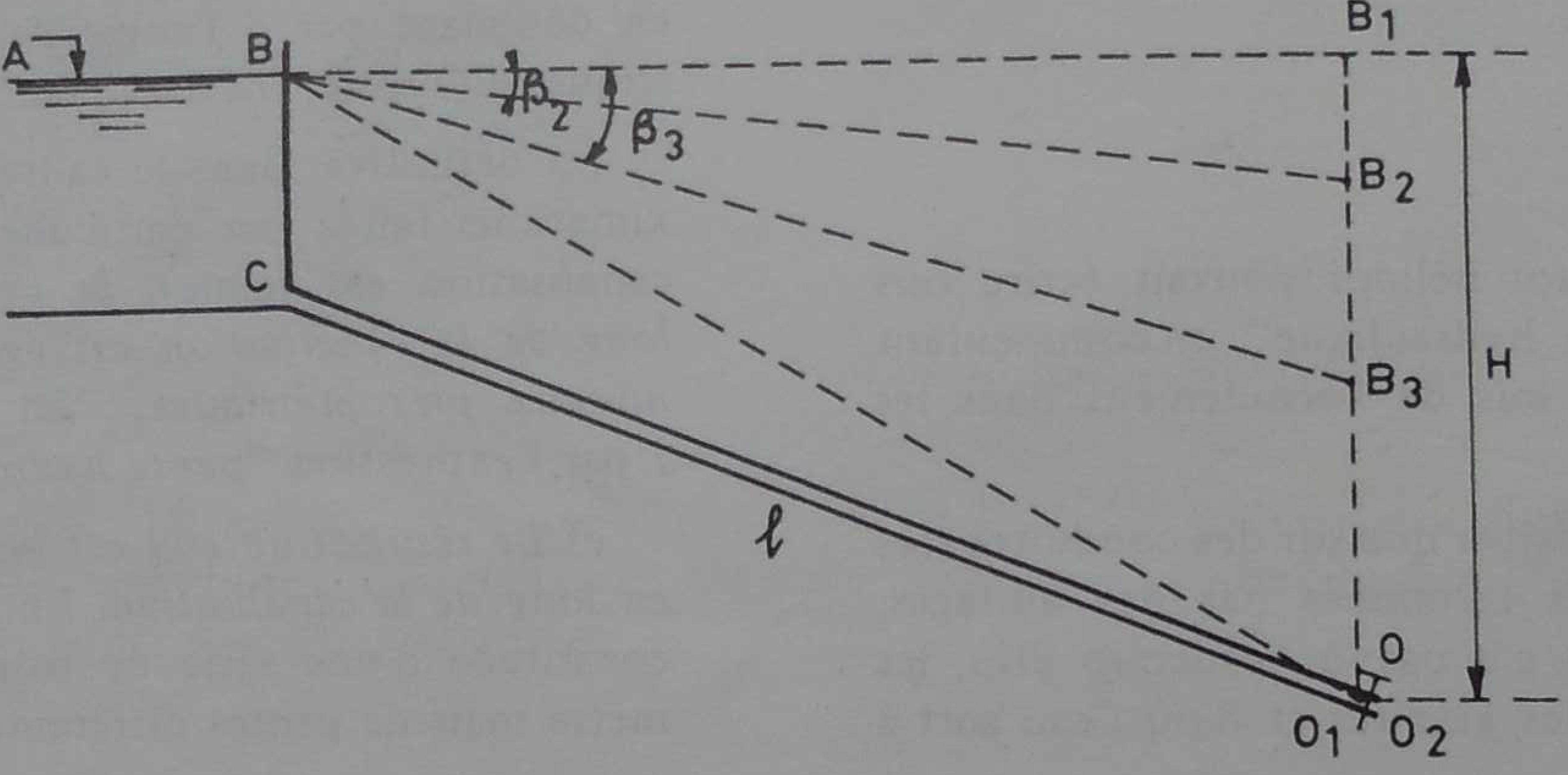


Fig. XI.2.1.2

Supposons maintenant la vanne légèrement ouverte afin de réaliser un écoulement à faible débit à l'air libre en O_2 à l'aval de la vanne. De C à O_1 dans la canalisation, le débit et la vitesse étant faibles, la perte de charge correspondante sera très petite correspondant à la ligne des niveaux piézométriques BB_2 en adoptant les approximations habituelles. La perte de charge par mètre sera $J_2 \simeq \operatorname{tg} \beta_2$ et la perte de charge totale $j_2 = J_2 l = B_1 B_2$. En raison de l'étranglement de la vanne les filets liquides éprouvent une perte de charge très importante de O_1 à O_2 qui se traduit par le décrochement de la ligne des niveaux piézométriques de B_2 à O_2 puisqu'en O_2 l'écoulement se produit à l'air libre (pression atmosphérique).

Si on ouvre progressivement la vanne, le débit et la vitesse s'accroissent ce qui se traduit par l'augmentation de la perte de charge et l'abaissement corrélatif du niveau piézométrique de B_2 à B_3. La perte de charge par mètre passe de $J_2 \simeq \operatorname{tg} \beta_2$ à $J_3 \simeq \operatorname{tg} \beta_3$.

Lorsque la vanne est entièrement ouverte, si on suppose que la perte de charge qu'elle crée est alors nulle (ce qui est une approximation) on retrouve la ligne des niveaux piézométriques BO.

XI.2.1.3. *On dispose une vanne entre le réservoir et l'extrémité de la canalisation* (fig. XI.2.1.3)

Supposons la pente réelle des différents tronçons de la canalisation suffisamment faible pour qu'on puisse admettre que J soit égale à la pente de la ligne des niveaux piézométriques.

Supposons également la vanne V entièrement fermée. Le niveau piézométrique en V_1, à l'amont de la vanne, s'établit en v dans le plan horizontal de la surface libre (plan de charge).

Ouvrons alors légèrement la vanne ; lorsque le régime permanent est établi dans toute la canalisation le débit et la vitesse moyenne sont constants le long de chacun des tronçons CV et VO (supposés de même

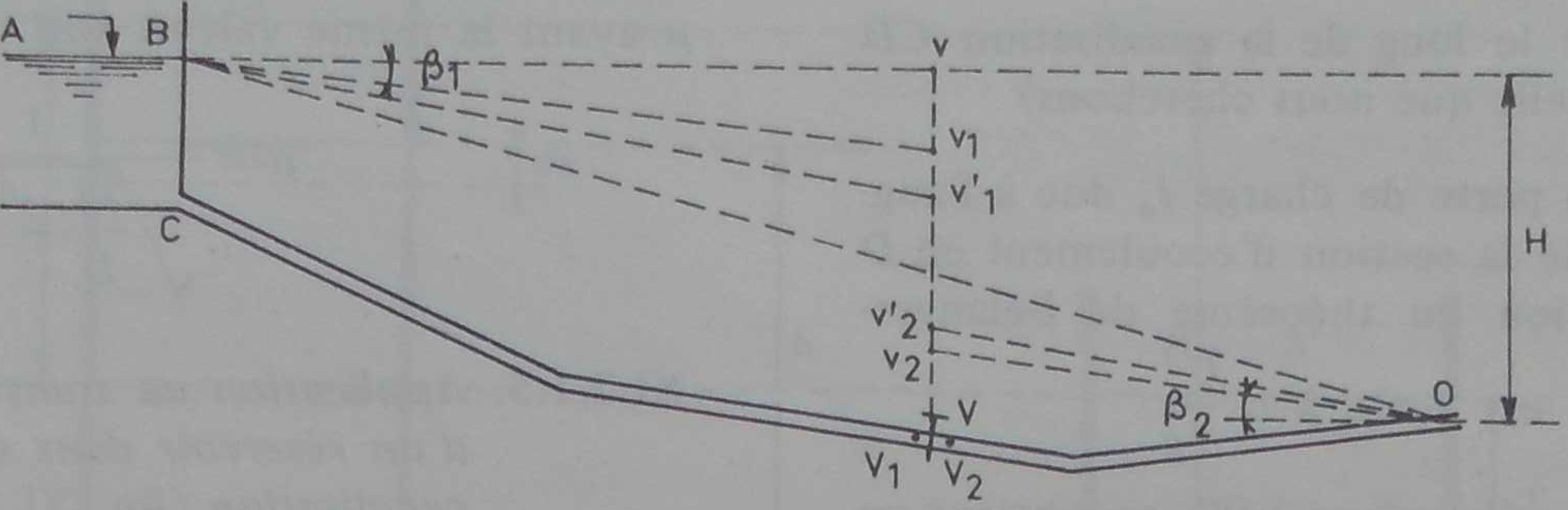


Fig. XI.2.1.3

diamètre). La perte de charge par mètre y est donc la même et, en négligeant les pertes de charge locales aux coudes et à l'origine C de la canalisation, les lignes des niveaux piézométriques sur les deux tronçons considérés sont parallèles puisque

$$J_1 = \operatorname{tg} \beta_1 = J_2 = \operatorname{tg} \beta_2 .$$

Comme la ligne amont doit passer par B et la ligne aval par O, le tracé des lignes piézométriques est immédiat. Le décrochement $v_1 v_2$ représente la perte de charge due à la vanne étranglée.

Au fur et à mesure qu'on ouvre la vanne la ligne des niveaux piézométriques s'incline de plus en plus (ligne $Bv'_1 v'_2 O$) et la perte de charge résultant de l'étranglement de la vanne diminue.

Lorsque la vanne est entièrement ouverte, si on néglige la perte de charge résiduelle qu'elle crée, on retrouve la ligne des niveaux piézométriques BO.

XI.2.1.4. *Canalisation reliant deux réservoirs* (fig. XI.2.1.4)

Si on suppose les niveaux maintenus constants dans chacun des deux réservoirs le régime est permanent et on peut alors appliquer le théorème de Bernoulli entre les points M et N d'un filet liquide ayant son origine en M sur la surface libre du réservoir supérieur et son extrémité en N sur la surface libre du réservoir inférieur.

En négligeant les vitesses aux points M et N on obtient :

$$j = H$$

j représentant la perte de charge *totale* entre M et N qui comprend, comme précédemment (§ XI.2.1.1) :

j_1 = perte de charge entre M et $C\left(0{,}04 \dfrac{U^2}{2g}\right)$,

j_2 = perte de charge à l'origine de la canalisation, en $C\left(0{,}49 \dfrac{U^2}{2g}\right)$,

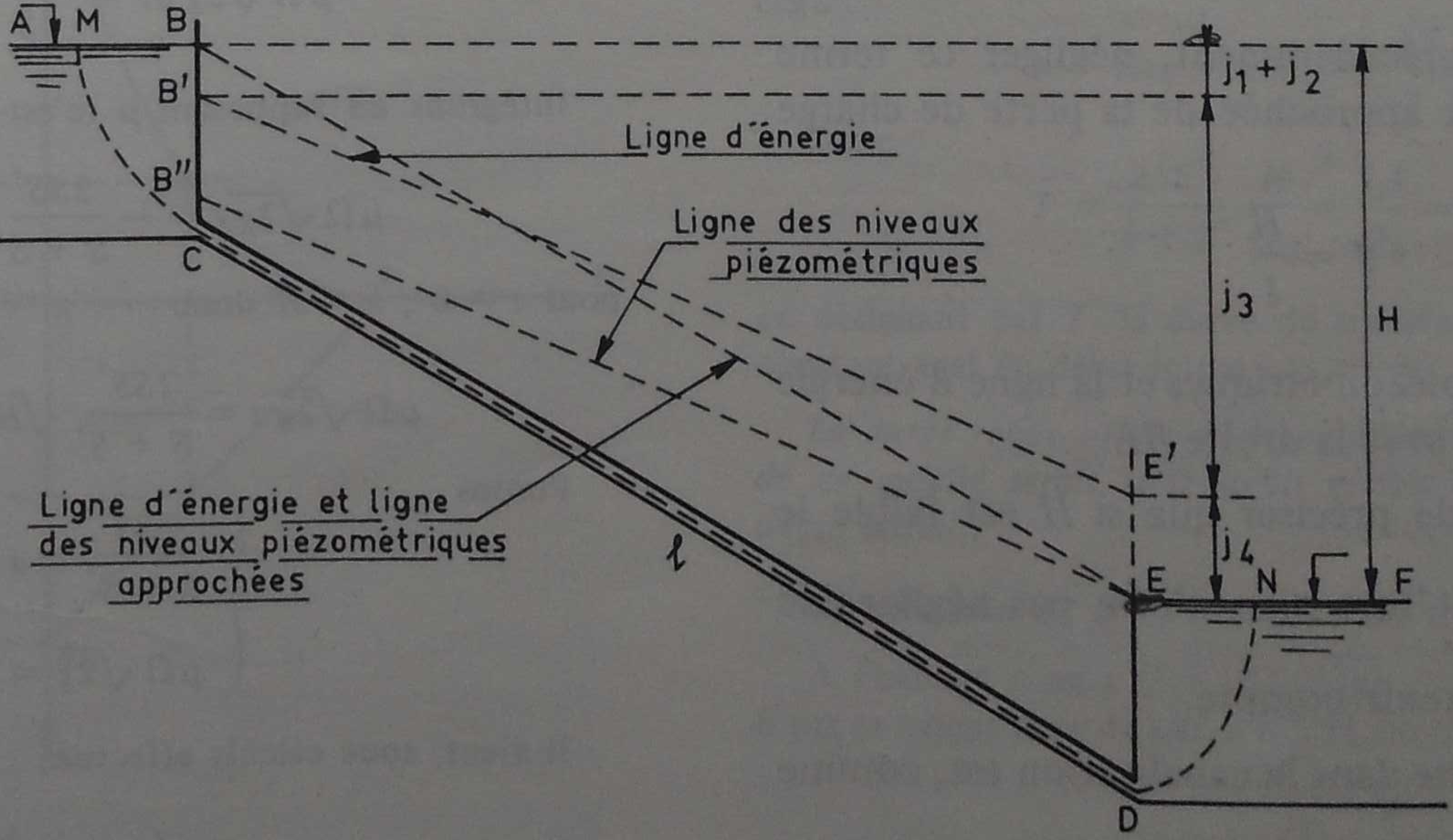


Fig. XI.2.1.4 – Canalisation reliant deux réservoirs

j_3 = perte de charge le long de la canalisation CD de longueur l (celle que nous cherchons)

Il s'y ajoute ici la perte de charge j_4 due à l'augmentation brusque de la section d'écoulement en D et qui, par application du théorème de Bélanger-Borda (§ VII.6.3.1), est égale à $\alpha \dfrac{U^2}{2g}$.

En adoptant pour α la valeur 1,09, on obtient en définitive :

$$j_3 = H - (j_1 + j_2 + j_4)$$

$$j_3 = H - 1{,}62 \frac{U^2}{2g}$$

et

$$J = \frac{j_3}{l} = \frac{H - 1{,}62 \dfrac{U^2}{2g}}{l}$$

La *ligne d'énergie* est la droite $B'E'$ (fig. XI.2.1.4) telle que :

$$BB' = j_1 + j_2 = 0{,}53 \frac{U^2}{2g}$$

$$EE' = j_4 = \alpha \frac{U^2}{2g}$$

La ligne des niveaux piézométriques est la droite $B''E$ parallèle et située à la distance verticale $\alpha \dfrac{U^2}{2g}$ au-dessous de la précédente.

Si la hauteur H est grande par rapport à $1{,}62 \dfrac{U^2}{2g}$ on peut, comme précédemment, négliger ce terme et obtenir la valeur approchée de la perte de charge par mètre :

$$J = \frac{H}{l}$$

la ligne des niveaux piézométriques et la ligne d'énergie se confondant alors avec la droite BE.

Mais il est bon de préciser que si H est faible le terme $1{,}62 \dfrac{U^2}{2g}$ peut fort bien n'être pas négligeable et il faut alors en tenir compte.

La *vitesse moyenne* dans la canalisation est, comme précédemment :

$$U = \mu \sqrt{2gH}$$

μ ayant la même valeur, soit :

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\lambda l}{D} + 1{,}62}}$$

XI.2.1.5. *Application au transvasement d'un liquide d'un réservoir dans un autre à l'aide d'une canalisation* (fig. XI.2.1.5.1)

Soient l la longueur et Ω la section de la canalisation réunissant les deux réservoirs supposés prismatiques, de sections constantes S et S'. Soit H la dénivellation initiale ; au temps t elle est devenue h.

A cet instant le débit de la canalisation peut être exprimé par :

$$Q = \mu \Omega \sqrt{2gh}$$

le coefficient μ ayant la valeur calculée au § XI.2.1.4.

Pendant l'intervalle de temps infiniment petit dt qui suit le temps t, le niveau s'abaisse de dz dans le réservoir supérieur et s'élève de dz' dans le réservoir inférieur et la dénivellation h diminue de dh. On a donc :

$$dh = dz - dz' \qquad [XI.2.1.5.1]$$

Le volume écoulé pendant l'intervalle de temps dt est :

$$\mu \Omega \sqrt{2gh}\, dt = - S\, dz = S' dz' \qquad [XI.2.1.5.2]$$

a) *Variation de h en fonction du temps.* Les relations [*XI.2.1.5.2*] s'écrivent :

$$\mu \Omega \sqrt{2gh}\, dt = \frac{dz}{-\dfrac{1}{S}} = \frac{dz'}{\dfrac{1}{S'}} = \frac{dz - dz'}{-\left(\dfrac{1}{S} + \dfrac{1}{S'}\right)} = \frac{dh}{-\dfrac{S + S'}{SS'}}$$

$$\mu \Omega \sqrt{2g}\, dt = - \frac{SS'}{S + S'} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

Intégrons en supposant μ (c'est-à-dire b_1 ou λ) constant.

$$\mu \Omega \sqrt{2g}\, t = - \frac{2SS'}{S + S'} \sqrt{h} + C^{te}$$

pour $t = 0$, $h = H$ donc

$$\mu \Omega \sqrt{2g}\, t = \frac{2SS'}{S + S'} \sqrt{H} - \frac{2SS'}{S + S'} \sqrt{h}$$

Posons

$$\begin{cases} \dfrac{2SS'}{S + S'} = a \\ \mu \Omega \sqrt{2g} = b \end{cases}$$

Il vient, tous calculs effectués :

$$h = \left(\sqrt{H} - \frac{b}{a} t\right)^2 \qquad [XI.2.1.5.3]$$

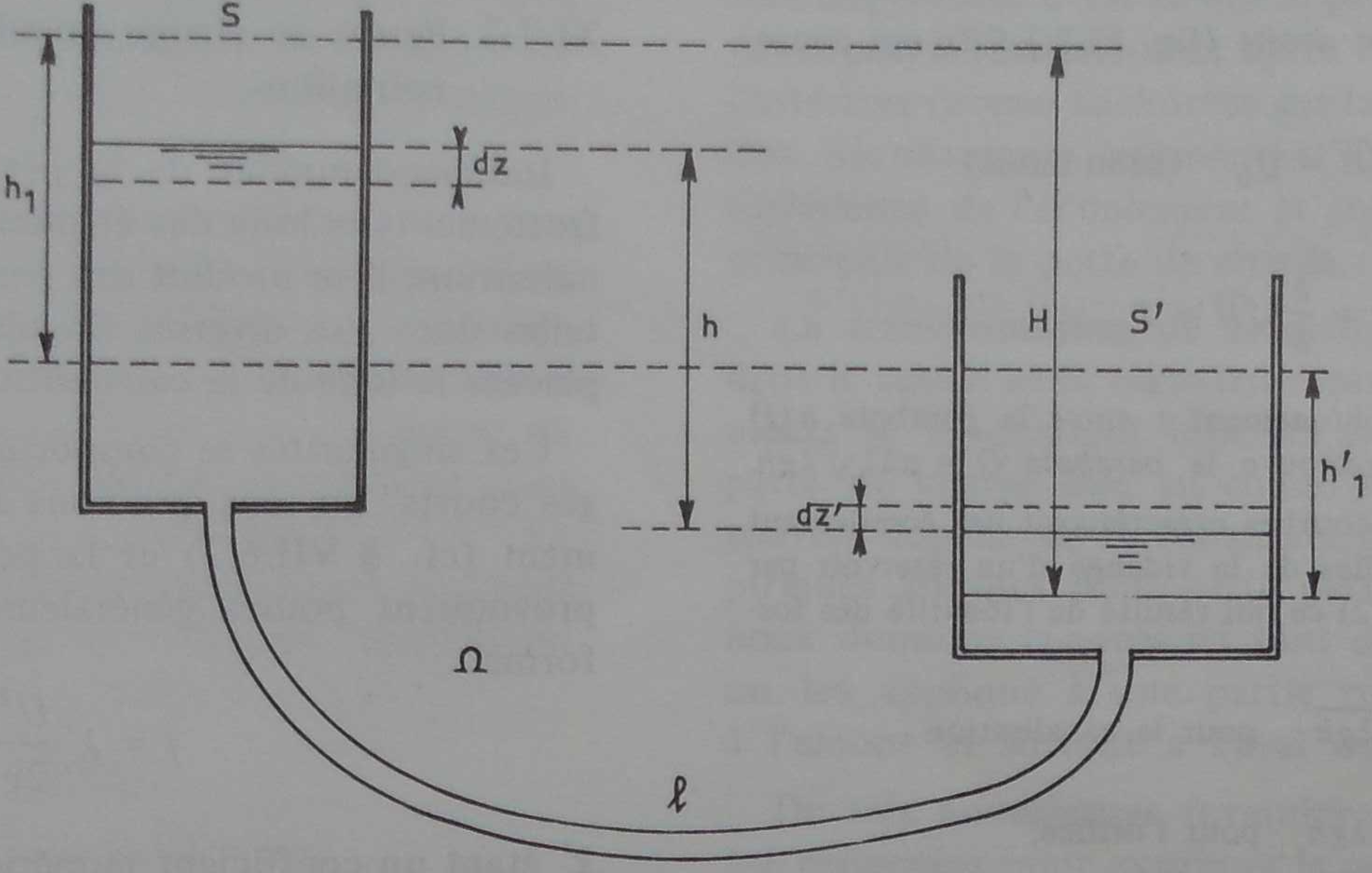


Fig. XI.2.1.5.1 – Transvasement d'un liquide d'un réservoir dans un autre à l'aide d'une canalisation

La courbe $h(t)$ est donc une *parabole* (fig. XI.2.1.5.2) qui coupe l'axe des h au point d'ordonnée H (pour $t = 0$) et dont le sommet est sur l'axe des t á l'abscisse

$$T = \frac{a}{b}\sqrt{H}$$

$$T = \frac{2SS'}{S+S'}\,\frac{H}{Q_0} \quad \text{avec} \quad Q_0 = \mu\Omega\sqrt{2gH} \text{ (débit initial)}$$

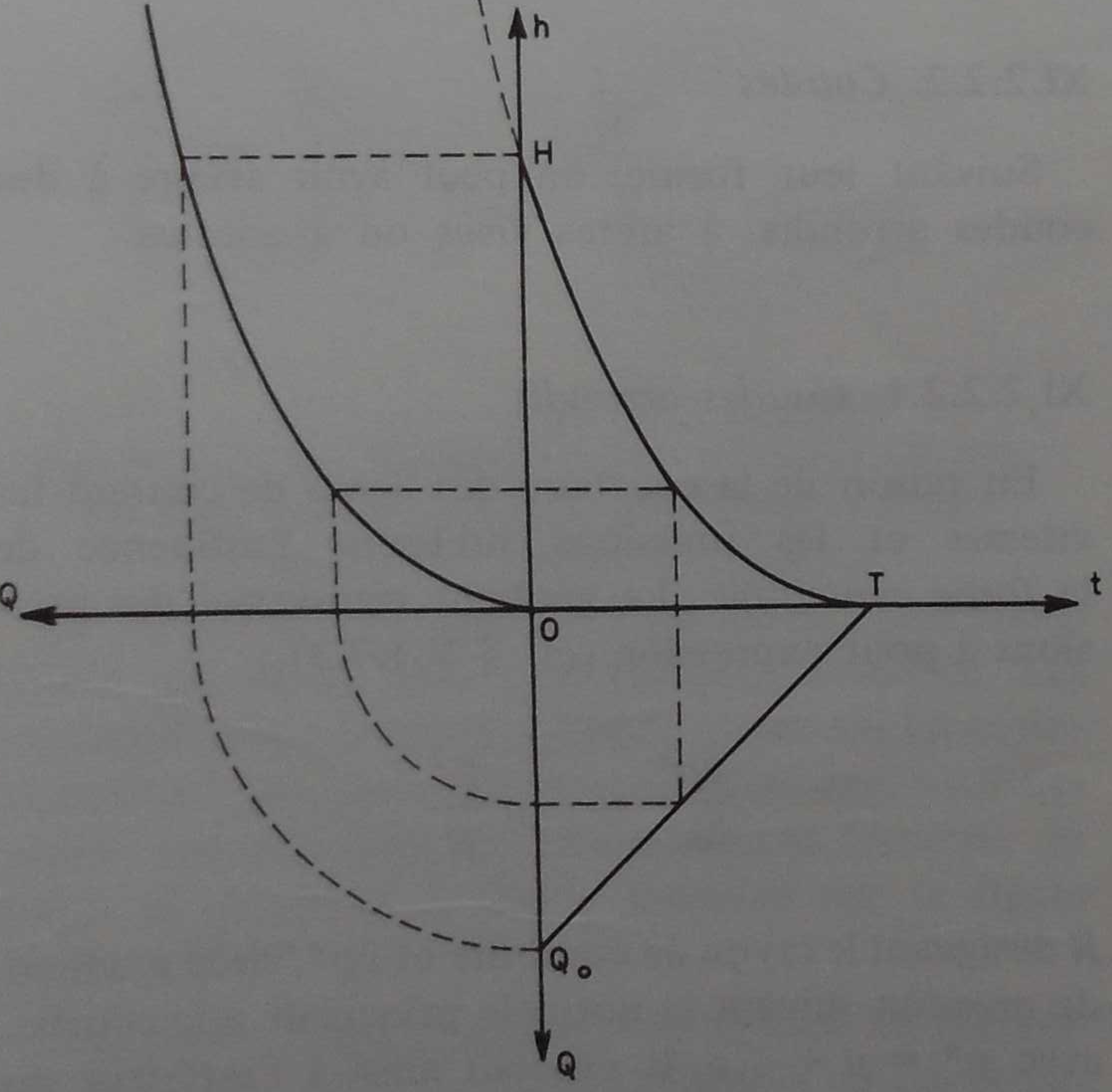


Fig. XI.2.1.5.2

Remarquons que lorsque le transvasement est terminé ($h = 0$) le niveau a baissé de h_1 dans le réservoir S et a monté de h'_1 dans le réservoir S' et le volume total écoulé est évidemment :

$$A = Sh_1 = S'h'_1$$

avec

$$h_1 + h'_1 = H$$

ou

$$\frac{S}{h'_1} = \frac{S'}{h_1} = \frac{S+S'}{h_1+h'_1} = \frac{S+S'}{H}$$

d'où

$$h_1 = \frac{S'H}{S+S'}$$

$$h'_1 = \frac{SH}{S+S'}$$

et

$$A = Sh_1 = S'h'_1 = \frac{SS'}{S+S'},\ H$$

Donc

$$T = \frac{2SS'}{S+S'}\,\frac{H}{Q_0} = \frac{2A}{Q_0} = 2T'$$

en désignant par T' la durée du transvasement avec un débit constant égal au débit initial.

La durée réelle totale du transvasement est donc le double de ce qu'elle serait si le débit restait constamment égal au débit initial.

b) *Variation de Q en fonction du temps*

A l'instant t on a $Q = \mu\Omega\sqrt{2gh} = b\sqrt{h}$. En remplaçant h par sa valeur tirée de [*XI.2.1.5.3*], on obtient

$$Q = b\sqrt{H} - \frac{b^2}{a}\,t$$

C'est l'équation d'une *droite* (fig. XI.2.1.5.2) qui coupe l'axe des Q au point

$$Q = b\sqrt{H} = Q_0 \quad \text{(débit initial)}$$

et l'axe des t au point

$$t = \frac{a}{b}\sqrt{H} = T$$

c) En éliminant graphiquement t entre la parabole $h(t)$ et la droite $Q(t)$ on retrouve la *parabole* $Q = \mu\Omega\sqrt{2gh}$.

d) En définitive, les courbes caractérisant cet écoulement sont les mêmes que celles de la vidange d'un réservoir par un orifice (cf. § VIII.4.2) ce qui résulte de l'identité des formules de l'écoulement :

$$Q = \mu\Omega\sqrt{2gh} \quad \text{pour la canalisation}$$

$$Q = m\Omega\sqrt{2gh} \quad \text{pour l'orifice,}$$

les coefficients μ et m étant supposés constants dans les deux cas.

Remarque : Comme nous n'avons fait aucune hypothèse quant à la forme de la canalisation reliant les deux réservoirs, il est clair que les résultats obtenus s'appliquent au *siphonage* (fig. XI.2.1.5.3).

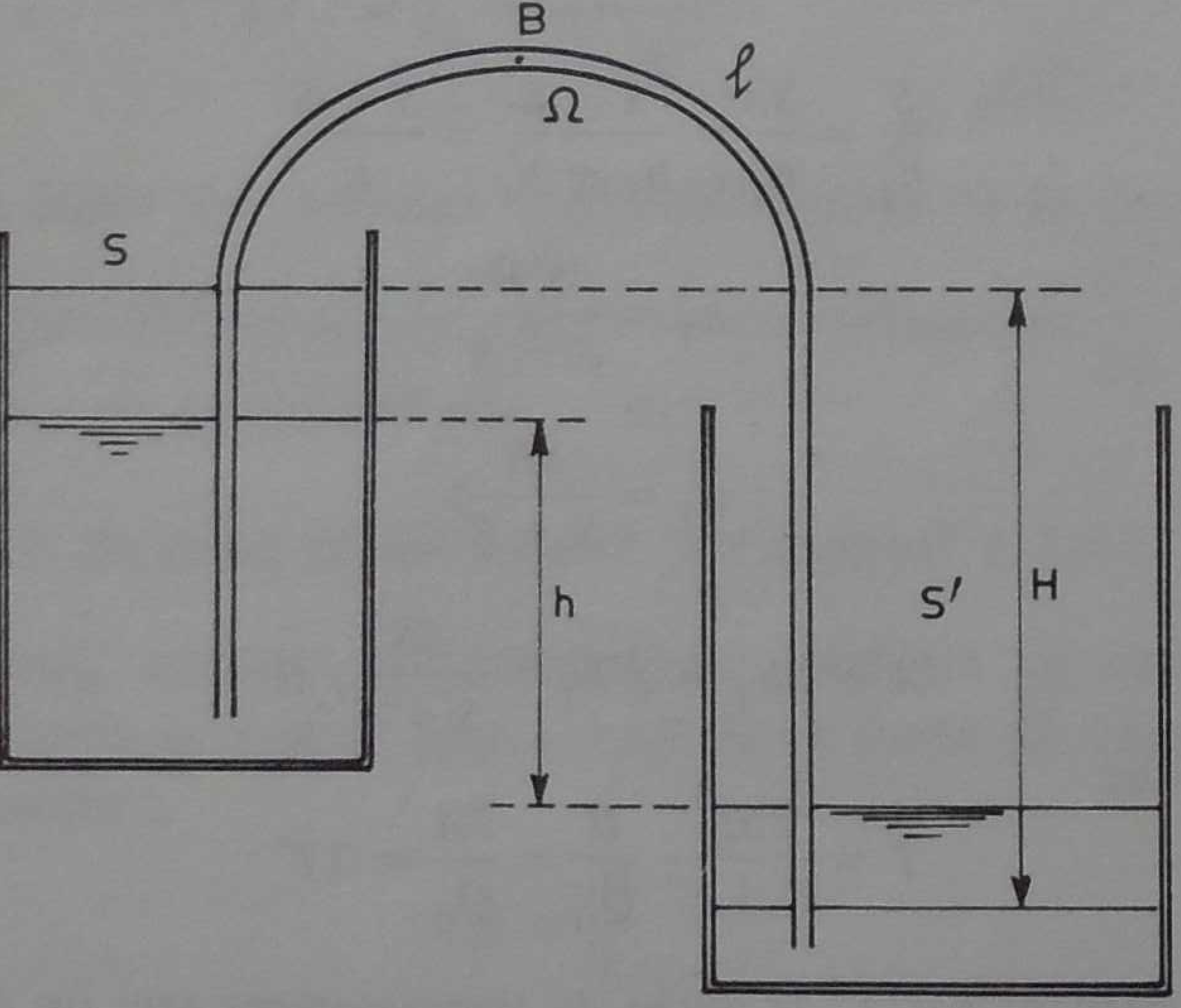


Fig. XI.2.1.5.3 – Transvasement d'un liquide par siphonage d'un réservoir dans un autre

Il faut toutefois vérifier que la pression au point B le plus élevé du siphon ne descend pas à une valeur telle que l'ébullition ou le dégazage n'entraîne une cavitation locale qui interromprait l'écoulement. La vérification correspondante s'opère facilement en appliquant le théorème de Bernoulli entre le point B et la surface libre du réservoir inférieur à sa cote minimale, c'est-à-dire au début de l'écoulement.

XI.2.2. Pertes de charge singulières le long d'une canalisation

Indépendamment de la perte de charge due aux frottements le long des éléments rectilignes d'une canalisation, il se produit des pertes de charge accidentelles dues aux diverses singularités qui peuvent être placées le long de la canalisation.

Ces singularités se comportent comme des "ouvrages courts" au sens que nous avons défini précédemment (cf. § VII.6.2) et la perte de charge qu'elles provoquent pourra généralement se mettre sous la forme :

$$j = k'\frac{U^2}{2g}$$

k' étant un coefficient numérique sans dimension qui dépendra de la forme et des dimensions de la singularité.

XI.2.2.1. *Elargissements et rétrécissements brusques ou progressifs*

Nous avons analysé ces singularités lors de l'étude du courant liquide. Nous renvoyons donc au § VII.6.3 où sont données les expressions des pertes de charge correspondantes.

XI.2.2.2. *Coudes*

Suivant leur forme, on peut avoir affaire à des coudes arrondis, à arêtes vives ou à ailettes.

XI.2.2.2.1. *Coudes arrondis*

En raison de la courbure des lignes de courant les vitesses et les pressions subissent l'influence de la *force centrifuge*. Le gradient transversal des pressions a pour expression (cf. § V.1.7.3) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = -\rho\frac{V^2}{R}$$

R désignant le rayon de courbure et $\partial p^*/\partial n$ le gradient de pression suivant la normale principale à la courbe, avec $p^* = p + \overline{\omega}z$. Il s'établit ainsi à l'intérieur du coude (zone A', figure XI.2.2.2.1.a) des pressions inférieures à la pression moyenne et à l'extérieur du

coude (zone A) des pressions supérieures à la pression moyenne. Cette différence de pression permet d'ailleurs de mesurer la vitesse donc le débit de la canalisation (voir plus loin).

Cet excédent de pression est équilibré dans le sein de la masse liquide par la force centrifuge. Mais, le long des parois, les vitesses radiales sont sensiblement nulles et l'excès de pression n'étant plus équilibré, il en résulte un *écoulement vers l'intérieur du coude* qui est compensé par un écoulement dans l'autre sens dans l'axe de la section (fig. XI.2.2.2.1.b). On observe donc, en gros, un mouvement résultant ayant l'allure d'une *double hélicoïde*, constituant des *courants secondaires.*

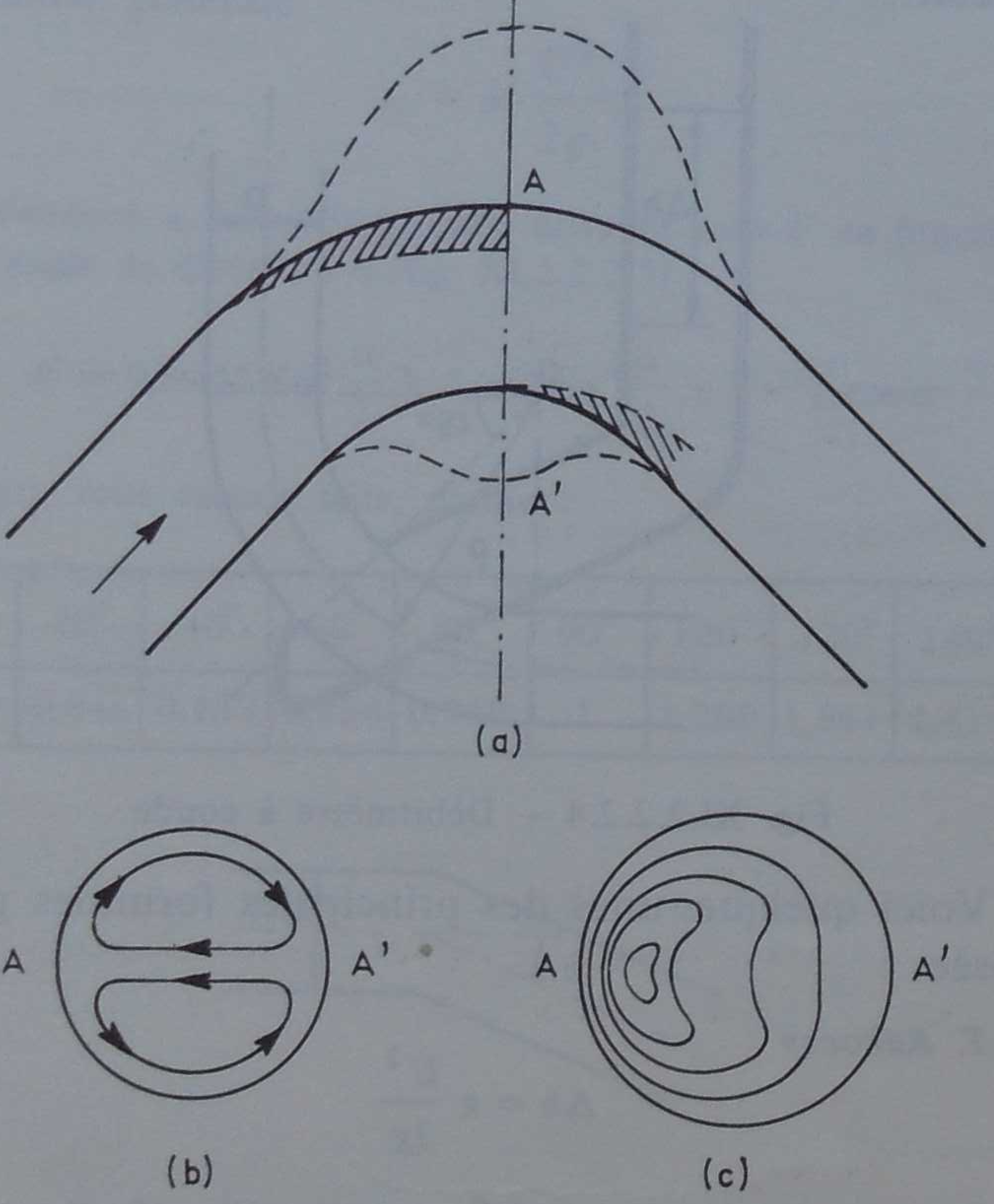


Fig. XI.2.2.2.1 – Ecoulement dans un coude arrondi. (a) Evolution des pressions ; (b) Courants secondaires ; (c) Courbes isodromes

La *répartition des vitesses* dans une section transversale est, de ce fait, profondément modifiée. Les courbes joignant les points d'égale vitesse ou *"courbes isodromes"* qui, dans un tronçon rectiligne, sont des cercles concentriques, se déforment à la traversée du coude et prennent la forme indiquée sur la figure XI.2.2.2.1.c.

Une autre cause de perturbations sont les *décollements de la couche-limite* qui sont dus au ralentissement rapide de l'écoulement résultant de l'augmentation de pression. C'est ce qui se produit avant le milieu du coude à l'extérieur et après le milieu du coude à l'intérieur (zones hachurées sur la figure XI.2.2.2.1a). Ces décollements augmentent considérablement la turbulence de l'écoulement et engendrent la fraction principale de la perte de charge.

La transformation de la distribution des vitesses dans le coude et la turbulence résultant des décollements se répercutent loin en aval, de sorte que la perte de charge due au coude s'étend à une partie souvent longue de la canalisation. Les formules empiriques admises pour cette perte de charge et que nous donnons ci-après ne sont donc valables que si on les applique à une partie rectiligne importante à l'amont et surtout à l'aval du coude.

De très nombreuses formules expérimentales ont été proposées pour exprimer la *perte de charge* j_c due à un coude arrondi. Comme nous l'avons indiqué précédemment, ces formules se mettent sous la forme générale :

$$j_c = k' \frac{U^2}{2g}$$

U = vitesse moyenne dans la canalisation.

Le coefficient k' est fonction de (fig. XI.2.2.2.2) :

— α angle au centre du coude,

— D diamètre de la canalisation,

— ρ rayon de courbure de l'axe de la canalisation.

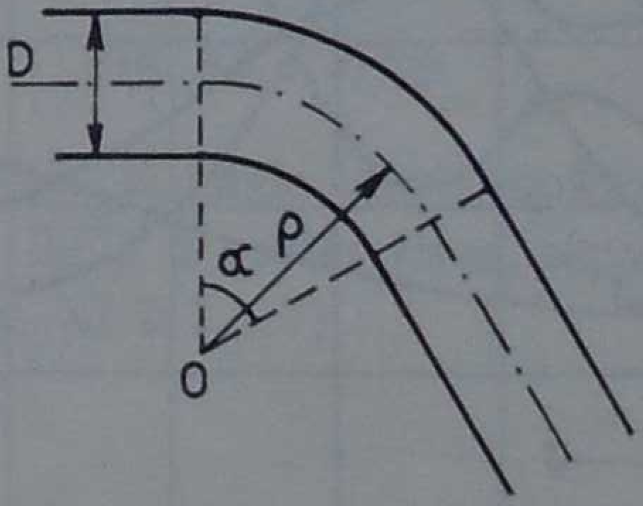


Fig. XI.2.2.2.2

Citons, notamment, les formules de *Weisbach* (1855) :

$$k' = \frac{\alpha}{90°}\left[0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{D}{2\rho}\right)^{3,5}\right]$$

(α en degrés sexagésimaux)

ou

$$k' = \frac{\alpha}{90°}\, k''$$

avec

$$k'' = 0{,}131 + 1{,}847\left(\frac{D}{2\rho}\right)^{3,5}$$

Voici, tous calculs faits, quelques valeurs de k'' en fonction de $D/2\rho$:

$\frac{D}{2\rho} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$k'' =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,997	1,408	1,978

Il existe de *nombreuses autres formules* donnant la valeur du coefficient k'. Quelques-unes sont résumées sur le graphique de la figure XI.2.2.2.3 qui donne les valeurs proposées par divers auteurs, en fonction de ρ/D, pour des coudes arrondis d'angle au centre $\alpha = 90°$ et $180°$; la grande variation des valeurs de k' résulte de la diversité des conditions expérimentales adoptées par les auteurs des formules.

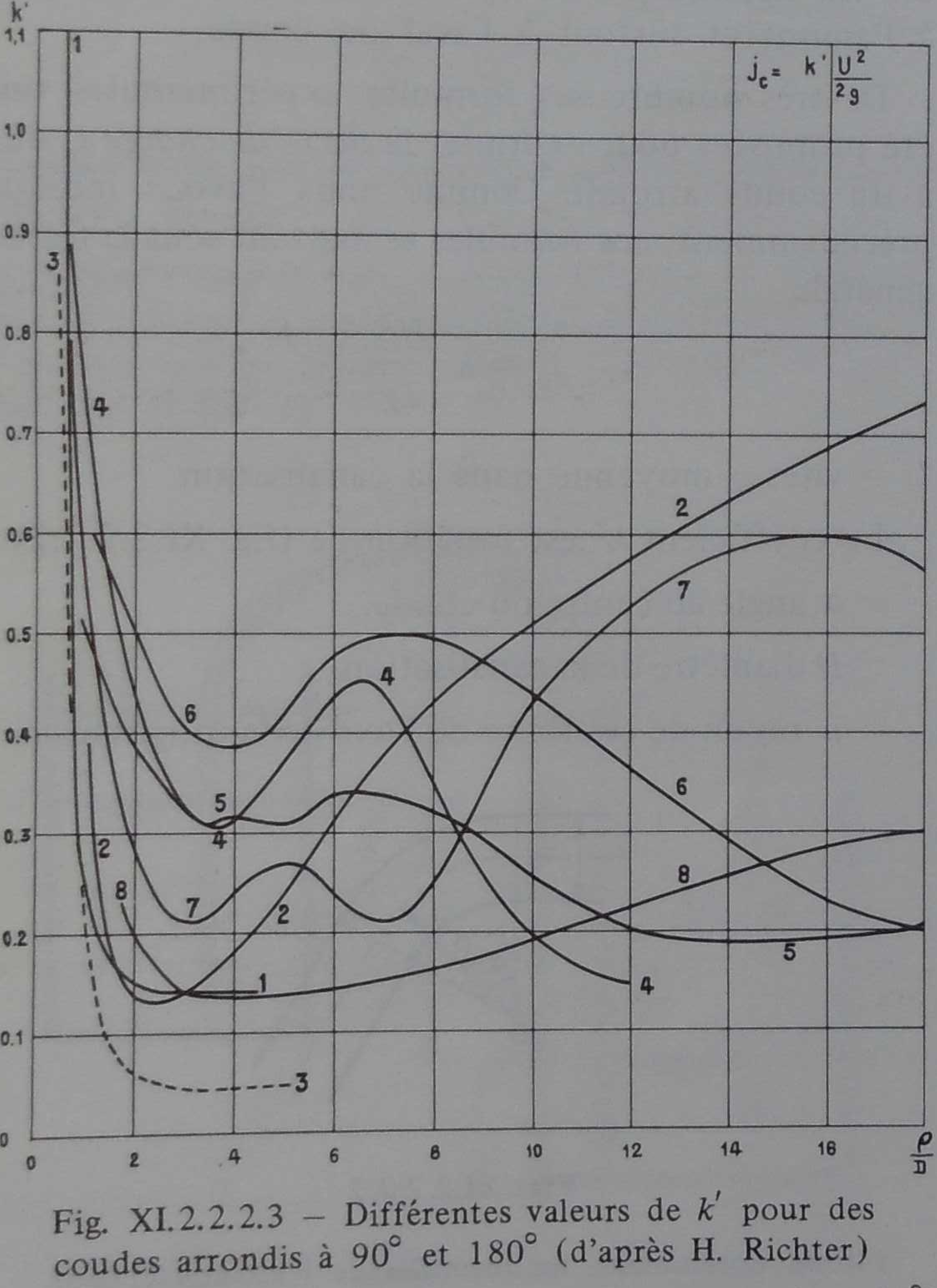


Fig. XI.2.2.2.3 – Différentes valeurs de k' pour des coudes arrondis à 90° et 180° (d'après H. Richter)

1 – Weisbach (1855) ($\alpha = 90°$)
2 – Williams, Hubbel, Fenkel (1902) (id.)
3 – Alexander (1905) (id.)
4 – Brightmore (1907) (id.)
5 – Schoder (1909) (id.)
6 – Davis (1909) (id.)
7 – Balch (1913) (id.)
8 – Saph et Schoder (1903) ($\alpha = 180°$)

On pourra également se reporter aux aide-mémoires d'Ingénieurs qui publient les formules correspondantes.

Dans la *pratique des adductions d'eau* on peut adopter l'une des valeurs approximatives suivantes :

– pour un rapport D/ρ de l'ordre de 0,2 (valeur usuelle) on peut admettre $k' = 0,1$;

– pour un coude normalisé ($\rho = 1,5\ D$, soit $D/\rho = 0,66$) on peut admettre $k' = 0,225$.

Mesure du débit (débitmètre à coude).– La différence de pression Δh (exprimée en hauteur du liquide) mesurée entre deux prises disposées dans la bissectrice intérieure de l'angle du coude (fig. XI.2.2.2.4) peut permettre de calculer la vitesse moyenne U donc le *débit*.

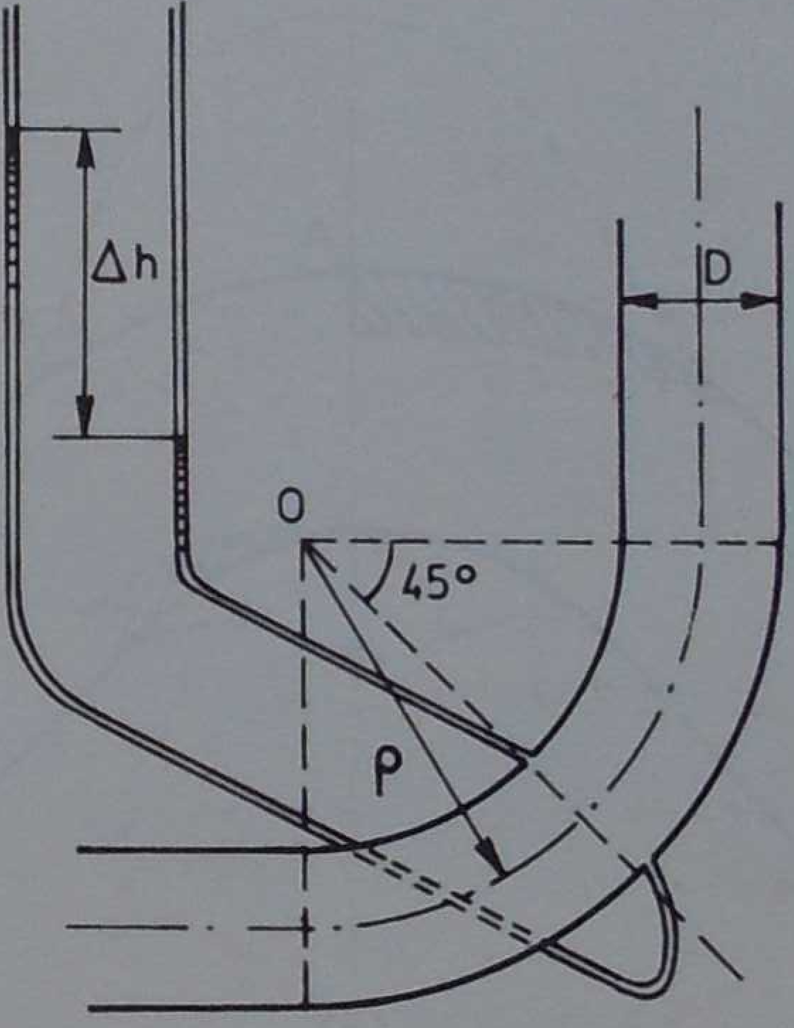


Fig. XI.2.2.2.4 – Débitmètre à coude

Voici quelques-unes des principales formules proposées :

T. Rákoczy :

$$\Delta h = k \frac{U^2}{2g}$$

Pour un coude lisse à 90° et un nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ de l'ordre de 5×10^5, le coefficient k a la valeur suivante :

– pour $\rho/D > 2$:

$$k = \frac{1}{\left(1 - \frac{D}{2\rho}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \frac{D}{2\rho}\right)^2}$$

– pour $\rho/D < 2$, le coefficient k varie de 1,14 (pour $\rho/D = 2$) à 2 (pour $\rho/D = 0,5$).

Lansford propose la formule simplifiée : $k = 2\frac{D}{\rho}$.

Enfin *H. Addison* ("Hydraulic Measurements", 1949) donne la formule :

$$Q = \mu K S \sqrt{2g\Delta h}$$

pour exprimer le débit Q de la canalisation de section $S = \frac{\pi D^2}{4}$, les coefficients μ (coefficient de débit) et K (coefficient de forme) étant fonction du rapport ρ/D suivant le tableau ci-dessous :

ρ/D	1	1,25	1,50	1,75	2	2,25	2,50	2,75	3
μ	1,23	1,10	1,07	1,05	1,04	1,03	1,03	1,02	1,02
K	0,570	0,697	0,794	0,880	0,954	1,02	1,08	1,14	1,20

XI.2.2.2.2. *Coudes à angles vifs*

La perte de charge j_c s'exprime toujours par la formule générale :

$$j_c = k' \frac{U^2}{2g}$$

Weisbach a donné la formule suivante pour k' en fonction de l'angle de déviation α (fig. XI.2.2.2.5) :

$$k' = 0{,}9457 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \simeq 1 - 2 \cos \alpha$$

ce qui, tous calculs faits, donne :

α =	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
k' =	0,046	0,139	0,364	0,740	1	1,260	1,861	2,410

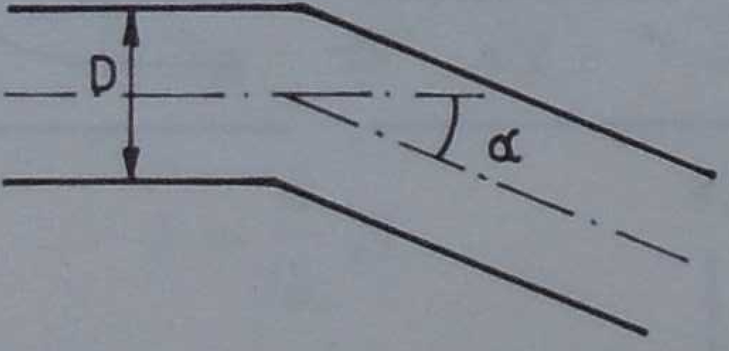


Fig. XI.2.2.2.5 – Coude à angles vifs

Voici les valeurs de k' proposées par d'autres auteurs :

1) Essais effectués à Münich par *Kirchbach et Schubart* :

α =		10°	15°	22°5	30°	45°	60°	90°
k' =	parois lisses	0,034	0,042	0,066	0,11 à 0,13	0,236	0,471	1,129
	parois rugueuses	0,044	0,062	0,11 à 0,154	0,165	0,320	0,684	1,265

2) *d'après C. Hansen :*

α =	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°
k' =	0,03	0,14	0,37	0,75	1,00	1,25	1,87

3) *d'après J. Izard :*

α =	30°	45°	60°	90°	120°	en S	en U
k' =	0,128	0,192	0,368	0,992	1,840	1,12	1,92

Cas d'une *déviation* à angle droit constituée de *deux coudes successifs de 45°* à arêtes vives séparés par une longueur rectiligne l (fig. XI.2.2.2.6) :

l/D =		0,71	0,943	1,174	1,42	1,86	2,56	6,28	∞
k' =	parois lisses	0,51	0,35	0,33	0,28	0,29	0,36	0,40	0,47
	parois rugueuses	0,51	0,41	0,38	0,38	0,39	0,43	0,45	0,64

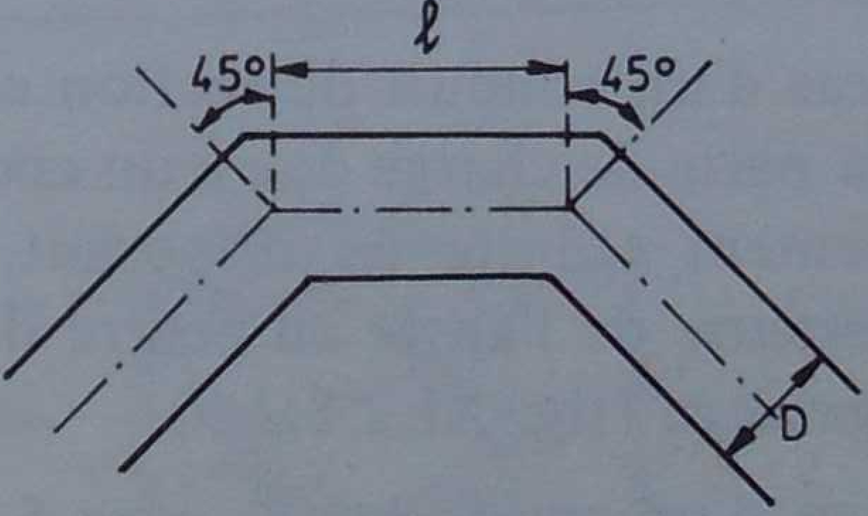


Fig. XI.2.2.2.6

Cas d'une *déviation* à angle droit constituée de *quatre coudes successifs de 22°5* à arêtes vives, séparés par une longueur rectiligne l (fig. XI.2.2.2.7) :

Pour $l = 1{,}186\ D$:

parois lisses : $k' = 0{,}103$

parois rugueuses : $k' = 0{,}32$

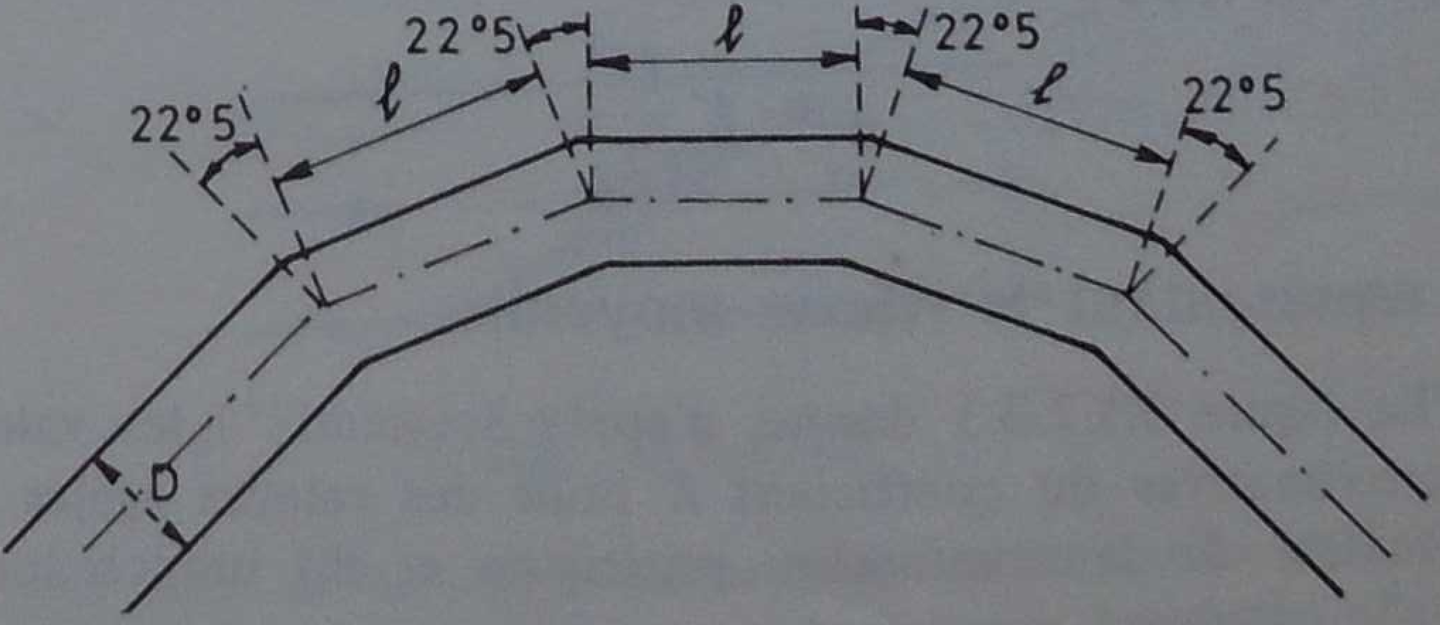


Fig. XI.2.2.2.7

Cas d'une *double déviation à 30°* (fig. XI.2.2.2.8) :

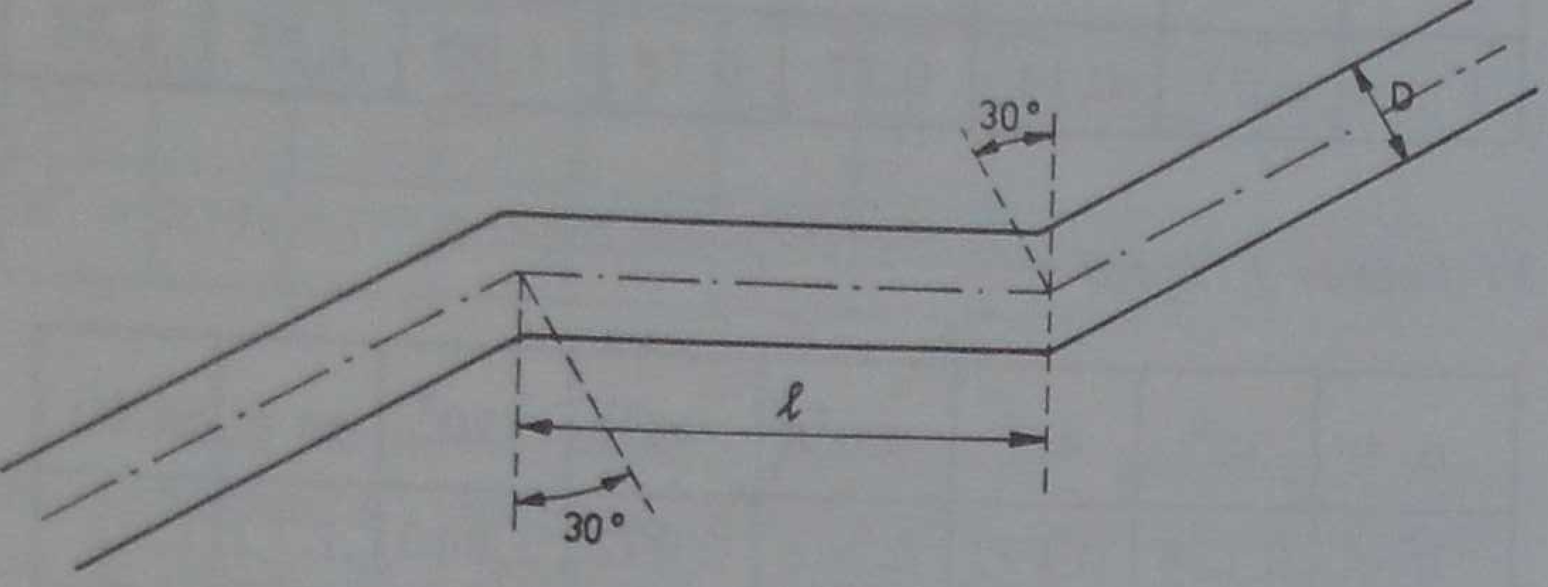


Fig. XI.2.2.2.8

	$l/D =$	1,23	1,67	2,37	3,77
$k' =$	parois lisses	0,16	0,16	0,14	0,16
	parois rugueuses	0,30	0,38	0,26	0,24

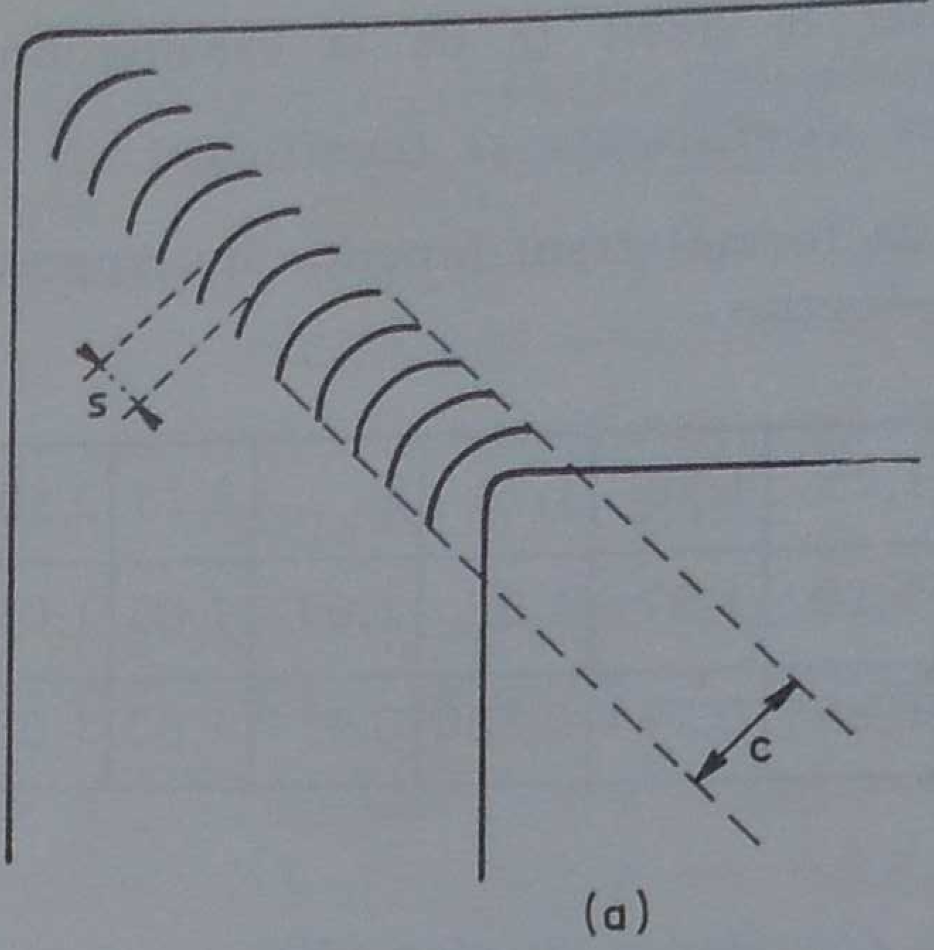
La perte de charge est minimale (k' minimum) pour $l/D \simeq 3$.

XI.2.2.2.3. *Coudes à ailettes (cas des sections carrées ou rectangulaires)*

Dans le cas d'un conduit de section carrée ou rectangulaire la perte de charge due à un coude peut être très sensiblement réduite en disposant, dans la bissectrice intérieure de l'angle au centre du coude, des *ailettes de guidage* (fig. XI.2.2.2.9).

Dans le cas d'un coude à 90°, avec 5 à 15 ailettes en tôle mince en quart de cercle, espacées de s telle $s/c = 0,3$ ou $0,4$, on peut ramener le coefficient k' à une valeur de l'ordre de 0,15.

Les ailettes s'opposent en effet aux courants secondaires et aux décollements qui sont les causes principales de la perte de charge.



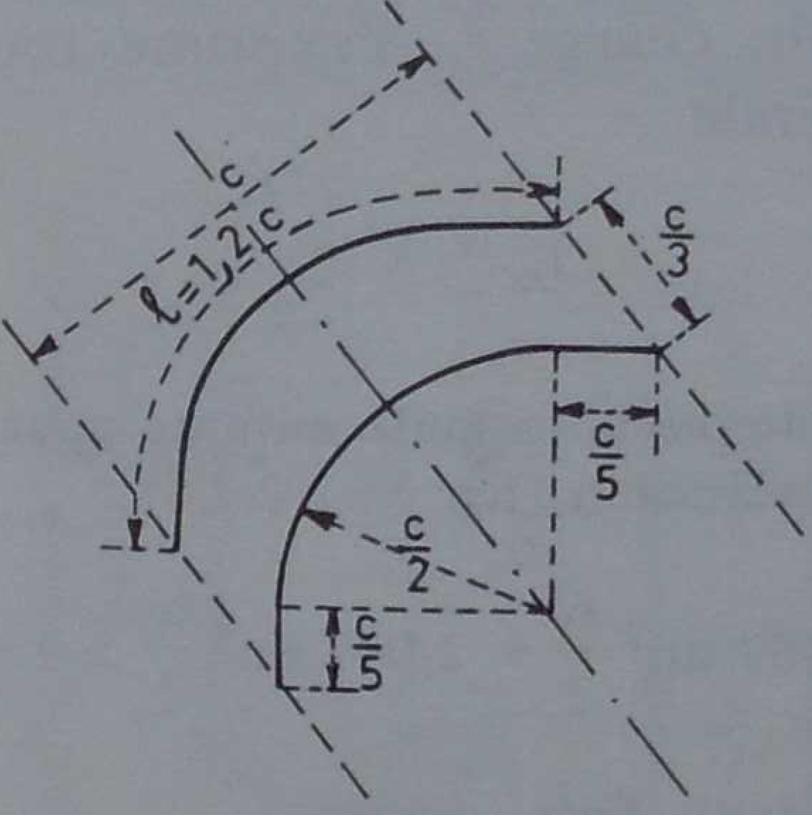


Fig. XI.2.2.2.9 – Coude à ailettes. (a) Disposition générale ; (b) Détail des ailettes.

XI.2.2.3. *Branchements et dérivations*

La perte de charge s'exprime toujours par une formule du type :

$$j = K \frac{U^2}{2g}$$

U représentant la vitesse moyenne.

La figure XI.2.2.3 donne, d'après Scimemi[1], les valeurs approximatives du coefficient K pour des valeurs égales des diamètres de la canalisation principale et du branchement.

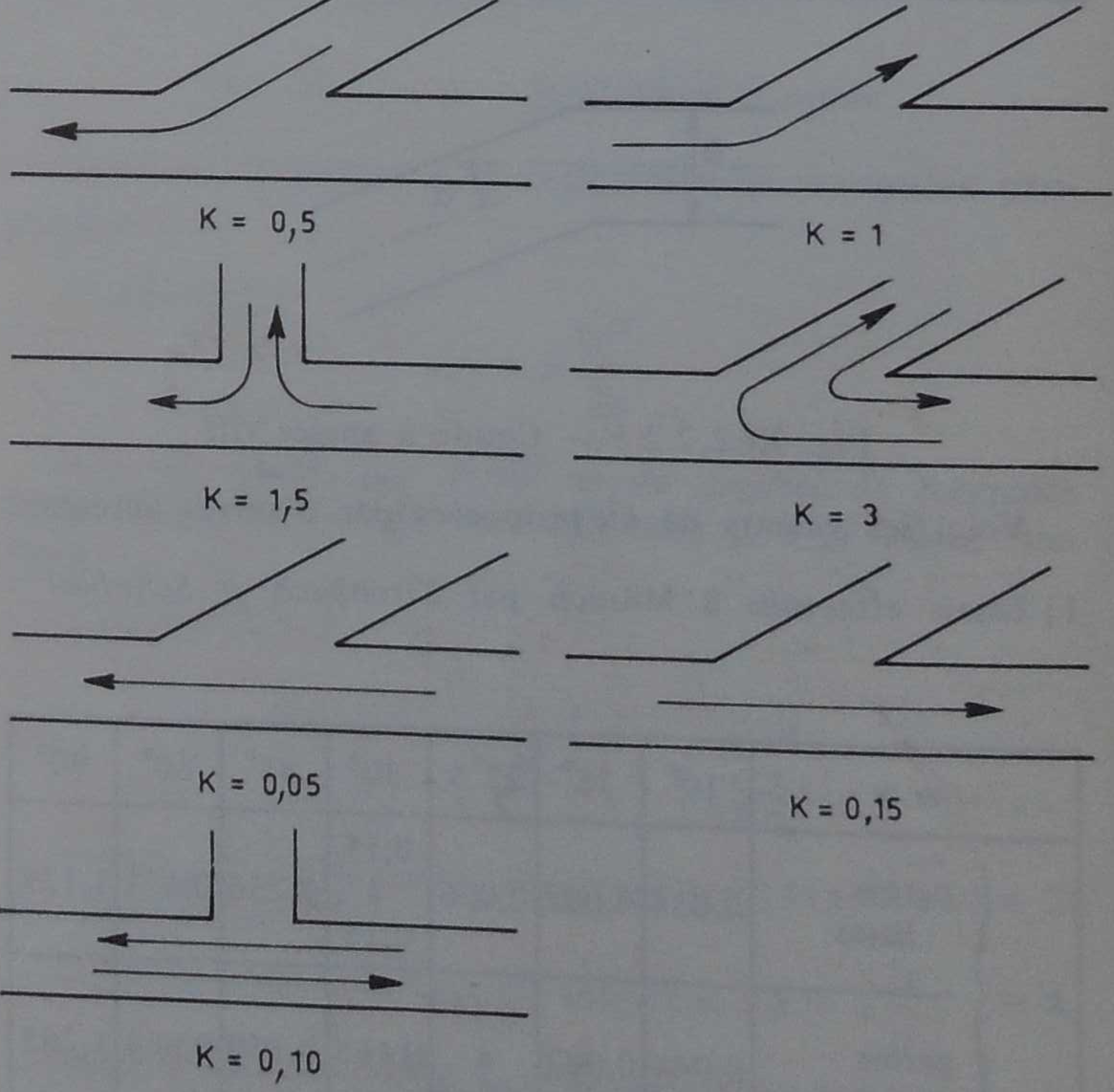


Fig. XI.2.2.3 – Branchements et dérivations

(1) Scimemi (E.).– *Compendio di Idraulica*, Padova, 1952.

XI.2.2.4. *Robinets-vannes*

Au passage de ces organes, même s'ils sont entièrement ouverts, la veine liquide subit une *contraction* suivie d'un *épanouissement* souvent accompagné d'une *déviation*. Ces diverses causes de pertes de charge s'influencent mutuellement et il est difficile de prévoir par le calcul la perte de charge résultante.

Aussi on préfère utiliser, comme pour les coudes ou les déviations, des formules expérimentales de la forme générale :

$$j = k\frac{U^2}{2g}$$

U étant la vitesse moyenne dans la canalisation sur laquelle est monté le robinet-vanne.

On exprime aussi parfois la perte de charge j par la *longueur équivalente*, c'est-à-dire la longueur rectiligne l de canalisation de même diamètre D que le diamètre nominal de l'appareil et qui produirait la même perte de charge. Toutefois cette indication n'a qu'une valeur approximative car elle suppose que le coefficient de résistance du tuyau λ reste constant ; or il varie généralement avec le temps, compte-tenu de l'augmentation de la rugosité de la canalisation.

Pour obtenir exactement cette *longueur équivalente* l on peut écrire

$$j = k\frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda}{D}\, l\, \frac{U^2}{2g}$$

d'où

$$l = \frac{k}{\lambda} D$$

Le coefficient k (ou la longueur équivalente l) varie évidemment avec le *degré d'ouverture du robinet-vanne* et avec les caractéristiques de l'appareil. Voici quelques ordres de grandeur pour des appareils courants :

a) *Robinet-vanne ordinaire à passage direct* (vanne à opercule) (fig. XI.2.2.4.1)

$\frac{x}{D} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
$k =$	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	97,8

La course de l'opercule x étant proportionnelle au nombre de tours de la vis de commande, on constate que l'action du robinet-vanne n'est pas du tout proportionnelle au nombre de tours du volant mais que cette action sur la réduction du débit est surtout sensible à la fin de la course de l'opercule.

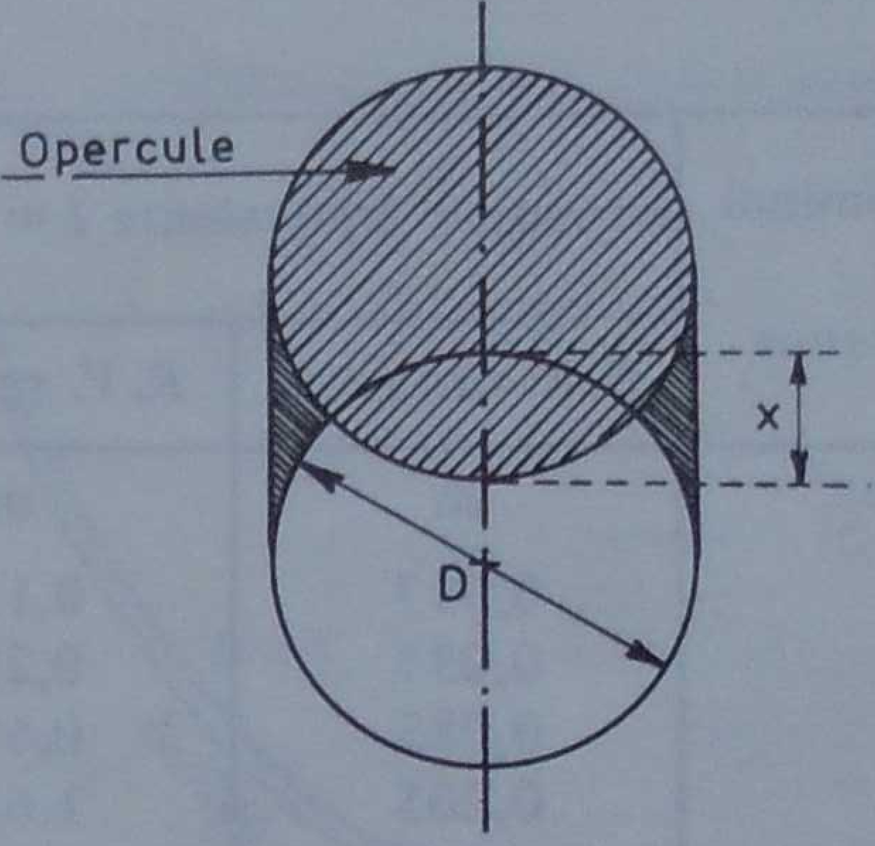


Fig. XI.2.2.4.1

b) *Robinet à boisseau* à orifice circulaire de même diamètre que la canalisation (fig. XI.2.2.4.2)

α =	5°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°
$k =$	0,05	0,29	1,56	5,47	17,3	31,2	52,6	206

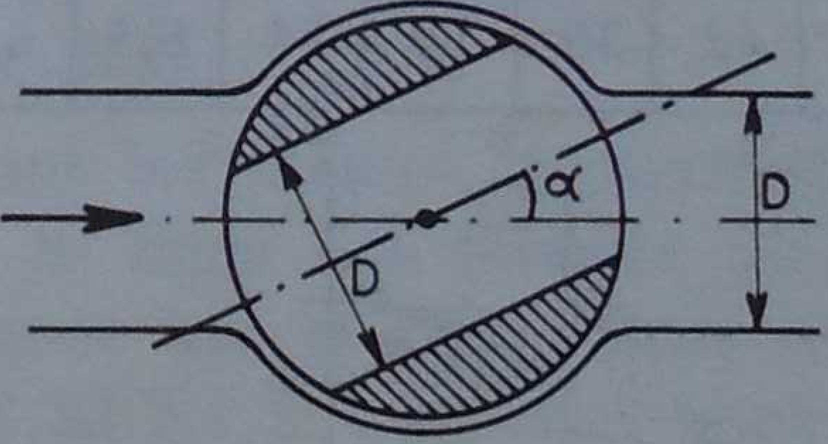


Fig. XI.2.2.4.2

c) *Vanne-papillon* (fig. XI.2.2.4.3)

α =	5°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	60°
$k =$	0,24	0,52	1,54	3,91	10,8	18,7	32,6	118

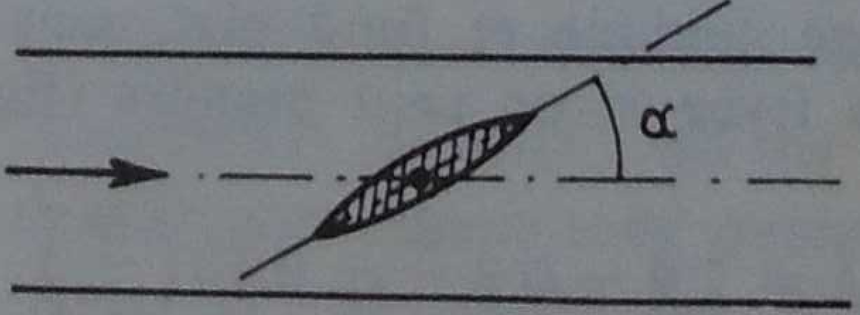


Fig. XI.2.2.4.3

d) *Robinets entièrement ouverts*. Même lorsqu'ils sont entièrement ouverts, les robinets ou les vannes opposent néanmoins une certaine résistance au passage du liquide en raison

de la variation locale de la section, la présence de diverses pièces proéminentes et la déviation de la veine.

Voici l'ordre de grandeur de la *longueur équivalente* de canalisation rectiligne de même diamètre produisant la même perte de charge que celle d'un robinet-vanne entièrement ouvert :

Diamètre nominal D_n du robinet-vanne	Longueur équivalente $l = \frac{k}{\lambda} D_n$	
	R. V. ordinaire	*R. V.* sphérique
mm	m	m
25	0,017	0,128
50	0,037	0,295
100	0,083	0,685
200	0,205	1,62
250	0,26	2,15
300	0,31	2,70
Valeur moyenne	0,7 à 1 D_n	5 à 9 D_n

XI.2.2.5. *Divers autres accessoires*

a) *Clapet à charnière* (fig. XI.2.2.5.1) sur canalisation verticale :

$\alpha =$	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	60°	70°
$k =$	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	3,2	1,7

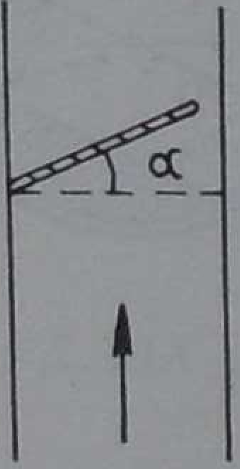


Fig. XI.2.2.5.1

b) *Soupape.* La perte de charge correspondante est très variable suivant le type de soupape, notamment la forme du siège.

Pour une soupape de diamètre D égal au diamètre de la conduite, à siège conique et fond plat, sans guidage, pour une hauteur de levée x, on peut prendre (fig. XI.2.2.5.2) :

$$k = 2{,}9 - 0{,}8\,\frac{D}{x} + 0{,}14\left(\frac{D}{x}\right)^2$$

On peut également utiliser les valeurs suivantes, en désignant par S_1 la plus petite section de passage ($S_1 = \pi D x$) et par S la section du tuyau $\left(S = \frac{\pi D^2}{4}\right)$:

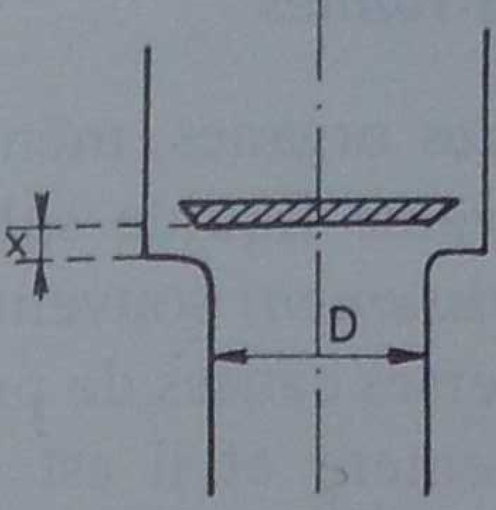


Fig. XI.2.2.5.2

$\frac{S_1}{S} =$		0,2	0,4	0,6	0,8	1
$k =$	Soupage à siège plan	1,2	1,6	2	2,5	3
	Soupage guidée, siège à ailettes	2,3	2,8	3,5	4,3	5,2

c) *Crépine.* La perte de charge est très variable suivant le nombre et la dimension des orifices. Pour une crépine bien proportionnée on peut prendre $k = 0{,}25$.

d) *Remarques.* 1. Bien entendu, les valeurs du coefficient k données ci-dessus sont des moyennes applicables à des appareils neufs et bien construits. La perte de charge dans un appareil quelconque varie essentiellement suivant le type de l'appareil, la forme et le degré de rugosité des surfaces intérieures.

2. Lorsqu'on ne cherche pas une grande précision dans l'évaluation des pertes de charge le long d'une conduite comprenant un certain nombre de singularités (coudes, dérivations, vannes, clapets, etc . . .) on se contente souvent de *majorer de 10 à 20 % la perte de charge calculée en supposant la canalisation rectiligne et sans interposition de singularités.*

XI.2.3. Problèmes usuels — Usage des tables et abaques

Comme nous l'avons montré au début du § XI.2, l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$J = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2 D^5} \qquad [XI.2.1]$$

ou

$$J = \frac{8\, \lambda Q^2}{g\, \pi^2 D^5} \qquad [XI.2.2]$$

permet de calculer l'une des trois variables J, Q ou D connaissant les deux autres, la rugosité (coefficient b_1 ou λ) étant supposée connue. Les calculs correspondants sont facilités par l'emploi des tables ou abaques d'application de la formule d'écoulement adoptée.

Nous examinerons ici les problèmes usuels les plus simples sur des exemples numériques.

XI.2.3.1. *Calcul du débit*

Un réservoir R dont la cote de la surface libre est supposée constante (fig. XI.2.3.1) alimente une canalisation de 80 mm de diamètre et de 1200 m de longueur qui débouche à l'air libre en un point A situé à 10 m au-dessous de la surface libre du réservoir R. Calculer le débit de la canalisation.

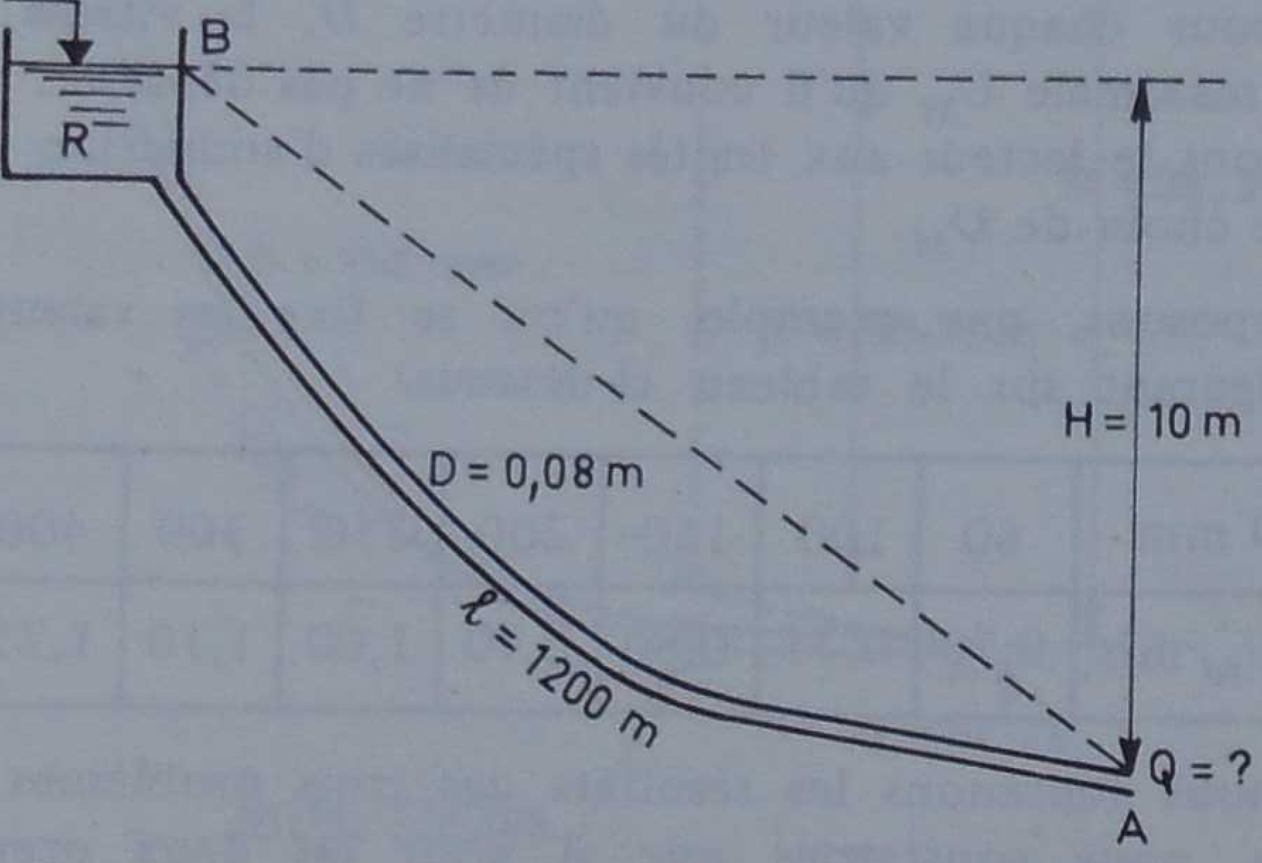


Fig. XI.2.3.1 – Calcul du débit

Si on néglige les pertes de charge singulières ainsi que le terme $1{,}62 \dfrac{U^2}{2g}$ par rapport à H, la perte de charge par mètre le long de la canalisation est $J = H/l$ comme nous l'avons montré au § XI.2.1.1 soit :

$$J = \frac{10}{1.200} = 0{,}008\,33 \text{ m par m}$$

Si nous admettons une rugosité moyenne caractérisée par $k = 1$ mm et si nous utilisons la formule de Colebrook, les tables de MM. Lechapt et Calmon donnent, par interpolation :

$$Q = 2{,}787\ l/s \quad \text{et} \quad U = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0{,}55\ m/s$$

La ligne des niveaux piézométriques est alors la droite BA dans le cadre des approximations faites.

Si on voulait tenir compte des pertes de charge singulières estimées par exemple à 15 % de la perte de charge totale, on diminuerait J de cette proportion ce qui, évidemment, conduirait à un débit et une vitesse moyenne plus faibles.

XI.2.3.2. *Calcul du diamètre*

On considère le même dispositif ($l = 1200$ m ; $H = 10$ m) (fig. XI.2.3.2).

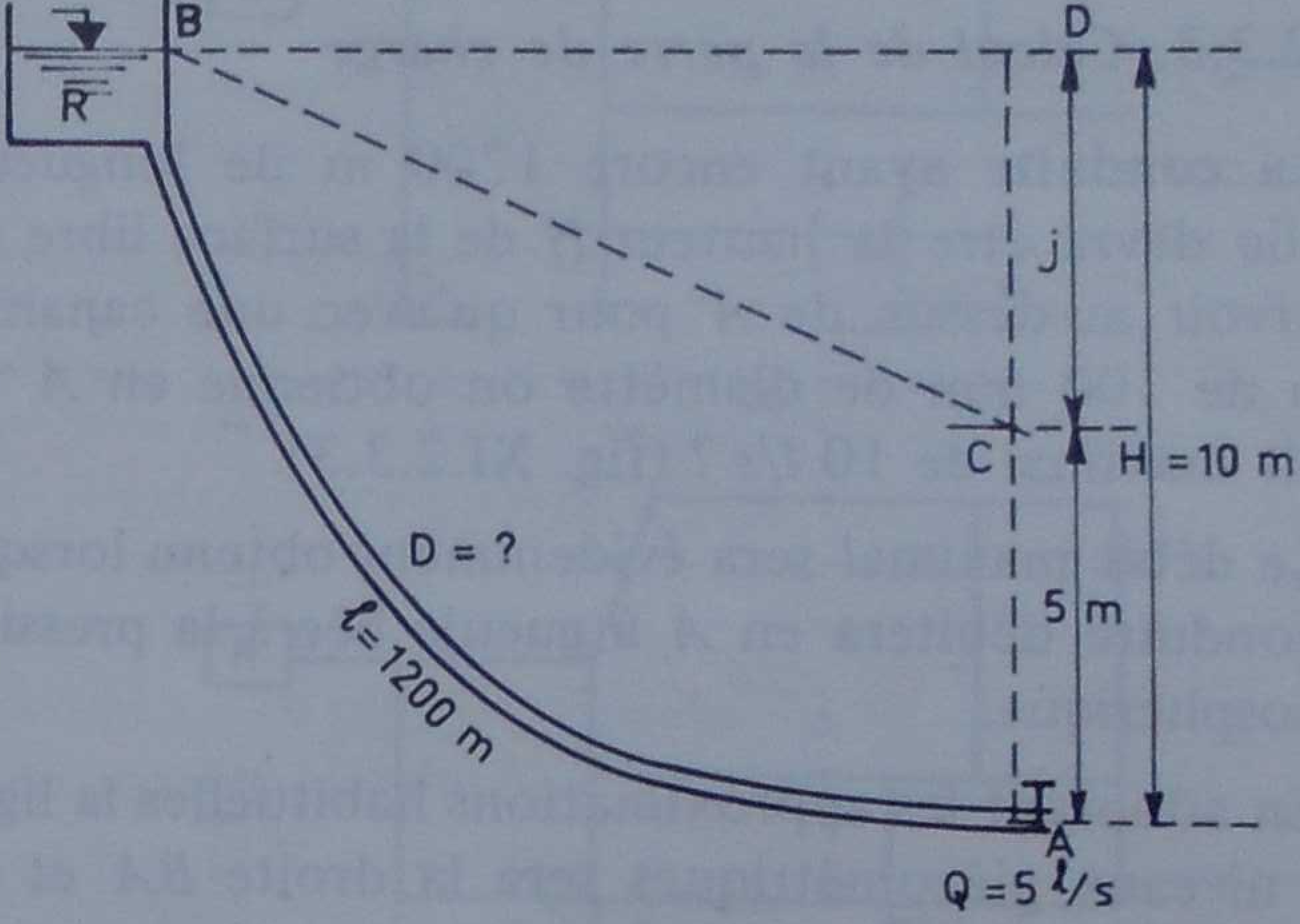


Fig. XI.2.3.2 – Calcul du diamètre

On désire obtenir en A un débit de 5 l/s sous une charge de 5 m d'eau au-dessus de l'axe de la canalisation (ce qu'on réalise en disposant une vanne en A). Quel diamètre faut-il donner à la canalisation ? (bien entendu, ce diamètre sera choisi dans les séries commerciales).

En adoptant les mêmes approximations que précédemment, la ligne des niveaux piézométriques a l'allure indiquée sur la figure comme nous l'avons montré au § XI.2.1.2. La perte de charge totale est donc :

$$j = H - 5 \text{ m} = 10 - 5 = 5 \text{ m}$$

Si on néglige les pertes de charge accessoires, la perte de charge par mètre est donc :

$$J = \frac{j}{l} = \frac{5}{1200} = 0{,}00\,416 \text{ m par m}$$

En adoptant la même rugosité que précédemment ($k = 1$ mm) la formule de Colebrook (tables de MM. Lechapt et Calmon) montre qu'un diamètre de 100 mm est insuffisant (pour une perte de charge de 0,00 416 m par m, le débit est 3,56 l/s). Avec le diamètre commercial immédiatement supérieur ($D = 125$ mm) les tables donnent, par interpolation, $Q = 6{,}44\ l/s$ et $U = 0{,}52\ m/s$.

On adoptera donc ce diamètre de 125 mm.

Si on voulait tenir compte des pertes de charge singulières estimées par exemple à 15 % de la perte de charge totale, on adopterait pour J la valeur $0{,}00416 \times 0{,}85 = 0{,}00\,354$ m par m ce qui, ici, conduirait à adopter le même diamètre de 125 mm.

XI.2.3.3. *Calcul de la perte de charge*

La conduite ayant encore 1200 m de longueur, quelle devra être la hauteur H de la surface libre du réservoir au-dessus de A pour qu'avec une canalisation de 100 mm de diamètre on obtienne en A un débit maximal de 10 l/s ? (fig. XI.2.3.3).

Le débit maximal sera évidemment obtenu lorsque la conduire débitera en A à gueule bée à la pression atmosphérique.

En adoptant les approximations habituelles la ligne des niveaux piézométriques sera la droite BA et on aura :

$$j = H$$

et

$$J = \frac{H}{l} = \frac{H}{1.200}$$

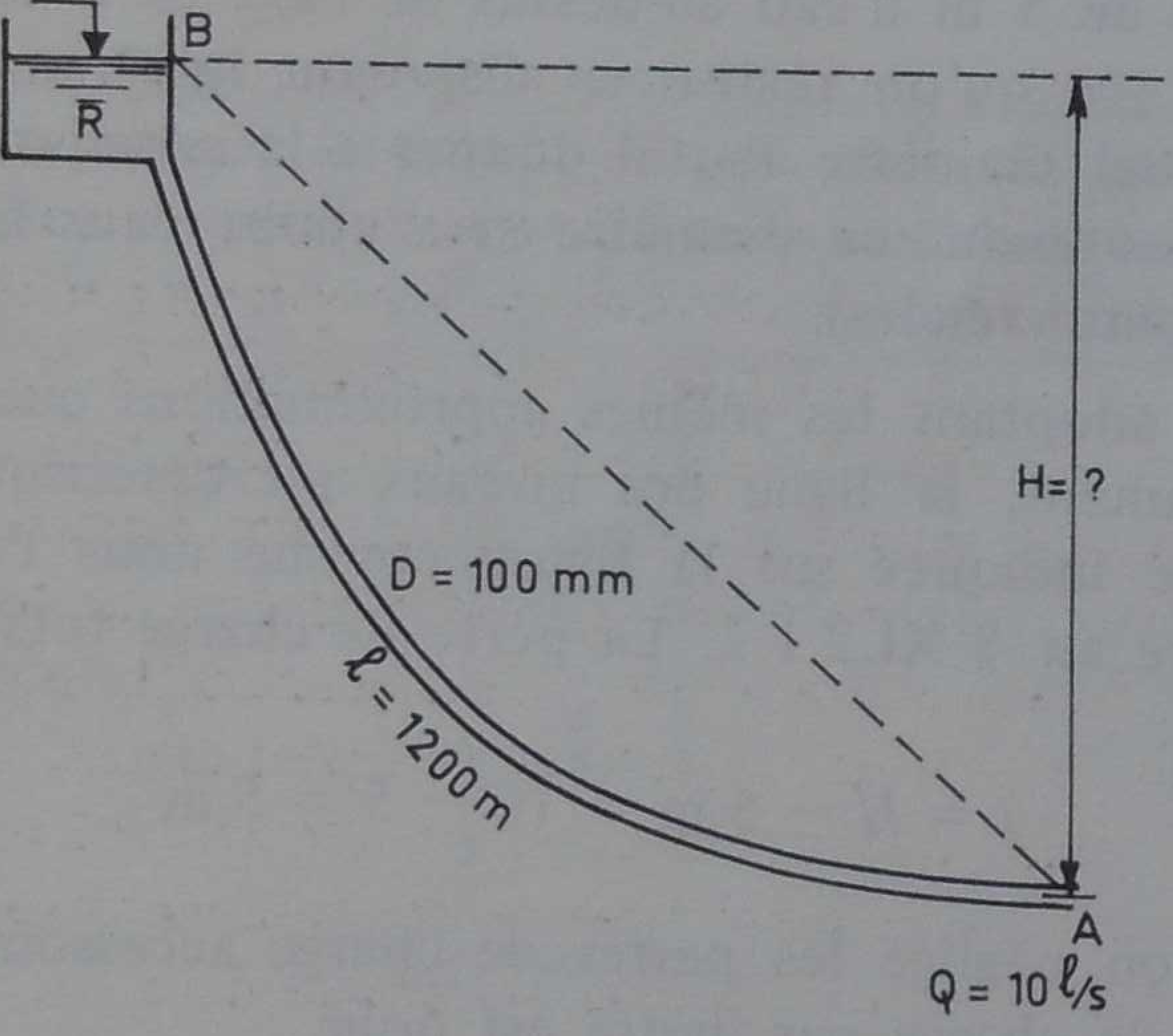


Fig. XI.2.3.3 – Calcul de la perte de charge

Connaissant Q (10 l/s) et D (100 mm) et en supposant la même rugosité que précédemment (k = 1 mm), les tables donnent :

$$J = 0{,}031\,944 \text{ m par m}$$

et

$$U = 1{,}27\ m/s\,.$$

Donc :

$$H = j = Jl = 0{,}031\,944 \times 1200 = 38{,}30 \text{ m}$$

Si on voulait tenir compte des pertes de charge singulières estimées, par exemple, à 15 % de celles dues aux portions rectilignes de canalisation, il suffirait de majorer de 15 % la valeur de H.

XI.2.3.4. *Cas où la vitesse moyenne ne doit pas dépasser certaines valeurs maximales*

Dans les différents problèmes relatifs à l'écoulement dans les canalisations il faut toujours calculer la vitesse moyenne dans la conduite, de manière à s'assurer qu'elle est acceptable. En effet, si elle est trop grande il peut en résulter certains inconvénients d'ordre pratique (risques de coups de bélier trop violents en cas de changements brusques du régime d'écoulement, difficultés d'alimenter correctement les branchements). Dans la pratique des adductions d'eau on se fixe, pour chaque valeur du diamètre D, la vitesse moyenne maximale U_M qu'il convient de ne pas dépasser. Nous renvoyons le lecteur aux traités spécialisés d'adduction d'eau pour le choix de U_M.

Supposons, par exemple, qu'on se fixe les valeurs de U_M figurant sur le tableau ci-dessous.

D mm	60	100	150	200	250	300	400
U_M m/s	0,70	0,75	0,80	0,90	1,00	1,10	1,25

Si nous reprenons les résultats des trois problèmes précédents, nous constatons que si pour les deux premiers les vitesses moyennes sont acceptables, il n'en est pas de même pour le troisième problème (calcul de la perte de charge, figure XI.2.3.3) où nous avons obtenu une vitesse moyenne $U = 1{,}27$ m/s dans une canalisation de diamètre $D = 100$ mm. Il faut donc réduire la vitesse, c'est-à-dire que pour obtenir le débit de 10 l/s demandé il convient d'adopter un diamètre supérieur à 100 mm. Comme l'énoncé du problème impose le débit (10 l/s) et le diamètre (100 mm) une de ces deux données devra être modifiée. Si, par exemple, on peut modifier le diamètre, on adoptera un diamètre tel que, pour le débit de 10 l/s imposé, la vitesse moyenne soit acceptable ; ainsi, un diamètre de 150 mm conduirait ici à une vitesse moyenne de 0,57 m/s qui peut convenir.

Bien entendu, avec ce diamètre de 150 mm la perte de charge sera plus faible et le réservoir sera donc moins élevé.

Si toutefois d'autres considérations imposent de maintenir le réservoir à la cote obtenue précédemment ($H = 38{,}30$ m) il faudra, pour réduire la vitesse, augmenter le diamètre et, simultanément, augmenter la perte de charge en plaçant sur la conduite un *réducteur de pression* ou "*brise-charge*" créant une perte de charge locale importante.

Par exemple, pour le problème traité au § XI.2.3.3, on adoptera un diamètre de 150 mm de manière à ramener la vitesse moyenne à une valeur acceptable. Pour porter un débit de 10 l/s la conduite de 150 mm provoque une perte de charge $J = 0{,}0038$ m par m. En negligeant les pertes de charge accessoires cela conduirait à placer le réservoir à une hauteur

$$H' = Jl = 0{,}0038 \times 1200 = 4{,}55 \text{ m au-dessus de } A\,.$$

Si la cote du réservoir est imposée de telle façon que $H = 38,30$ m, il faudra placer le long de la conduite un réducteur de pression créant une perte de charge locale :

$$j' = H - H' = 33,75 \text{ m} .$$

La ligne des niveaux piézométriques aura l'allure *BCDA* (fig. XI.2.3.4).

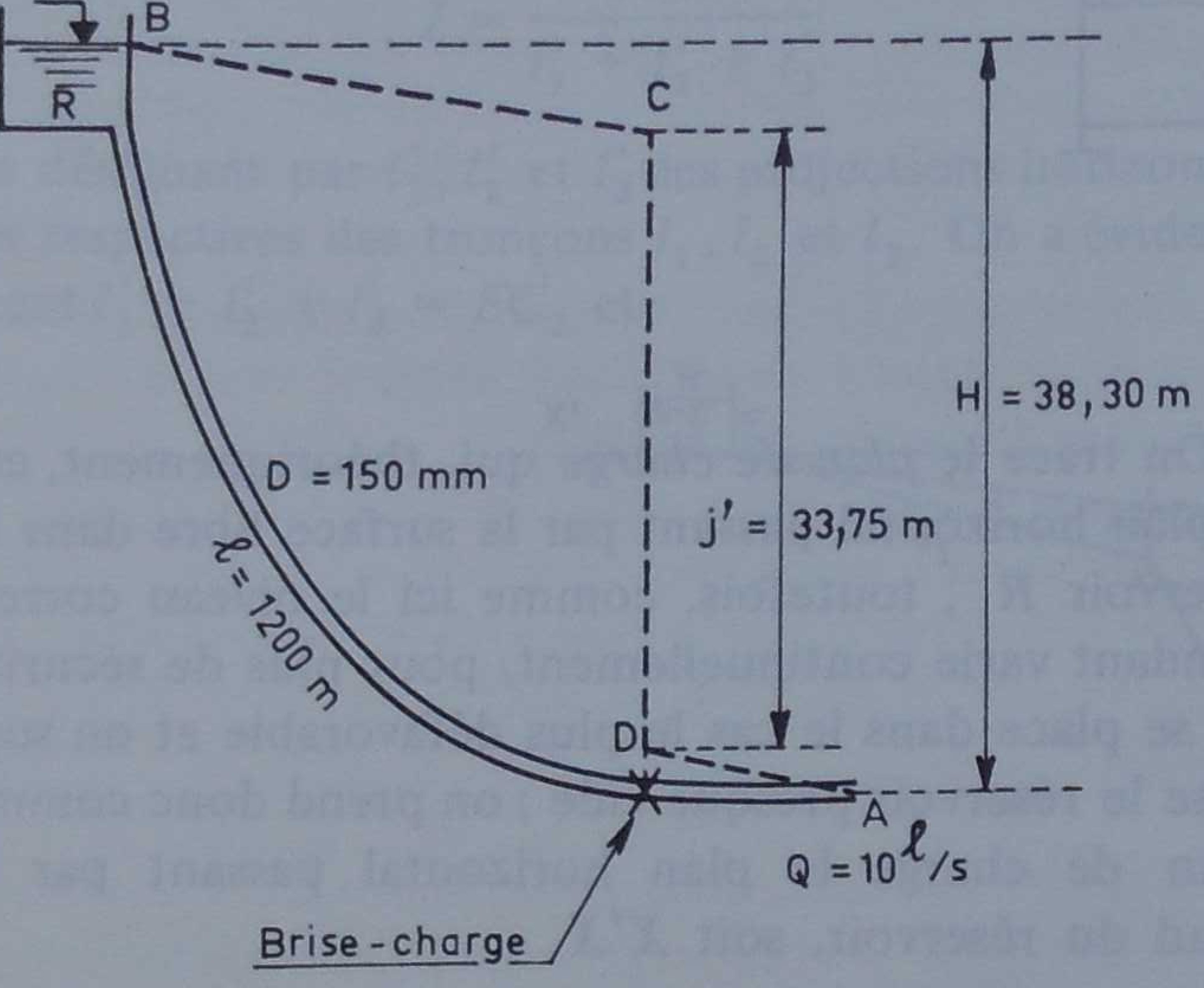


Fig. XI.2.3.4 – Utilisation d'un brise-charge

XI.2.4. Calcul d'un réseau de canalisations (réseau ramifié)

Le calcul d'un réseau de canalisations se ramène à l'exécution d'une série de problèmes analogues à ceux que nous venons de résoudre.

Il faut toutefois distinguer deux cas :

— *réseau simple, ou ramifié, ou en série, ou palmé* qui est constitué de telle manière qu'il soit impossible de décrire une boucle fermée en suivant le tracé des canalisations (fig. XI.2.4.1 a).

— *réseau complexe, ou maillé, ou en parallèle,* dans le cas contraire (fig. XI.2.4.1 b). Le calcul des réseaux maillés est plus complexe ; nous en donnerons plus loin le principe (§ XI.5) et nous limiterons ici à l'étude des *réseaux ramifiés.*

XI.2.4.1. *Principe du calcul*

On calcule successivement chaque tronçon ; pour chacun d'eux on connaît ou on se donne

— le *débit* à assurer qui est donné par les besoins à desservir : alimentation humaine, alimentation des animaux, industrie, services publics, service d'incendie (voir ouvrages techniques spécialisés).

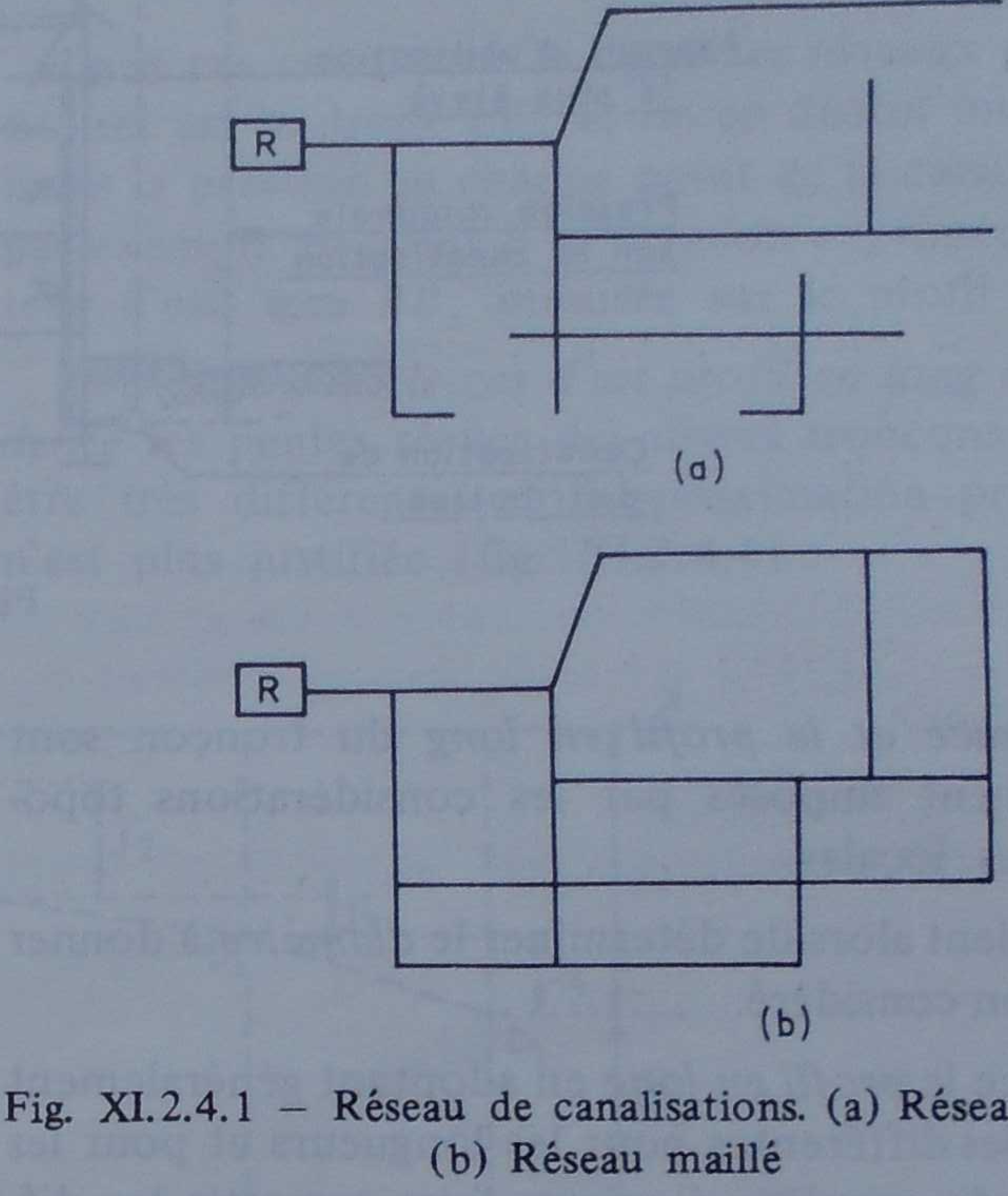


Fig. XI.2.4.1 – Réseau de canalisations. (a) Réseau ramifié ; (b) Réseau maillé

— la *pression* nécessaire en chaque point, notamment à l'extrémité de chaque tronçon. Cette pression doit être suffisante pour alimenter correctement la ou les prises d'eau qui se trouvent aux points correspondants de la canalisation (voirs ouvrages techniques spécialisés). Pour les agglomérations rurales de petite et moyenne importance on admet généralement que la pression minimale doit représenter une hauteur de 10 à 15 m d'eau au-dessus de la canalisation. Si les immeubles actuels ou futurs sont plus élevés, il faut évidemment majorer en conséquence le chiffre correspondant de manière à permettre l'alimentation correcte des appareils d'utilisation placés dans les étages les plus élevés en tenant compte des pertes de charge entre la canalisation principale et ces appareils et de la pression minimale nécessaire à l'amont de chaque appareil (fig. XI.2.4.2).

Par exemple, pour un robinet ordinaire (évier, lavabo) la pression minimale à l'amont du robinet est de l'ordre de 1 m d'eau pour le débit nominal de l'appareil.

Souvent d'ailleurs, dans les localités rurales, les besoins du service d'incendie sont très supérieurs à ceux de la consommation domestique ou industrielle et ce sont alors les besoins du service d'incendie qui seront pris en compte pour le calcul du réseau.

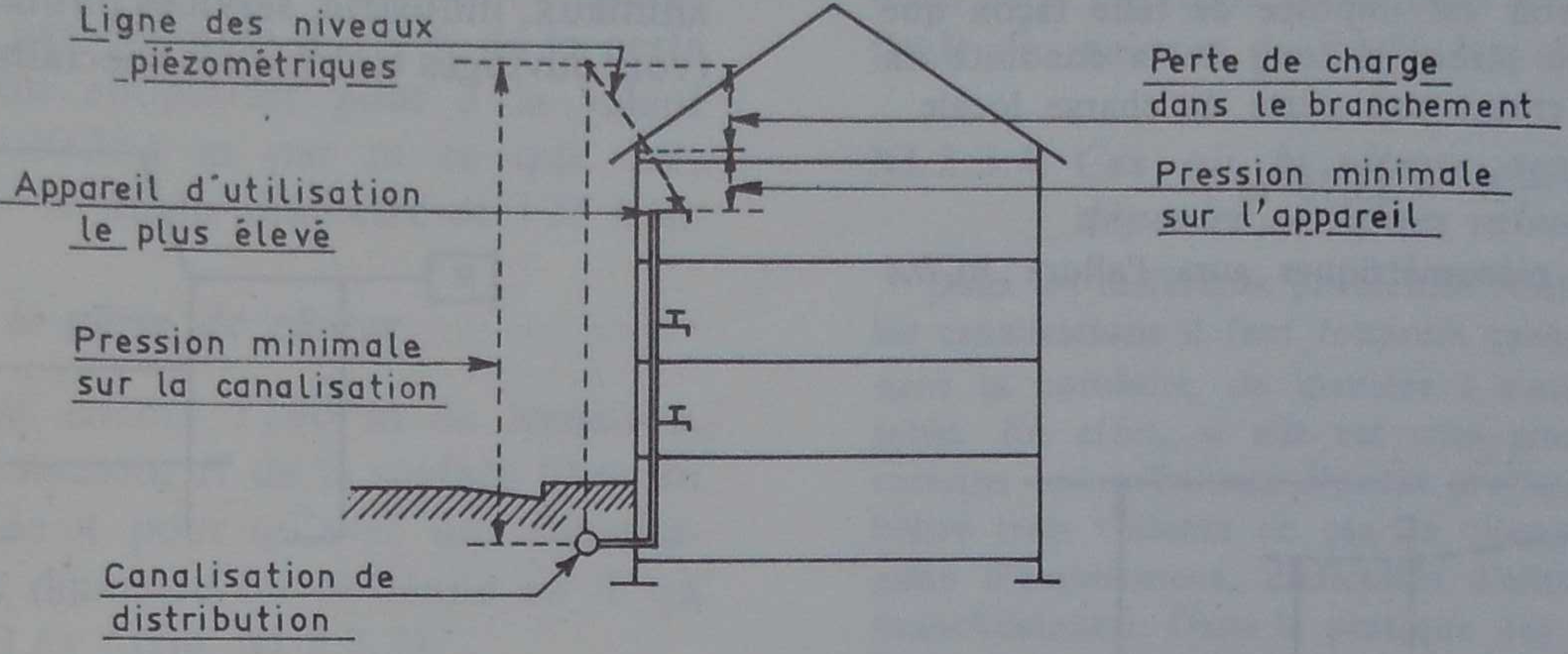


Fig. XI.2.4.2

— *le tracé et le profil en long* du tronçon sont généralement imposés par les considérations topographiques locales.

Il convient alors de déterminer le *diamètre* à donner au tronçon considéré.

On trace le *profil en long* en adoptant généralement des échelles différentes pour les longueurs et pour les hauteurs de manière à mieux faire ressortir les différences d'altitude et les pentes (fig. XI.2.4.3).

Par exemple on prendra comme échelle des longueurs celle du plan cadastral (1/2.000 ou 1/1.000) ; l'échelle des hauteurs sera beaucoup plus grande (1/100 ou 1/200).

Soit ainsi le *profil en long* du tronçon *REABC* ; désignons par l_1, l_2 et l_3 les longueurs *réelles* des tronçons *EA*, *AB* et *BC*. Supposons que cette canalisation ait une section constante et proposons-nous de calculer son diamètre *D* pour qu'elle fournisse en *C* un débit *Q* sous une charge *h* mètres d'eau. Le niveau piézométrique en *C* est donc C_1 tel que $CC_1 = h$.

On trace le *plan de charge* qui, théoriquement, est le plan horizontal passant par la surface libre dans le réservoir *R* ; toutefois, comme ici le niveau correspondant varie continuellement, pour plus de sécurité on se place dans le cas le plus défavorable et on suppose le réservoir presque vide ; on prend donc comme plan de charge le plan horizontal passant par le fond du réservoir, soit $X'X$.

La perte de charge totale de *R* à *C* est alors $j = C_1C_2$ et la perte de charge par mètre *J* sera constante tout le long du tronçon si le débit et le diamètre ne varient pas de *R* à *C*. En négligeant les pertes de charge singulières on aura $J = \dfrac{j}{l_1 + l_2 + l_3}$. Si on voulait tenir compte des pertes de charge singulières on diminuerait cette valeur de 10 à 20 % suivant la complexité du tronçon considéré.

Connaissant *J* et *Q*, les tables ou abaques donnent facilement *D* (problème traité au § XI.2.3.2).

Pour déterminer la pression en chaque point du tronçon on trace la ligne des niveaux piézométriques

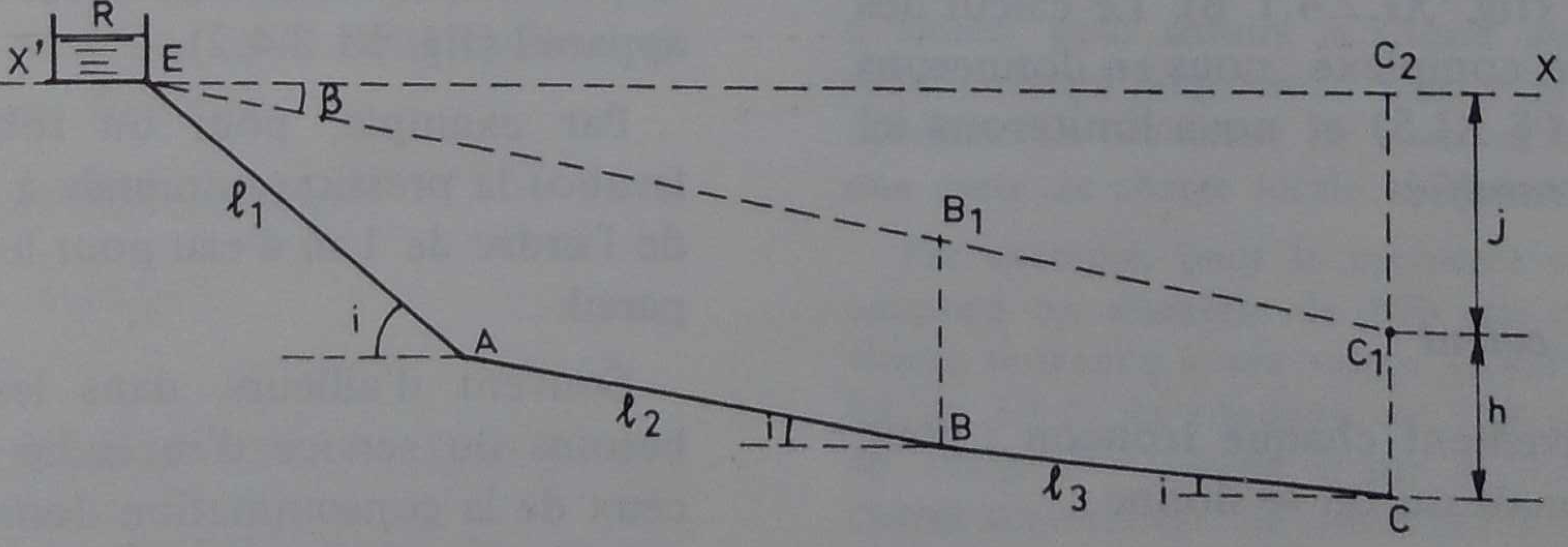


Fig. XI.2.4.3

dont on connait déjà deux points : le fond du réservoir (point E) et le point C_1.

Supposons que les pentes réelles des divers tronçons soient peu différentes ce qui est un cas pratique assez fréquent. Soit i l'angle supposé commun de chaque tronçon avec l'horizontale. On peut écrire :

$$J = \frac{j \cos i}{l'_1 + l'_2 + l'_3}$$

en désignant par l'_1, l'_2 et l'_3 les projections horizontales respectives des tronçons l_1, l_2 et l_3. On a évidemment $l'_1 + l'_2 + l'_3 = EC_2$ et

$$J = \frac{j}{EC_2} \cos i = \mathrm{tg}\,\beta \times \cos i$$

Dans ces conditions la ligne des niveaux piézométriques est la droite EC_1 et on en déduit immédiatement la pression en chaque point de la canalisation ; par exemple au point B la pression exprimée en hauteur d'eau sera BB_1 mesurée sur le profil en long.

Toutefois *dans le cas d'un profil en long très accidenté* les pentes réelles des divers tronçons peuvent être très différentes et l'approximation précédente n'est plus justifiée (fig. XI.2.4.4).

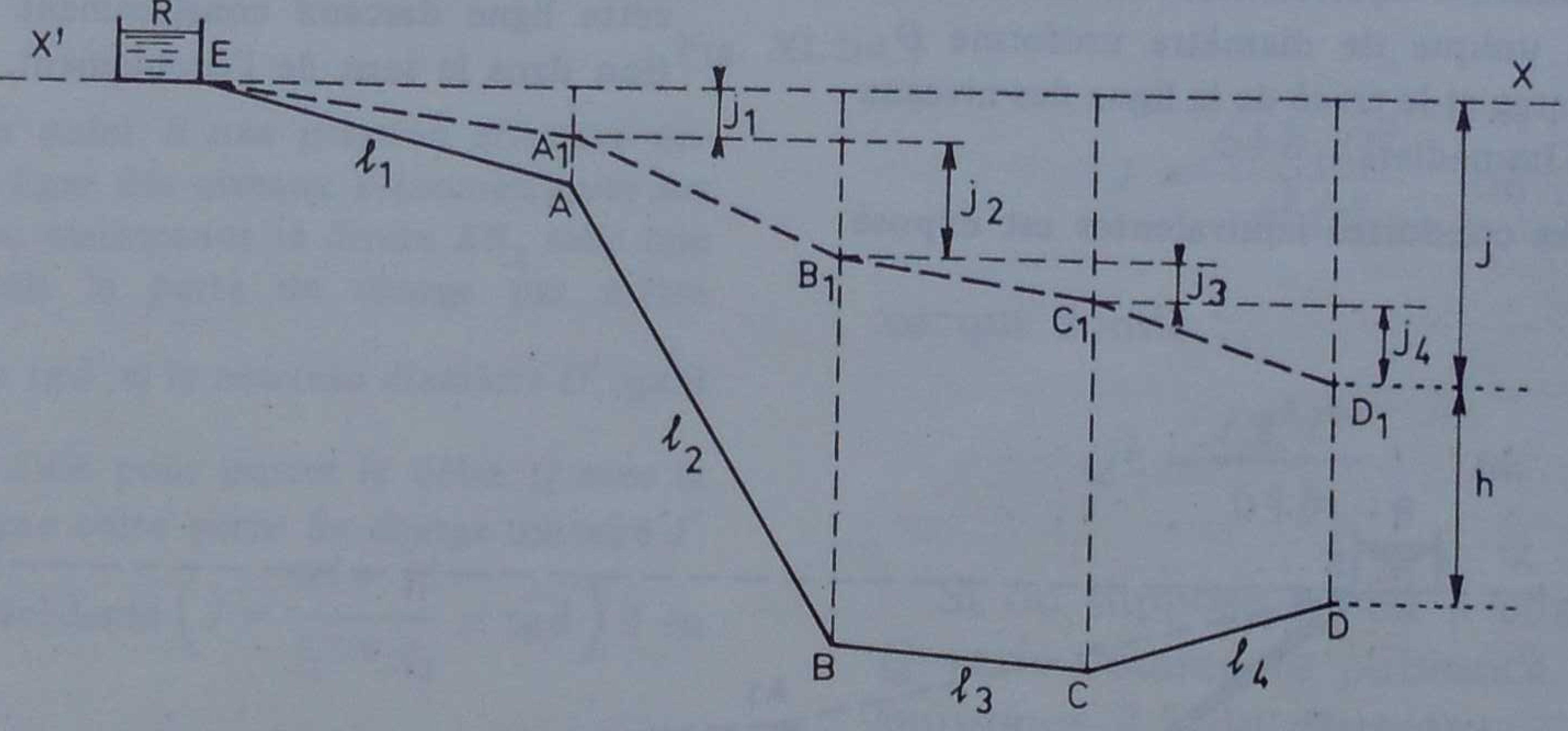


Fig. XI.2.4.4

On effectue alors le calcul pour chaque tronçon de pente constante et on trace la ligne des niveaux piézométriques par points.

Ainsi, dans le cas de la figure XI.2.4.4, la perte de charge par mètre étant

$$J = \frac{j}{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}$$

la perte de charge j_1 le long du tronçon EA sera $j_1 = Jl_1$, d'où on déduit le niveau piézométrique A_1 en A ; la perte de charge j_2 le long du tronçon AB sera $j_2 = Jl_2$, d'où on déduit le niveau piézométrique B_1 en B, etc.

XI.2.4.2. *Cas où les divers tronçons ont des diamètres différents* (fig. XI.2.4.5).

On doit alors effectuer le calcul pour chaque tronçon car, d'un tronçon à l'autre pour un même débit, la perte de charge

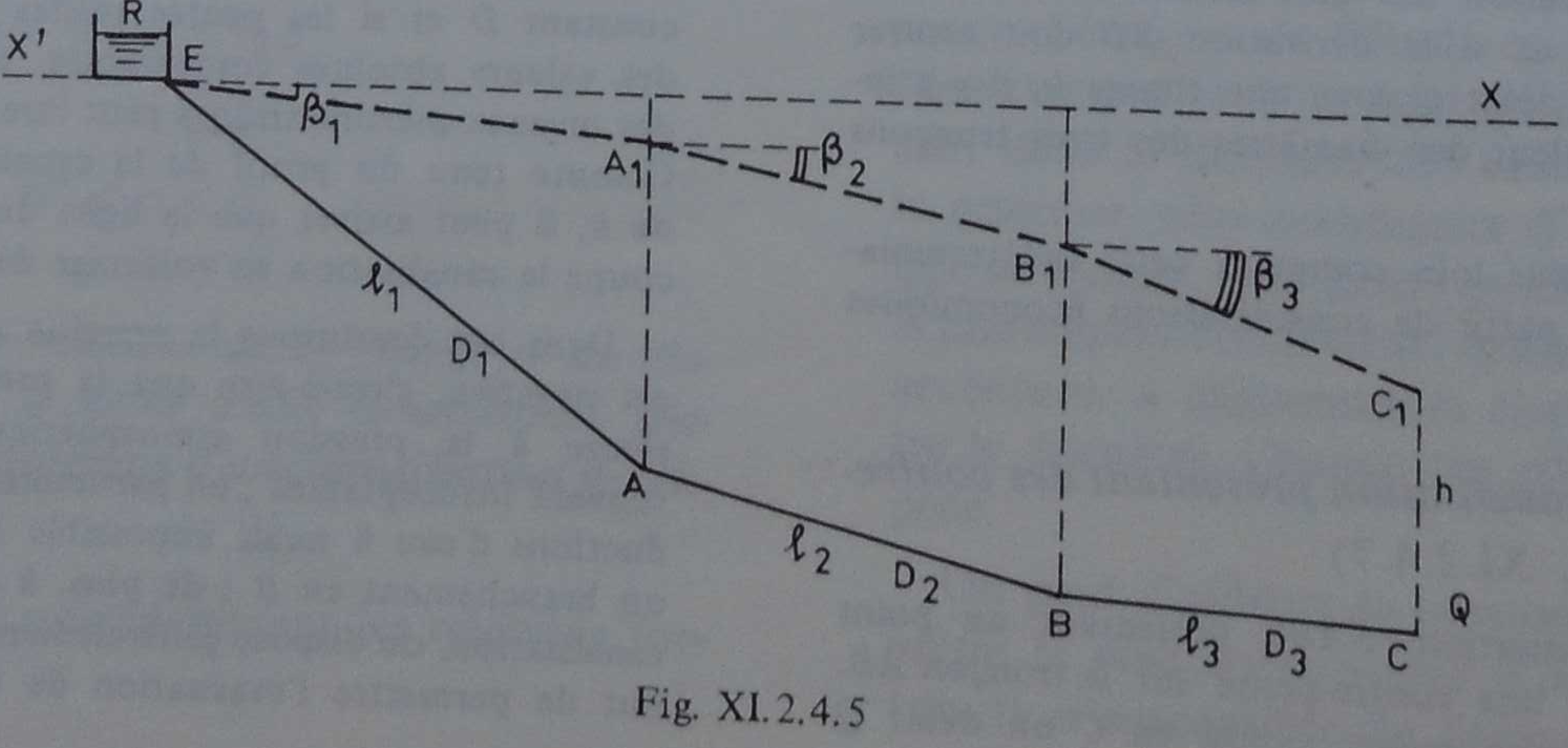


Fig. XI.2.4.5

par mètre est différente ; elle diminue si le diamètre augmente et inversement. La ligne des niveaux piézométriques sera donc représentée par une ligne brisée $EA_1B_1C_1$ présentant des changements de pente au droit des changements de diamètre.

D'une manière générale la ligne des niveaux piézométriques descend constamment lorsqu'on suit la canalisation dans le sens de l'écoulement ; comme nous l'avons montré, sa pente est sensiblement égale à la perte de charge par mètre.

Les calculs relatifs à des canalisations de diamètres différents et transportant le même débit sont souvent facilités en remplaçant les divers tronçons par des tronçons fictifs de canalisation rectiligne de diamètre uniforme D et portant le même débit Q avec la même perte de charge totale j. C'est ce qu'on appelle la *canalisation équivalente*. On est ainsi ramené à une canalisation unique de diamètre uniforme D ; le calcul des pertes de charge et le tracé de la ligne des niveaux piézométriques sont alors immédiats.

Le mode de calcul des conduites équivalentes est exposé au § XI.3.2.

XI.2.4.3. *Cas où les divers tronçons transportent des débits différents* (fig. XI.2.4.6)

Supposons qu'au point A une dérivation AD doive transporter un débit q. Dans le tronçon EA le débit sera donc $Q + q$. Si les tronçons EA et AB ont même diamètre la perte de charge par mètre (qui varie approximativement comme le carré du débit) sera plus grande sur le tronçon EA que sur le tronçon AB et la ligne des niveaux piézométriques sera donc encore représentée par une ligne brisée EA_1B_1 présentant des changements de pente au droit des "noeuds" c'est-à-dire des points origines des dérivations tels que A.

Comme précédemment, dans la quasi généralité des cas, cette ligne descend constamment lorsqu'on suit la canalisation dans le sens de l'écoulement.

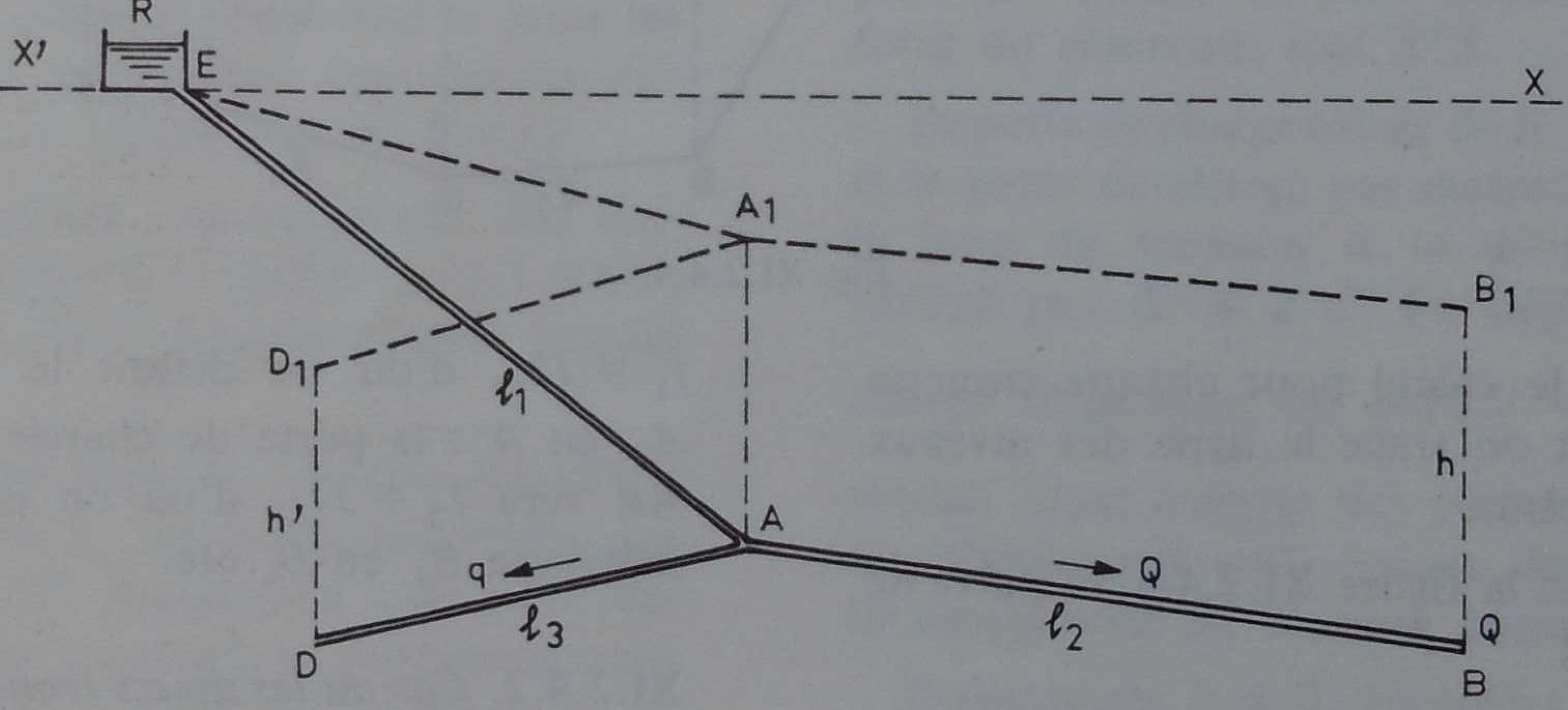


Fig. XI.2.4.6

Remarque : Si la dérivation AD doit assurer en D le débit q sous une charge h' et si la dérivation AB doit assurer simultanément en B le débit Q sous une charge h, il y a indétermination sur la valeur des diamètres des trois tronçons EA, AB et AD.

Nous apprendrons plus loin comment cette indétermination peut être levée à partir de considérations économiques (cf. § XI.7).

XI.2.4.4. *Cas d'une canalisation présentant des contre-pentes* (fig. XI.2.4.7)

Considérons la canalisation $EABC$ présentant un point haut en B, c'est-à-dire une contre-pente sur le tronçon AB. Supposons que cette canalisation assure en C un débit Q sous une charge $h = CC_1$. Si la canalisation a un diamètre constant D et si les pentes réelles des divers tronçons ont des valeurs absolues comparables, nous savons que la ligne des niveaux piézométriques peut être assimilée à la droite EC_1. Compte tenu du profil de la canalisation et de la grandeur de h, il peut arriver que la ligne des niveaux piézométriques coupe la canalisation au voisinage de B.

Dans ces conditions la pression effective $\overline{\omega} h'$ au point B est négative, c'est-à-dire que la pression absolue y est inférieure à la pression atmosphérique. Ces conditions sont souvent inacceptables ; en particulier dans le domaine des adductions d'eau il serait impossible d'effectuer ultérieurement un branchement en B ; de plus, à chaque point haut d'une canalisation, on dispose généralement une ventouse ayant pour but de permettre l'évacuation de l'air dissout dans l'eau et

qui se rassemble aux points correspondants ; dans le cas considéré il ne serait pas possible de placer une ventouse en B puisqu'elle laisserait, au contraire, l'air entrer dans la canalisation.

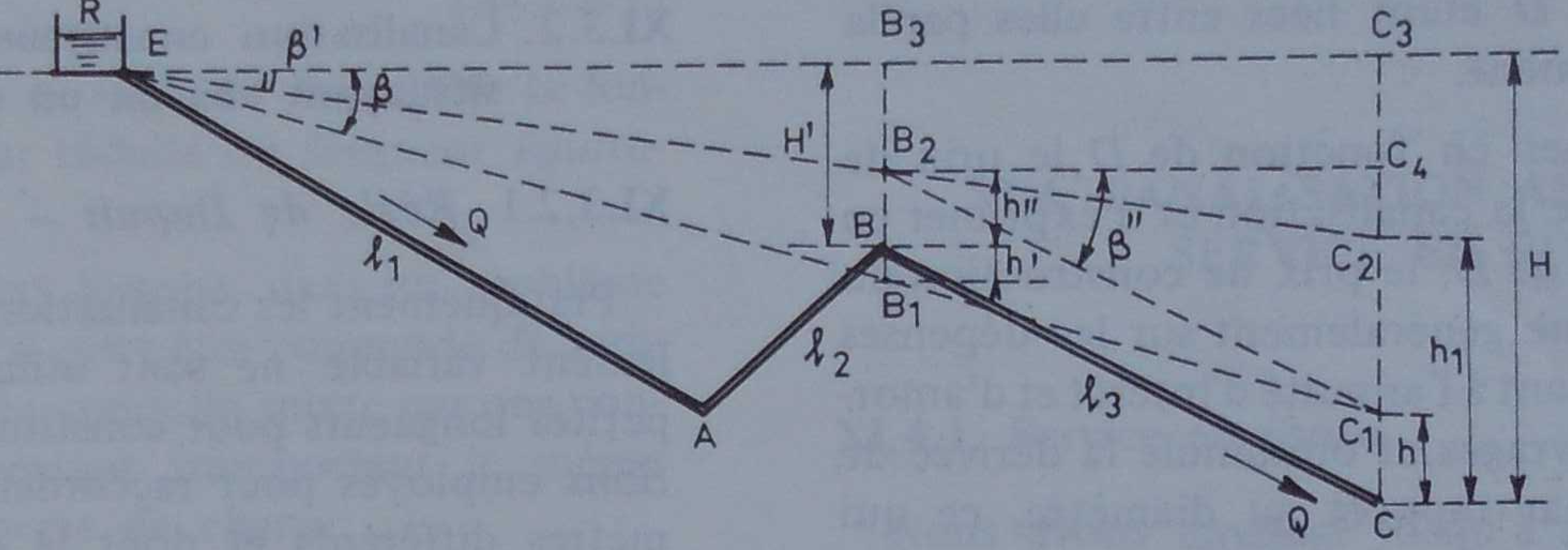


Fig. XI.2.4.7

On s'impose donc au point B une pression effective minimale positive $\varpi h''$; la ligne des niveaux piézométriques sur le tronçon EAB est donc maintenant la droite EB_2 telle que $BB_2 = h''$. On en déduit la perte de charge par mètre $J' = \dfrac{B_2B_3}{l_1 + l_2} = \dfrac{H' - h''}{l_1 + l_2} \simeq \operatorname{tg}\beta'$ et le nouveau diamètre D' qu'il faut donner au tronçon EAB pour porter le débit Q avec la perte de charge J'. Comme cette perte de charge unitaire J' est plus petite que la précédente $\left(J = \dfrac{H' + h'}{l_1 + l_2} \simeq \operatorname{tg}\beta\right)$ il en résulte que $D' > D$.

Si on adopte le même diamètre D' sur le tronçon BC, pour le même débit Q la ligne des niveaux piézométriques sur ce tronçon sera la droite EB_2 prolongée suivant B_2C_2 puisque le débit et le diamètre sont les mêmes tout le long de la canalisation $EABC$. On obtient ainsi en C le débit Q sous une charge $CC_2 = h_1 > h$.

Si cette charge h_1 est excessive et si on désire ramener sa valeur à $h = CC_1$, il convient, soit de disposer un brise-charge sur le tronçon BC, soit d'adopter pour ce tronçon un diamètre D'' susceptible de porter le débit Q avec une perte de charge unitaire $J'' = \dfrac{C_1C_4}{l_3} = \dfrac{H - H' - h + h''}{l_3}$.

On lit sur la figure :

$$\operatorname{tg}\beta' < \operatorname{tg}\beta < \operatorname{tg}\beta''$$

ou

$$J' < J < J''$$

Donc

$$D'' < D < D'$$

XI.2.4.5. *Influences relatives de la charge et du diamètre sur le débit d'une canalisation. Diamètre économique d'une canalisation de distribution*

Nous avons établi précédemment les relations fondamentales :

$$J = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2 D^5} \quad \text{ou} \quad J = \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 D^5}$$

ce qui donne :

$$Q^2 = \frac{J\pi^2 D^5}{64\, b_1} \quad \text{ou} \quad Q^2 = \frac{gJ\pi^2 D^5}{8\lambda}$$

Si on suppose b_1 ou λ constant, on constate que Q varie comme la puissance 0,5 de J et comme la puissance 2,5 du diamètre.

En fait b_1 ou λ n'est pas constant mais son incidence sur les variations de Q est beaucoup moins importante que celles de D et J.

On peut donc conclure que le diamètre a sur le débit d'une canalisation une influence beaucoup plus grande que la charge. Pour augmenter le débit on agira donc plus efficacement en accroissant le diamètre qu'en augmentant la charge, par exemple qu'en élevant le réservoir s'il s'agit d'une conduite de distribution.

Bien entendu, il s'agit là d'une conclusion purement théorique de l'étude mathématique des lois de l'écoulement et il ne faudrait pas en conclure en passant dans le domaine des réalisations qu'il est, dans la pratique, plus avantageux d'augmenter le diamètre que la charge. Il se peut, en effet, que les conditions économiques conduisent, malgré une incidence moins accentuée, à augmenter la charge plutôt qu'à accroître le diamètre. Chaque cas est à ce sujet un cas d'espèce.

On peut d'ailleurs se proposer de rechercher le *diamètre le plus économique* d'une canalisation de distribution susceptible de délivrer par exemple un dé-

bit Q sous une charge h. Toute augmentation de la hauteur du réservoir (donc de J) permettra de réduire le diamètre convenable et inversement, les deux variables J et D étant liées entre elles par la formule de l'écoulement.

Il suffit d'exprimer en fonction de D le prix de fourniture et pose de la canalisation et d'exprimer en fonction de J, donc de D, le prix de construction du réservoir. On raisonne généralement sur les dépenses annuelles correspondant à l'annuité d'intérêt et d'amortissement de ces ouvrages et on annule la dérivée de la dépense totale par rapport au diamètre, ce qui conduit à l'expression du *diamètre économique*(1).

Nous aurons l'occasion de traiter un problème analogue pour le calcul du diamètre économique d'une canalisation de refoulement (§ XI.8.2).

XI.3. CANALISATION DE DIAMÈTRE VARIABLE

Dans une telle canalisation parcourue par un débit constant le régime est toujours permanent mais n'est plus uniforme, la vitesse moyenne variant en raison inverse de la section transversale de la canalisation.

XI.3.1. Canalisation de diamètre progressivement variable

Proposons-nous de calculer la perte de charge le long d'un tronçon rectiligne d'une canalisation de diamètre progressivement variable transportant un débit constant Q. Le long d'un tronçon infiniment petit de longueur ds, la perte de charge dj peut s'exprimer en appliquant l'équation [*XI.2.1*] :

$$dj = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}\, ds$$

En faisant l'approximation b_1 = constante et en intégrant cette équation entre deux sections d'abscisses s et s', on obtient l'équation approchée

$$j = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \int_s^{s'} \frac{ds}{D^5} \qquad [XI.3.1]$$

dont l'intégration dépend de la loi $D = f(s)$ c'est-à-dire de la forme de la canalisation.

XI.3.2. Canalisation constituée de tronçons successifs ayant chacun un diamètre constant

XI.3.2.1. *Régle de Dupuit – Conduite équivalente*

Pratiquement les canalisations de diamètre graduellement variable ne sont utilisées que sur de très petites longueurs pour constituer des *cônes* ou *réductions* employés pour raccorder deux tuyaux de diamètres différents et dont la perte de charge a été indiquée au § VII.6.3. La canalisation proprement dite est constituée en réalité de plusieurs tronçons successifs ayant chacun un diamètre constant.

Dans ces conditions le problème se simplifie car pour un tronçon de longueur l donnée et de diamètre constant D l'équation [*XI.3.1*] devient :

$$j = \frac{64 b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5}$$

qui est effectivement la formule d'écoulement des tuyaux cylindriques.

Si donc (fig. XI.3.1) la canalisation de débit constant se compose de plusieurs tronçons successifs de longueurs l_1, l_2, l_3, etc . . . ayant respectivement des diamètres D_1, D_2, D_3, etc . . . la perte de charge totale sera (toujours en admettant b_1 constant) :

$$j = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \left(\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \ldots \right)$$

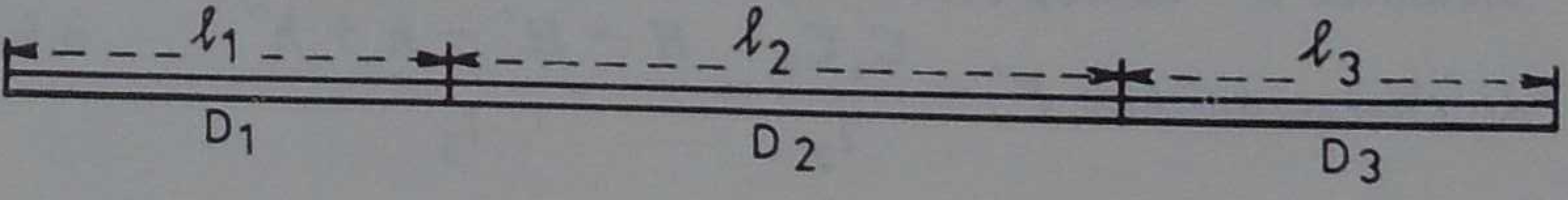


Fig. XI.3.1

On notera que l'ordre dans lequel se succèdent les tronçons n'a aucune influence sur la perte de charge, donc sur le débit.

Proposons-nous de chercher quelle serait la longueur l de la conduite de diamètre constant donné D qui porterait le même débit Q avec la même perte de charge j. En supposant toujours b_1 constant, on aurait :

$$j = \frac{64 b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5} = \frac{64 b_1 Q^2}{\pi^2} \left(\frac{l_1}{D_1^5} + \frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5} + \ldots \right)$$

---

(1) Pour plus de détails sur les calculs économiques des canalisations, on pourra consulter les études citées dans la bibliographie.

ou

$$l = l_1\left(\frac{D}{D_1}\right)^5 + l_2\left(\frac{D}{D_2}\right)^5 + l_3\left(\frac{D}{D_3}\right)^5 + \dots \qquad [XI.3.2.1]$$

Ce résultat exprime la *règle de Dupuit* et la longueur l est la longueur réduite ou *longueur équivalente*.

On utilise ce résultat lorsque, dans un problème de distribution d'eau, il peut être commode de remplacer virtuellement une conduite mixte par une conduite de diamètre constant transportant le même débit avec la même perte de charge.

Nous avons déjà signalé (§ XI.2.4.2) un cas concret d'utilisation de cette méthode de calcul. Nous la retrouverons plus loin pour le calcul de certains réseaux maillés (conduites en parallèle, § XI.5.2).

XI.3.2.2. *Application de la formule de Darcy à l'expression plus exacte de la longueur équivalente*

Soit l la longueur équivalente de canalisation de diamètre D transportant le débit Q avec la même perte de charge j qu'une conduite de longueur l_1 et de diamètre D_1.

Pour cette dernière conduite l'application de la formule de Darcy donne :

$$j = \frac{64\, b'_1 Q^2 l_1}{\pi^2 D_1^5} \qquad \text{avec} \qquad b'_1 = \alpha + \frac{\beta}{D_1}$$

et pour la conduite équivalente :

$$j = \frac{64\, b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5} \qquad \text{avec} \qquad b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$$

En égalant ces deux expressions de j, il vient

$$l = l_1\left(\frac{D}{D_1}\right)^5 \frac{b'_1}{b_1} \qquad [XI.3.2.2]$$

L'approximation faite au § XI.3.2.1 consistait à supposer b_1 constant et conduisait à :

$$l = l_1\left(\frac{D}{D_1}\right)^5 \qquad [XI.3.2.3]$$

En fait, l'expression [*XI.3.2.2*] est plus précise que [*XI.3.2.3*] puisqu'elle tient compte des variations de b_1.

En calculant les valeurs de b_1 et b'_1 données par la formule de Darcy, on peut dresser par application de la formule [*XI.3.2.2*] des tableaux de correspondance permettant d'obtenir rapidement la longueur l correspondant aux différents diamètres usuels D_1, D_2, D_3, etc ... pour un diamètre D donné de la canalisation équivalente.

La figure XI.3.2 reproduit un tel tableau intitulé *"conduites mixtes"* pour lequel on a choisi $D = 100$ mm, les coefficients α et β de la formule de Darcy ($b_1 = \alpha + \beta/D$) étant ceux relatifs à des conduites en service.

XI.4. CANALISATION ASSURANT UN SERVICE EN ROUTE

XI.4.1. Service en route

Nous avons envisagé jusqu'à présent le cas d'une canalisation transportant d'une de ses extrémités à l'autre un débit constant ; on dit d'une telle canalisation qu'elle assure un *service d'extrémité*.

Mais il arrive fréquemment (en particulier dans la pratique des adductions d'eau) qu'une conduite distribue de l'eau le long de son parcours ; on dit alors qu'elle assure un *service en route*.

Le débit varie donc d'une extrémité à l'autre de la canalisation et le régime y est permanent et non uniforme.

Proposons-nous de calculer la *perte de charge* qui se produit dans une canalisation de section constante assurant un service en route.

Considérons (fig. XI.4.1) un élément de canalisation rectiligne de longueur infiniment petite ds, le long duquel le débit peut être supposé constant et égal à Q. La perte de charge infiniment petite le long de cet élément est :

$$dj = \frac{64\, b_1 Q^2\, ds}{\pi^2 D^5}$$

et le long d'un tronçon de longueur finie limitée par les sections d'abscisses s et s', la perte de charge sera (en supposant b_1 constant) :

$$j = \frac{64\, b_1}{\pi^2 D^5} \int_s^{s'} Q^2\, ds$$

Notons que si nous adoptons une formule du type de celle de Darcy où b_1 n'est fonction que du diamètre, nous n'avons plus besoin de faire l'approximation sur la valeur constante à attribuer à b_1 puisque, dans le cas considéré, seul Q varie D restant constant.

Pour pouvoir résoudre l'intégrale $\int_s^{s'} Q^2\, ds$ il faudrait connaître la loi exacte $Q = f(s)$ de variation du

débit avec la longueur ; il est évident que, dans la pratique, on ne peut la connaître car elle dépend des utilisations locales, aussi on admet pratiquement que *la conduite livre un débit constant q par unité de longueur.*

Référence D = 100 mm
Correspondance des longueurs

60 l : 15 – 20 – 25 – 30 – 35 – 40 – 45 – 50 – 60 – 65 – 70 – 75 – 80 – 85 – 90 – 95 – 100 – 105 – 110 – 115 – 120 – 125 – 130 – 135 – 140 – 145

80 l : 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20 – 21 – 22 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 28 – 29 – 30 – 31 – 32

125 l : 0.30 – 0.40 – 0.50 – 0.60 – 0.70 – 0.80 – 0.90 – 1.00 – 1.10 – 1.20 – 1.30 – 1.40 – 1.50 – 1.60 – 1.70 – 1.80 – 1.90 – 2.00 – 2.10 – 2.20 – 2.30 – 2.40 – 2.50 – 2.60 – 2.70 – 2.80 – 2.90 – 3.00 – 3.10

150 l : 0.15 – 0.20 – 0.25 – 0.30 – 0.35 – 0.40 – 0.45 – 0.50 – 0.55 – 0.60 – 0.65 – 0.70 – 0.75 – 0.80 – 0.85 – 0.90 – 0.95 – 1.00 – 1.05 – 1.10 – 1.15 – 1.20

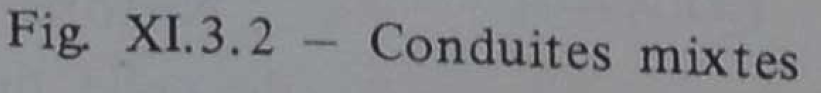
175 l : 0.05 – 0.10 – 0.15 – 0.20 – 0.25 – 0.30 – 0.35 – 0.40 – 0.45 – 0.50 – 0.55

200 l : 0.03 – 0.04 – 0.05 – 0.06 – 0.07 – 0.08 – 0.09 – 0.10 – 0.11 – 0.12 – 0.13 – 0.14 – 0.15 – 0.16 – 0.17 – 0.18 – 0.19 – 0.20 – 0.21 – 0.22 – 0.23 – 0.24 – 0.25 – 0.26 – 0.27 – 0.28 – 0.29

250 l : 0.010 – 0.015 – 0.020 – 0.025 – 0.030 – 0.035 – 0.040 – 0.045 – 0.050 – 0.055 – 0.060 – 0.065 – 0.070 – 0.075 – 0.080 – 0.085 – 0.090 – 0.095 – 0.100

300 l : 0.003 – 4 – 0.005 – 6 – 7 – 8 – 9 – 0.010 – 11 – 12 – 13 – 14 – 0.015 – 16 – 17 – 18 – 19 – 0.020 – 21 – 22 – 23 – 24 – 0.025 – 26 – 27 – 28 – 29 – 0.030 – 31 – 32 – 33 – 34 – 0.035 – 36

(Main scale on each: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10)



NOTA ; De 10 à 100 m. multiplier par 10 les longueurs correspondantes, etc....

Fig. XI.3.2 – Conduites mixtes

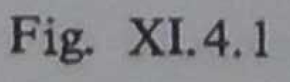


Fig. XI.4.1

Si donc Q_0 est le débit à l'origine de la canalisation, à la distance s de l'origine il sera :

$$Q = Q_0 - qs$$

L'intégrale $\int Q^2 ds$ prise entre l'origine et une section située à une distance l de l'origine s'écrit alors :

$$\int_0^l (Q_0 - qs)^2 \, ds$$

et

$$j = \frac{64\, b_1 l}{\pi^2 D^5} \left(Q_0^2 - Q_0 q l + \frac{1}{3} q^2 l^2 \right) \quad [XI.4.1]$$

XI.4.2. Service mixte

Une canalisation assure un service mixte lorsqu'elle assure à la fois un service en route et un service d'extrémité.

Soit (fig. XI.4.2.1) Q le débit d'extrémité à assurer à une distance l mètres de l'origine, après avoir distribué en route un débit q par mètre.

Le débit à l'origine doit donc être :

$$Q_0 = Q + ql$$

Remplaçons Q_0 par cette expression dans l'équation [*XI.4.1*] ; il vient :

$$j = \frac{64\, b_1 l}{\pi^2 D^5} \left(Q^2 + Q q l + \frac{1}{3} q^2 l^2 \right) \quad [XI.4.2.1]$$

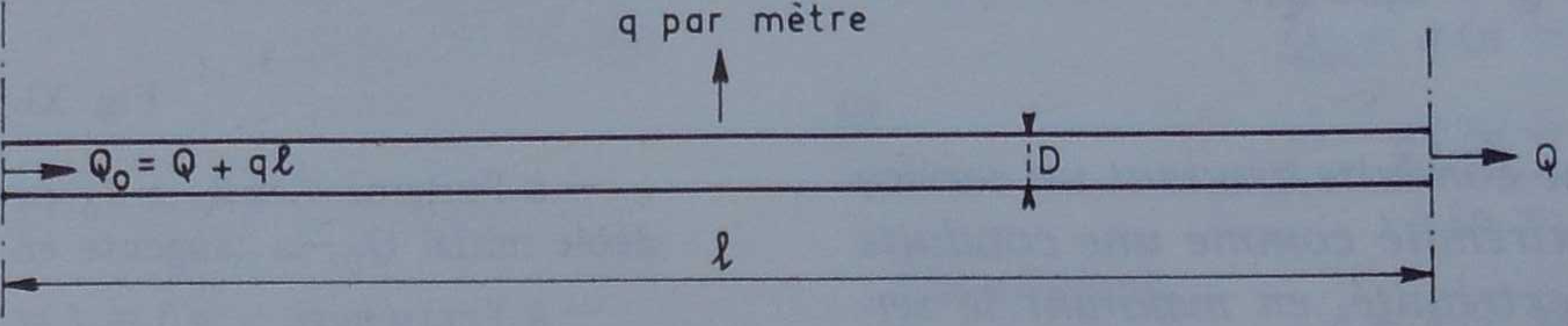


Fig. XI.4.2.1

Si, comme c'est le cas général, les longueurs vraies des tronçons de la conduite diffèrent peu de leurs projections horizontales, la ligne des niveaux piézométriques est sensiblement une courbe du troisième degré dont l'équation $j = f(l)$ est l'équation [*XI.4.2.1*] ci-dessus (fig. XI.4.2.2) et dont les coefficients angulaires des tangentes sont

— à l'origine : $\operatorname{tg} \beta_0 \simeq J_0$ perte de charge unitaire pour le débit $Q_0 = Q + ql$

— à l'extrémité : $\operatorname{tg} \beta \simeq J$ perte de charge unitaire pour le débit Q.

Par ailleurs, si nous posons :

$$Q'^2 = Q^2 + Qql + \frac{1}{3} q^2 l^2$$

la perte de charge j devient :

$$j = \frac{64\, b_1 Q'^2 l}{\pi^2 D^5}$$

elle est donc égale à celle qui, dans la canalisation de diamètre D et de longueur l, correspondrait à un débit constant Q'.

Or, on peut écrire :

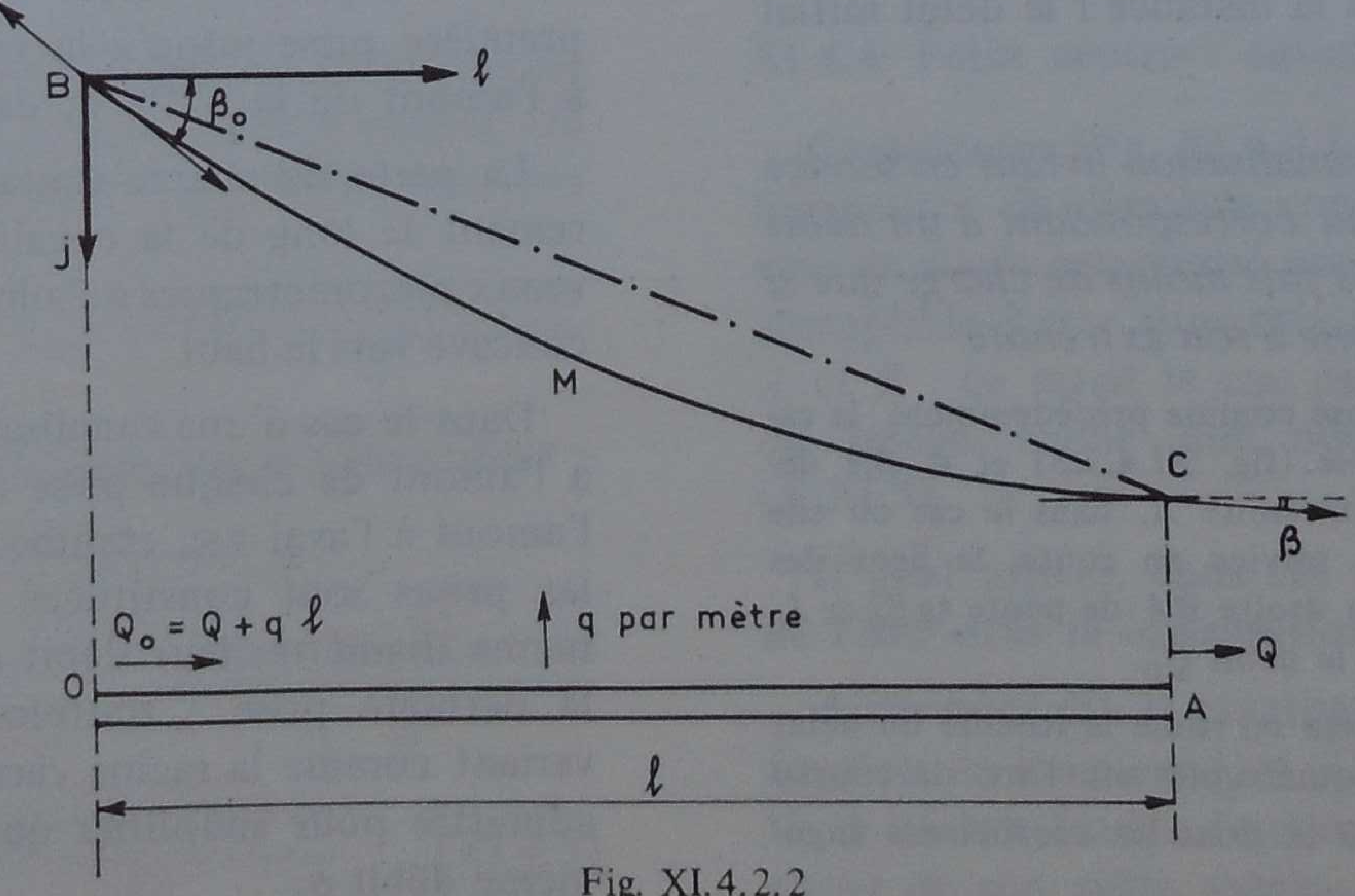


Fig. XI.4.2.2

$$Q^2 + Qql + \frac{1}{4} q^2 l^2 < Q^2 + Qql + \frac{1}{3} q^2 l^2$$

$$< Q^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} Qql + \frac{1}{3} q^2 l^2$$

$$\left(Q + \frac{1}{2} ql\right)^2 < Q'^2 < \left(Q + \frac{1}{\sqrt{3}} ql\right)^2$$

$$Q + 0{,}50\, ql < Q' < Q + 0{,}58\, ql$$

On peut donc admettre :

$$Q' \simeq Q + 0{,}55\, ql$$

d'où la *conclusion* :

On peut calculer une conduite assurant un service mixte en route et d'extrémité comme une conduite assurant un service d'extrémité, en majorant le service d'extrémité de 55 % du service assuré en route.

L'approximation faite revient donc (fig. XI.4.2.2), à assimiler l'arc de courbe *BMC* (ligne des niveaux piézométriques réelle) à la droite *BC* (ligne des niveaux piézométriques correspondant à un débit fictif constant $Q' = Q + 0{,}55\, ql$). Dans les deux cas la perte de charge totale est sensiblement la même.

Proposons-nous, par ailleurs, d'examiner le cas où *la totalité du débit initial est distribué en route.*

Dans ces conditions $Q = 0$, $ql = Q_0$ et l'équation [*XI.4.2.1*] donne

$$j = \frac{1}{3} \frac{64\, b_1 Q_0^2 l}{\pi^2 D^5}$$

C'est le tiers de la perte de charge qui serait nécessaire pour porter jusqu'à la distance l le débit initial constant Q_0.

D'où le résultat : *Une canalisation livrant en service en route un volume d'eau correspondant à un débit initial Q_0, consomme trois fois moins de charge que si elle portait ce même volume à son extrémité.*

Si, par exemple, on suppose comme précédemment la canalisation de pente très faible (fig. XI.4.2.3) et si elle débouche à l'air libre à son extrémité A, dans le cas où elle transporte le débit Q_0 sans service en route, la ligne des niveaux piézométriques est la droite BA de pente $\text{tg}\,\beta_0 \simeq J_0$ perte de charge unitaire pour le débit Q_0.

Si cette même conduite livre en route la totalité du débit Q_0, la ligne des niveaux piézométriques est l'arc de courbe $B'MA$ tel que $OB' = 1/3\ OB$ et dont les coefficients angulaires des tangentes sont

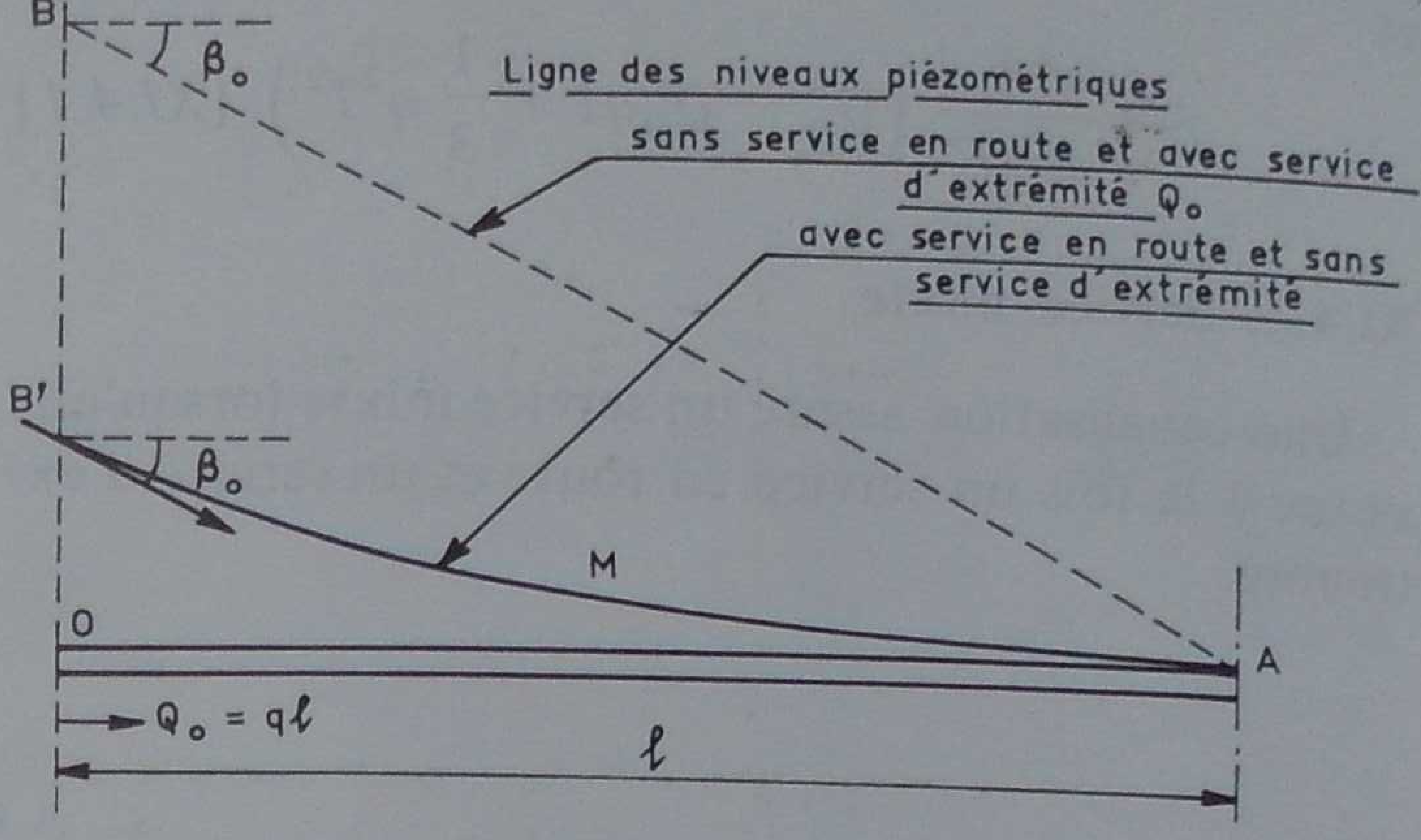


Fig. XI.4.2.3

— à l'origine : $\text{tg}\,\beta_0 \simeq J_0$ perte de charge unitaire pour le débit initial Q_0, la tangente en B' est donc parallèle à BA ;

— à l'extrémité : $\text{tg}\,\beta = J = 0$ puisque le débit est nul, la tangente en A est donc horizontale.

XI.4.3. Canalisation alimentant plusieurs prises régulièrement espacées et délivrant, chacune, un débit constant

C'est le cas d'une rampe mobile d'irrigation par aspersion le long de laquelle sont disposés des asperseurs.

Proposons-nous de calculer la perte de charge totale j dans une canalisation rectiligne de diamètre constant D le long de laquelle sont disposées n prises équidistantes, espacées de e et fournissant chacune un débit supposé constant et égal à q (fig. XI.4.3).

Le débit parcourant la canalisation diminue régulièrement depuis la valeur $Q_1 = nq$ à l'amont de la première prise jusqu'à la valeur $Q_1 - (n-1)\,q = q$ à l'amont de la $n^{ième}$ et dernière prise.

La perte de charge unitaire diminue donc régulièrement le long de la canalisation et la ligne des niveaux piézométriques a l'allure d'une ligne polygonale concave vers le haut.

Dans le cas d'une canalisation horizontale la charge à l'amont de chaque prise diminue régulièrement de l'amont à l'aval ; si, comme c'est généralement le cas, les prises sont constituées d'ajutages identiques de même diamètre, leur débit diminue de la première à la dernière prise ; toutefois, le débit d'une prise variant comme la racine carrée de la charge, on peut admettre pour simplifier que toutes les prises ont le même débit q.

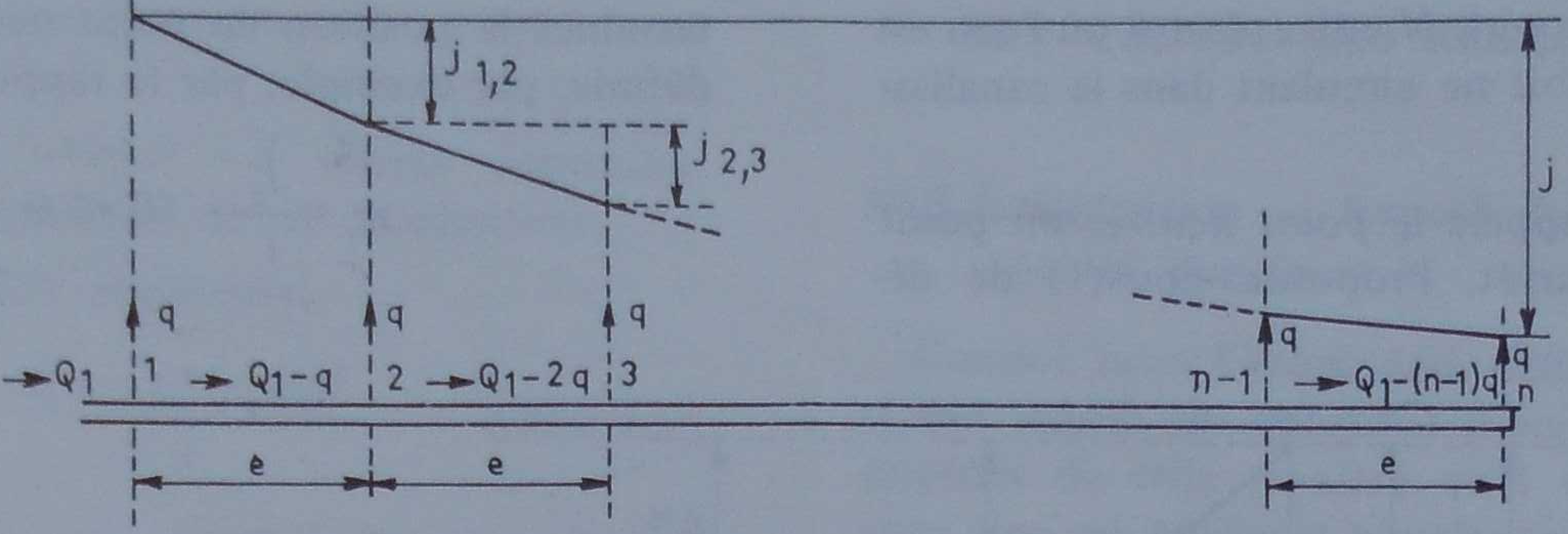


Fig. XI.4.3

Dans ces conditions, dans le tronçon de canalisation compris entre les prises n^{os} 1 et 2 la perte de charge est :

$$j_{1,2} = \frac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}(Q_1 - q)^2 e = kq^2(n-1)^2 e$$

avec $k = \dfrac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}$ fonction uniquement du diamètre et de la rugosité des parois de la canalisation, donc constant tout le long de celle-ci.

Entre les prises n^{os} 2 et 3 la perte de charge est :

$$j_{2,3} = k(Q_1 - 2q)^2 e = kq^2(n-2)^2 e$$

Entre les prises n^{os} $n-1$ et n la perte de charge est :

$$j_{(n-1),n} = k[Q_1 - (n-1)\,q]^2 e = kq^2 e$$

La perte de charge totale entre la première et la $n^{ième}$ prise est donc :

$$j = \Sigma\, j_{i,i+1} = kq^2 e[1 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2]$$

L'expression entre crochets représente la somme des carrés des $(n-1)$ premiers nombres entiers. On sait que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est :

$$1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donc l'expression entre crochets a pour valeur :

$$1 + 2^2 + \cdots + (n-2)^2 + (n-1)^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$$

d'où

$$j = kq^2 e\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \qquad [XI.4.3]$$

En posant

$$Q_c = q(n-1)$$

et

$$\lambda = \frac{n(2n-1)}{6(n-1)}$$

On obtient

$$j = kQ_c^2 \lambda e$$

ce qui montre que la perte de charge cherchée est la même que celle résultant du transport d'un débit constant $Q_c = q(n-1)$ dans une canalisation fictive de même diamètre D que la canalisation considérée, mais de longueur λe.

Si le nombre des prises est suffisamment important, on peut assimiler le problème à celui d'une canalisation distribuant en route un débit constant par unité de longueur, ce qui revient à admettre que j est le tiers de la perte de charge qui résulterait du transfert tout le long de la canalisation du débit amont sans service en route, ainsi que nous l'avons démontré précédemment. En faisant $n = \infty$ dans l'équation [*XI.4.3*] on retrouve effectivement ce résultat.

XI.4.4. Point neutre : définition et position

Considérons (fig. XI.4.4.1) une canalisation AB de longueur l, de diamètre constant D, assurant un service en route caractérisé par un débit q par mètre et susceptible d'être alimentée par ses deux extrémités A et B ; ce serait le cas, par exemple, d'un tronçon de réseau maillé que nous étudierons plus loin (§ XI.5).

Il peut arriver, dans ces conditions, que la vitesse de l'eau dans la canalisation s'inverse entre A et B.

Autrement dit, la canalisation est alimentée sur une fraction de longueur $l_a = AN$ à partir de son extrémité A et sur l'autre fraction de longueur $l_b = NB$ à partir de son autre extrémité B $(l = l_a + l_b)$.

Il existe donc un point N entre A et B où l'eau est immobile, aucun débit ne circulant dans la canalisation.

Ce point N est appelé le *point neutre*, ou point mort, ou point d'arrêt. Proposons-nous(1) de déterminer la position du point neutre qui pourra être définie, par exemple, par le rapport :

$$m = \frac{l_a}{l} \quad (0 < m < 1)$$

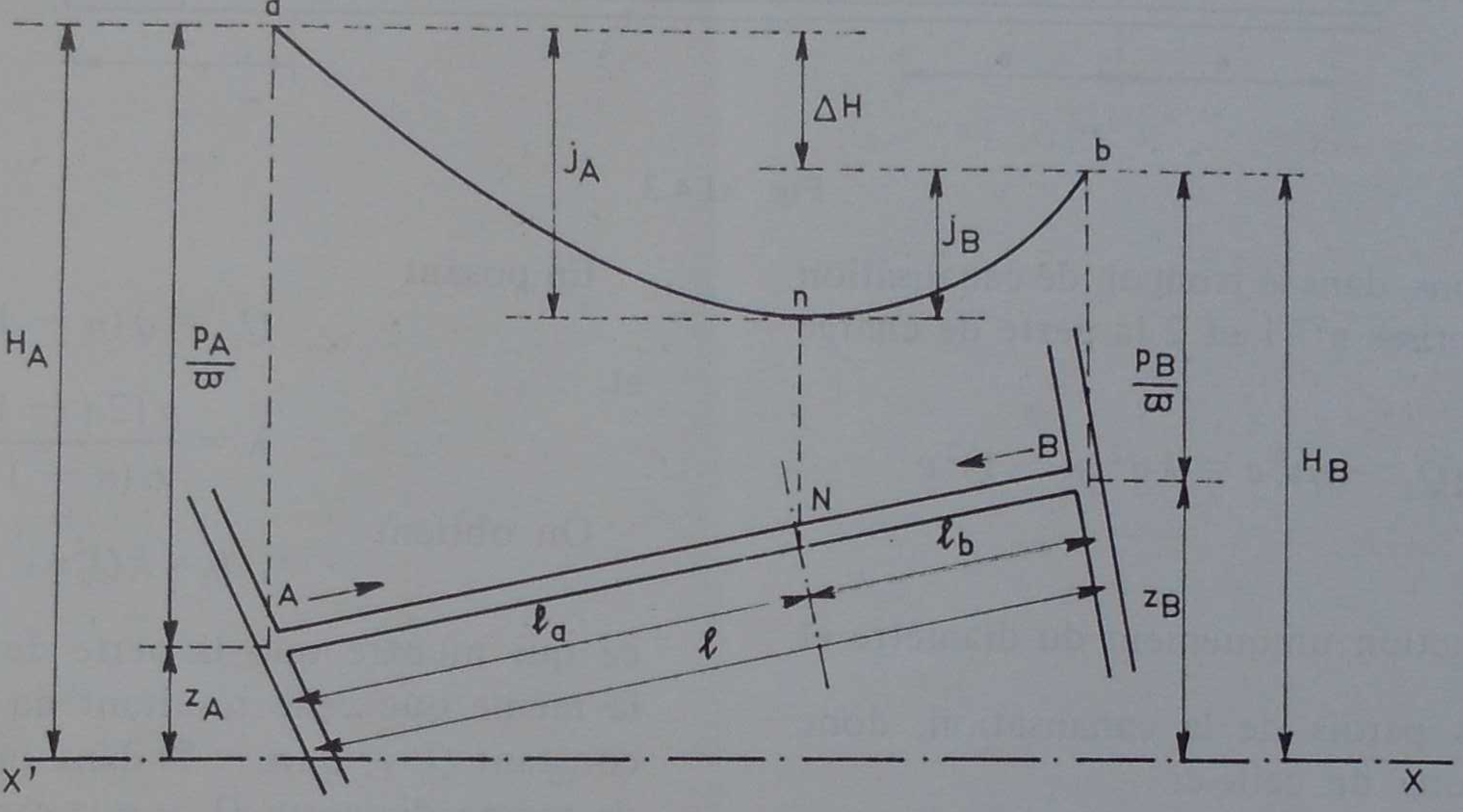


Fig. XI.4.4.1 – Position du point neutre

Soient

$H_A = z_A + \frac{p_A}{\omega}$ la hauteur piézométrique en A,

$H_B = z_B + \frac{p_B}{\omega}$ la hauteur piézométrique en B,

q le débit assuré par mètre de canalisation entre A et B,

$r = \frac{64\, b_1}{\pi^2 D^5}$ le coefficient de résistance par unité de longueur de la canalisation AB.

Nous avons montré précédemment que les pertes de charge totales j_A et j_B le long des tronçons AN et BN avaient pour expression :

$$j_A = \frac{1}{3}\, r q^2 l_a^3$$

$$j_B = \frac{1}{3}\, r q^2 l_b^3$$

En négligeant la différence des hauteurs représentatives des vitesses on peut écrire

$$H_A - H_B = \frac{rq^2}{3}\,(l_a^3 - l_b^3)$$

$$\frac{H_A - H_B}{rq^2} = \frac{1}{3}\,(l_a^3 - l_b^3) \qquad [XI.4.4.1]$$

La ligne des niveaux piézométriques est une courbe du troisième degré dont le minimum (tangente horizontale) est en n sur la verticale du point neutre N puisque le débit (donc J) est nul en ce point (fig. XI.4.4.1).

Comme

$$l_a = ml$$

on a

$$l_b = l - l_a = l(1 - m)$$

En remplaçant dans [*XI.4.4.1*] :

$$\frac{H_A - H_B}{rq^2 l^3} = \frac{1}{3}\,[m^3 - (1 - m)^3]$$

Mais $q^2 l^2 = Q^2$ en désignant par Q le débit total réparti le long de la canalisation et $rQ^2 = J$ est la

----

(1) La démonstration qui suit est extraite d'une étude de M. Vibert, Ingénieur Général des Services techniques de la Ville de Paris, publiée dans le numéro du 1er Mars 1955 de la revue *"Le Génie Civil"*.

perte de charge unitaire correspondant au débit total Q distribué.

Par ailleurs $(H_A - H_B)/l = h$ charge disponible entre les deux extrémités de la canalisation.

On peut donc écrire finalement :

$$\frac{h}{J} = \frac{m^3 - (1 - m)^3}{3} \qquad [XI.4.4.2]$$

Les *conclusions pratiques* se dégagent de la discussion de cette formule.

Pour $m = 0$ et $m = 1$ la valeur du deuxième membre est égale respectivement à $-1/3$ et $+1/3$, valeurs qui représentent donc les limites de variation de h/J.

Pour des valeurs de h/J extérieures à ces limites il n'y a plus de point neutre, le service de la conduite AB est exclusivement assuré par le débit

— issu de A si $H_A > H_B$ et $h/J > 1/3$.

— issu de B si $H_B > H_A$ et $h/J < -1/3$.

Pour $h/J = 0$ ou $H_A = H_B$ on a $m = 0{,}5$ ou $l_a = l_b$, le point neutre est au milieu de AB.

Pour $-1/3 < h/J < 1/3$ la courbe de la figure XI.4.4.2 représente la variation de la fonction $h/J = f(m)$ et permet de déterminer la position du point neutre ($m = l_a/l$) connaissant la longueur et le diamètre de la canalisation (c'est-à-dire $r = 64 b_1/\pi^2 D^5$), les charges en A et B (c'est-à-dire $h = (H_A - H_B)/l$) et le débit réparti q par mètre (c'est-à-dire $J = rQ^2 = rl^2q^2$).

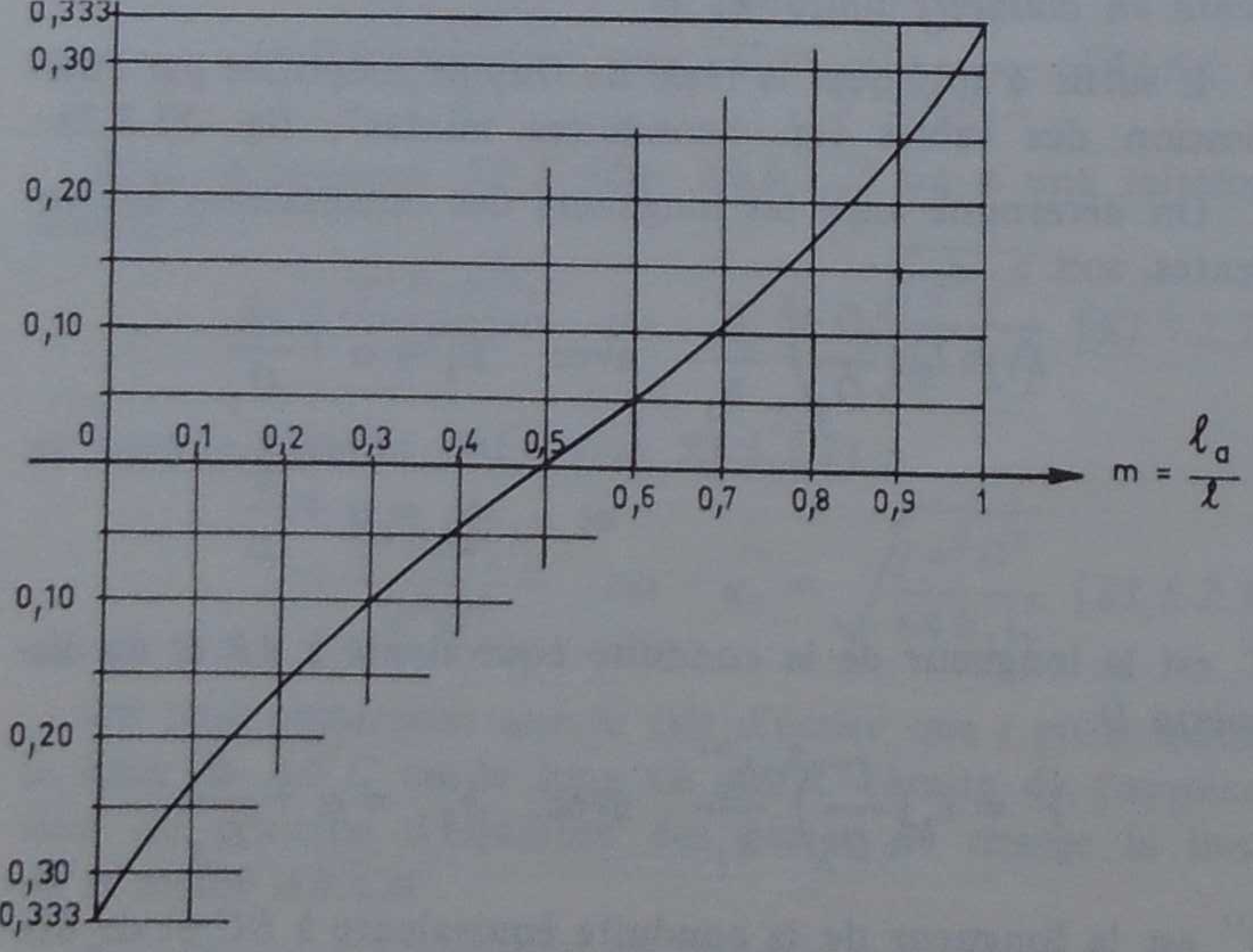


Fig. XI.4.4.2

XI.5. CALCUL DES RÉSEAUX MAILLÉS

XI.5.1. Définition — Exposé du problème — Principes directeurs

Comme nous l'avons déjà défini au § XI.2.4, un réseau maillé est constitué d'une série de tronçons disposés de telle manière qu'il soit possible de décrire une ou plusieurs boucles fermés en suivant son tracé (fig. XI.5.1) ; une telle boucle s'appelle une *maille*.

Contrairement aux réseaux ramifiés un réseau maillé présente une indétermination sur les grandeurs et les signes (c'est-à-dire les sens) des débits et des pertes de charge dans chaque tronçon.

Dans le cas le plus général, un réseau maillé d'adduction d'eau (ou de tout autre fluide) pose le problème suivant (fig. XI.5.1) :

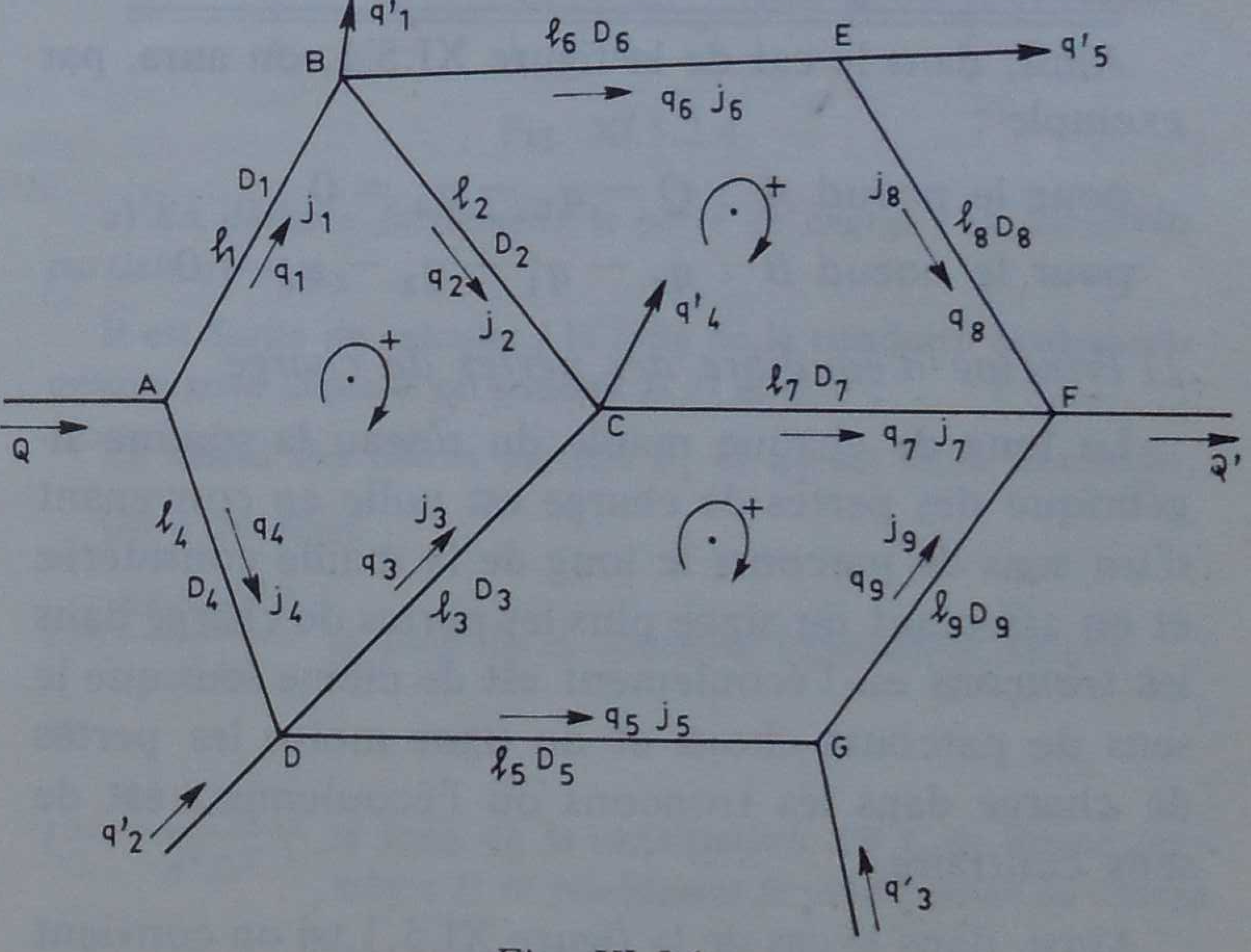


Fig. XI.5.1

On connaît le débit Q et la charge h en un point d'une des mailles du réseau (par exemple en A, figure XI.5.1).

On connaît les longueurs $l_1, l_2, l_3 \ldots$ des différents tronçons AB, BC, CD, ... ainsi que leurs diamètres respectifs D_1, D_2, D_3, ...

On connait les débits q'_1, q'_2, q'_3, ... qui peuvent être éventuellement prélevés ou ajoutés en des points connus du réseau et, par suite, le débit $Q' = Q \pm \Sigma q'_i$ à la sortie du système.

On cherche à déterminer :

— les débits $q_1, q_2, q_3, \ldots$ dans chacun des tronçons du réseau, avec leur signe c'est-à-dire le sens de l'écoulement,

— les pertes de charge $j_1, j_2, j_3, \ldots$ le long de chaque tronçon (en grandeur et en signe) c'est-à-dire les charges $h_1, h_2, h_3, \ldots$ en chaque "noeud" du réseau tels que $B, C, D, \ldots$

Principes directeurs

Les méthodes utilisées pour résoudre le problème ainsi posé sont toutes basées sur les deux principes suivants qui sont la traduction des lois de Kirchhoff utilisées en électrotechnique.

1) *Principe d'équilibre des débits*

En chaque noeud du réseau la somme algébrique des débits entrants et sortants est nulle, en convenant d'affecter du signe plus les débits entrants (convergents vers le noeud) et du signe moins les débits sortants (s'éloignant du noeud).

Ainsi, dans le cas de la figure XI.5.1, on aura, par exemple :

pour le noeud A : $Q - q_1 - q_4 = 0$

pour le noeud B : $q_1 - q'_1 - q_2 - q_6 = 0$

2) *Principe d'équilibre des pertes de charge*

Le long de chaque maille du réseau la somme algébrique des pertes de charge est nulle en convenant d'un sens de parcours le long de la maille considérée et en affectant du signe plus les pertes de charge dans les tronçons où l'écoulement est de même sens que le sens de parcours choisi et du signe moins les pertes de charge dans les tronçons où l'écoulement est de sens contraire.

Ainsi, dans le cas de la figure XI.5.1, si on convient d'adopter le sens de la montre pour parcourir chaque maille, on aura, par exemple :

pour la maille $ABCD$: $j_1 + j_2 - j_3 - j_4 = 0$

pour la maille $BEFC$: $j_6 + j_8 - j_7 - j_2 = 0$

XI.5.2. Cas particulier des conduites en parallèle

Nous examinerons en premier lieu le cas des réseaux constitués de deux ou plusieurs conduites fonctionnant en parallèle et dont éventuellement une ou plusieurs assurent un service en route uniforme entre son origine et son extrémité.

Un tel réseau (fig. XI.5.2.1), bien que répondant à la définition d'un réseau maillé, ne présente pas l'indétermination que nous avons soulignée précédemment sur les débits et les pertes de charge de chaque tronçon. Le calcul conduit en effet directement et sans aucune approximation aux résultats cherchés.

Considérons (fig. XI.5.2.1) un réseau constitué simplement de deux conduites débitant en parallèle ; supposons qu'il n'y ait pas de service en route et désignons par

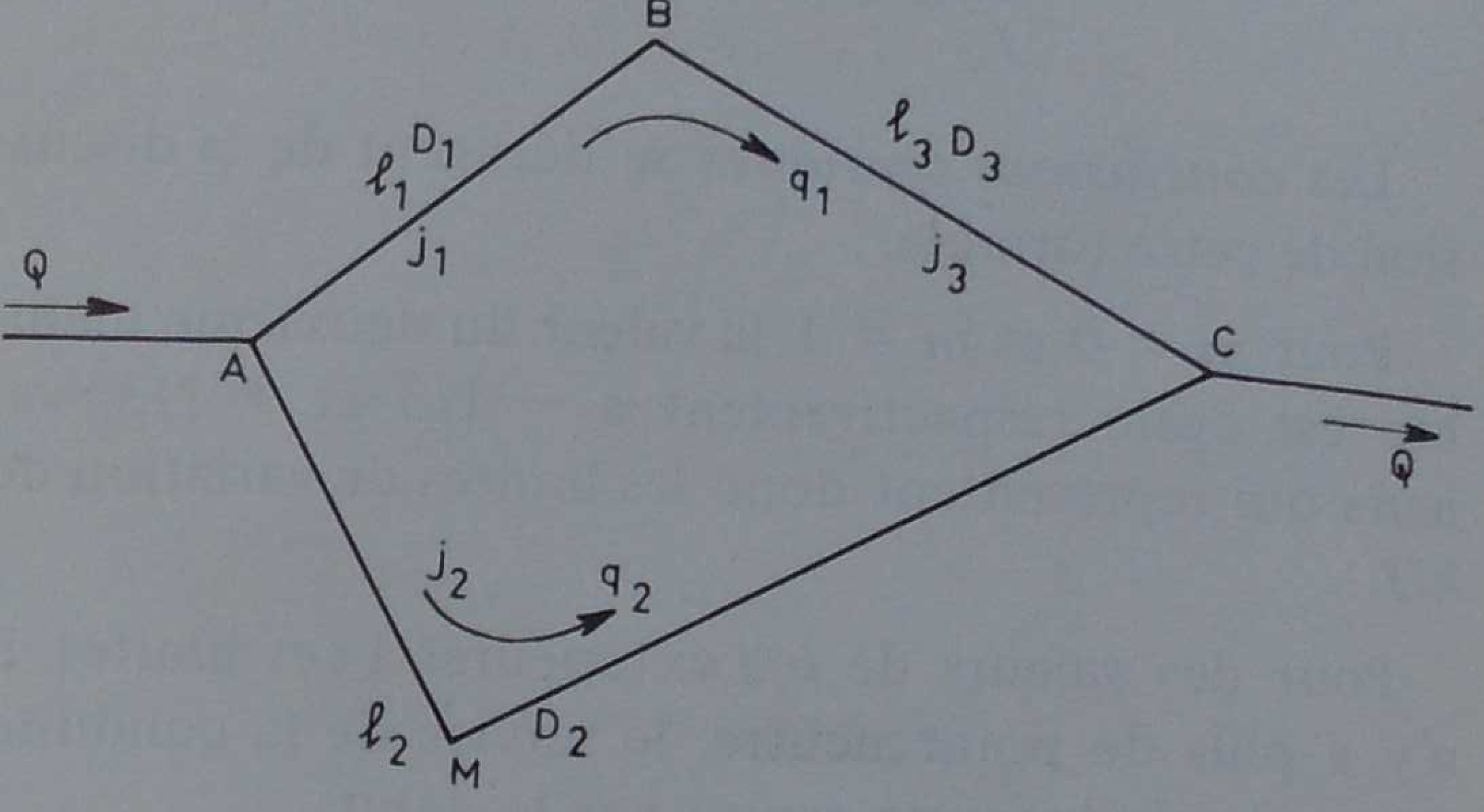


Fig. XI.5.2.1

— $l_1 D_1, l_2 D_2, l_3 D_3$ les longueurs et les diamètres de chaque tronçon AB, AMC et BC,

— Q le débit à l'entrée, égal au débit à la sortie, puisqu'il n'y a ni addition, ni prélèvement de débit entre A et C.

Les inconnues sont :

— les débits q_1 et q_2 dans chaque conduite ABC et AMC,

— les pertes de charge j_1, j_2 et j_3 le long de chaque tronçon AB, AMC et BC.

Le calcul se conduit en trois phases :

a) *Remplacer chaque canalisation par sa longueur équivalente en diamètre uniforme D*

Il suffit d'appliquer la règle de Dupuit simplifiée par l'utilisation des tables (cf. "conduites mixtes", fig. XI.3.2).

On détermine ainsi les longueurs des canalisations équivalentes, soit :

$$l' = l_1 \left(\frac{D}{D_1}\right)^5 \frac{b'_1}{b_1} \quad \text{avec} \quad b'_1 = \alpha + \frac{\beta}{D_1}$$

$$\text{et} \quad b_1 = \alpha + \frac{\beta}{D}$$

l' est la longueur de la conduite équivalente à AB et de diamètre D.

$$l'' = l_3 \left(\frac{D}{D_3}\right)^5 \frac{b'''_1}{b_1} \quad \text{avec} \quad b'''_1 = \alpha + \frac{\beta}{D_3}$$

l'' est la longueur de la conduite équivalente à BC et de diamètre D.

Il est évident que la longueur équivalente aux tronçons AB et BC placés en série est égale à la somme des longueurs des conduites équivalentes de même diamètre D, soit :

$$l'_1 = l' + l''$$

Enfin :

$$l'_2 = l_2 \left(\frac{D}{D_2}\right)^5 \frac{b''_1}{b_1} \quad \text{avec} \quad b''_1 = \alpha + \frac{\beta}{D_2}$$

l'_2 est la longueur de la conduite équivalente à AMC et de diamètre D.

On a ainsi remplacé le système donné (fig. XI.5.2.1) par deux canalisations $AB'C$ et $AM'C$ placées en parallèle, de même diamètre D et de longueurs l'_1 et l'_2, portant les mêmes débits q_1 et q_2 et produisant la même perte de charge j que les canalisations réelles (fig. XI.5.2.2).

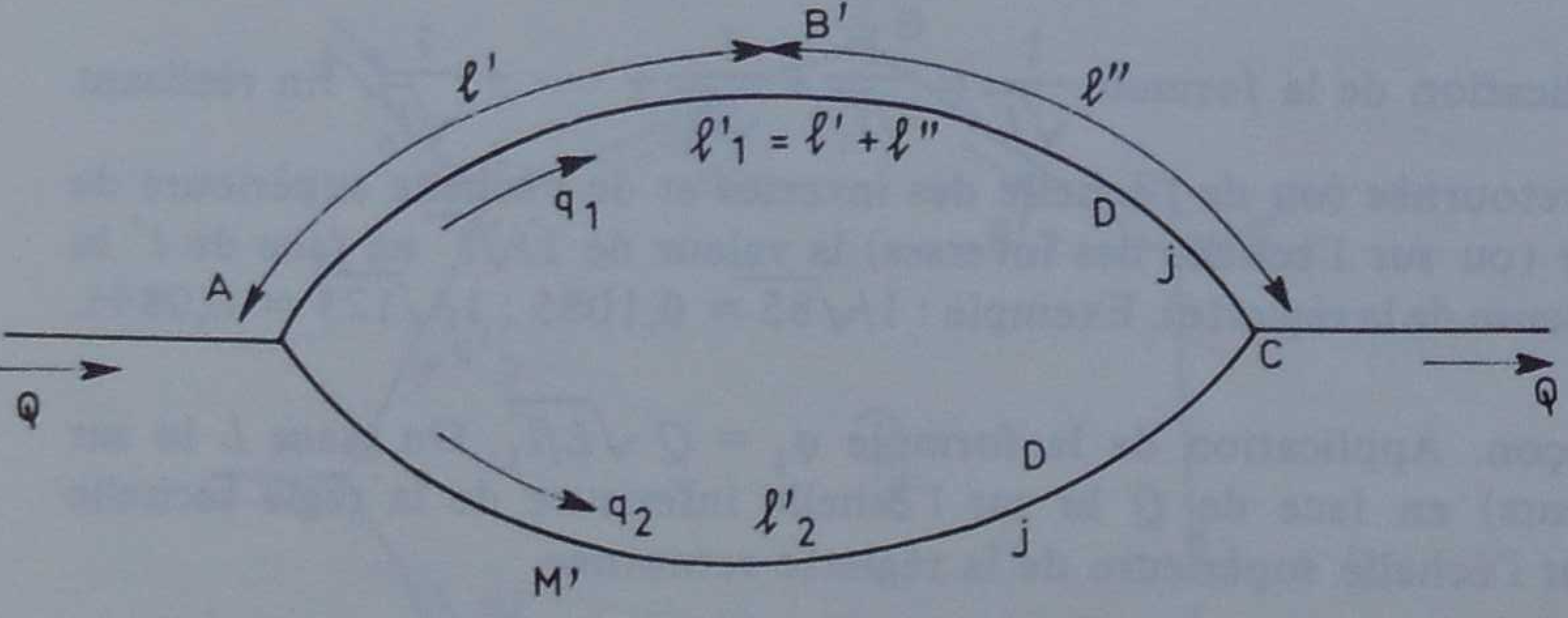


Fig. XI.5.2.2

b) *Remplacer les deux canalisations équivalentes obtenues par une canalisation équivalente unique*, de même diamètre D et de longueur L telle qu'elle porte le débit total Q de A à C avec la même perte de charge que chacune des deux canalisations précédentes.

Par application de la formule de l'écoulement on aura, le long de la canalisation équivalente unique :

$$j = \frac{64\, b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5} \quad \text{ou} \quad Q = \sqrt{\frac{j \pi^2 D^5}{64\, b_1 L}} \qquad [XI.5.2.1]$$

Pour le tronçon $AB'C$ (fig. XI.5.2.2) on a une relation analogue :

$$j = \frac{64\, b_1 q_1^2 l'_1}{\pi^2 D^5} \quad \text{ou} \quad q_1 = \sqrt{\frac{j \pi^2 D^5}{64\, b_1 l'_1}} \qquad [XI.5.2.2]$$

et pour le tronçon $AM'C$ (fig. XI.5.2.2) :

$$j = \frac{64\, b_1 q_2^2 l'_2}{\pi^2 D^5} \quad \text{ou} \quad q_2 = \sqrt{\frac{j \pi^2 D^5}{64\, b_1 l'_2}} \qquad [XI.5.2.3]$$

On peut remarquer que le fait d'écrire que j est le même le long de $AB'C$ ou le long de $AM'C$ résulte de l'application du principe d'équilibre des pertes de charge le long de la maille $AB'CM'$.

Par ailleurs, l'application du principe d'équilibre des débits au noeud A ou C permet d'écrire :

$$Q = q_1 + q_2$$

En remplaçant ces valeurs par celles tirées de [*XI.5.2.1, 2 et 3*], il vient

$$\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{l'_1}} + \frac{1}{\sqrt{l'_2}} \qquad [XI.5.2.4]$$

Si on avait eu n conduites en parallèle reliant les points A et C, le calcul aurait conduit à :

$$\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{l'_1}} + \frac{1}{\sqrt{l'_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{l'_n}}$$

Le calcul de L donné par l'équation [*XI.5.2.4*] est facilité par l'utilisation d'une règle à calcul ordinaire dont on a simplement retourné la règlette. Un exemple d'utilisation de cette règle est donné à la figure XI.5.2.3.

A l'issue de cette seconde phase du calcul, on a donc remplacé le système donné par une canalisation équivalente unique de diamètre D et de longueur L, portant le débit total connu Q et produisant la même perte de charge j entre A et C (fig. XI.5.2.4).

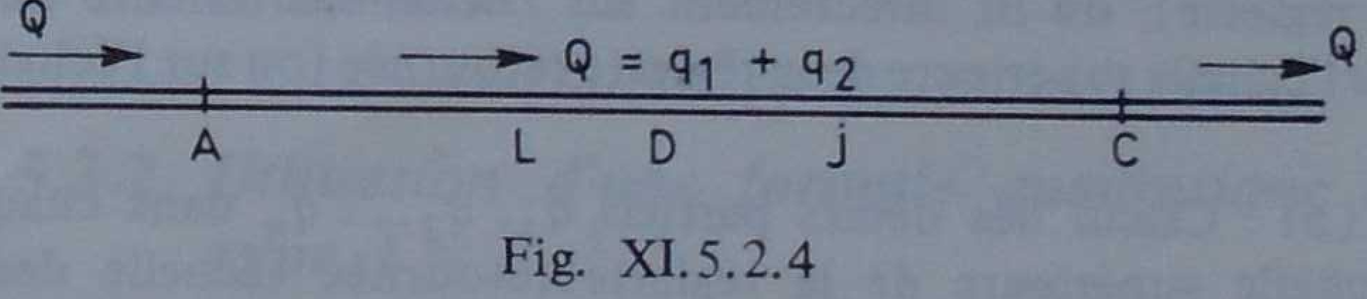


Fig. XI.5.2.4

c) *En déduire facilement la perte de charge j et les débits partiels* q_1 *et* q_2

Il est facile de calculer j le long de la conduite équivalente unique pour laquelle on connaît L, D et Q.

Le calcul des débits partiels q_1 et q_2 est alors immédiat.

On a en effet :

$$j = \frac{64\, b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}$$ le long de la conduite équivalente unique

et

$$j = \frac{64\, b_1 q_1^2 l'_1}{\pi^2 D^5}$$ le long de la canalisation $AB'C$ de même diamètre D et produisant la même perte de charge j.

De ces deux relations on tire :

$$q_1 = Q \sqrt{\frac{L}{l'_1}} \qquad [XI.5.2.5]$$

On aurait de même :

$$q_2 = Q \sqrt{\frac{L}{l'_2}} \qquad [XI.5.2.6]$$

Le problème est donc entièrement résolu.

Le calcul des débits partiels q_1 et q_2 donnés par les formules [*XI.5.2.5 et 6*] est facilité en utilisant une règle à calcul ordinaire dont on a simplement retourné la règlette. Un exemple d'utilisation de cette règle est donné par la figure XI.5.2.3.

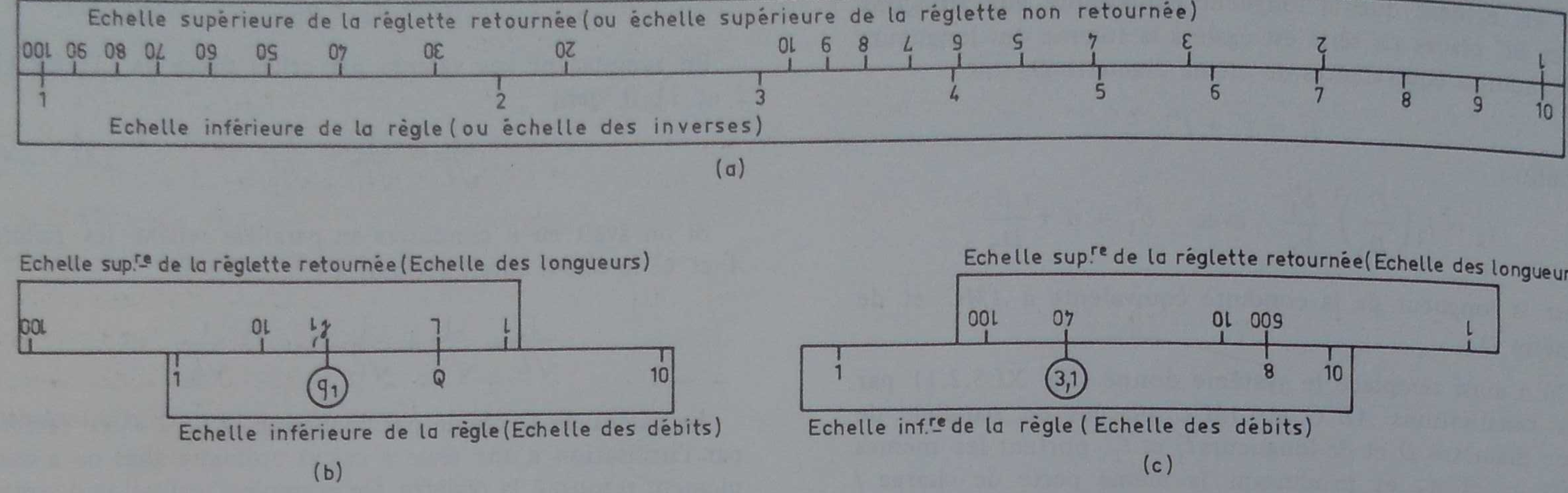


Fig. XI.5.2.3 – Utilisation de la règle à calcul pour l'application de la méthode des conduites équivalentes au calcul des réseaux maillés

(a) : *Calcul de la longueur L de la conduite équivalente.* Application de la formule $\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{l'_1}} + \frac{1}{\sqrt{l'_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{l'_n}}$. En réalisant la coïncidence des deux extrémités de la règle et de la réglette retournée (ou de l'échelle des inverses et de l'échelle supérieure de la réglette), on lit directement sur l'échelle inférieure de la règle (ou sur l'échelle des inverses) la valeur de $1/\sqrt{l'}$ en face de l' lu sur l'échelle supérieure de la réglette retournée (ou sur l'échelle supérieure de la réglette). Exemple : $1/\sqrt{85} = 0{,}1085$; $1/\sqrt{125} = 0{,}0895$.

(b) : Calcul des débits partiels $q_1, q_2 \ldots q_n$ dans chaque tronçon. Application de la formule $q_1 = Q\sqrt{L/l'_1}$. On place L lu sur l'échelle supérieure de la réglette retournée (échelle des longueurs) en face de Q lu sur l'échelle inférieure de la règle (échelle des débits). On lit q_1 sur cette dernière échelle en face de l'_1 lu sur l'échelle supérieure de la réglette retournée.

(c) : Exemple : $L = 600$ m ; $Q = 8\ l/s$; $l'_1 = 40$ m. On trouve $q_1 = 3{,}1\ l/s$.

Cas où il y a un service en route uniforme sur un ou plusieurs des tronçons

La méthode précédente peut également s'appliquer au cas où une ou plusieurs canalisations en parallèle assurent un service en route qu'on peut admettre réparti de manière uniforme entre l'origine et l'extrémité de la dérivation.

Il suffit en la circonstance d'appliquer la règle approximative établie au § XI.4.2 et de prendre comme base de calcul du ou des tronçons correspondants un débit fictif constant égal au débit aval majoré de 55 % du débit réparti en cours de route.

XI.5.3. Méthode Hardy-Cross

Cette méthode de calcul par approximations successives a été proposée en 1936 par le Professeur Hardy-Cross de l'Université d'Illinois (U.S.A). Elle est dérivée de celle mise au point par le même auteur pour les calculs de résistance des systèmes réticulés hyperstatiques qui, en Mécanique des Matériaux, posent des indéterminations du même ordre que celles des réseaux maillés en Hydraulique. La méthode s'applique au calcul des réseaux maillés quelle que soit leur complexité.

XI.5.3.1. *Principe de la méthode*

Considérons une maille quelconque d'un réseau maillé constituée de p tronçons (fig. XI.5.3.1).

On se donne a priori les débits $q'_1, q'_2, \ldots q'_p$ dans chacun des tronçons de la maille, de manière à satisfaire la condition d'équilibre des débits en chaque noeud.

Soit $j = Rq^n$ la formule reliant, dans un tronçon quelconque de cette maille, la perte de charge totale j au débit q qui y passe. Cette relation est simplement l'écriture de la formule de l'écoulement :

$$j = Jl = \frac{64\, b_1 q^2 l}{\pi^2 D^5} = \frac{8\lambda q^2 l}{g\pi^2 D^5}$$

On convient d'un sens positif (par exemple le sens de la montre) le long de la maille considérée.

Le principe d'équilibre des pertes de charge le long de la maille se traduit par :

$$\Sigma_g R q^n = 0 \quad (\Sigma_g = \text{somme algébrique}) \qquad [XI.5.3.1]$$

q représentant le débit réel de chaque tronçon de la maille.

Le débit q'_1 du premier tronçon AB diffère du débit réel q_1 d'une quantité Δq qui est la correction à apporter au débit arbitraire q'_1 pour satisfaire au principe d'équilibre des pertes de charge, c'est-à-dire à l'équation [*XI.5.3.1*].

On a donc :

$$q_1 = q'_1 + \Delta q$$

Δq étant exprimé en valeur algébrique.

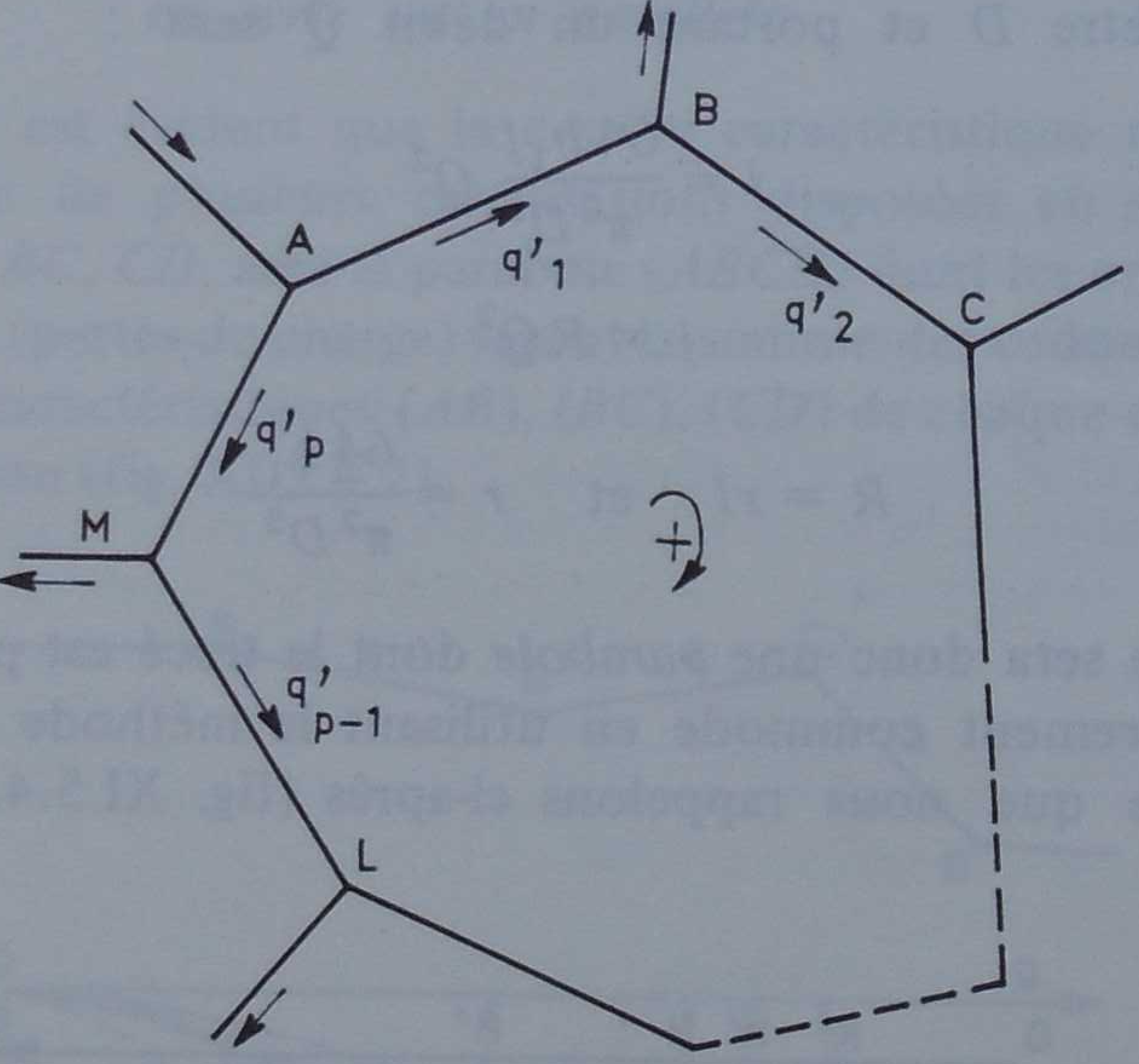


Fig. XI.5.3.1

L'application de la formule [*XI.5.3.1*] donne alors :

$$\Sigma_g R (q' + \Delta q)^n = 0 \qquad [XI.5.3.2]$$

étant entendu que q' et Rq'^n sont de même signe.

Δq étant supposé petit par rapport à q', on peut, dans le développement de [*XI.5.3.2*], négliger les infiniment petits d'ordre égal ou supérieur à 2 et on tire :

$$\Delta q = -\frac{\Sigma R q'^n}{\Sigma n R q'^{n-1}} \qquad [XI.5.3.3]$$

étant entendu que $\Sigma R q'^n$ est une somme algébrique alors que $\Sigma n R q'^{n-1}$ est une somme de termes tous positifs puisque $R\ q'^{n-1} = Rq'^n/q'$ est le quotient de deux termes de même signe.

La correction Δq ainsi calculée est ajoutée algébriquement à chacun des débits initialement choisis q' pour obtenir une meilleure répartition des débits dans la maille considérée.

Compte-tenu du principe de l'équilibre des débits en chaque noeud, on calcule les nouveaux débits approchés q' dans les tronçons d'une des mailles contigües à la précédente et sur laquelle on effectue le même calcul. On procède ainsi successivement sur les différentes mailles du réseau de manière à serrer de plus en plus près l'équilibre des pertes de charge dans chaque maille tout en vérifiant, après chaque calcul, le principe de l'équilibre des débits en chaque noeud.

Généralement les résultats convergent assez vite, c'est-à-dire que la correction Δq calculée d'une maille à la suivante diminue en valeur absolue. Si toutefois la convergence est trop lente (ou parfois même si les Δq successifs constituent une série divergente) on peut choisir des mailles différentes ou les prendre dans un autre ordre.

XI.5.3.2. *Utilisation d'une formule quadratique du type $j = Rq^2$*

Si on adopte une formule du type quadratique $j = Rq^2$, par exemple celle de Darcy, on a :

$$R = rl \quad \text{avec} \quad r = \frac{64\, b_1}{\pi^2 D^5}$$

le coefficient r n'est fonction que du diamètre D.

D'autre part $n = 2$. La correction Δq donnée par la formule [*XI.5.3.3*] s'écrit alors :

$$\Delta q = -\frac{\Sigma r l q^2}{\Sigma 2 r l q} \qquad [XI.5.3.4]$$

D_{mm}	$r \times 10^6$
60	6.021
80	1.322
100	412
125	129,5
150	50,64
175	22,95
200	11,57
250	3,705
300	1,467
350	0,6704
400	0,3413

Le tableau précédent donne les valeurs de r en fonction du diamètre D. Le coefficient r est homogène à $L^6 T^{-2}$ et les valeurs indiquées sur ce tableau sont valables pour des conduites en service et pour l en mètres et q en litres par seconde.

Dans ces conditions, le calcul d'un réseau maillé se conduira de la manière suivante :

Pour chaque maille, on choisit a priori la valeur et le signe du débit dans chaque tronçon, en respectant le principe de l'équilibre des débits en chaque noeud et on convient d'un sens positif de description de la maille.

On calcule pour chaque tronçon de la maille les valeurs algébriques de $rlq^2 = Rq^2$ (signe positif si le sens du débit q est le même que celui de description de la maille, signe négatif dans le cas contraire) et les valeurs absolues de $2rlq = 2Rq$.

On effectue pour chaque maille la somme algébrique des quantités Rq^2 et la somme arithmétique des quantités $2Rq$.

On calcule la correction $\Delta q = -\dfrac{\Sigma Rq^2}{\Sigma 2Rq}$

On ajoute algébriquement aux débits de chaque tronçon de la maille considérée la correction Δq ce qui permet d'obtenir des débits rectifiés à partir desquels et compte tenu de l'équilibre des débits en chaque noeud, on effectue les mêmes calculs pour la maille contigüe, de manière à obtenir une nouvelle correction permettant de parfaire la répartition des débits et l'équilibre des pertes de charge.

Avec un nombre d'approximations suffisant, on peut arriver à un équilibre aussi précis qu'on le désire.

Si un ou plusieurs tronçons du réseau assurent un service en route uniforme, on applique la règle approximative établie au § XI.4.2, c'est-à-dire qu'on adopte pour le calcul du ou des tronçons considérés un débit fictif constant égal au débit aval majoré de 55 % du débit réparti.

Les calculs des quantités Rq^2, $2Rq$ et Δq sont facilités par l'emploi d'abaques et se prêtent facilement à l'utilisation des ordinateurs qui effectuent très rapidement les approximations successives sur les tronçons des différentes mailles.

XI.5.4. Méthode graphique

XI.5.4.1. *Courbe caractéristique d'une canalisation*

La méthode graphique consiste à représenter chaque tronçon du réseau de canalisations par la courbe $j = f(Q)$ liant la perte de charge totale le long du tronçon considéré au débit qui le traverse. Cette courbe, appelée *"caractéristique"* de la canalisation, est donc simplement la représentation graphique de la formule de l'écoulement.

Si on utilise par exemple une formule du type quadratique comme celle de Darcy, l'équation de la caractéristique d'une canalisation de longueur l, de diamètre D et portant un débit Q sera :

$$j = \frac{64\, b_1\, l}{\pi^2 D^5}\, Q^2$$

ou

$$j = RQ^2$$

avec

$$R = rl \quad \text{et} \quad r = \frac{64\, b_1}{\pi^2 D^5}$$

Ce sera donc une *parabole* dont le tracé est particulièrement commode en utilisant la méthode classique que nous rappelons ci-après (fig. XI.5.4.1).

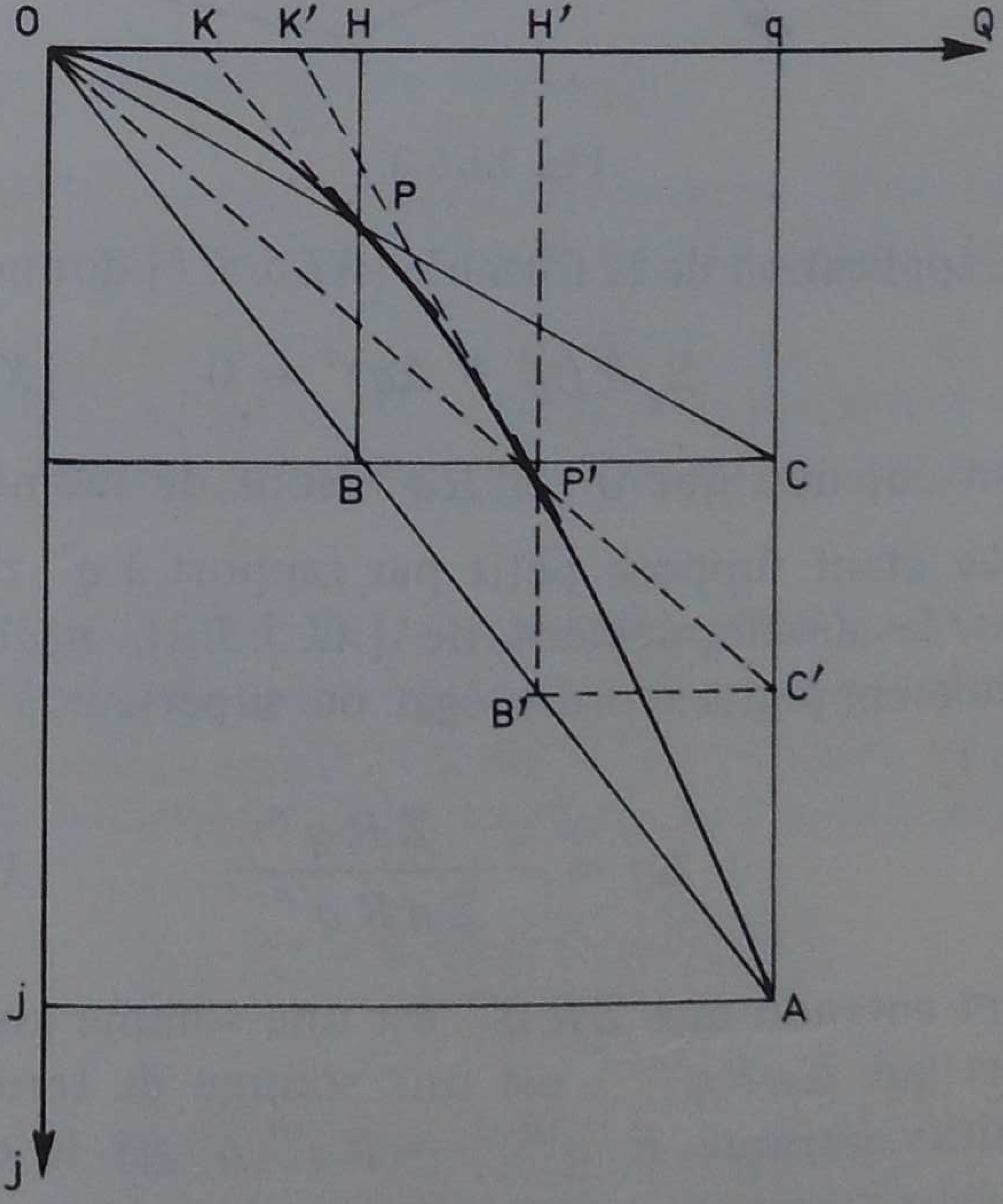


Fig. XI.5.4.1 – Tracé de la courbe caractéristique d'une canalisation

Après avoir fait choix d'une unité graphique sur les deux axes, on cherche les coordonnées d'un point A de la parabole, le plus éloigné possible de l'origine (il suffit de se donner le débit q correspondant et de lire J dans une table d'application de la formule de Darcy, on en déduit l'ordonnée $j = Jl$). On trace OA et une parallèle BC à l'axe OQ ; on joint OC qui coupe en P la parallèle à Oj passant par B. On joint P au milieu K de OH. On sait que P est un point de la parabole et que KP est la tangente à la parabole au point P. On peut refaire la même construction pour toute une série de droites parallèles à OQ telles que BC, $B'C'$, etc. ce qui permet de tracer par points la parabole $j = RQ^2$ avec toute la précision graphique nécessaire.

XI.5.4.2. *Caractéristique résultante de canalisations en série ou en parallèle*

Il est évident que la courbe caractéristique résultante de plusieurs canalisations disposées en série, AB, BC, CD, sera la parabole $(ABCD)$ dont les ordonnées (pertes de charge) seront la somme des ordonnées des caractéristiques (AB), (BC), (CD) de chaque canalisation (fig. XI.5.4.2).

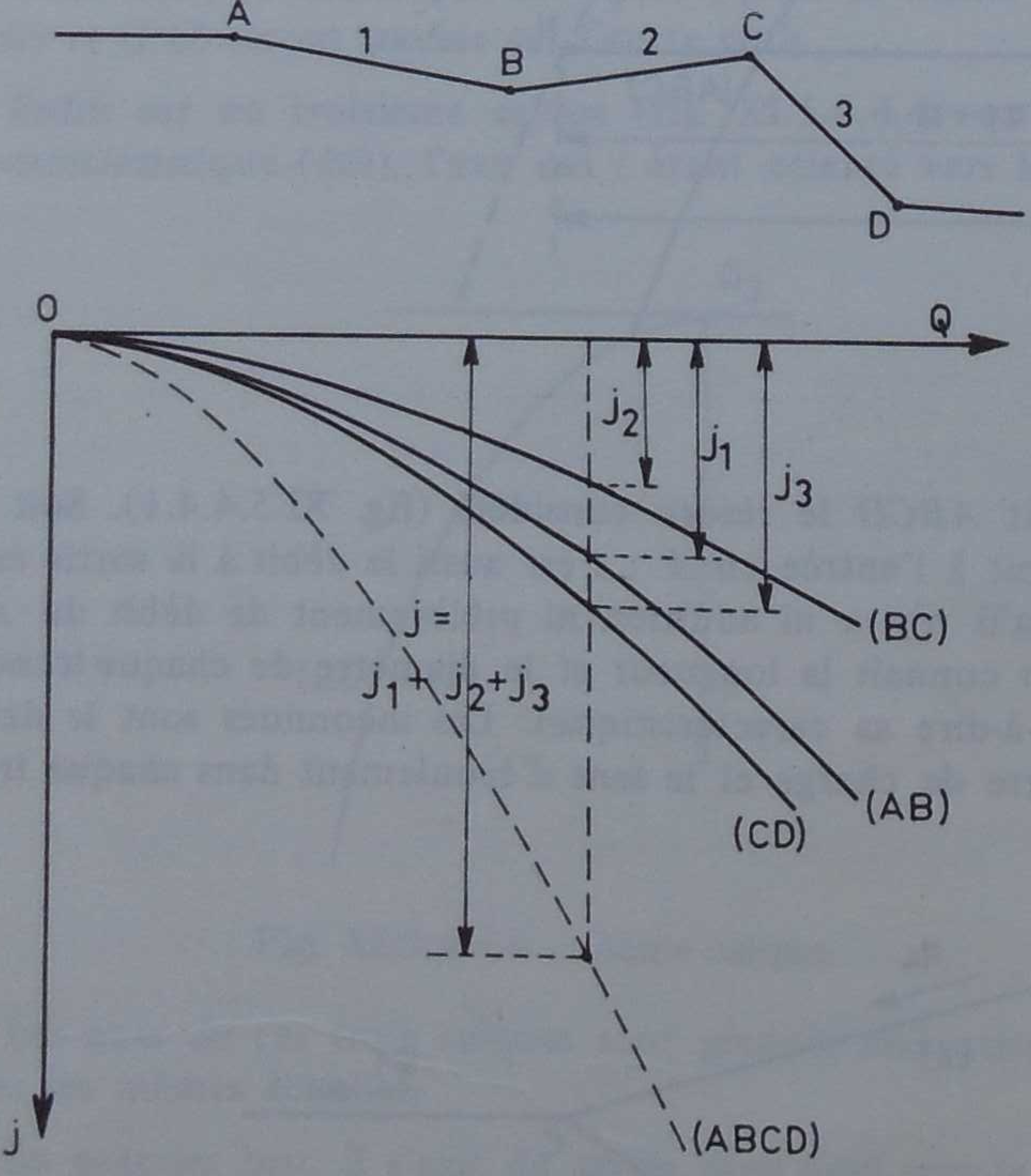


Fig. XI.5.4.2 – Caractéristique résultante de canalisations en série

De manière analogue, la courbe caractéristique de deux ou plusieurs canalisations disposées en parallèle sera la parabole dont les abscisses (débits) seront la somme des abscisses des caractéristiques de chaque canalisation.

Ces principes étant posés, nous en montrerons l'application sur deux exemples.

XI.5.4.3. *Calcul d'une maille dont un tronçon assure un service en route uniforme*

Considérons la maille représentée sur la figure XI.5.4.3.1 dans laquelle on suppose un débit total q prélevé d'une manière uniforme le long du tronçon ABC. Soit Q_1 le débit à l'entrée de la maille dont on cherche les débits et les pertes de charge dans les divers tronçons.

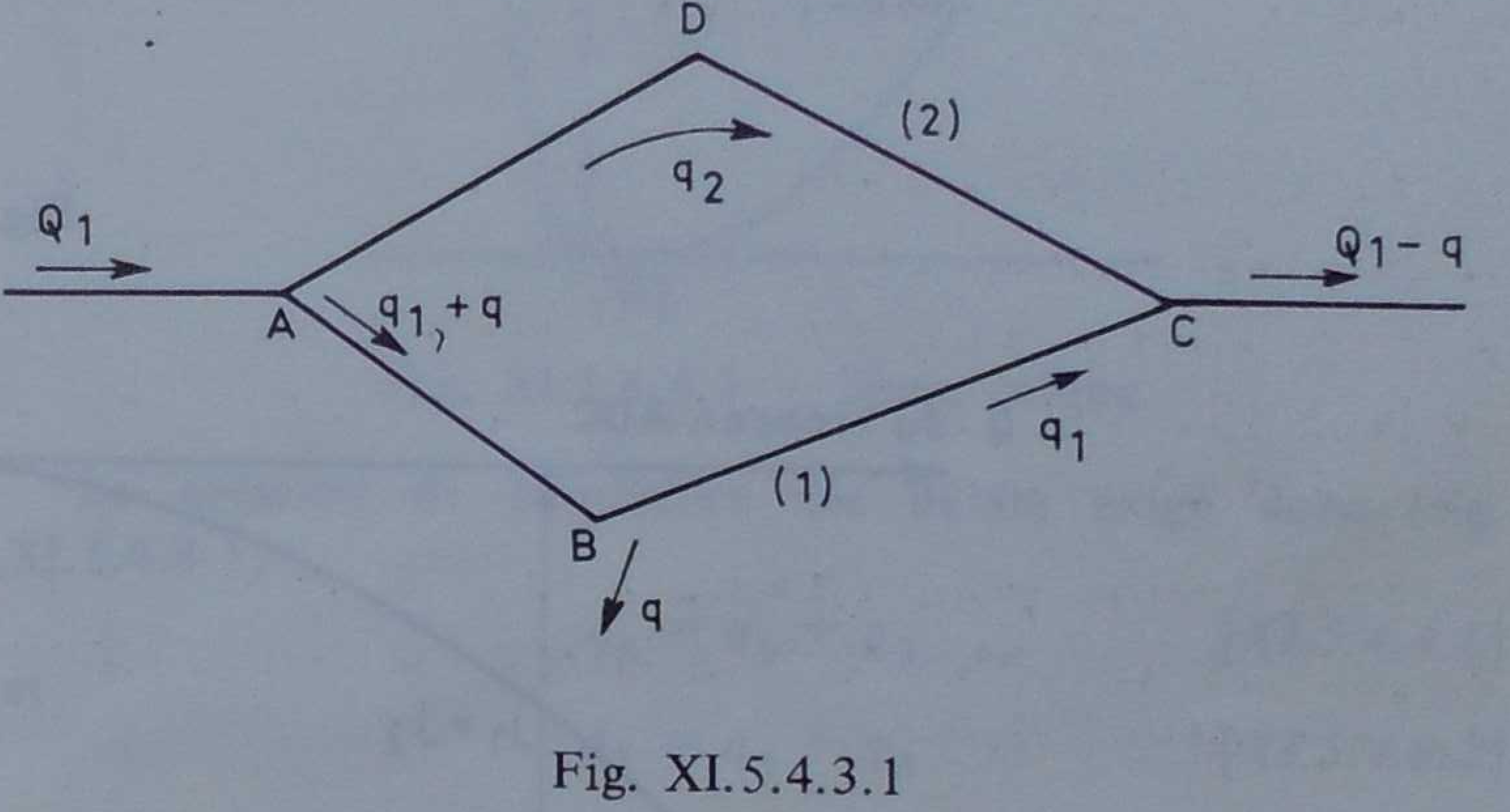


Fig. XI.5.4.3.1

Soient (fig. XI.5.4.3.2) (ABC) et (ADC) les caractéristiques des tronçons correspondants tracées de part et d'autre de l'axe des j. Soit q_1 le débit à l'aval du tronçon ABC, le débit fictif constant à prendre en compte pour le calcul sera donc $q_1 + 0{,}55\,q$; autrement dit, par rapport au débit aval q_1, tout se passe comme si un débit de $0{,}55\,q$ avait été ajouté dans le tronçon ABC. On est ainsi conduit à tracer la caractéristique $(ABC+)$ déduite de (ABC) par une translation $\overline{OO'} = -0{,}55\,q$ parallèlement à l'axe des débits de (ABC).

Soit MN le segment représentant, à l'échelle de l'axe des débits, le débit $Q_1 - q$ *à l'aval* de la maille. On déplace ce segment parallèlement à l'axe des débits jusqu'à ce que ses extrémités s'appuyent respectivement sur les caractéristiques (ADC) et $(ABC+)$. On lit sur la figure XI.5.4.3.2 les solutions du problème, à savoir :

j_2 et q_2 : perte de charge et débit sur le tronçon ADC,

$j_1 = j_2$: perte de charge le long de ABC,

q_1 = débit à l'aval de ABC, le débit à l'amont étant évidemment $q_1 + q$.

Si pour la commodité des calculs il est préférable de partir du débit Q_1 à l'amont de la maille, il suffit d'effectuer sur (ABC) la translation $\overline{OO''} = +0{,}45\,q$ ce qui l'amène en $(ABC-)$ (fig. XI.5.4.3.3) et de déplacer parallèlement à l'axe des débits un segment $MN = Q_1$ jusqu'à ce que ses extrémités s'appuyent sur (ADC) et $(ABC-)$. La figure XI.5.4.3.3 fournit les résultats cherchés :

$j_1 = j_2$: perte de charge le long de ABC et ADC,

$MP = q_2$: débit dans ADC,

$PN = q_1 + q$: débit *à l'amont* du tronçon ABC.

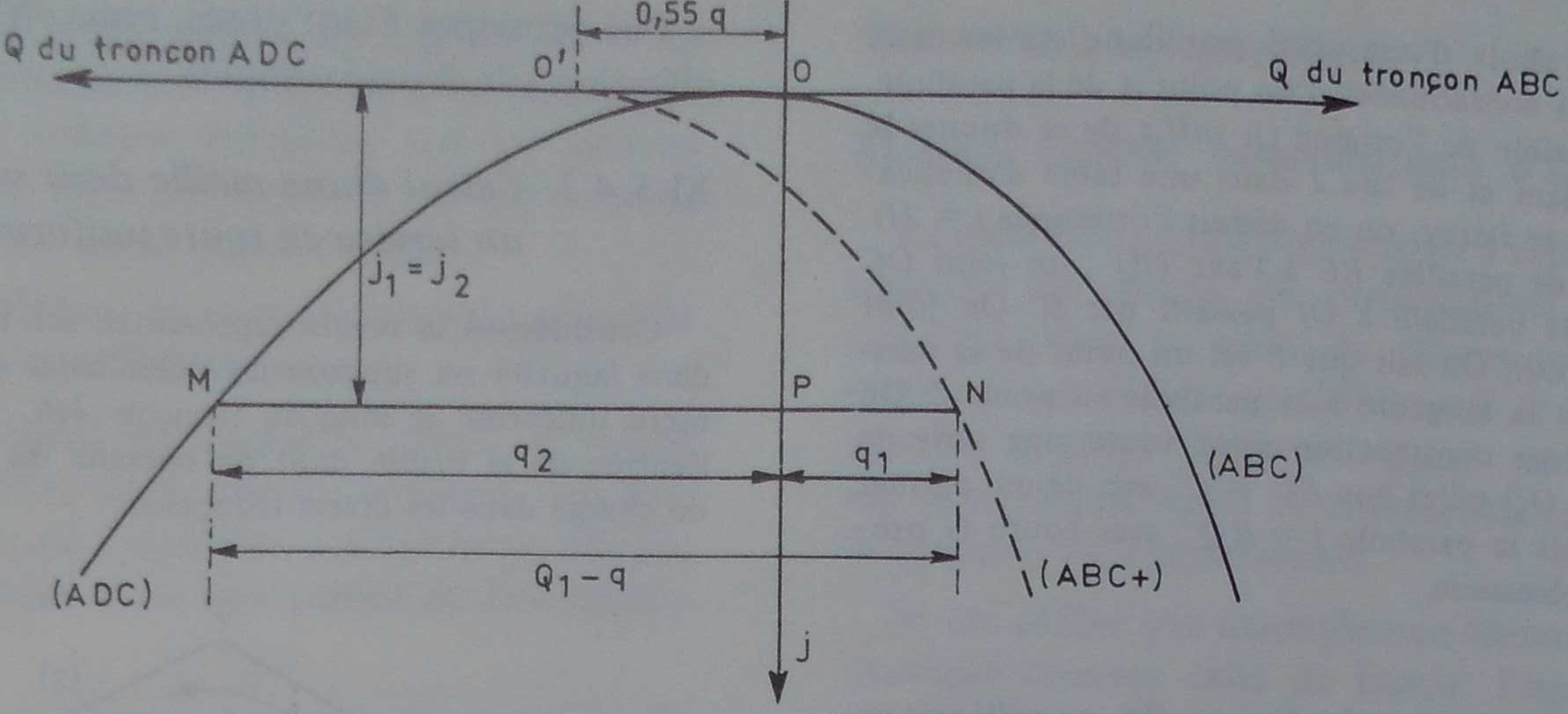


Fig. XI.5.4.3.2

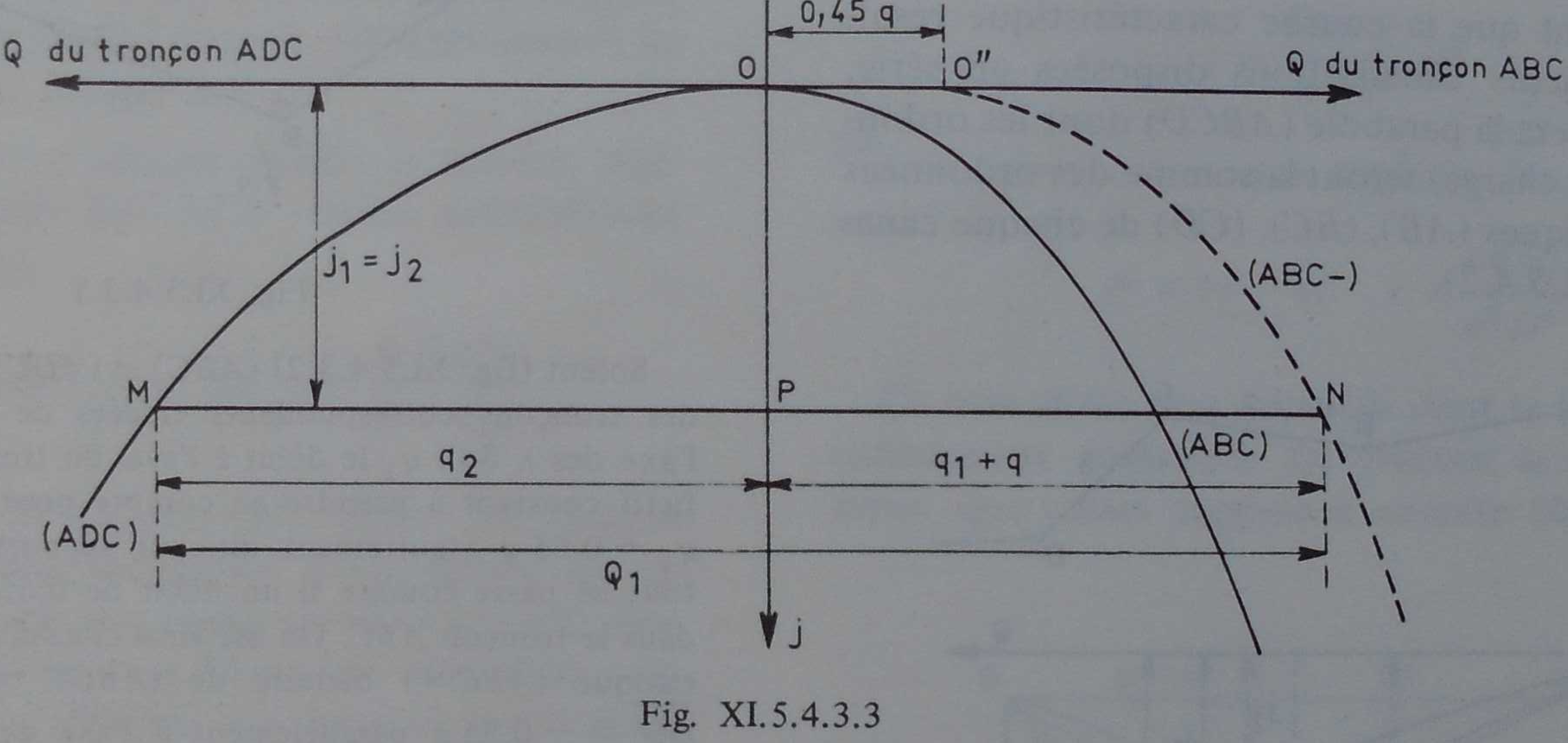


Fig. XI.5.4.3.3

XI.5.4.4. *Calcul d'un réseau à deux mailles*

Nous traiterons simplement à titre d'exemple le cas d'un tel réseau ne comportant ni prélèvement ni addition de débit dans les deux mailles.

Soit *ABCD* le réseau considéré (fig. XI.5.4.4.1). Soit Q_1 le débit à l'entrée en *A* ; c'est aussi le débit à la sortie en *C* puisqu'il n'y a ni addition ni prélèvement de débit de *A* à *C*. On connaît la longueur et le diamètre de chaque tronçon (c'est-à-dire sa caractéristique). Les inconnues sont le débit, la perte de charge et le sens d'écoulement dans chaque tronçon.

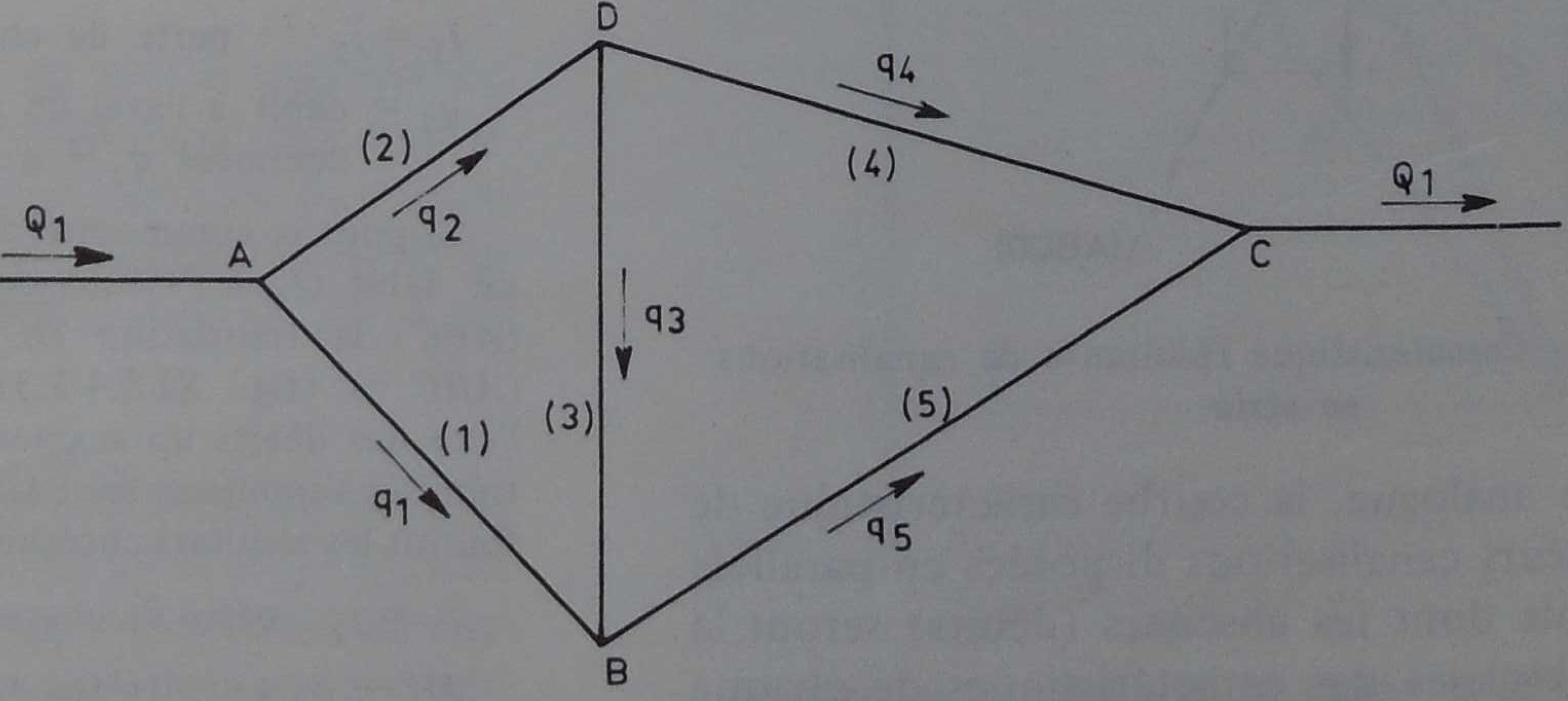


Fig. XI.5.4.4.1

Comme la charge est la même au point A considéré comme appartenant au tronçon AD ou au tronçon AB, on trace sur une feuille de papier calque les deux caractéristiques correspondantes, de chaque côté de l'axe des j dirigé vers le bas puisque ces deux tronçons sont en parallèle (fig. XI.5.4.4.2).

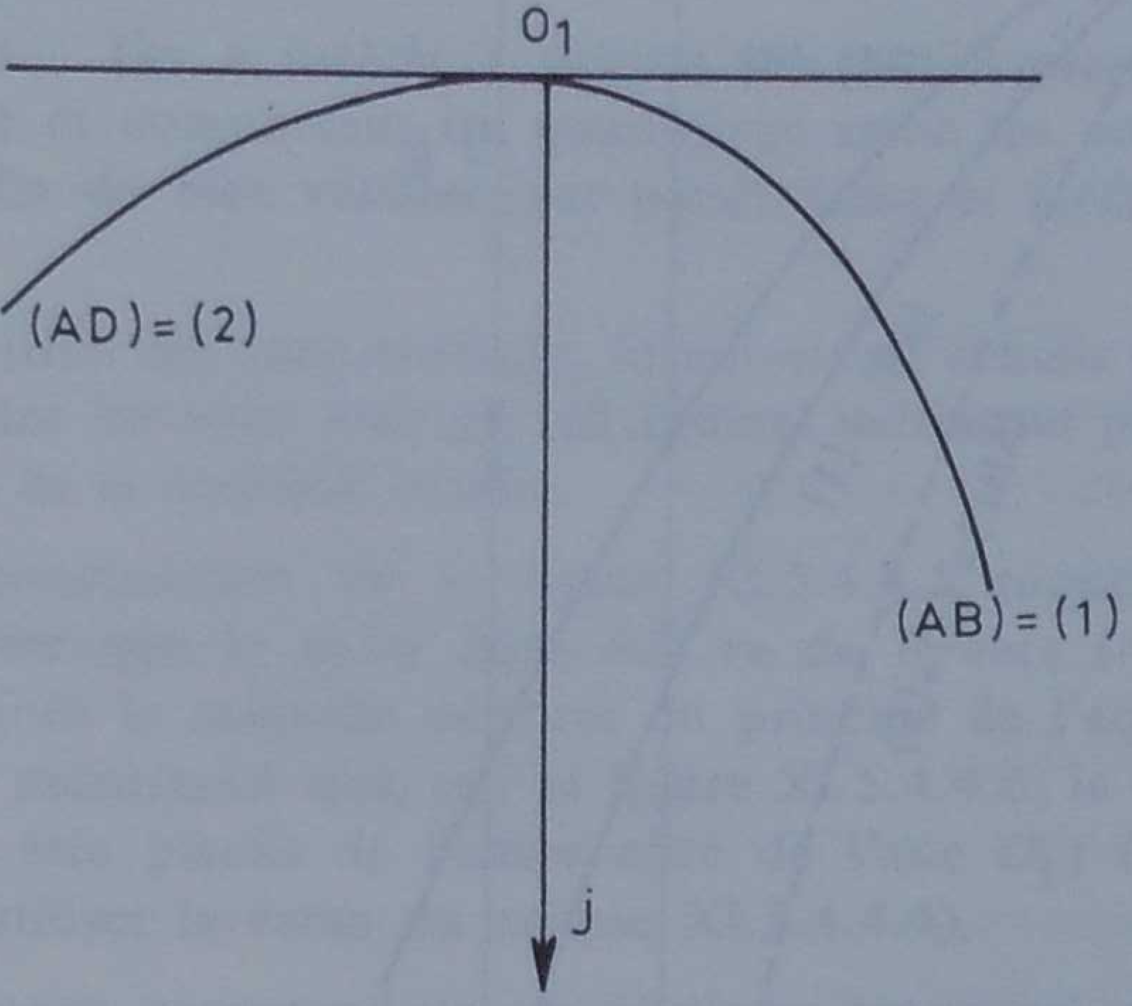


Fig. XI.5.4.4.2 – 1er calque

Sur un autre calque on trace les deux caractéristiques (DC) et (BC) de la même manière mais l'axe des j étant orienté vers le haut (fig. XI.5.4.4.3). Comme AB et BC sont en série, on trace leur caractéristique, sur chaque calque, du même côté de l'axe des j (à droite par exemple) ; pour la même raison (AD) et (DC) seront tracées sur l'autre côté.

Enfin sur un troisième calque (fig. XI.5.4.4.4) on trace la caractéristique (BD), l'axe des j étant orienté vers le bas.

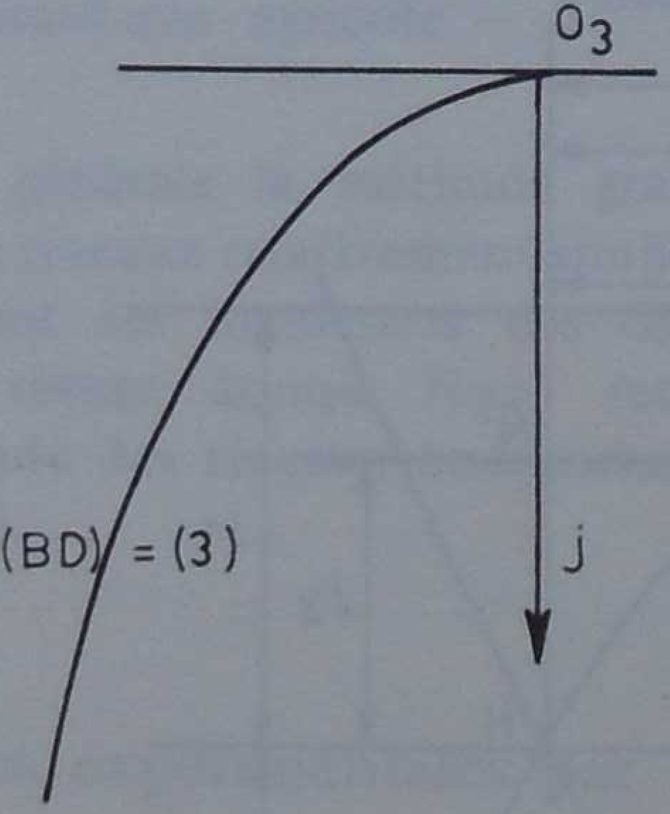


Fig. XI.5.4.4.4 – 3ème calque

Les axes de ces trois calques sont gradués respectivement avec les mêmes échelles.

En premier lieu, il s'agit de savoir dans quel sens le débit passera dans le tronçon (bretelle) BD. Pour cela on suppose que la canalisation BD n'existe pas ; on a affaire à deux conduites en parallèle ADC et ABC composées chacune de deux conduites en série et parcourues par un débit total Q_1. Il est facile (fig. XI.5.4.4.5) de tracer les caractéristiques correspondantes et se rendre compte que pour le débit global Q_1, la perte de charge j'_1 dans AB est supérieure à j'_2 perte de charge dans AD. Si on réunit les points B et D par la canalisation BD, le débit passera donc de D vers B.

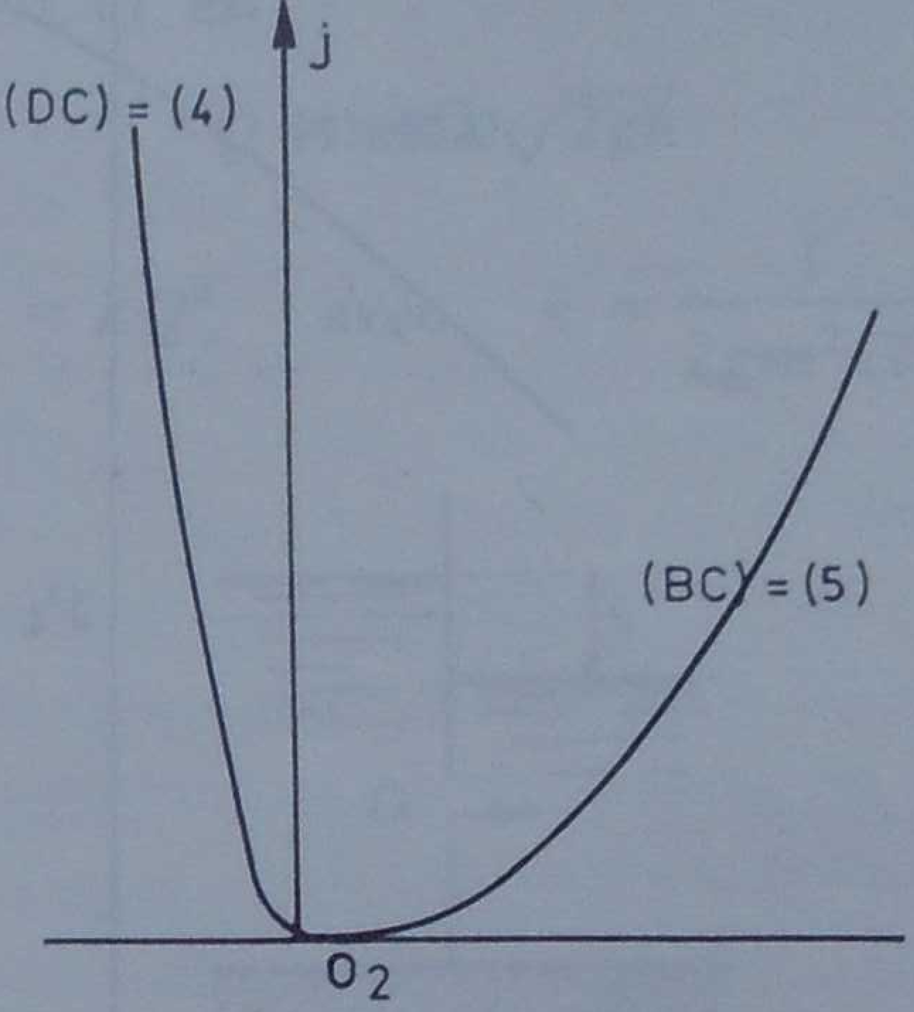


Fig. XI.5.4.4.3 – 2ème calque

Le principe de l'équilibre des débits exige donc (fig. XI.5.4.4.1) :

$$q_5 = q_1 + q_3 \qquad [XI.5.4.4.1]$$

et

$$q_2 = q_3 + q_4 \qquad [XI.5.4.4.2]$$

Le principe de l'équilibre des pertes de charge exige :

$$j_1 = j_2 + j_3 \qquad [XI.5.4.4.3]$$

et

$$j_4 = j_3 + j_5 \qquad [XI.5.4.4.4]$$

Dans ces conditions, au-dessus d'une feuille de papier blanc fixée sur une planche à dessin, on place successivement le calque de la figure XI.5.4.4.2 et le calque de la figure XI.5.4.4.4, les axes O_1j et O_3j étant confondus et la courbe (BD) étant du même côté que (AD) par rapport à cet axe, de façon à faire apparaître la somme $q_1 + q_3$ de l'équation $[XI.5.4.4.1]$, somme qui est matérialisée par la distance des deux caractéristiques $(AB) = (1)$ et $(BD) = (3)$ mesurée parallèlement à l'axe des Q (voir fig. XI.5.4.4.6).

On se donne arbitrairement une perte de charge $j_2 = O_1O_3$ ce qui fixe le débit $q_2 = O_3M$ et on maintient dans cette position les deux calques XI.5.4.4.2 et 4 (par exemple au moyen de punaises).

On place alors au-dessus de ces deux calques celui de la figure XI.5.4.4.3, afin que :

1) L'axe O_2j soit parallèle à O_1O_3 et coupe (BD) en un point K situé sur la parallèle à l'axe des Q passant par N, point d'intersection de (BC) et (AB).

2) (DC) coupe (AD) au point M précédemment défini.

3) La distance MN, mesurée parallèlement à l'axe des Q, soit égale à Q_1 (à l'échelle de l'axe des Q).

Ces trois conditions ne peuvent être réalisées en général. Il convient alors de modifier la distance O_1O_3, c'est-à-dire la position relative des deux premiers calques XI.5.4.4.2 et 4 et recommencer l'opération.

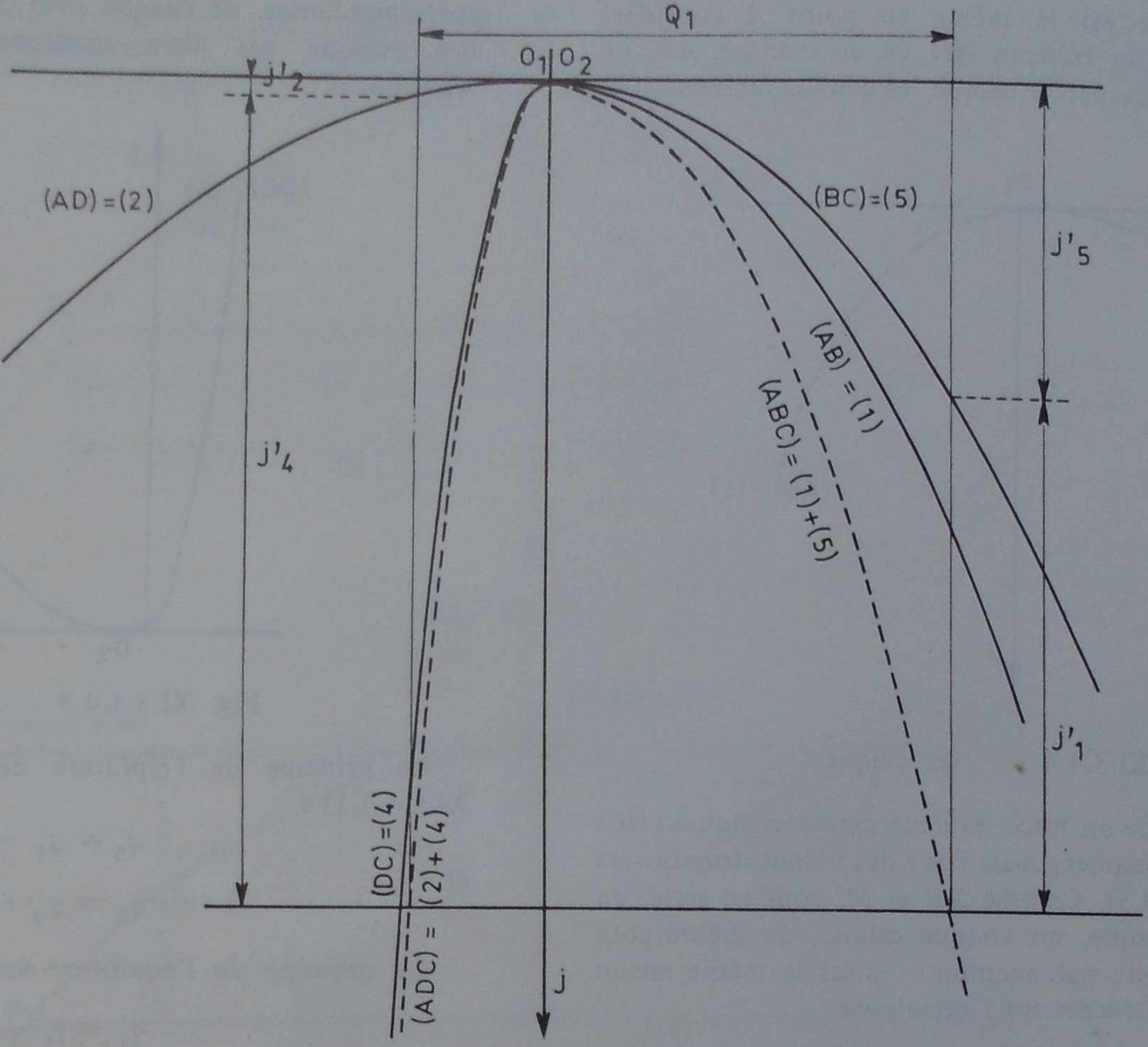


Fig. XI.5.4.4.5

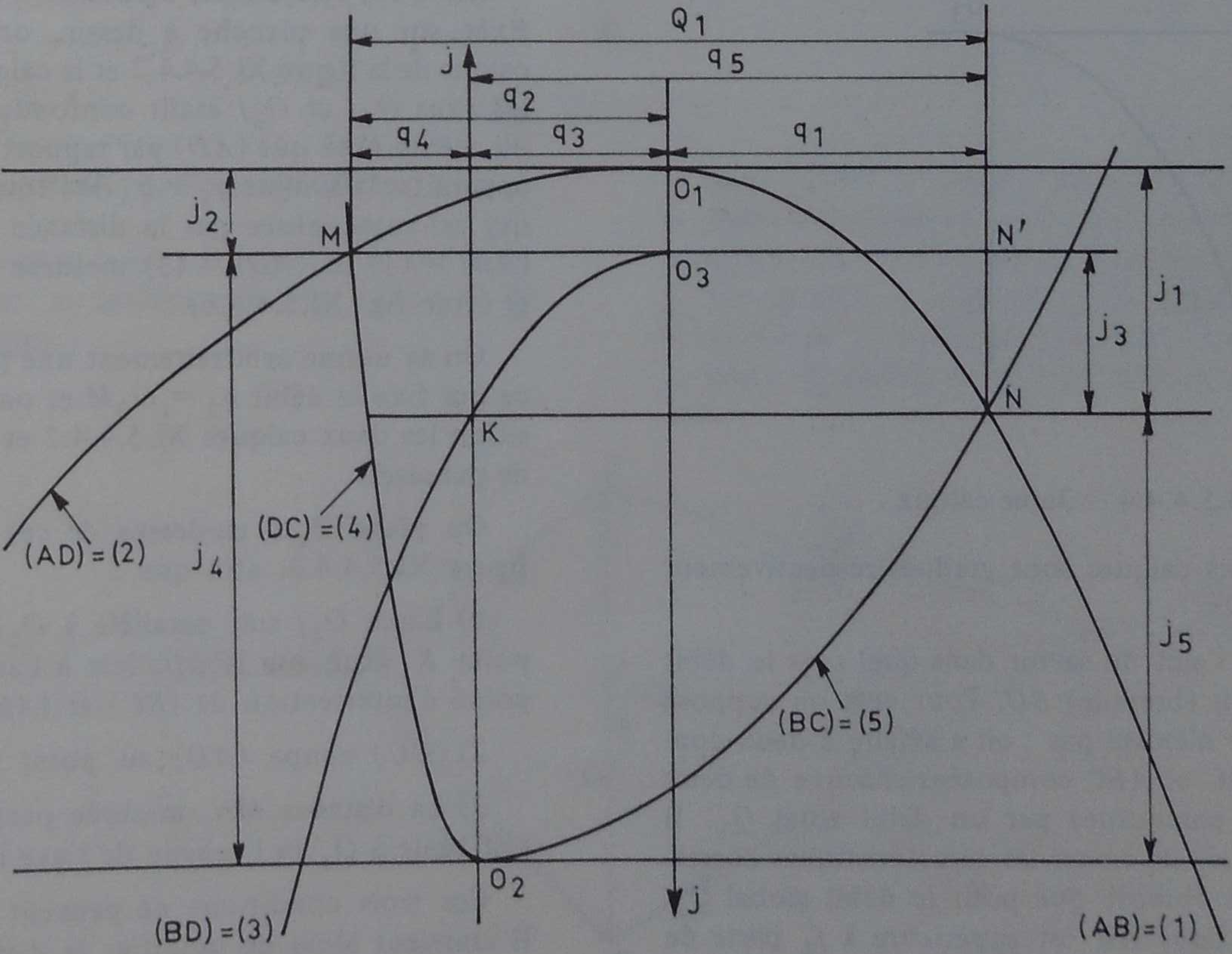


Fig. XI.5.4.4.6

La figure XI.5.4.4.6 montre la réalisation de ces conditions et permet de vérifier les égalités [*XI.5.4.4.1,2,3* et *4*], c'est-à-dire de résoude le problème.

Remarques : On a intérêt à utiliser du papier calque très transparent et comportant un quadrillage selon les axes des courbes afin de bien vérifier leur parallélisme et faciliter les lectures.

La précision est, bien entendu, fonction de l'échelle utilisée pour graduer les axes mais est en général suffisante pour les conditions de la pratique usuelle.

Si la construction de la figure XI.5.4.4.5 montre que $j_1' < j_2'$, c'est que le débit dans BD va de B vers D. Dans ces conditions la nouvelle écriture du principe de l'équilibre des débits montrerait que, sur la figure XI.5.4.4.6, la courbe (BD) doit être placée de l'autre côté de l'axe $O_1 j$ (ce qui revient à utiliser le verso du calque XI.5.4.4.4).

Si le réseau comprend un ou plusieurs tronçons assurant un service en route on applique les principes exposés précédemment (translation de la ou des caractéristiques correspondantes parallèlement à l'axe des Q).

Pour des réseaux plus complexes (trois mailles ou plus) la même méthode peut encore s'appliquer mais l'enchevêtrement des paraboles devient très rapidement assez compliqué et la méthode perd de son intérêt.

On pourra trouver des renseignements complémentaires sur l'utilisation de la méthode graphique dans la *"Note technique sur le calcul des réseaux maillés d'adduction d'eau"* (Ministère de l'Agriculture – Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole – 2ème édition – Septembre 1954).

D'une manière générale la méthode graphique présente l'avantage, pour des réseaux relativement simples, de permettre d'étudier rapidement les incidences des différents régimes (débits) dans un réseau donné. Nous retrouverons cette méthode pour l'étude des réseaux comportant des réservoirs d'équilibre (§ XI.6).

XI.5.5. Méthodes expérimentales par analogie

En raison de la complexité des méthodes mathématiques ou graphiques, on a cherché à réaliser expérimentalement des *modèles analogiques* permettant d'obtenir plus rapidement la solution des problèmes posés par l'écoulement dans les réseaux maillés.

Les méthodes analogiques appartiennent essentiellement à deux catégories

— Méthodes par analogie hydraulique ou pneumatique,

— Méthodes par analogie électrique.

XI.5.5.1. *Analogie hydraulique ou pneumatique*

La formule d'écoulement par un orifice noyé (fig. XI.5.5.1.1) est :

$$Q = m\Omega\sqrt{2gh}$$

ou

$$h = kQ^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{2gm^2\Omega^2}$$

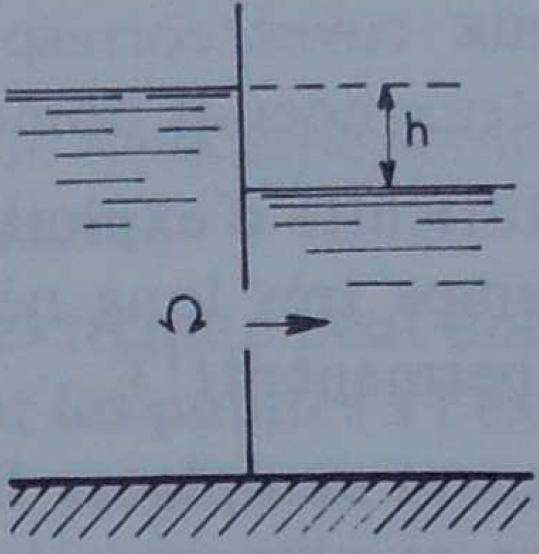


Fig. XI.5.5.1.1

Elle est analogue à la formule quadratique de la perte de charge dans un tronçon de canalisation :

$$j = k'Q^2$$

On peut donc réaliser un modèle d'un réseau maillé en remplaçant chaque noeud A, B, C, D du réseau réel par une cuve percée sur une ou plusieurs de ses faces d'orifices calibrés 1, 2, 3, 4 dont la section Ω et le coefficient de débit m réaliseront un coefficient $k = 1/2gm^2\Omega^2$ proportionnel au coefficient de résistance k' du tronçon de canalisation correspondant. Chaque cuve communiquera avec la ou les cuves voisines par un tel orifice calibré (fig. XI.5.5.1.2).

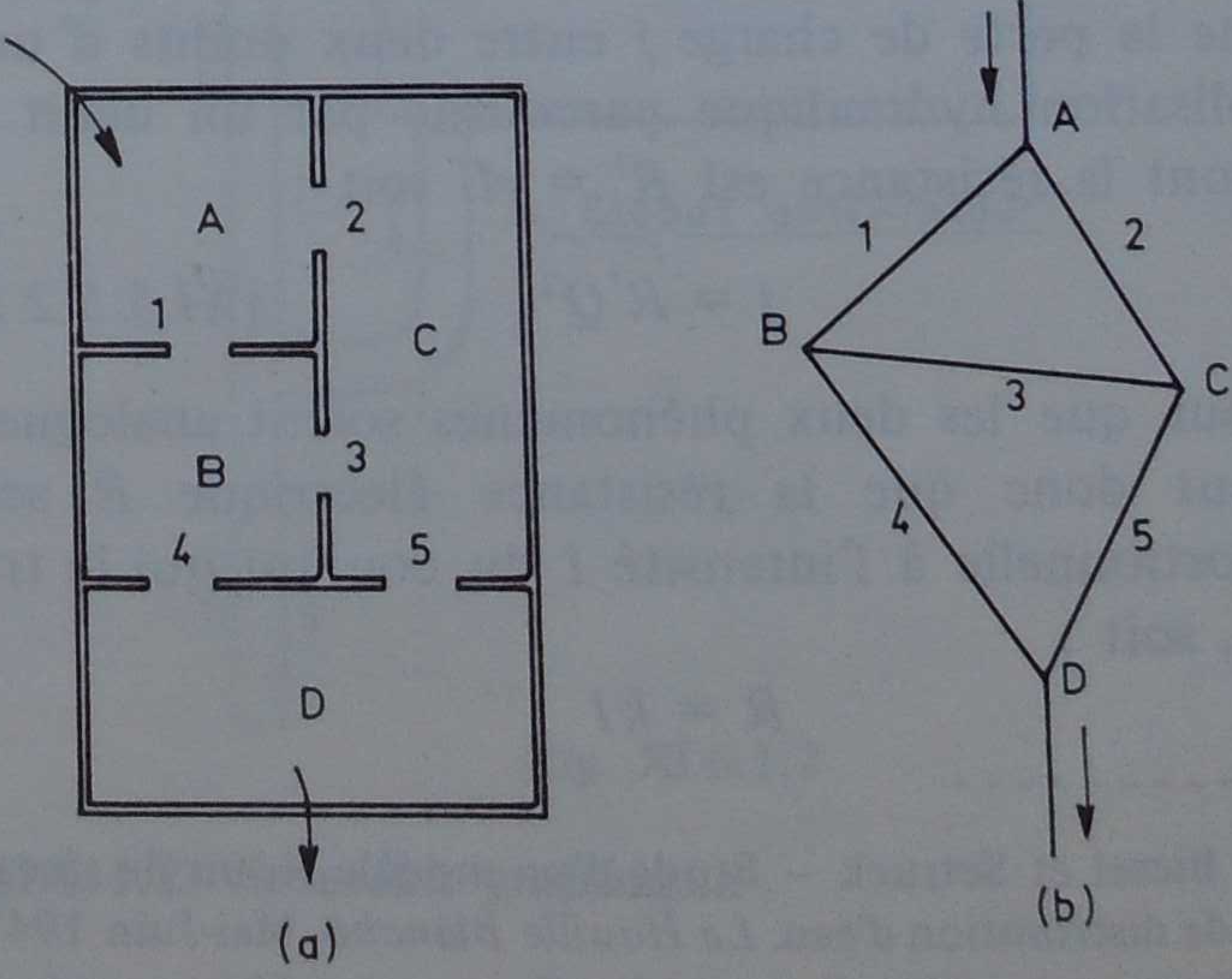


Fig. XI.5.5.1.2 – Analogie hydraulique ; (a) : Cuve analogique (vue en plan) ; (b) : Réseau réel

Le modèle est alimenté par le débit convenable ; les prélèvements ou les additions éventuels de débit au niveau des divers noeuds du réseau peuvent être réalisés par des prélèvements ou des additions de débit dans les cuves correspondantes du modèle. Lorsque le régime permanent est réalisé dans le modèle, il suffit de mesurer les cotes des niveaux dans chaque cuve qui correspondent aux charges en chacun des noeuds correspondants du réseau ; la différence des niveaux entre deux cuves correspond à la perte de charge entre les deux noeuds homologues du réseau.

La principale difficulté d'exploitation d'un tel modèle résulte du temps très long nécessaire à l'obtention d'un régime permanent(1).

On peut également remplacer les cuves par des réservoirs étanches et alimenter le modèle avec de l'*air comprimé* ; la mesure des différences de pression de l'air entre deux réservoirs est homologue à la perte de charge entre les deux noeuds correspondants du réseau. Un tel *modèle pneumatique* a été réalisé par M. Girette pour l'étude des nouveaux réseaux maillés de distribution d'eau d'irrigation de la région provençale(2).

XI.5.5.2. *Analogie électrique*

La loi d'Ohm exprime la différence de potentiel entre deux points d'une canalisation électrique parcourue par un courant d'intensité I et dont la résistance est R, soit

$$U = RI \qquad [XI.5.5.2.1]$$

La formule quadratique de la perte de charge exprime la perte de charge j entre deux points d'une canalisation hydraulique parcourue par un débit Q et dont la résistance est $R' = rl$, soit :

$$j = R'Q^2 \qquad [XI.5.5.2.2]$$

Pour que les deux phénomènes soient analogues, il faut donc que la résistance électrique R soit proportionnelle à l'intensité I du courant qui la traverse, soit :

$$R = kI$$

d'où :

$$U = kI^2 \qquad [XI.5.5.2.3]$$

Les formules [*XI.5.5.2.2* et *3*] établissent alors l'analogie entre un réseau maillé hydraulique et un réseau maillé de conducteurs électriques.

L'intensité électrique est l'homologue du débit hydraulique et la différence de potentiel entre deux noeuds du réseau électrique est l'homologue de la perte de charge entre les deux noeuds correspondants du réseau hydraulique.

La difficulté de réalisation du modèle électrique résulte de la nécessité d'utiliser des résistances proportionnelles à l'intensité du courant qui les traverse ; la variation correspondante de la résistance peut être réalisée soit par réglage manuel, soit automatiquement par échauffement de la résistance.

XI.6. RÉSEAUX COMPORTANT DES RÉSERVOIRS D'ÉQUILIBRE OU D'EXTRÉMITÉ

XI.6.1. Alimentation d'une prise d'eau par deux réservoirs

Considérons deux réservoirs R et R' reliés par une conduite de diamètre D alimentant au passage la prise M (fig. XI.6.1.1).

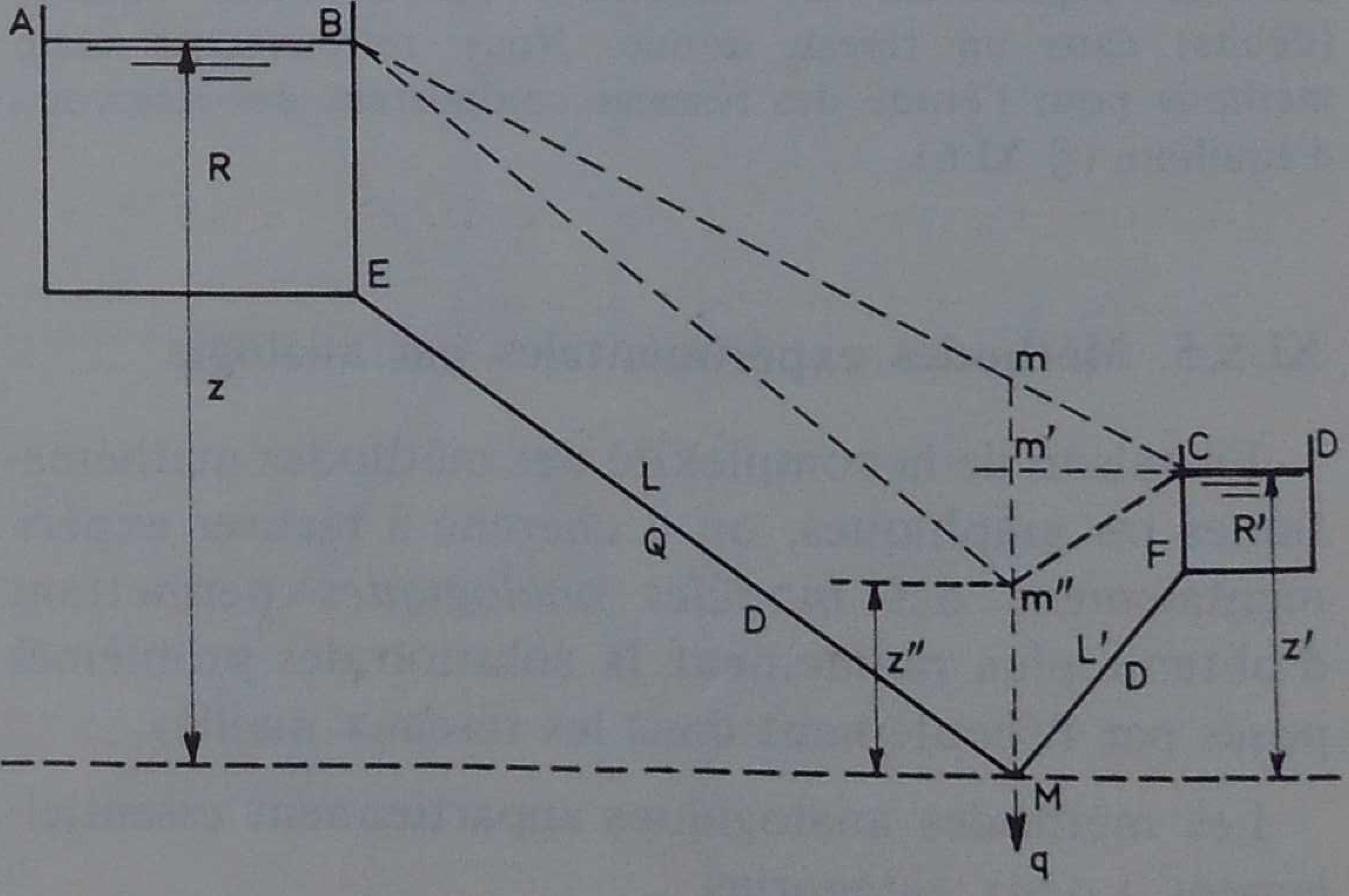


Fig. XI.6.1.1 – Alimentation d'une prise d'eau par deux réservoirs

Supposons que R soit le réservoir d'alimentation de l'ensemble.

(1) Biesel et Setruck – Etude d'un modèle réduit de réseau maillé de distribution d'eau. *La Houille Blanche*, Mai-Juin 1947.

(2) Girette – Etude d'un réseau maillé par la méthode d'analogie pneumatique. *Bulletin du Centre de Recherches et d'Expérimentation de Génie Rural* – n° 34 ; 1957.

Nous négligerons toutes les pertes de charge locales et, pour pouvoir construire facilement la ligne des niveaux piézométriques, nous admettrons que le coefficient de proportionnalité de la longueur réelle de chaque tronçon à sa projection horizontale est une constante.

Nous supposerons également que les variations des cotes des surfaces libres dans les réservoirs sont négligeables par rapport à la hauteur du plan de charge au-dessus de la prise M ; le régime d'écoulement est donc permanent. Nous reviendrons plus loin sur cette approximation.

XI.6.1.1. *Solution mathématique*

La prise M étant supposée fermée, l'eau va de R en R', la ligne des niveaux piézométriques est BC, le niveau piézométrique au point M est en m et le débit Q, constant tout le long de la canalisation, est donné par la formule :

$$\frac{J}{Q^2} = \frac{64\,b_1}{\pi^2 D^5}$$

soit, en supposant b_1 constant :

$$Q = A\sqrt{J} \quad \text{avec} \quad A = \sqrt{\frac{\pi^2 D^5}{64\,b_1}} = f(D)$$

Si L et L' sont les longueurs des deux tronçons de la conduite :

$$J = \frac{z - z'}{L + L'}$$

et

$$Q = A\sqrt{\frac{z - z'}{L + L'}}$$

Ouvrons maintenant progressivement la prise M.

Le débit Q va augmenter ainsi que la perte de charge dans la première canalisation et le point m va s'abaisser. Le débit q de la prise M augmente au fur et à mesure que le point m s'abaisse.

A un certain moment, m vient en m' sur l'horizontale de CD ; le réservoir R n'alimente plus R' et tout le débit Q va à la prise M qui débite alors :

$$q = Q = A\sqrt{\frac{z - z'}{L}}$$

Si on ouvre davantage la prise, le niveau piézométrique au point M descent en m'' à la cote z'' et la prise est alimentée par les deux réservoirs, son débit total est :

$$q = A\left(\sqrt{\frac{z - z''}{L}} + \sqrt{\frac{z' - z''}{L'}}\right)$$

q est maximal pour $z'' = 0$, c'est-à-dire quand l'ouverture en M est suffisante pour que les deux canalisations débitent à gueule bée.

Dans ce cas le débit q a pour valeur :

$$q_{\max} = A\left(\sqrt{\frac{z}{L}} + \sqrt{\frac{z'}{L'}}\right)$$

Si L' est faible le deuxième terme de la parenthèse peut être prédominant.

Un réservoir d'extrémité peut donc être d'un grand secours pour passer les pointes à l'extrémité de la conduite. Il se remplit en période creuse et peut fournir un gros débit en période de pointe (incendie, bains, etc . . .).

Dans la pratique la détermination exacte de la cote à donner au radier du réservoir R' est assez délicate et repose essentiellement sur des hypothèses concernant les débits à assurer le long de la canalisation EMF. Pour être certain que ce réservoir se remplira on le place à une cote suffisamment basse ; dans ce cas, pour éviter qu'il ne déborde, on peut disposer un robinet à flotteur à l'extrémité de la canalisation qui l'alimente et adopter le dispositif schématisé sur la figure XI.6.1.2.

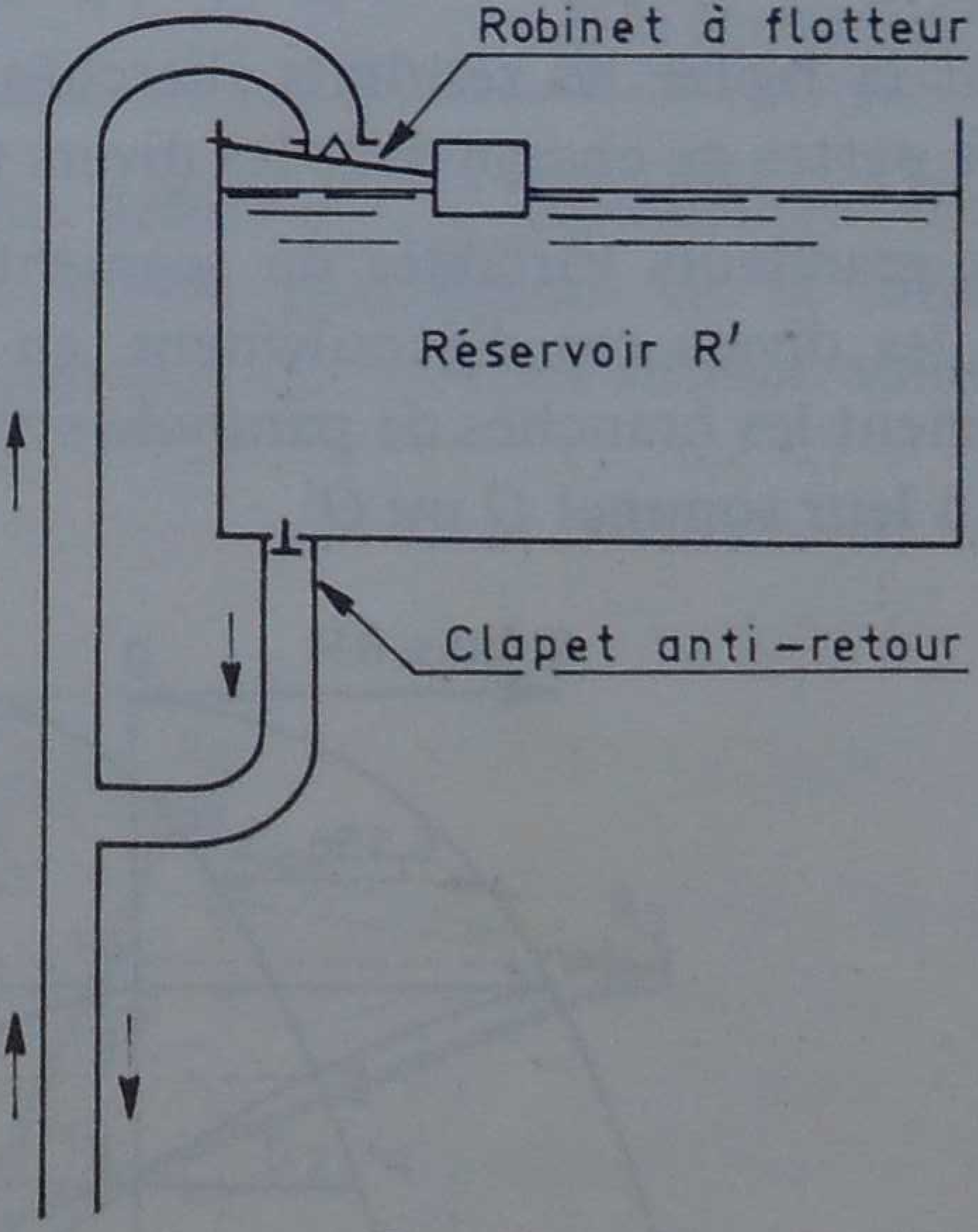


Fig. XI.6.1.2

XI.6.1.2. *Solution graphique*

Le problème se prête bien à l'utilisation de la méthode graphique dont le principe a été exposé au § XI.5.4.

Choisissons les axes comme il est indiqué sur la figure XI.6.1.3.

Dans le système d'axes (OQ, Oj) construisons la parabole (RM) d'équation

$$j = \frac{64\, b_1 Q^2 L}{\pi^2 D^5}$$

ou $\quad j = RQ^2 \quad$ avec $\quad R = \dfrac{64\, b_1 L}{\pi^2 D^5}$

Dans le système d'axes $(O'Q, O'j)$ construisons dans les mêmes conditions la parabole $(R'M)$ d'équation

$$j = R'Q^2$$

avec $\quad R' = \dfrac{64\, b_1 L'}{\pi^2 D^5}$

Si les canalisations RM et $R'M'$ avaient des diamètres différents, il serait donc également possible d'en tenir compte.

Fig. XI.6.1.3

Déplaçons, perpendiculairement à l'axe Oj, un segment PK de longueur égale à q, débit prélevé en M (à l'échelle des débits).

On lit sur la figure les résultats cherchés, à savoir les débits et pertes de charge dans les divers tronçons.

Pour des grandeurs variables du segment $PK = q$ on observe les divers cas d'écoulement en considérant notamment les branches de parabole symétriques par rapport à leur sommet O ou O'.

XI.6.1.3. *Cas où les divers tronçons assurent des services en route uniformes*

La méthode graphique permet de résoudre facilement le problème (fig. XI.6.1.4).

Supposons que chaque tronçon $RM = L$ et $R'M = L'$ assure un service en route uniforme de q_0 litres/seconde par mètre entre R ou R' et M.

Effectuons sur la parabole (RM) la translation parallèle à l'axe OQ définie par le vecteur $-\,0{,}55\, q_0 L$ ce qui amène (RM) en (RM_1).

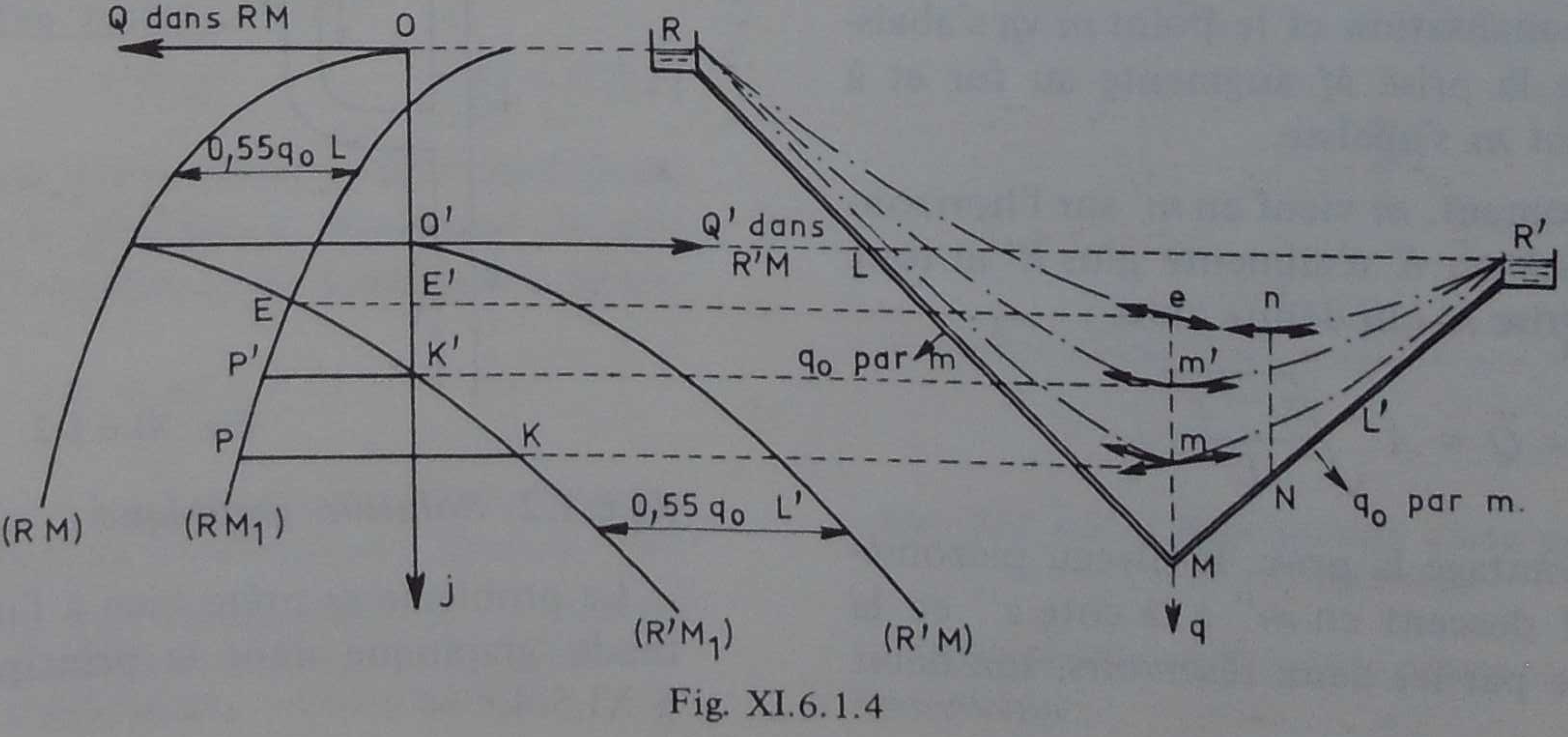


Fig. XI.6.1.4

De même la parabole $(R'M)$ sera déplacée en $(R'M_1)$ (translation $- 0{,}55\, q_0 L'$ parallèlement à l'axe $O'Q'$).

Pour les différents débits $PK = q$ prélevés en M on obtiendra les débits et pertes de charge dans les divers tronçons en appliquant les mêmes règles que précédemment.

On remarque notamment que pour un débit $q < P'K'$, le prélèvement en M est alimenté uniquement par le réservoir R et le complément de débit provenant de R alimente la canalisation MR' dans le sens de M vers R'. Il existe donc sur le tronçon MR' un point neutre dont la position peut être précisée par la méthode donnée précédemment (cf. § XI.4.4).

Ainsi, dans le cas de la figure XI.6.1.4, si la prise M est fermée ($q = 0$), le débit qui passe en M est représenté par le segment EE'. Ce débit alimente une partie du tronçon MR' dans le sens de M vers R'. Comme la cote de e est inférieure à celle de R', cela signifie que l'autre partie du tronçon MR' est alimentée par R' dans le sens de R' vers M. Il existe donc sur le tronçon $R'M$ un point neutre N et la ligne des niveaux piézométriques a l'allure indiquée sur la figure suivant $RenR'$ (deux branches de courbes du troisième degré avec tangente horizontale en n au droit de N).

XI.6.2. Alimentation d'une prise d'eau par trois réservoirs

Supposons le réseau représenté sur la figure XI.6.2. On connaît les cotes des trois réservoirs et les caractéristiques (longueur, diamètre et profil en long) des divers tronçons.

Ici également la méthode graphique se prête particulièrement bien à la solution du problème.

En utilisant les axes indiqués sur la figure on trace successivement les paraboles :

(R_1M) d'équation $j = \dfrac{64\, b'_1 L_1}{\pi^2 D_1^5}\, Q^2$ avec $b'_1 = \alpha + \dfrac{\beta}{D_1}$

(R_2M) d'équation $j = \dfrac{64\, b''_1 L_2}{\pi^2 D_2^5}\, Q^2$ avec $b''_1 = \alpha + \dfrac{\beta}{D_2}$

(R_3M) d'équation $j = \dfrac{64\, b'''_1 L_3}{\pi^2 D_3^5}\, Q^2$ avec $b'''_1 = \alpha + \dfrac{\beta}{D_3}$

On construit la courbe (R_2R_3M) (dessinée en pointillé) dont les abscisses (débits) sont la somme des abscisses de (R_2M) et (R_3M) ; cette courbe (R_2R_3M) correspond donc à la caractéristique résultante des deux canalisations en parallèle R_2M et R_3M.

Pour un débit $q = PK$ prélevé en M on lit les résultats sur la figure (débits et pertes de charge dans les divers tronçons). En particulier on peut se rendre compte facilement des divers écoulements possibles, au fur et à mesure que diminue le prélèvement q jusqu'à $q = 0$ (point E).

Suivant les cas, on peut obtenir les résultats ci-après correspondant à la figure XI.6.2 :

N° de référence	Débit prélevé en M	Débit dans L_1 (de R_1 vers M)	Débit dans L_2	Débit dans L_3
1	PK	AP	AB (de R_2 vers M)	AC (de R_3 vers M)
2	$P'K'$	$A'P'$	$A'B'$ (de R_2 vers M)	$A'C'$ (de M vers R_3)
3	$P''K''$	$A''P''$	$A''B''$ (de M vers R_2)	$A''C''$ (de M vers R_3)

Pour des débits $q < 0$ (refoulement d'une pompe placée en M) on raisonnerait de la même manière sur les branches de courbes situées au-dessus de E.

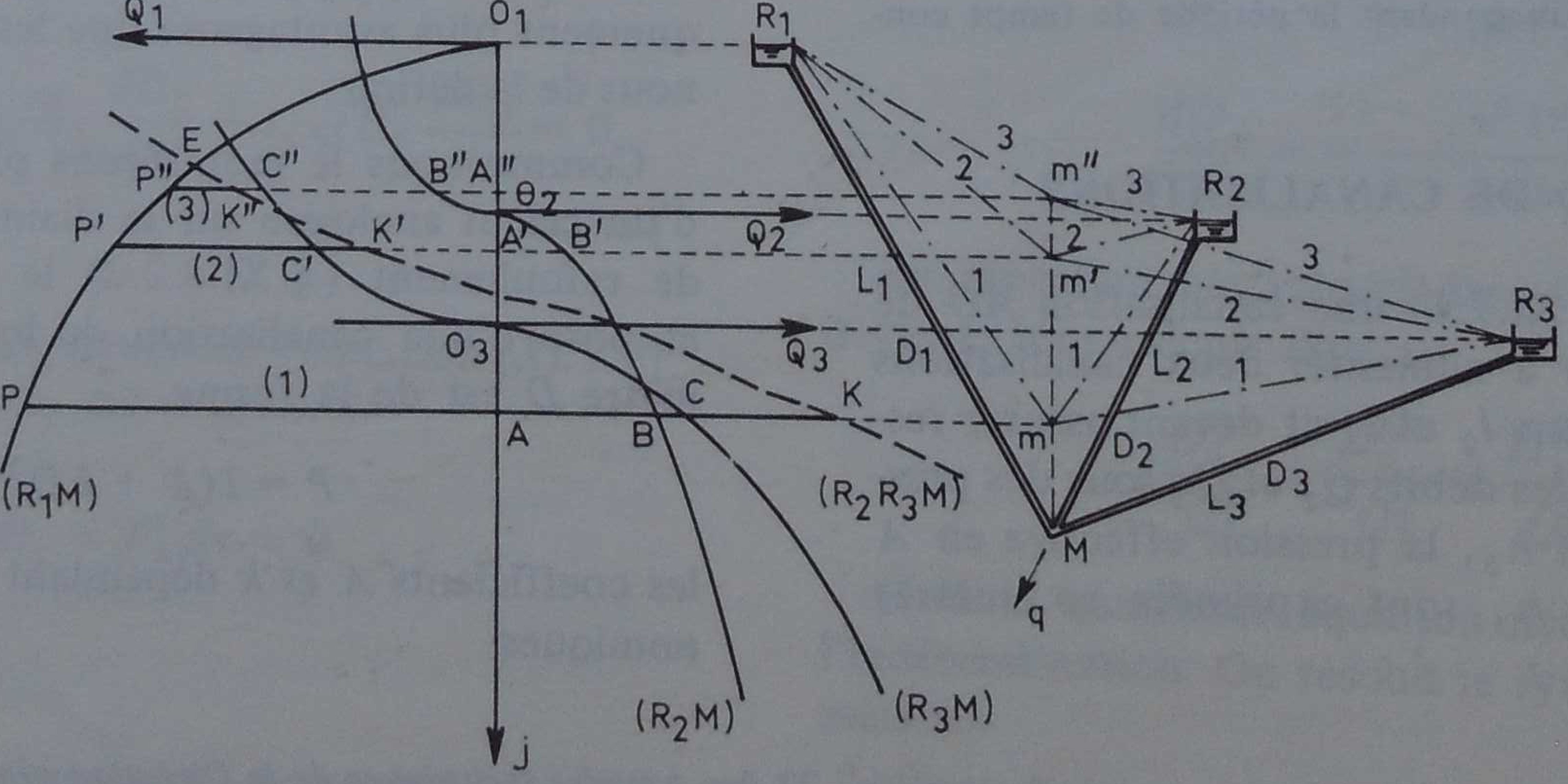


Fig. XI.6.2 – Alimentation d'une prise d'eau par trois réservoirs (solution graphique).

Les méthodes graphiques dont nous venons de donner quelques exemples d'application, peuvent être utilisées pour le calcul de réseaux plus compliqués comprenant notamment des prélèvements multiples ou des services en route sur un ou plusieurs tronçons. On trouvera de tels exemples d'utilisation dans la "Note technique sur le calcul des réseaux maillés d'adduction d'eau" dont la référence a été donnée précédemment (cf. § XI.5.4).

XI.6.3. Prise en compte de la non-permanence du régime

Jusqu'à présent nous avons négligé les variations des cotes des plans de charge, c'est-à-dire nous avons supposé le régime permanent.

Lorsque les hauteurs des plans d'eau des réservoirs au-dessus des canalisations sont relativement faibles, les variations des cotes de ces plans d'eau ne peuvent plus être négligées et le régime qui s'établit dans le réseau ne peut plus être considéré comme permanent. C'est un régime dont le débit varie graduellement en fonction des variations des cotes des surfaces libres dans les réservoirs, ces variations étant fonction notamment des sections droites (généralement constantes) de ces réservoirs.

L'étude mathématique d'un tel écoulement est assez complexe. On pourra se reporter, pour plus de détails, à la bibliographie figurant en annexe.

Dans certains cas on peut obtenir une solution approximative du problème en considérant le régime d'écoulement comme la succession de régimes permanents s'appliquant à des périodes plus ou moins brèves durant lesquelles on peut supposer les débits constants et correspondant aux cotes moyennes des plans d'eau entre le début et la fin de chaque période considérée. Dans ce cas la méthode graphique permet de résoudre facilement le problème ; il suffit d'effectuer sur les paraboles caractéristiques des divers tronçons les translations parallèles à l'axe Oj dont l'amplitude correspond à la variation des cotes des plans d'eau pendant la période de temps considérée(1).

XI.7. NOEUD DE CANALISATIONS

Considérons (fig. XI.7.1) une canalisation AO de longueur l_1 destinée à alimenter deux canalisations OB et OC de longueurs l_2 et l_3 et devant assurer respectivement en bout les débits Q_2 et Q_3 sous des pressions effectives h_2 et h_3, la pression effective en A étant h_1 (h_1, h_2 et h_3 sont exprimées en mètres d'eau).

Proposons-nous de calculer les diamètres D_1, D_2, D_3 de chacun des trois tronçons.

Remarquons tout d'abord que le débit Q_1 du tronçon AO doit être obligatoirement égal à :

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \qquad [XI.7.1]$$

Par ailleurs, désignons par z_1, z_2, z_3 les cotes des points A, B et C et par z la cote du point O où la pression effective est h.

De A à O, on a :

$$j_{AO} = (z_1 + h_1) - (z + h) = \frac{64\, b_1 Q_1^2 l_1}{\pi^2 D_1^5} \qquad [XI.7.2]$$

de même, de O à B, en supposant b_1 constant :

$$j_{OB} = (z + h) - (z_2 + h_2) = \frac{64\, b_1 Q_2^2 l_2}{\pi^2 D_2^5} \qquad [XI.7.3]$$

et de O à C :

$$j_{OC} = (z + h) - (z_3 + h_3) = \frac{64\, b_1 Q_3^2 l_3}{\pi^2 D_3^5} \qquad [XI.7.4]$$

Nous disposons donc de trois équations [*XI.7.2, 3 et 4*] à quatre inconnues : D_1, D_2, D_3 et h pression effective en O. Il y a donc indétermination ; autrement dit D_1, D_2 et D_3 varient avec la cote piézométrique ω en O et il y a une infinité de solutions. Si par exemple la cote ω' est assez grande, D_1 sera grand et D_2 et D_3 petits (ligne des niveaux piézométriques $a\,\omega' bc$) ; inversement si la cote ω'' est relativement faible, D_1 sera petit et D_2 et D_3 seront grands (ligne des niveaux piézométriques $a\omega'' bc$).

Il doit cependant exister une solution économiquement plus avantageuse que les autres ; proposons-nous de la définir.

Comme nous le montrerons plus loin à l'occasion d'un calcul analogue sur le diamètre d'une conduite de refoulement (§ XI.8.2.2) le prix de fourniture et pose d'une canalisation de longueur l et de diamètre D est de la forme

$$P = l(A + kD^{3/2})$$

les coefficients A et k dépendant des conditions économiques.

- - - - - - - - - - - - -

(1) Cf. études de MM. Vannier et Carlier dans le fascicule n° 77 des *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole* (Années 1958-59).

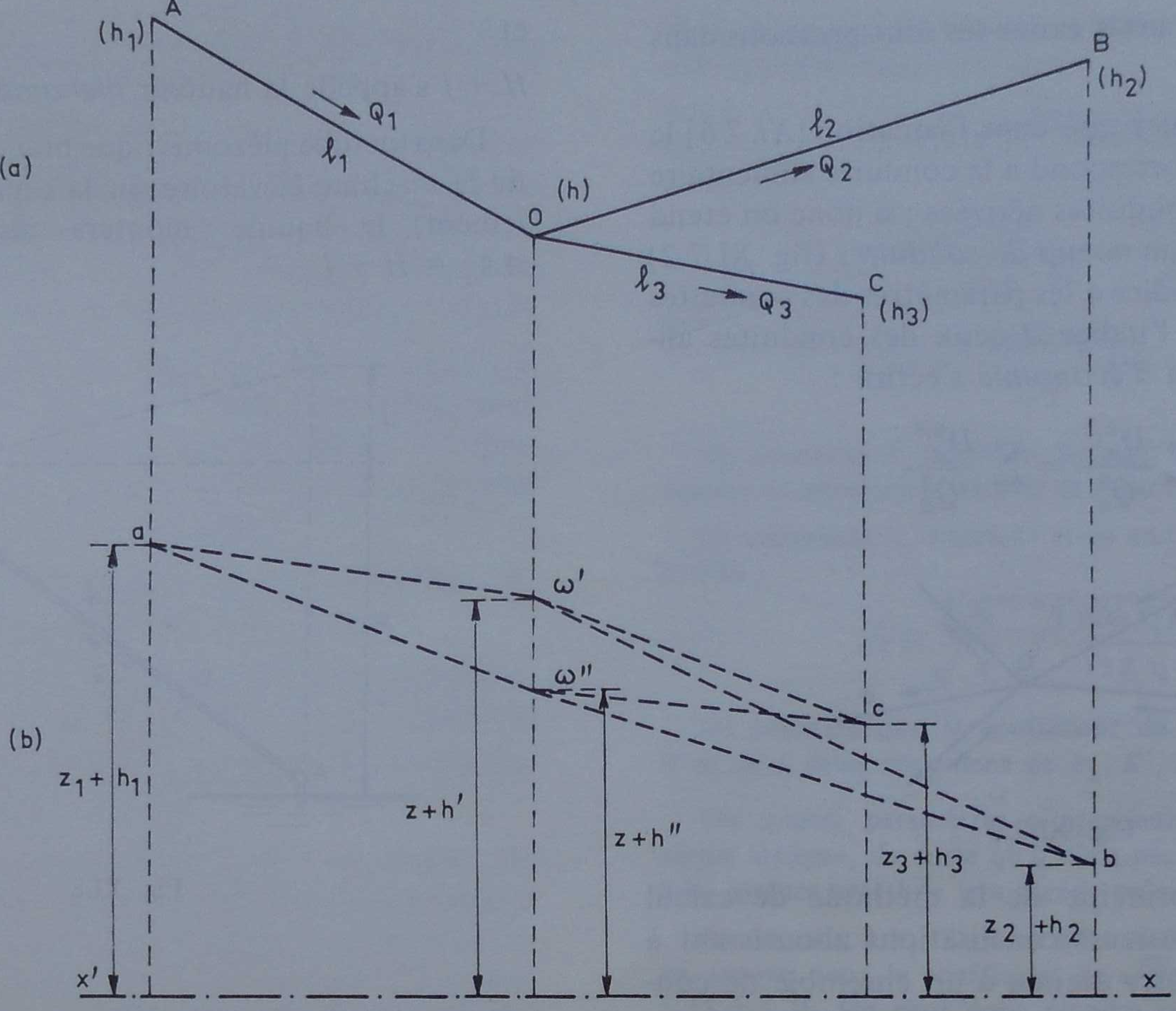


Fig. XI.7.1 – Noeud de canalisations. (a) : Plan. (b) : Profil en long des lignes des niveaux piézométriques

Pour le problème considéré la dépense relative à la fourniture et pose des canalisations sera donc :

$$P = A\,\Sigma l + k\,(l_1 D_1^{3/2} + l_2 D_2^{3/2} + l_3 D_3^{3/2})$$

La solution la plus économique sera obtenue en annulant la dérivée de P par rapport à la pression variable h soit(1) :

$$l_1 \sqrt{D_1}\,\frac{dD_1}{dh} + l_2 \sqrt{D_2}\,\frac{dD_2}{dh} + l_3 \sqrt{D_3}\,\frac{dD_3}{dh} = 0 \qquad [XI.7.5]$$

Pour obtenir dD_1/dh reprenons l'équation [*XI.7.2*] qui est de la forme $F(D_1, h) = 0$.

Donc :

$$F'_{D_1} dD_1 + F'_h dh = 0$$

on en déduit :

$$\frac{dD_1}{dh} = \frac{\pi^2 D_1^6}{5 \times 64\, b_1 Q_1^2 l_1}$$

Les équations [*XI.7.3* et *4*] donneront de même :

$$\frac{dD_2}{dh} = -\,\frac{\pi^2 D_2^6}{5 \times 64\, b_1 Q_2^2 l_2}$$

$$\frac{dD_3}{dh} = -\,\frac{\pi^2 D_3^6}{5 \times 64\, b_1 Q_3^2 l_3}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation [*XI.7.5*] il vient, tous calculs faits :

$$\frac{D_1^{6,5}}{Q_1^2} = \frac{D_2^{6,5}}{Q_2^2} + \frac{D_3^{6,5}}{Q_3^2} \qquad [XI.7.6]$$

C'est la quatrième équation nécessaire pour lever l'indétermination. On résoud le système par approximations.

S'il s'agit d'un réseau de distribution d'eau il faut toujours calculer la pression h de façon à s'assurer

----

(1) On peut également utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

qu'elle est positive pour éviter les sous-pressions dans la conduite.

On peut remarquer que dans l'équation [*XI. 7.6*] le premier membre correspond à la conduite alimentaire et le second aux conduites dérivées ; si donc on étend le raisonnement à un *noeud de conduites* (fig. XI.7.2) en affectant de l'indice *a* les paramètres des conduites alimentaires et de l'indice *d* ceux des conduites alimentées, *l'équation d'économie* s'écrira :

$$\sum \frac{D_a^{6,5}}{Q_a^2} = \sum \frac{D_d^{6,5}}{Q_d^2}$$

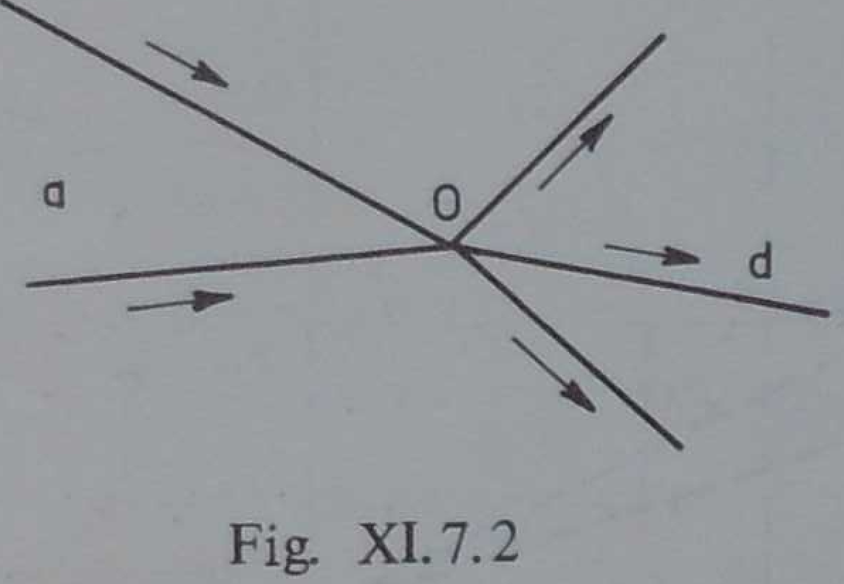


Fig. XI.7.2

Remarque : Le principe de la méthode de calcul économique de plusieurs canalisations aboutissant à un "noeud" peut être étendu à un ensemble de conduites constituant un réseau plus ou moins complexe. La bibliographie annexée donne les références de quelques études récentes sur ce sujet.

XI.8. CALCUL D'UNE CONDUITE DE REFOULEMENT

Considérons (fig. XI.8) une pompe *A* refoulant un liquide de poids volumique $\overline{\omega}$ avec un débit Q à une hauteur H à l'aide d'une canalisation de longueur l et de diamètre D.

L'écoulement considéré va provoquer le long de la canalisation une perte de charge j résultant des frottements le long de la canalisation et des pertes de charge locales (coudes, robinets-vannes, crépine, clapets, etc . . .).

Par conséquent l'énergie que doit fournir la pompe est celle qui correspond à une élévation fictive $AA_1 = H + j$, la ligne des niveaux piézométriques étant la droite $A_1 M$.

H s'appelle la hauteur *géométrique* d'élévation

et

$H + j$ s'appelle la hauteur *manométrique* d'élévation.

Dans un tube piézométrique branché en A à la sortie de la machine élévatoire sur la canalisation de refoulement, le liquide montera jusqu'à la hauteur $AA_1 = H + j$.

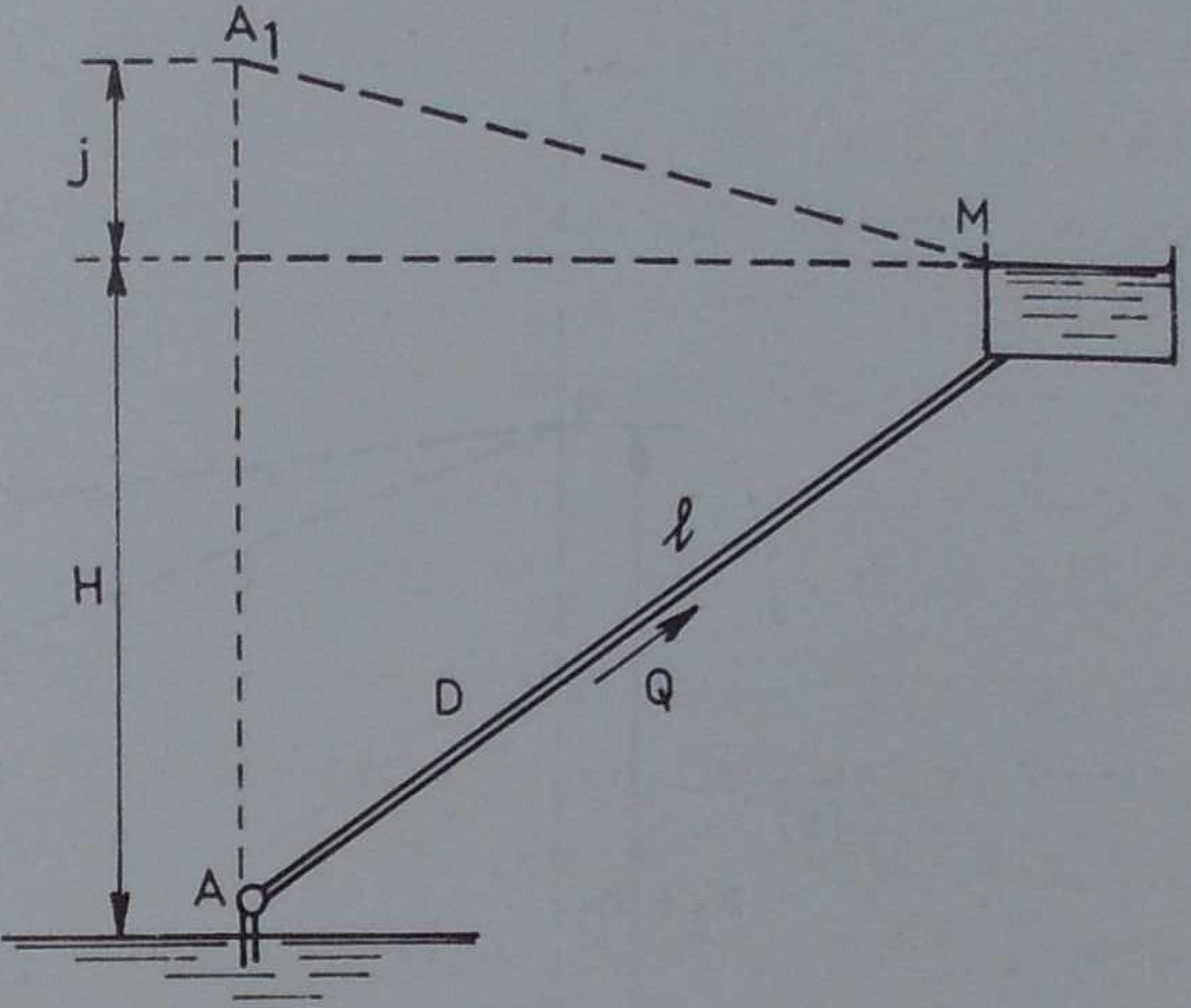


Fig. XI.8

XI.8.1. Puissance à fournir

La *puissance développée* par la pompe est celle qui correspond à un poids d'eau $\overline{\omega}Q$ élevé par seconde à la hauteur fictive $H + j$, soit :

$$\overline{\omega}Q(H + j)$$

Si la pompe a un rendement η, la *puissance qu'il faut lui fournir* sera :

$$\mathcal{P} = \frac{\overline{\omega}Q(H + j)}{\eta}$$

$\overline{\omega}$ en kgf par m³ , Q en m³/s ,
H et j en m , $\mathcal{P}$ en kgm/s .

en *kW* :

$$\mathcal{P}_{kW} = \frac{\overline{\omega}Q(H + j)}{102\,\eta}$$

Si enfin η' est le rendement du moteur qui entraîne la pompe, la puissance absorbée par ce moteur c'est-à-dire la *puissance du groupe élévatoire* sera :

en *kW* : $$\mathcal{P}'_{kW} = \frac{\overline{\omega}Q(H + j)}{102\,\eta\,\eta'}$$

XI.8.2. Calcul du diamètre "économique" de la canalisation de refoulement

Pour élever le débit Q à la hauteur géométrique H donnée on peut, a priori, donner à la canalisation un diamètre quelconque car, en faisant varier la puissance du groupe élévatoire, on peut toujours obtenir le débit Q imposé dans un tuyau de diamètre donné.

Si donc on adopte un grand diamètre le prix P_c de la canalisation sera élevé, par contre j sera réduit et la puissance du groupe élévatoire sera faible ; on économisera donc sur le prix P_g du groupe et sur le prix P_e de l'énergie nécessaire au pompage.

Si au contraire on adopte un petit diamètre, P_c est plus faible mais P_g et P_e sont plus élevés.

Il y a donc intérêt à choisir le diamètre qui permettra d'obtenir le prix de revient minimal de l'ensemble de l'installation en exploitation ; c'est ce qu'on appelle le *diamètre "le plus économique"*.

Pour le calculer on exprime le prix de revient de l'ensemble de l'installation en exploitation (par exemple le prix du m^3 d'eau élevée compte tenu de l'amortissement de la canalisation et du groupe élévatoire et de la consommation d'énergie) en fonction du diamètre D et on annule la dérivée de ce prix par rapport à D.

Nous donnerons deux exemples d'un tel calcul

— l'un établi par Bresse il y a près d'un siècle,

— l'autre dû à MM. Koch et Vibert et tenant compte de données plus récentes.

XI.8.2.1. *Formule de Bresse*

Bresse pose que le prix de revient (fourniture et pose) d'une canalisation de diamètre D et de longueur l est représenté par l'expression :

$$P = K D l$$

K étant, en somme, le prix de revient de l'unité de longueur par mètre de diamètre.

Appelons K' le prix de revient de la station élévatoire augmenté des dépenses d'exploitation capitalisées, le tout ramené au cheval-vapeur. Pour N chevaux la dépense sera $K'N$.

Le prix de l'ensemble de l'installation est donc :

$$P = K D l + K' N$$

Si Q est le débit évalué en mètres cubes/seconde, H la hauteur géométrique d'élévation évaluée en mètres, j la perte de charge également évaluée en mètres et, enfin η le rendement de l'usine élévatoire, on a :

$$N = \frac{1.000\, Q\,(H + j)}{75\,\eta}$$

$$N = \frac{1.000\, Q}{75\,\eta}\left(H + \frac{64\, b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5}\right)$$

d'où :

$$P = K D l + \frac{1.000\, K' Q}{75\,\eta}\left(H + \frac{64\, b_1 Q^2 l}{\pi^2 D^5}\right)$$

On obtiendra la condition donnant la solution la plus avantageuse en annulant la dérivée de P par rapport à D.

En supposant b_1 constant et en annulant la dérivée dP/dD, il vient :

$$D = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}\ \sqrt[6]{\frac{1.000\, b_1 K'}{15\, K\,\eta}}\ \sqrt{Q}$$

On constate que le coefficient de $\sqrt{Q}$ ne dépend ni de H ni de l, mais seulement de b_1, K', K et η.

Ces quatre paramètres n'interviennent d'ailleurs qu'à la racine sixième, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de chercher à les évaluer avec une très grande précision.

En donnant à b_1, K, K' et η les différentes valeurs usuelles, on trouve pour le coefficient de $\sqrt{Q}$ un nombre variant de 1,35 à 1,76. On peut donc prendre comme moyenne 1,5 ce qui donne :

$$\boxed{D = 1{,}5\,\sqrt{Q}}$$

formule remarquablement simple et qui est encore utilisée de nos jours pour une évaluation rapide.

Rappelons que dans la formule de Bresse Q est évalué en m^3/s et D en m.

Il résulte de cette formule que la *vitesse moyenne la plus économique* dans une conduite de refoulement sera :

$$U = \frac{4\,Q}{\pi D^2} \quad \text{avec} \quad D = 1{,}5\,\sqrt{Q}$$

soit :

$$U = 0{,}56\ m/s$$

soit pratiquement *0,60 m/s*.

XI.8.2.2. *Formule de Koch et Vibert*

Dans une étude publiée dans le "Génie Civil" des 1er Mars et 1er Octobre 1948, MM. Vibert, Ingénieur Général des Services techniques de la Ville de Paris, et Koch, Directeur des Eaux et de l'Assainissement de la Ville de Paris, ont proposé de substituer à la formule de Bresse une formule tenant compte notamment de l'utilisation journalière de la station de pompage.

Dans le cas d'une canalisation refoulant un débit constant, la dépense *pour élever un mètre-cube d'eau* comprend :

1) Celle relative à la hauteur géométrique d'élévation, elle est la même quel que soit le diamètre de la canalisation de refoulement ; il n'y a donc pas lieu d'en tenir compte dans une étude comparative.

2) Celle relative à l'amortissement de l'installation.

3) Celle relative à l'énergie dépensée pour vaincre les frottements c'est-à-dire correspondant à une élévation virtuelle égale à la perte de charge.

Seules les dépenses 2) et 3) sont fonction du diamètre.

Calculons-les *pour une longueur de 1 mètre* de canalisation.

a) *Amortissement de l'installation.* Comme il est facile de s'en rendre compte les variations de l'amortissement du groupe élévatoire sont négligeables par rapport à celles de la canalisation.

Ce dernier poste est donc seul à considérér.

A partir de l'analyse des graphiques des prix de fourniture et de pose des tuyaux en fonte, les auteurs admettent, *par mètre* :

prix de fourniture : $P_1 = k_1 D^{1,5}$

prix de pose : $P_2 = C + k_2 D^{1,5}$

C correspond à la dépense minimale pour une fouille qui serait destinée à un tuyau de diamètre infiniment petit.

prix total : $P = C + (k_1 + k_2) D^{1,5}$

ou

$$P = C + k_3 D^{1,5}$$

avec

$$k_3 = k_1 + k_2$$

Compte tenu du parallélisme existant entre les prix de la fonte et de la main d'oeuvre, si on désigne par f le prix du kg de fonte, on peut poser :

$$k_3 = kf$$

Donc :

$$P = C + kfD^{1,5}$$

Cette formule rend mieux compte des conditions économiques actuelles que celle de Bresse qui, pour une longueur de 1 mètre de canalisation, avait posé :

$$P = KD$$

Si T est le taux global de l'annuité (amortissement et intérêt) cette annuité s'écrit donc :

$$\psi_1 = T(C + kfD^{1,5})$$

1) Si le fonctionnement de la station élévatoire est *continu* avec un débit Q m^3/s, l'annuité d'amortissement pour un mètre cube élevé est égale à :

$$\frac{\psi_1}{365 \times 86.400 \times Q}$$

2) Si le fonctionnement de la station élévatoire est *discontinu* et si n est son coefficient d'utilisation journalière ($n < 1$, par exemple pour 10 heures par jour $n = 10/24$) on a pour un mètre cube élevé une annuité de :

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{nQ\,365 \times 86.400}$$

φ_1 est donc l'annuité correspondant à la fourniture et la pose d'un tuyau de un mètre de longueur par m^3 élevé.

b) *Perte de charge*

Soit J la perte de charge par mètre.

L'énergie utilisée pour l'élévation virtuelle de un mètre cube à la hauteur J est :

$$E_1 = J\overline{\omega} \quad \text{en kgm}$$
$$= 1.000\,J \quad \text{"}$$
$$= J\,\frac{9,81}{3600} \quad \text{en kWh}$$

$$E_1 = \frac{64\,b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}\;\frac{9,81}{3.600} \quad \text{kWh}$$

Posons :

$$k_4 = \frac{64 \times 9,81}{3600\,\pi^2}$$

$$E_1 = k_4 b_1 Q^2 D^{-5}$$

Si η est le rendement global de l'installation, l'énergie à fournir au moteur est :

$$E_2 = \frac{k_4}{\eta}\, b_1 Q^2 D^{-5}$$

Si e est le prix, en francs, du kWh la dépense correspondante sera :

$$\varphi_2 = \frac{k_4}{\eta}\, e\, b_1 Q^2 D^{-5}$$

par m^3 élevé et par mètre de canalisation.

En négligeant la dépense annuelle d'amortissement de la station de pompage (qui intervient comme un infiniment petit d'ordre - supérieur) la *dépense totale annuelle* est donc :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

par m^3 élevé et par mètre de canalisation.

Il suffit d'écrire :

$$\frac{d\varphi}{dD} = 0$$

pour trouver :

$$D = \sqrt[6,5]{K\,\frac{e}{f}\,Q^3}$$

ou

$$D = \left(K\,\frac{e}{f}\right)^{0,154} Q^{0,46}$$

avec

$$K = \frac{5\,k_4 b_1 2n\, 86.400 \times 365}{3\,T k \eta}$$

Pour appliquer cette formule il faut calculer les différents coefficients :

b_1 : voir les formules déjà données (§ XI.1.4),

n : coefficient d'utilisation défini précédemment,

T : taux global de l'annuité (intérêt et amortissement de la canalisation de refoulement). Sa valeur est donnée par les tables ; par exemple pour un intérêt de 5 % et un amortissement en 50 ans, $T = 0{,}05478$,

η : rendement global de l'installation ; il est de l'ordre de 0,5 à 0,7,

k : est donné par les équations précédentes.

Formules pratiques usuelles. Avec $b_1 = 0{,}0003$ (ce qui correspond à un assez gros diamètre) les auteurs proposent les formules suivantes :

pour $n = 1$ (pompage continu)

$$D = 1{,}547 \left(\frac{e}{f}\right)^{0,154} Q^{0,46}$$

pour $n = 0{,}416$ (pompage de 10 heures sur 24)

$$D = 1{,}35 \left(\frac{e}{f}\right)^{0,154} Q^{0,46}$$

Les résultats donnés par ces formules (voir tableau ci-dessous) montrent qu'il n'y a qu'une très faible différence avec les résultats donnés par la formule de Bresse pour les petits diamètres, mais qu'à partir de 250 mm le gain peut devenir très appréciable surtout avec un service de nuit.

Débit	Diamètre		
	Service continu		Service de nuit ($n = 0{,}416$) Formule de Koch et Vibert
	Formule de Bresse	Formule de Koch et Vibert ($n = 1$)	
(m^3/s)	(m)	(m)	(m)
0,01	0,15	0,15	0,125
0,05	0,33	0,32	0,26
0,10	0,48	0,45	0,37
0,20	0,675	0,62	0,50
0,50	1,05	0,95	0,77
1,00	1,50	1,30	1,06

Incidence des variations saisonnières du débit. Ultérieurement ("Le Génie civil" du 1er Octobre 1948) MM. Vibert et Koch ont complété leur formule en tenant compte des variations saisonnières du débit transité par la canalisation et en faisant intervenir les données résultant des études et formules modernes sur le calcul des pertes de charge dans les canalisations (alors que dans la formule initiale les auteurs avaient admis $b_1 = C^{te} = 0{,}0003$).

La nouvelle formule obtenue présente, de ce fait, un caractère plus général puisqu'elle tient compte des variations saisonnières du débit refoulé, ce qui présente un grand intérêt dans le cas de variations importantes des besoins en eau au cours d'une année (irrigation, alimentation des stations climatiques ou balnéaires, etc . . .).

XI.8.2.3. *Formule simplifiée de Munier*(1)

Plus récemment, M. Munier a proposé la formule simplifiée suivante :

$$D = (1 + 0{,}02\,n)\sqrt{Q}$$

avec

D = diamètre de la canalisation en m ;

n = nombre d'heures de pompage par jour ;

Q = débit refoulé en m^3/s.

Cette formule serait applicable pour un calcul rapide du diamètre d'une canalisation de fonte, dans une installation de petite ou moyenne importance.

XI.9. TRANSMISSION HYDRAULIQUE D'ÉNERGIE MÉCANIQUE

On réalise des conduites sous pression destinées à transmettre l'énergie à distance.

Les lois de l'écoulement restent les mêmes. Considérons une telle conduite de section constante (fig. XI.9.1) et soient p_0 la pression à l'origine de la conduite et p la pression à une distance L de l'origine. La perte de charge par mètre est

$$J = \frac{j}{L} = \frac{p_0^* - p^*}{\varpi L}$$

d'où :

$$p^* = p_0^* - \varpi L J$$

$$p^* = p_0^* - \varpi L \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2 D^5}$$

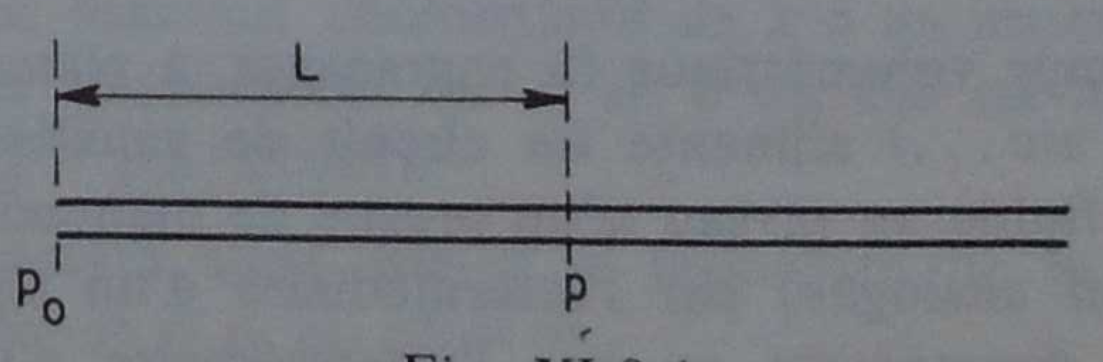


Fig. XI.9.1

(1) Munier : A propos du diamètre à donner aux conduites de refoulement. *L'Eau*, n° 3, Mars 1961).

La puissance nécessaire pour assurer un débit Q à une pression p_0^* est égale à :

$$\mathcal{P}_0 = Q\,\overline{\omega}\,\frac{p_0^*}{\overline{\omega}} = Q p_0^*$$

La puissance disponible dans le même temps à la distance L est :

$$\mathcal{P} = Q p^*$$

donc le *rendement* pour une longueur L sera :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \frac{p^*}{p_0^*} = 1 - \overline{\omega}\,\frac{64\,b_1 Q^2 L}{\pi^2 p_0^* D^5}$$

ou :

$$\eta = 1 - \overline{\omega}\,\frac{64\,b_1 \mathcal{P}_0^2 L}{\pi^2 p_0^{*3} D^5}$$

On augmentera donc le rendement en augmentant p_0^* et D. On agit surtout en augmentant la pression ce qui coûte moins cher que d'augmenter le diamètre et ce qui n'augmente pas l'encombrement.

On constate également que les pertes varient en raison inverse de la cinquième puissance du diamètre dans une transmission hydraulique et seulement en raison inverse de la deuxième dans une canalisation électrique. Mais les rendements des moteurs hydrauliques sont plus faibles, toutefois dans certaines circonstances les canalisations hydrauliques sont plus avantageuses que les canalisations électriques.

Les transmissions *hydrauliques* ou *hydromécaniques* sont très fréquentes dans les diverses branches de la mécanique industrielle.

Le fluide utilisé est généralement de l'huile.

Le schéma de principe d'une telle transmission est le suivant (fig. XI.9.2) :

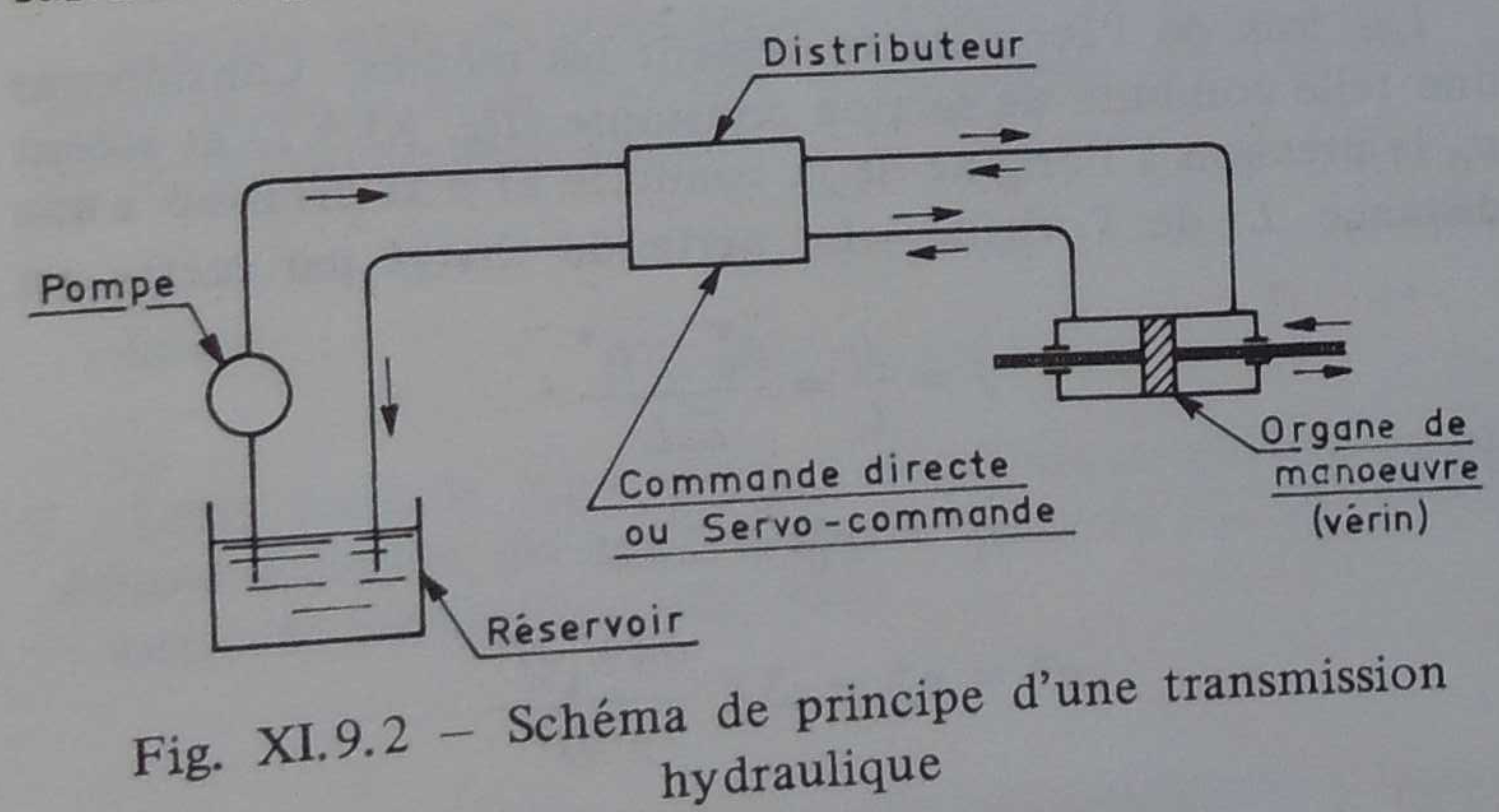


Fig. XI.9.2 – Schéma de principe d'une transmission hydraulique

Une pompe volumétrique (à engrenages, à piston rotatif, à palettes, etc . . .) alimente un circuit de canalisations qui conduit le fluide au niveau d'un organe de manoeuvre (vérin ou dispositif analogue) par l'intermédiaire d'un distributeur commandé directement ou par l'intermédiaire d'un servo-moteur.

Le distributeur règle l'admission du fluide à l'organe de manoeuvre par un système de soupapes ou renvoie éventuellement ce fluide au réservoir.

Exemples : Système de relevage hydraulique des outils portés sur les tracteurs agricoles, les engins de terrassements, commande des vannes et clapets des installations hydrauliques, etc . . .

XI.10. LE COUP DE BÉLIER

Supposons une canalisation fonctionnant en régime permanent et comportant en un point une vanne V.

La fermeture ou l'ouverture de cette vanne va provoquer en un point quelconque de la canalisation une variation de la pression et de la vitesse en fonction du temps, c'est-à-dire qu'un *régime variable* se substitue au régime permanent initial.

Les surpressions ou dépressions peuvent atteindre des grandeurs assez considérables si la manoeuvre de la vanne est suffisamment rapide et il peut résulter de ces chocs des accidents de rupture de la canalisation.

Ces phénomènes sont connus sous le nom de *coups de bélier*.

L'étude du mouvement varié dans les canalisations a donné lieu à de nombreux travaux dont les plus anciens paraissent être ceux du Général Ménabrea (1858) et de Castigliano (1874).

La solution définitive du problème a été donnée par l'italien *Lorenzo Alliévi* dans un mémoire magistral publié en Décembre 1901 dans les Annales de la Société des Ingénieurs et Architectes italiens.

Plusieurs auteurs ont repris les résultats fondamentaux obtenus par Alliévi et en ont étudié l'application aux problèmes particuliers posés par les conditions usuelles de la pratique courante (conduites forcées, conduites de refoulement, etc . . .). Parmi les savants et ingénieurs qui ont apporté leur contribution à l'étude de ces phénomènes complexes, citons MM. Boussinesq, Korteweg, Joukowski, Rateau, Jouguet, Camichel, Gariel, Louis Bergeron, Escande, Dubin, Eydoux, etc . . .

De 1928 à 1933 le français *Louis Bergeron*, simultanément semble-t-il avec le suisse *Othmar Schnyder*, a mis au point une méthode graphique pour l'étude du coup de bélier dans les systèmes en charge quelconques(1) ; le principe de la méthode avait été

(1) La méthode graphique de M. Louis Bergeron est largement développée dans son ouvrage posthume : *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité* ; (Dunod – 1949).

donné par les autrichiens Kreitner et Lowy (1928).

Nous étudierons successivement :

— La méthode *analytique* déduite des équations d'Alliévi,

— La méthode *graphique* Schnyder-Bergeron.

XI.10.1. Hypothèses de base – Intervention de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité des enveloppes

Considérons une canalisation AB alimentée en A par un réservoir dont la surface libre est à la pression atmosphérique et terminée en B par une vanne V (fig. XI.10.1.1).

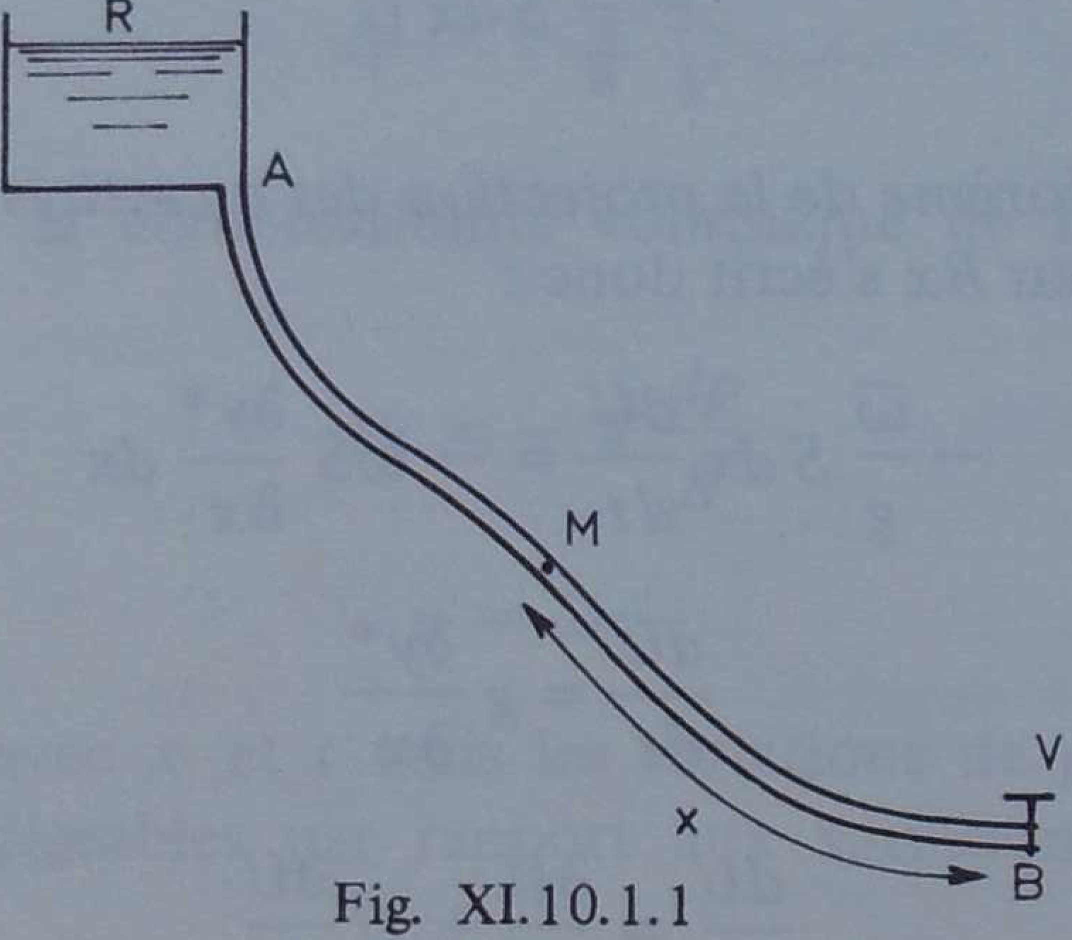


Fig. XI.10.1.1

Supposons tout d'abord que le diamètre D, la nature et l'épaisseur e des parois de la canalisation AB soient constants.

C'est ce qu'on appelle une conduite à *caractéristique unique*.

Nous ne tiendrons pas compte de l'inégale répartition des vitesses et des pressions dans une section transversale quelconque de la canalisation. Nous appellerons donc U et p la vitesse et la pression moyennes dans une section M qui sera repérée par son abscisse x mesurée par sa distance à l'extrémité aval B en suivant la canalisation ; l'origine des abscisses sera donc le point B. Autrement dit, U et p sont fonctions de x et de t et il nous faudra donc deux équations pour résoudre le problème.

Nous *négligerons les frottements* le long de la canalisation ; ils ont simplement pour effet de réduire progressivement l'amplitude des ondes de surpressions et dépressions constituant le coup de bélier et, dans le cas d'une fermeture rapide de la vanne V, cet amortissement est assez faible et peut être négligé au moins en première approximation.

Nous supposerons enfin que la canalisation AB est *dépourvue de tout système élastique local* tel que des poches d'air ou d'une surface libre déformable en contact avec l'air sous pression (cloche à air) ou à la pression atmosphérique (cheminée d'équilibre).

Dans l'hypothèse d'un liquide incompressible et d'une canalisation indéformable l'*équation de continuité* s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

ρ étant indépendant du temps, $\partial \rho / \partial t = 0$ et $U(x) = C^{te}$.

Si on manoeuvre la vanne V, U varie en fonction du temps et la *loi de la dynamique* appliquée à la tranche élémentaire du liquide de section $S = \pi D^2/4$ et de longueur dx (fig. XI.10.1.2) permet d'écrire l'équation

$$p^* S - S\left(p^* + \frac{\partial p^*}{\partial x} dx\right) = -\rho S dx \frac{dU}{dt}$$

ou

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{dU}{dt}$$

en considérant les pressions étoilées $p^* = p + \overline{\omega} z$, p^* positif s'il s'agit d'une surpression.

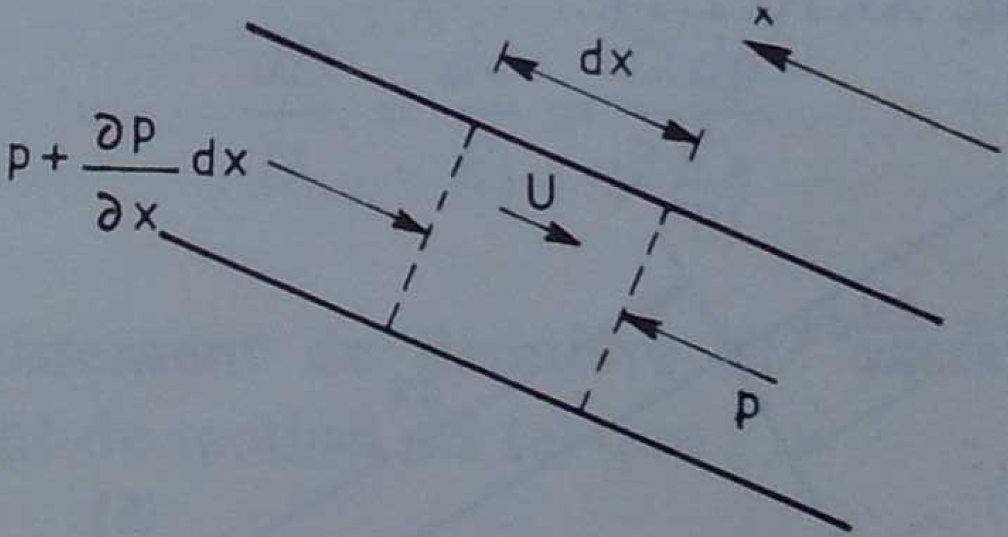


Fig. XI.10.1.2

La pression en A est constante en raison de l'existence de la surface libre dans le réservoir R. Si nous prenons cette pression comme origine ($p_A^* = 0$) on peut intégrer l'équation précédente à l'instant t entre une section quelconque d'abscisse x et la section A d'abscisse L où $p_A^* = 0$. Il vient :

$$\frac{1}{\rho} p^* = \int_x^L \frac{dU}{dt} dx$$

ou

$$p^* = \rho (L - x) \frac{dU}{dt}$$

p^* est une fonction décroissante de x à un instant donné et croît donc linéairement de A en B où elle est maximale et égale à $p_B^* = \rho L\,(dU/dt)$.

On constate alors que si la fermeture de la vanne est instantanée $dt = 0$ et $p^* = \infty$.

Autrement dit, dans le cadre des hypothèses considérées (liquide incompressible et tuyau indéformable), il y aura obligatoirement rupture de la canalisation.

En fait, l'expérience montre que dans ce phénomène spécial la *compressibilité de l'eau* et *l'élasticité des parois de la canalisation* ne sont plus négligeables comme on l'admet ordinairement en hydraulique.

XI.10.2. Equations différentielles du régime variable *(Equations d'Alliévi)*

Les deux équations différentielles qui vont définir le phénomène ont été établies en 1901 par Alliévi. Elles seront obtenues en appliquant à une tranche de la canalisation

— le théorème des quantités de mouvement,

— l'équation de continuité en faisant intervenir la compressibilité du liquide et l'élasticité des parois de la canalisation.

XI.10.2.1. *Théorème des quantités de mouvement*

Appliquons ce théorème à une tranche de la conduite comprise entre deux sections (S) d'abscisse x et (S') d'abscisse $x + dx$, en projection sur l'axe Bx de la canalisation orienté positivement de l'aval vers l'amont (fig. XI.10.2.1).

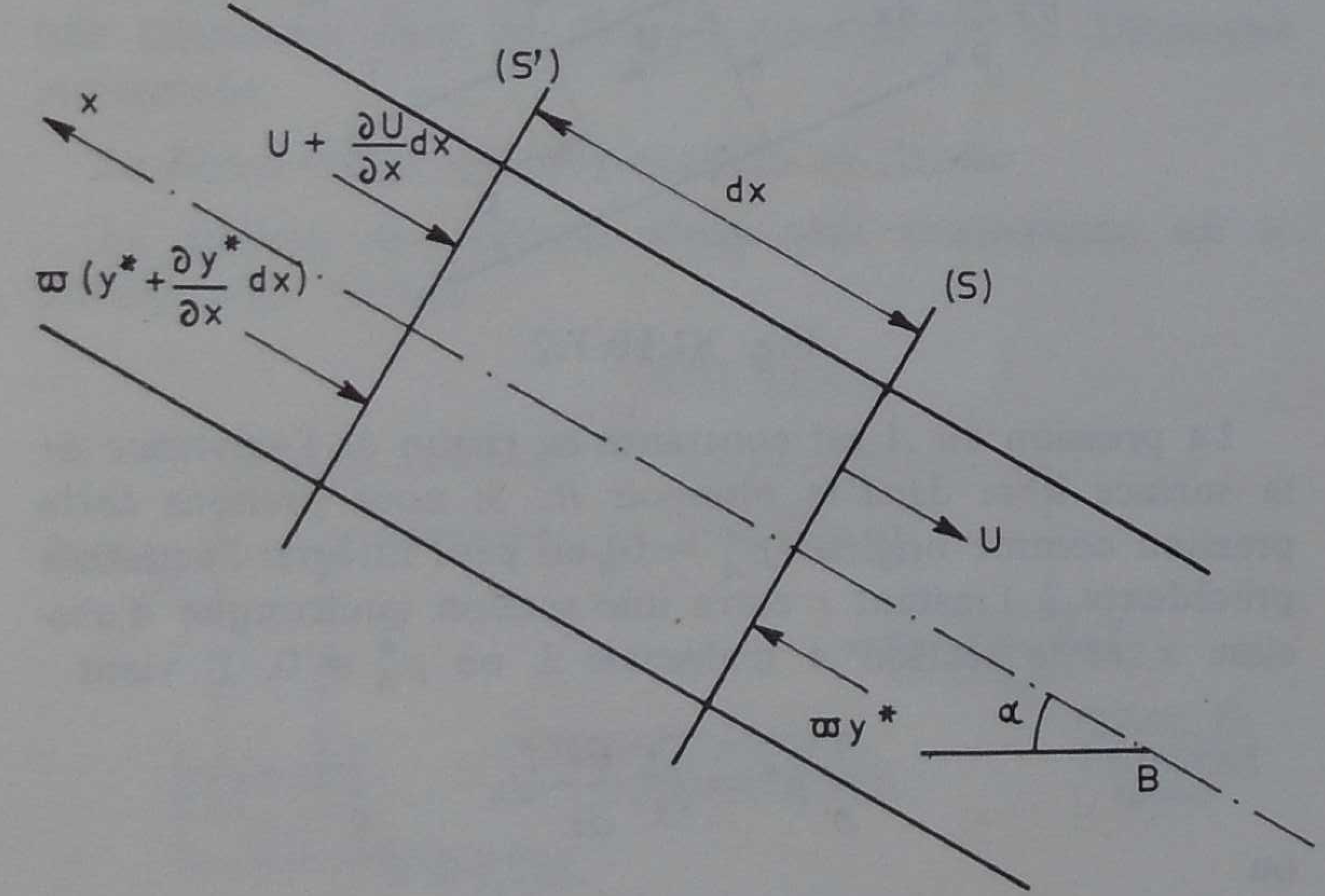


Fig. XI.10.2.1

Les projections des forces extérieures sur Bx sont le *poids* et les *pressions* que nous intégrerons sous la forme de la *pression étoilée* $p^* = p + \overline{\omega} z$, z représentant la cote du point considéré.

Sur la face aval (S) la pression unitaire vaut $p^* = \overline{\omega} y^*$ en désignant par y^* la hauteur représentative de la pression étoilée, c'est-à-dire la hauteur piézométrique, soit $y^* = p^*/\overline{\omega} = z + p/\overline{\omega}$.

La pression totale étoilée est donc $+ \overline{\omega} y^* S$ en projection sur Bx.

Sur la face amont elle est égale à :

$$- \overline{\omega} S \left(y^* + \frac{\partial y^*}{\partial x} dx \right)$$

La résultante projetée sur Bx est donc égale à :

$$- \overline{\omega} S \frac{\partial y^*}{\partial x} dx$$

Enfin la *quantité de mouvement* de la tranche considérée a pour expression, en projection sur Bx :

$$- \frac{\overline{\omega}}{g} S \, dx \, U$$

Le *théorème de la projection des quantités de mouvement* sur Bx s'écrit donc :

$$- \frac{\overline{\omega}}{g} S \, dx \frac{dU}{dt} = - \overline{\omega} S \frac{\partial y^*}{\partial x} dx$$

ou

$$\frac{dU}{dt} = g \frac{\partial y^*}{\partial x}$$

Or

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$$

U, $\partial U/\partial x$ et $\partial U/\partial t$ sont supposés des infiniment petits du premier ordre et on néglige le terme du second ordre $U(\partial U/\partial x)$.

D'où la première équation du mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = g \frac{\partial y^*}{\partial x}} \qquad [XI.10.2.1]$$

XI.10.2.2. *Equation de continuité, compte tenu de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité de la conduite*

A travers la section aval (S) la vitesse est U.

A travers la section amont (S') la vitesse est :

$$U + \frac{\partial U}{\partial x} dx$$

Pendant le temps dt il entre par la face amont (S') de la tranche considérée un volume :

$$S \left(U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right) dt$$

Pendant le même temps, il sort par la face aval (S) un volume $SU\,dt$.

La quantité d'eau emmagasinée est donc :

$$dV = S\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\,dt \qquad [XI.10.2.2]$$

Cet accroissement de volume est dû à la compressibilité de l'eau et à la dilatation de la conduite.

a) *Compressiblité de l'eau*. Conformément à la loi de Hooke, la variation de pression dp (variation de la contrainte) a entraîné une diminution de volume dV (déformation) de la masse d'eau de la conduite, telle que :

$$dp = -K\frac{dV}{V}$$

K étant la compressibilité volumique de l'eau (cf. § II.1)

ou

$$dV = -V\frac{dp}{K}$$

mais

$$p = \varpi y$$

p varie avec x et t mais les variations de p avec x sont négligeables par rapport aux variations avec t donc :

$$dp = \varpi\frac{\partial y}{\partial t}\,dt$$

et

$$V = S\,dx$$

donc :

$$dV = -\frac{1}{K}\,S\,dx\,\varpi\frac{\partial y}{\partial t}\,dt$$

Cette diminution de volume dV correspond au volume supplémentaire d'eau qui a rempli l'espace correspondant et qui s'est donc introduit dans la tranche considérée du fait de la compressibilité du liquide. Soit dV_1 ce volume supplémentaire, il est évidemment égal et opposé à dV, soit :

$$dV_1 = \frac{1}{K}\,S\,\varpi\,dx\,\frac{\partial y}{\partial t}\,dt \qquad [XI.10.2.3]$$

b) *Dilatation de l'enveloppe*. Sous l'action de la pression p la matière de la canalisation est soumise à une contrainte :

$$\sigma = \frac{pD}{2e} \qquad \text{(cf. § III.7.2)}$$

avec

D = diamètre intérieur de la canalisation,

e = épaisseur de la paroi.

La variation de pression dp entraîne une variation $d\sigma$ de la contrainte et on a :

$$d\sigma = \frac{D}{2e}\,dp$$

L'augmentation de contrainte $d\sigma$ (effort) entraîne un accroissement du diamètre dD (déformation) donné par la loi de Hooke :

$$d\sigma = E\frac{dD}{D}$$

avec E = module d'Young ou module d'élasticité de la paroi de la conduite.

Ceci suppose implicitement que la dilatation est purement transversale et qu'il n'y a pas de dilatation longitudinale, c'est-à-dire que la conduite est constituée d'anneaux juxtaposés.

Des relations précédentes on déduit :

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{D\,dp}{2Ee}$$

L'accroissement de diamètre dD entraîne un accroissement de section dS tel que :

$$\frac{dS}{S} = 2\,\frac{dD}{D}$$

$$dS = 2S\frac{dD}{D} = \frac{SD\,dp}{Ee}$$

La tranche considérée emmagasine, de ce fait, un volume d'eau supplémentaire

$$dV_2 = dS\,dx$$

$$dV_2 = \frac{SD\,dp}{Ee}\,dx$$

$$dV_2 = \frac{SD}{Ee}\,dx\,\varpi\frac{\partial y}{\partial t}\,dt \qquad [XI.10.2.4]$$

en négligeant comme précédemment les variations de p en fonction de x par rapport à ses variations en fonction de t.

L'*équation de continuité* s'obtiendra en écrivant que l'accroissement de volume d'eau dV dû à la variation de vitesse (équation [*XI.10.2.2*]) est égal à la somme de l'accroissement de volume :

dV_1 dû à la compressibilité de l'eau (équation [*XI.10.2.3*])

dV_2 dû à la dilatation de l'enveloppe (équation [*XI.10.2.4*])

d'où :

$$S\frac{\partial U}{\partial x}dx\,dt = \frac{1}{K}S\,dx\,\overline{\omega}\frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{SD}{Ee}\overline{\omega}\,dx\frac{\partial y}{\partial t}dt$$

ou, en simplifiant par $S\,dx\,dt$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \overline{\omega}\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee}\right)\frac{\partial y}{\partial t}$$

Posons :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\overline{\omega}}{g}\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee}\right)$$

Remarquons que a^2 peut s'écrire :

$$a^2 = \frac{1}{\rho\left(\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee}\right)}$$

On vérifie facilement que a a les dimensions d'une *vitesse.* Nous montrerons plus loin que a représente la vitesse de propagation des ondes de vitesse et de pression à l'intérieur du liquide limité par la conduite.

L'équation de continuité s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{g}{a^2}\frac{\partial y}{\partial t}} \qquad [XI.10.2.5]$$

XI.10.2.3. *Intégration des équations différentielles du mouvement*

La vitesse U et la pression y vérifient donc le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre suivantes :

1) *Equation dynamique* (théorème des quantités de mouvement) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g\frac{\partial y^*}{\partial x} \qquad [XI.10.2.1]$$

2) *Equation de continuité*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{g}{a^2}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad [XI.10.2.5]$$

étant entendu que dans cette dernière équation on peut remplacer $y = p/\overline{\omega}$ par $y^* = z + p/\overline{\omega}$ puisque $\partial y/\partial t = \partial y^*/\partial t$.

En définitive et pour simplifier les écritures, nous adopterons par la suite la notation y au lieu de y^*, ces deux grandeurs ne différant entre elles que par l'incidence du poids de l'eau de la canalisation dont l'influence est d'ailleurs négligeable par rapport à la surpression due au coup de bélier.

On ramène ce système à deux équations indépendantes du deuxième ordre en dérivant et en éliminant :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t}$$

ce qui conduit au système :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{aligned}\right.$$

U et y sont donc liés aux variables x et t par une même équation différentielle qui est l'équation classique des cordes vibrantes ou équation de d'Alembert.

On sait que la méthode d'intégration consiste à poser :

$$\left.\begin{aligned} z &= t - \frac{x}{a} \\ w &= t + \frac{x}{a} \end{aligned}\right\}$$

ce qui permet d'obtenir

$$y = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) + C^{te}$$

La constante s'obtient en considérant la pression y_0 au point M avant la manoeuvre de la vanne c'est-à-dire à l'instant $t = 0$.

Donc :

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

De manière analogue on obtiendrait :

$$U = U_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)\right]$$

U_0 représente la vitesse dans la canalisation avant le début de la manoeuvre de la vanne.

Dans ces deux équations, F et f représentent deux fonctions dont l'expression dépend de la loi de fermeture ou d'ouverture de la vanne.

Remarquons que la surpression ou la dépression correspondant à la valeur du coup de bélier en M sera $y - y_0$, soit :

$$\xi = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

Il peut paraître anormal de mesurer une surpression par une hauteur d'eau $\xi = y - y_0$, le liquide étant ici supposé compressible ; cela reviendrait à mesurer des longueurs avec un mètre en caoutchouc. En réalité l'élasticité de l'eau est très faible puisque $d\overline{\omega}/\overline{\omega} = d\rho/\rho$ est de l'ordre de 10^{-3}.

En définitive les solutions du système des deux équations différentielles s'écriront :

$$\xi = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

$$U - U_0 = -\frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)\right] \quad [XI.10.2.6]$$

Ce sont les *équations d'Alliévi.*

XI.10.2.4. *Interprétation des équations d'Alliévi*

Supposons un observateur se déplaçant le long de la conduite de telle façon que la loi de son mouvement soit :

$$t - \frac{x}{a} = C^{te}$$

c'est-à-dire

$$x = at + b \quad (b = C^{te})$$

autrement dit l'observateur se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse a en sens inverse de la vitesse d'écoulement U. Pour cet observateur la fonction $F(t - x/a)$ reste constante en chaque point ; cette fonction représente donc une *onde* se propageant dans la conduite avec la vitesse a, en sens inverse de U.

De manière analogue, un second observateur se déplaçant le long de la conduite et en sens inverse, c'est-à-dire avec une loi de mouvement telle que $t + x/a = C^{te}$, observerait que la fonction $f(t + x/a)$ reste constante en chaque point ; cette fonction $f(t + x/a)$ représente donc une onde se propageant le long de la conduite avec une vitesse $-a$, c'est-à-dire dans le même sens que U.

Donc la surpression (ou dépression) ξ en chaque point de la conduite résulte de la *superposition en ce point des deux ondes F et f se propageant dans la conduite, en sens inverse, avec la même vitesse absolue a* (fig. XI.10.2.4).

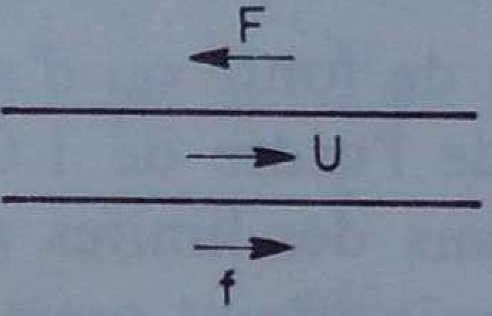


Fig. XI.10.2.4

Remarquons au passage que F, f et $\xi = F + f$ sont indépendants de la pression statique y_0 au point considéré et sont fonction uniquement de x et t. Le phénomène du coup de bélier sera donc plus redoutable, toutes choses égales par ailleurs (longueur de la canalisation, vitesse initiale, etc . . .), pour les conduites à faible pression de service (conduite de refoulement à faible hauteur manométrique ou conduite forcée de basse chute) que pour les conduites à forte pression de service où il ne représentera qu'une fraction plus faible de la pression statique.

Valeur de a (formule d'Alliévi). Nous avons défini a par la relation

$$a^2 = \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee}}$$

qu'on peut écrire :

$$a = \frac{A}{\sqrt{B + k\frac{D}{e}}}$$

Alliévi a calculé les valeurs de A, B et k en remplaçant $\overline{\omega}$, g, K et E par leurs valeurs exactes ou moyennes et a obtenu pour de l'eau aux températures ordinaires :

$$a = \frac{9.900}{\sqrt{48{,}3 + k\frac{D}{e}}}$$

a en m/s, D et e diamètre et épaisseur de la conduite (avec les mêmes unités),

k coefficient dépendant du matérieu constituant la canalisation (fonction inverse du module d'élasticité E) :

$k = 0{,}5$ pour l'acier

$k = 1$ pour la fonte

$k = 5$ pour le plomb

La déformabilité de la conduite est caractérisée dans la formule d'Alliévi par le terme $k(D/e)$ et contribue à réduire a. Dans un tuyau de caoutchouc a est de l'ordre de 15 m/s, dans les vaisseaux sanguins il est de l'ordre de 9 m/s, dans une canalisation en matière plastique (polyéthylène basse densité) il est de l'ordre de 180 m/s(1).

Pour les tuyaux de fonte ou d'acier la valeur de a est généralement de l'ordre de 1.000 m/s mais peut toutefois varier dans des limites assez étendues. Le maximum de a serait atteint pour un tuyau indéformable ($k = 0$ ou $E = \infty$) et sa valeur correspondrait alors à la vitesse de propagation du son dans l'eau, soit 1.425 m/s à 15°C, car le tuyau étant indéformable il ne subsiste que la compressibilité de l'eau, le phénomène est alors analogue à la propagation des ondes sonores dans l'eau.

XI.10.2.5. *Simplification des équations d'Alliévi*

Reprenons les équations d'Alliévi :

$$\left.\begin{aligned} \xi &= y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ U &= U_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad [XI.10.2.6]$$

Dans la plupart des cas pratiques (conduites de refoulement ou conduites forcées) l'origine A de la canalisation est constituée par un réservoir (ou chambre d'eau) dont les dimensions sont suffisamment grandes par rapport à celles de la conduite pour que les coups de bélier dans celle-ci ne puissent modifier la cote du plan d'eau dans le réservoir.

Dans ces conditions on peut admettre qu'à l'origine de la canalisation au départ du réservoir, c'est-à-dire au point A d'abscisse L (longueur de la canalisation) la pression reste constamment égale à la pression statique et $\xi \equiv 0$, soit :

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) + f\left(t + \frac{L}{a}\right) \equiv 0$$

ou :

$$f\left(t + \frac{L}{a}\right) \equiv - F\left(t - \frac{L}{a}\right)$$

Au point A l'onde de retour f est donc constamment égale et opposée à l'onde incidente F. Autrement dit, à l'extrémité amont de la conduite où il existe une surface libre à pression constante, *les ondes se réfléchissent avec changement de signe*.

Ecrivons l'identité précédente à un instant $t - L/a$, elle devient :

$$f(t) \equiv - F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \equiv - F(t - \theta)$$

en posant :

$$\theta = \frac{2L}{a}$$

Cette quantité θ qui représente la durée correspondant à un aller et retour de l'onde le long de la conduite, joue un rôle fondamental.

On a donc en considérant l'instant $t + x/a$:

$$f\left(t + \frac{x}{a}\right) \equiv - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right)$$

et les *équations d'Alliévi* deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \xi &= y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \\ U &= U_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad [XI.10.2.7]$$

Comme on le voit la fonction f a disparu et le problème se ramène à la détermination de la seule fonction F.

XI.10.3. *Application des équations d'Alliévi à quelques cas pratiques*

Nous allons appliquer les résultats obtenus (équations et formule d'Alliévi) aux deux cas suivants :

---

(1) C'est précisement sur les vaisseaux sanguins que le médecin Thomas Young (1808) a élaboré expérimentalement sa théorie de la propagation des ondes de pression dues aux pulsations cardiaques ; à l'occasion de ces études il introduisit le célèbre "module" d'Young E.

1) Fermeture brusque d'une vanne placée sur la conduite.

2) Fermeture lente d'une vanne placée sur la conduite.

Il est facile de se rendre compte qu'a priori une fermeture brusque produira un coup de bélier supérieur à une fermeture lente.

En effet nous savons qu'il se produit, à l'extrémité amont de la conduite, une réflexion des ondes avec changement de signe ; dans le cas d'une fermeture lente et progressive, la pression augmente progressivement à l'extrémité aval mais l'onde de surpression qui est partie de la vanne à l'instant O (début de la fermeture) revient, sous forme de dépression, à l'instant θ et contribue à diminuer la surpression due à la fermeture progressive si elle n'est pas encore achevée. Par contre, si la fermeture est déjà terminée à cet instant θ, la surpression atteindra la valeur la plus élevée qu'elle est susceptible de prendre.

Autrement dit, si la durée de fermeture T est inférieure à $\theta = 2L/a$, on a affaire à une *fermeture brusque* et la surpression atteint la valeur la plus grande qu'elle peut prendre compte tenu des caractéristiques de la canalisation (diamètre, épaisseur des parois) et des conditions initiales (U_0).

Si la durée de fermeture T est supérieure à $\theta = 2L/a$, on a affaire à une *fermeture lente* et la surpression est diminuée par suite de l'onde réfléchie qui vient se composer avec l'onde incidente.

Nous étudierons donc successivement ces deux cas.

XI.10.3.1. *Fermeture brusque* ($T < 2L/a$)

A) Supposons en premier lieu la *fermeture complète et instantanée* ($T = 0$) ce qui évidemment représente un cas théorique.

Prenons comme origine des temps l'instant de la fermeture instantanée et étudions comment va varier la pression à l'amont de la vanne V c'est-à-dire au point d'abscisse $x = 0$.

Plaçons-nous à l'instant $t_1 = 0$. La première équation d'Alliévi s'écrit :

$$\xi_1 = y_1 - y_0 = F(t_1) - F\left(t_1 - \frac{2L}{a}\right)$$

Mais il convient de ne faire intervenir pour l'instant que la première onde $F(t_1)$, la deuxième onde $F(t_1 - 2L/a) = F(t_1 - \theta)$ n'existant qu'à partir de l'instant $t_2 = \theta$ où la première onde revient à la vanne après avoir été réfléchie avec changement de signe à l'extrémité amont de la conduite.

On a donc à l'instant $t_1 = 0$:

$$\xi_1 = F(t_1) = F_1$$

Par ailleurs, la vanne étant fermée, on a constamment $U = 0$ et la seconde équation d'Alliévi s'écrit :

$$0 = U_0 - \frac{g}{a}\left[F(t_1) + F\left(t_1 - \frac{2L}{a}\right)\right]$$

qui, pour la même raison que précédemment, se réduit à :

$$0 = U_0 - \frac{g}{a}F(t_1) = U_0 - \frac{g}{a}F_1$$

d'où :

$$F_1 = \frac{aU_0}{g}$$

et

$$\xi_1 = \frac{aU_0}{g}$$

et ceci jusqu'au temps $t_2 = \theta$.

A l'instant $t_2 = \theta = 2L/a$ l'onde de retour arrive à la vanne V et les équations d'Alliévi donnent :

$$\xi_2 = y_2 - y_0 = F\left(\frac{2L}{a}\right) - F(0)$$

$$= F(t_2) - F(t_1)$$

$$= F_2 - F_1$$

et

$$0 = U_0 - \frac{g}{a}(F_2 + F_1)$$

$$\frac{aU_0}{g} = F_2 + F_1$$

Comme

$$F_1 = \frac{aU_0}{g}$$

on en déduit

$$F_2 = 0$$

et

$$\xi_2 = F_2 - F_1 = -\frac{aU_0}{g}$$

A l'instant $t_3 = t_2 + \theta = 2\theta$ on obtient, de la même façon :

$$\xi_3 = F_3 - F_2 = F_3 \quad (\text{car } F_2 = 0)$$

et

$$0 = U_0 - \frac{g}{a}(F_3 + F_2)$$

$$F_3 + F_2 = \frac{aU_0}{g} = F_3 \quad (\text{car } F_2 = 0)$$

et

$$\xi_3 = F_3 = \frac{aU_0}{g}$$

et ainsi de suite.

On constate donc que les résultats se déduisent les uns des autres à partir de la surpression ξ_1 à l'instant $t_1 = 0$.

Pour cette raison, les équations [*XI. 10.2.7*] sont parfois appelées *"équations enchaînées d'Alliévi"*.

Le diagramme de la pression enregistrée par un manomètre placé en amont de la vanne V a donc l'aspect de la figure XI. 10.3.1.

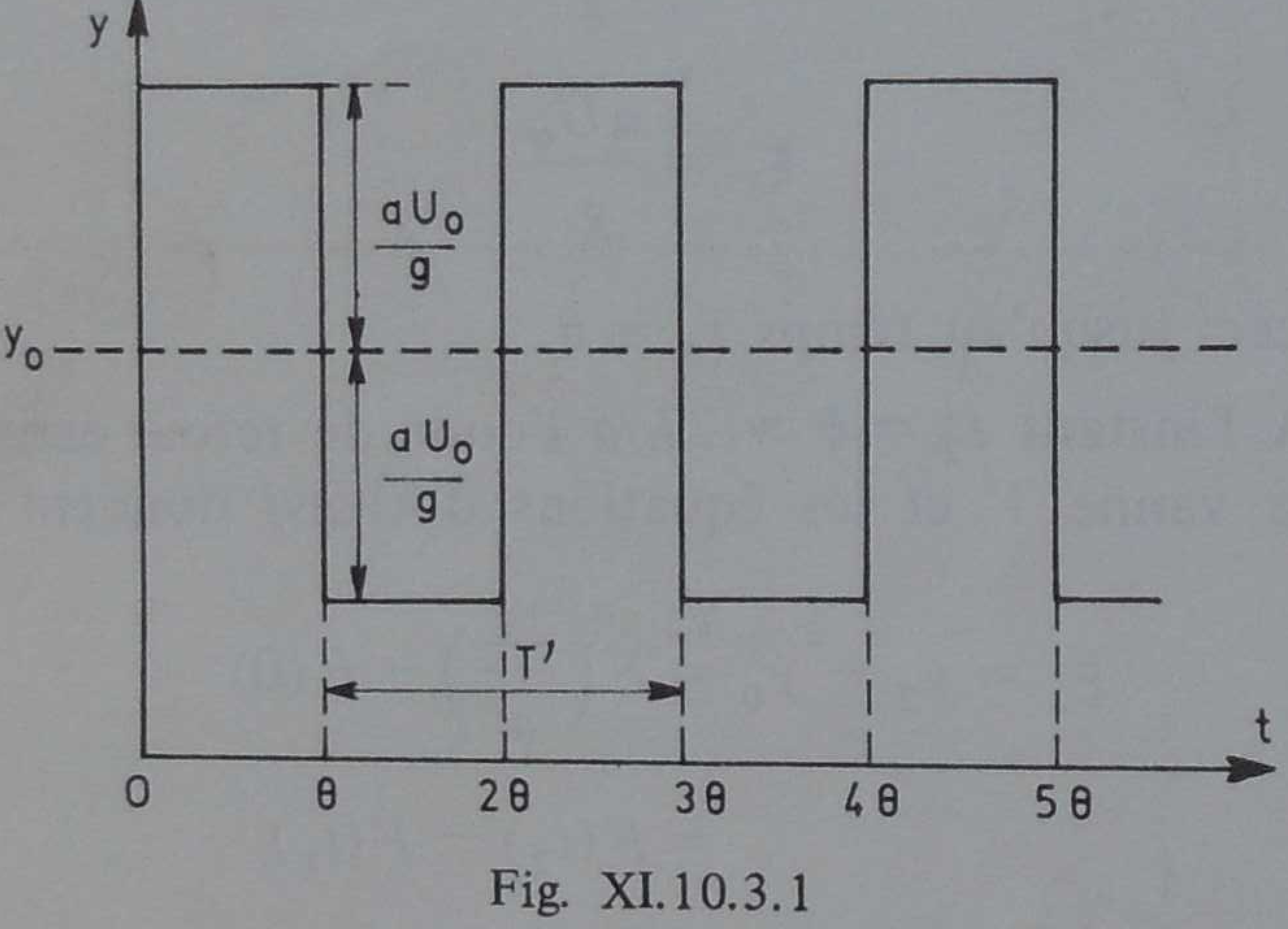


Fig. XI.10.3.1

Le phénomène de surpression qui accompagne une fermeture brusque est donc un phénomène périodique de période

$$T' = 2\theta = \frac{4L}{a}$$

T' est la période d'oscillation de la conduite.

B) $0 < T < 2L/a$. *Si la durée de fermeture T n'est pas instantanée* mais reste toutefois inférieure à $2L/a$ on a encore affaire à une *fermeture brusque* ; on observe, en amont de la vanne V, le même phénomène périodique de période $T' = 4L/a$ avec la même surpression maximale aU_0/g.

Le diagramme de la surpression à la vanne a l'allure indiquée sur la figure XI. 10.3.2.

La formule

$$\boxed{\xi_m = aU_0/g}$$

qui donne la valeur de la surpression maximale dans le cas d'une fermeture rapide est connue sous le nom de *"formule de Joukowski-Alliévi"*.

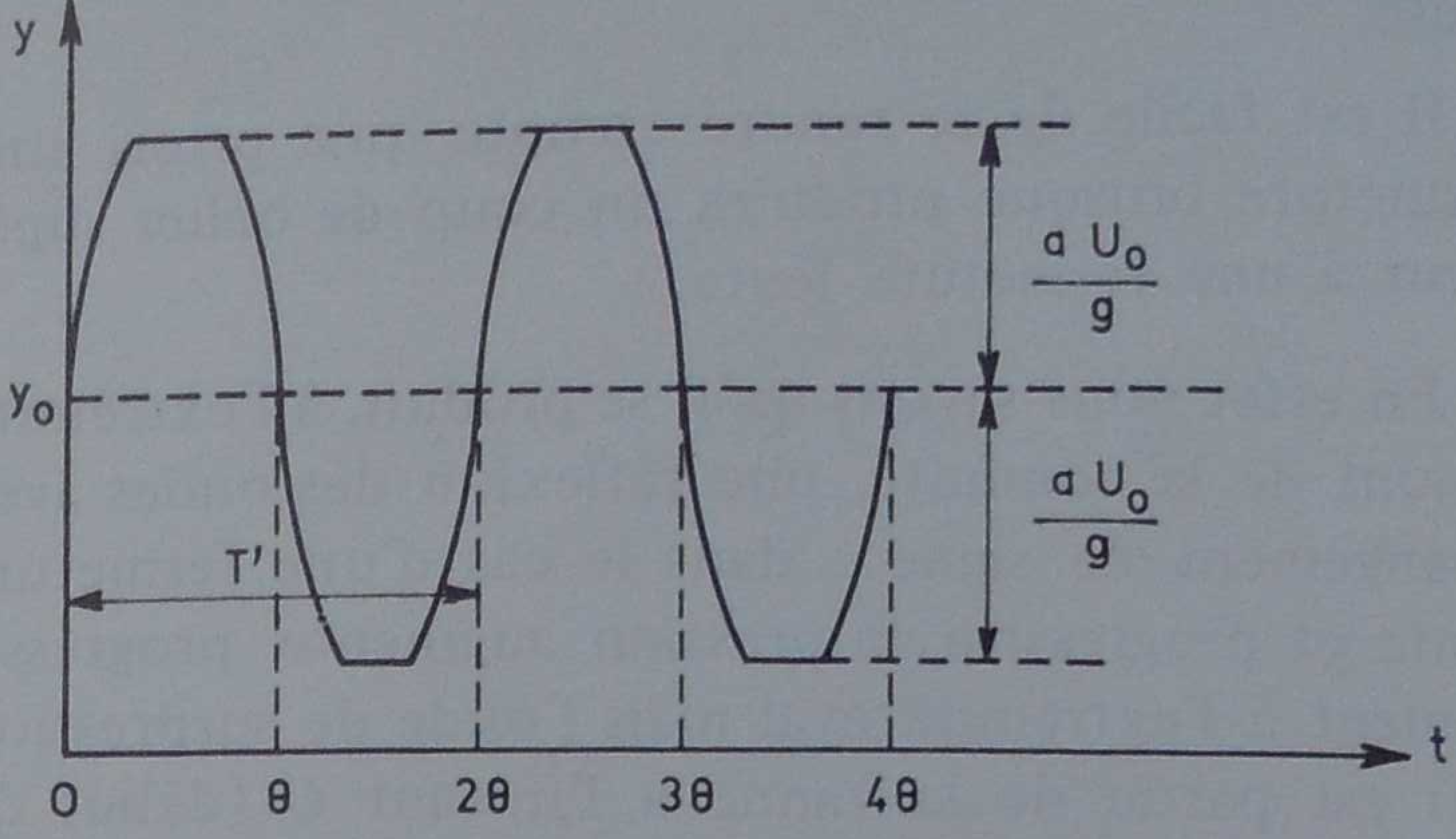


Fig. XI. 10.3.2

Propagation de la surpression le long de la conduite. Etudions maintenant, toujours dans le cas d'une fermeture brusque, comment la surpression égale à aU_0/g à la vanne se transmet le long de la conduite (fig. XI. 10.3.3).

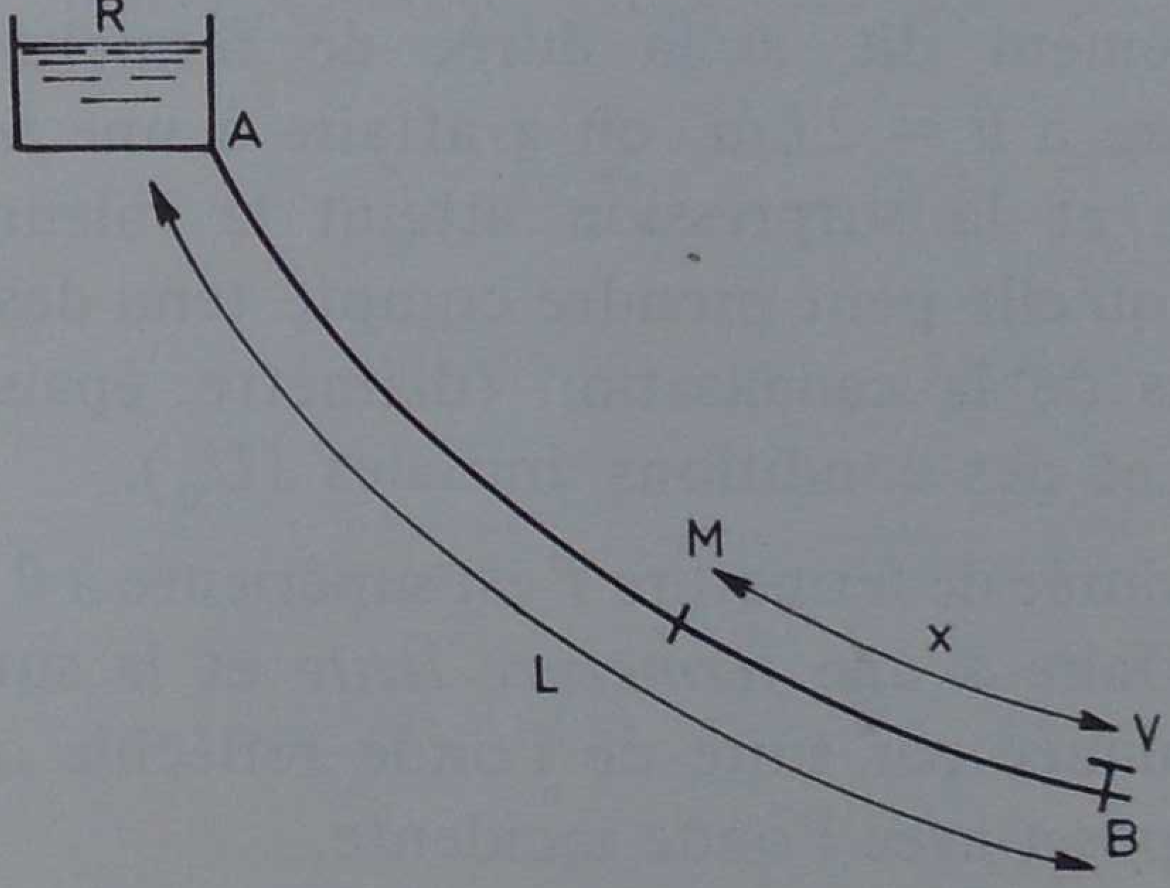


Fig. XI. 10.3.3

Au point M d'abscisse x (mesurée à partir de la vanne V) l'onde naît à l'instant x/a et si la fermeture s'effectue en une durée T, la surpression croît progressivement en M et atteint sa valeur maximale aU_0/g à l'instant $x/a + T$ à moins qu'à cet instant l'onde de dépression, revenant du réservoir R, ait eu le temps d'arriver en M.

La distance parcourue par cette onde partant de M, atteignant R et revenant en M, est $2(L - x)$.

La vitesse de propagation de l'onde étant a, la durée mise par l'onde pour parcourir le trajet considéré sera donc

$$\frac{2(L - x)}{a}$$

Autrement dit, si

$$T < \frac{2(L - x)}{a} \quad \text{ou} \quad x < L - \frac{aT}{2},$$

la surpression maximale en M atteindra la valeur aU_0/g.

Cette surpression maximale sera d'ailleurs atteinte en tous les points de la conduite d'abscisse

$$x < L - \frac{aT}{2}$$

En particulier si $T = 0$ (fermeture instantanée) la surpression aU_0/g se transmettra intégralement tout le long de la conduite.

Pour les points d'abscisse $x > L - aT/2$, M. de Sparre a montré que la répartition du coup de bélier était *linéaire*.

En définitive :

1) pour tous les points pour lesquels

$$x < L - \frac{aT}{2}$$

on a

$$\xi_{max} = \frac{aU_0}{g}$$

(formule de Joukowski-Alliévi)

2) pour tous les points pour lesquels

$$L - \frac{aT}{2} < x < L$$

on a (fig. XI.10.3.4) :

$$\frac{\xi_{max}}{\frac{aU_0}{g}} = \frac{L - x}{\frac{aT}{2}}$$

d'où on déduit :

$$\xi_{max} = \frac{2U_0}{gT}(L - x)$$

Cas d'un coup de bélier trop violent – Dégagement de l'air dissous. Pour une dépression aU_0/g très importante la pression absolue minimale dans la conduite est égale à $y_0 - aU_0/g$; elle peut devenir inférieure à la pression atmosphérique et entraîner un dégagement partiel de l'air dissous dans l'eau voire même une vaporisation (cavitation) ; la présence de ces poches d'air ou de vapeur se manifeste par des dentelures sur les portions suivantes de la courbe (fig. XI.10.3.5).

Intervention des frottements le long de la conduite. Nous avons négligé jusqu'à présent l'influence des frottements le long de la conduite. Leur rôle est effectivement négligeable quand on étudie le coup de bélier simple c'est-à-dire la transmission d'une onde le long de la conduite.

Mais pour l'étude des *oscillations* consécutives au coup de bélier, l'action des frottements a pour résultat d'affaiblir progressivement le phénomène. Cette "usure" du coup de bélier se traduira par exemple par l'amortissement progressif des ondes de la sinusoïde représentant la variation de la pression en un point de la conduite (fig. XI.10.3.6).

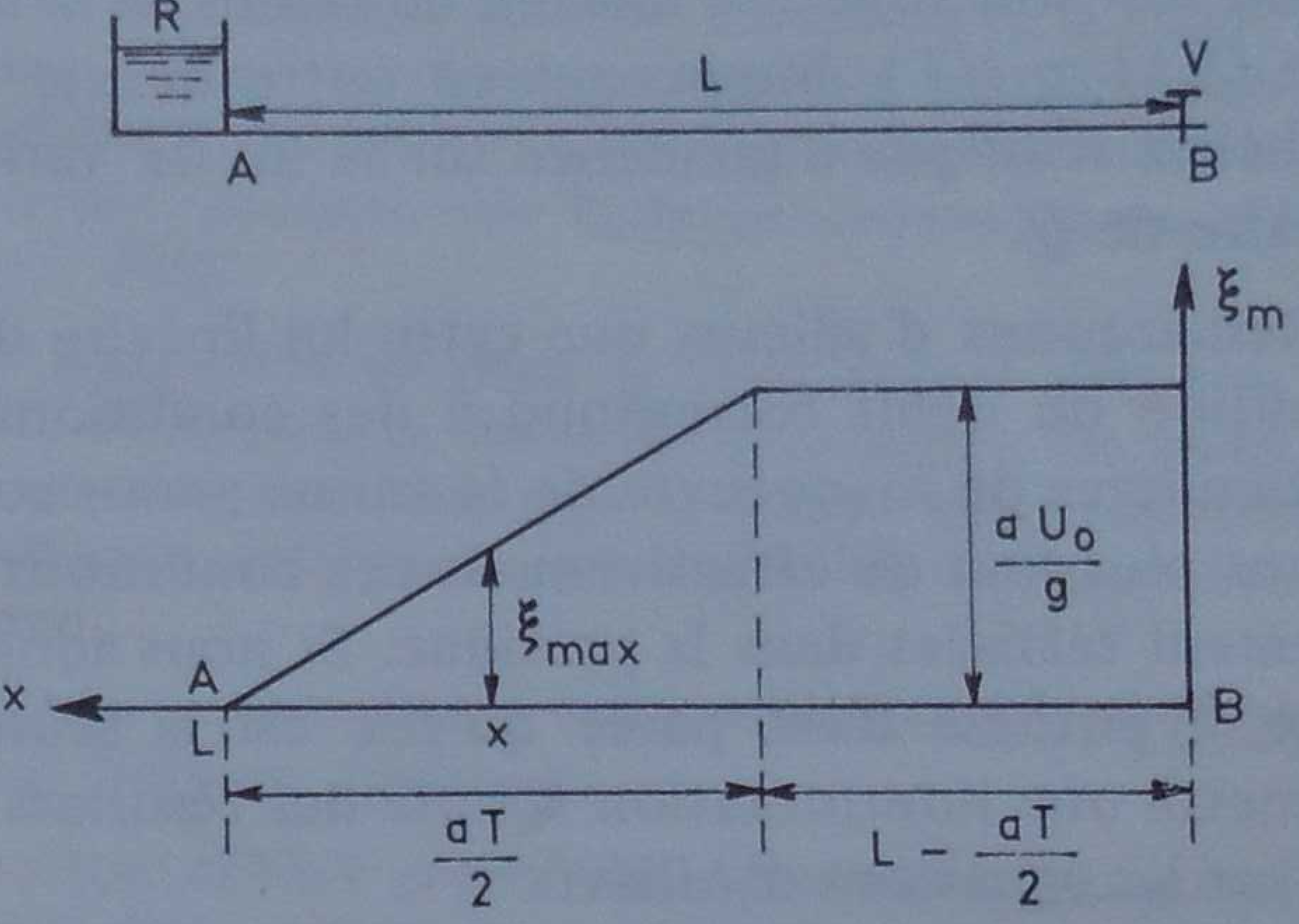


Fig. XI.10.3.4 – Fermeture brusque – Répartition de la surpression le long de la conduite

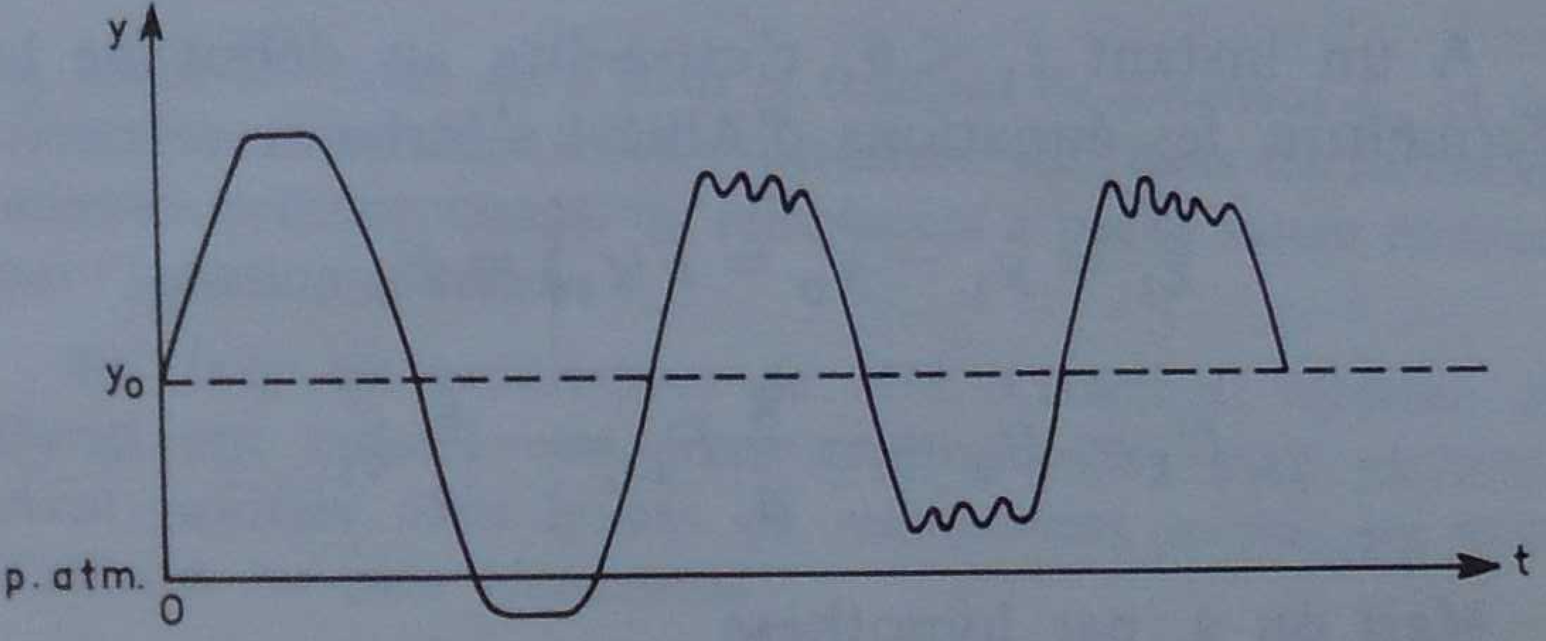


Fig. XI.10.3.5

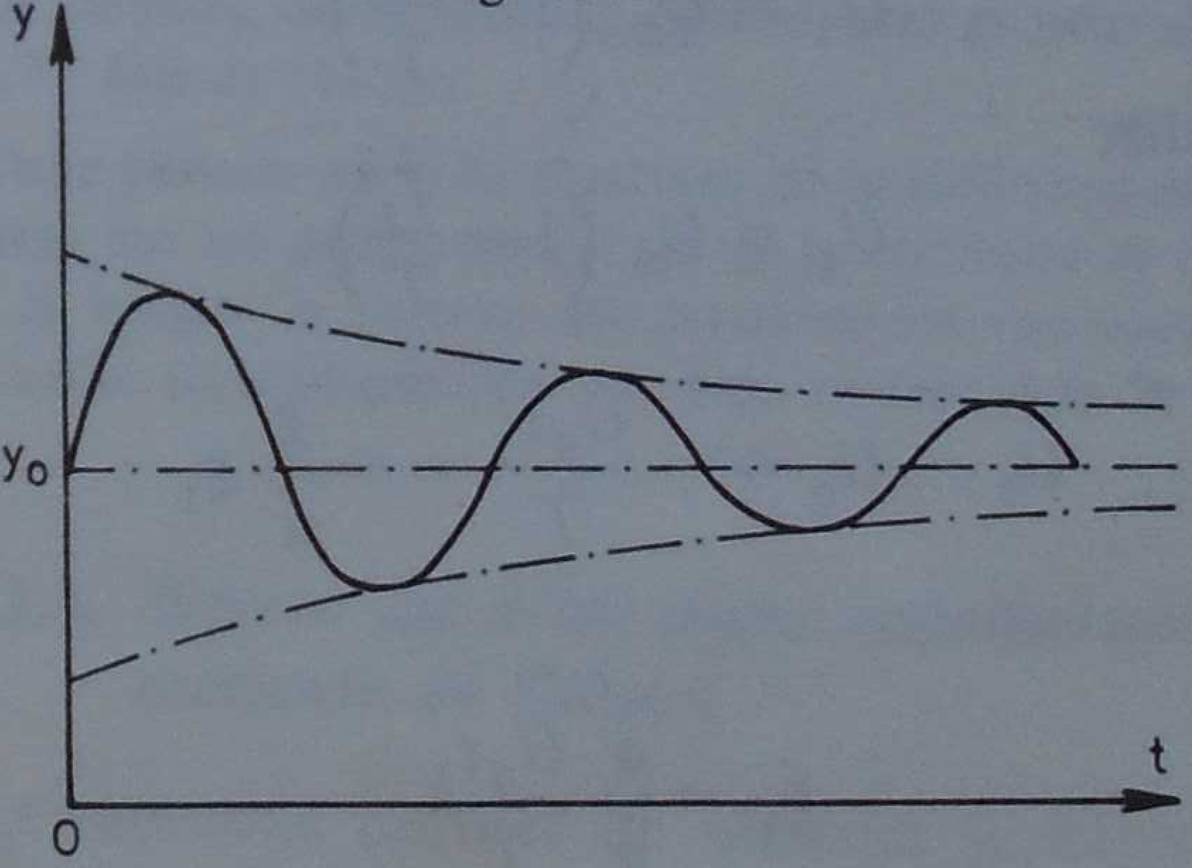


Fig. XI.10.3.6

XI.10.3.2. *Fermeture lente* ($T > 2L/a$)

Reprenons les équations d'Alliévi :

$$\left.\begin{aligned} \xi &= y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) - F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right) \\ U &= U_0 - \frac{g}{a}\left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + F\left(t - \frac{2L - x}{a}\right)\right] \end{aligned}\right\}$$

[*XI.10.2.7*]

Supposons pour simplifier que la fermeture de la vanne suive une loi telle que le débit Q dans la canalisation soit une fonction linéaire du temps de la forme $Q = Q_0(1 - t/T)$. Supposons en outre que le coup de bélier n'ait pas d'incidence sur la loi de variation linéaire de Q.

Remarquons d'ailleurs que cette loi linéaire de diminution du débit correspond à des conditions très particulières de manoeuvre de la vanne ; nous constaterons plus loin qu'effectivement ces conditions sont rarement réalisées dans la pratique. Si nous adoptons cette hypothèse c'est parce qu'elle est la seule qui permette une interprétation simple des résultats donnés par les équations d'Alliévi.

Etudions dans ces conditions les variations de ξ et U à l'extrémité aval de la conduite, c'est-à-dire pour $x = 0$.

A un instant $t_1 < \theta$, c'est-à-dire au début de la fermeture, les équations d'Alliévi s'écrivent :

$$\xi_1 = y_1 - y_0 = F(t_1) = F_1$$

$$U_1 - U_0 = -\frac{g}{a} F_1 = -\frac{g}{a} \xi_1$$

Mais on a, par hypothèse :

$$Q_1 = Q_0 \left(1 - \frac{t_1}{T}\right)$$

c'est-à-dire

$$U_1 = U_0 \left(1 - \frac{t_1}{T}\right)$$

$$U_1 - U_0 = -\frac{U_0 t_1}{T} = -\frac{g}{a} \xi_1$$

d'où :

$$\xi_1 = \frac{a}{g} \frac{U_0 t_1}{T}$$

autrement dit la surpression croît linéairement avec la fermeture de la vanne et atteint une valeur maximale lorsque t_1 atteint sa limite maximale, soit :

$$t_1 = \theta = \frac{2L}{a}$$

Cette surpression maximale a donc pour valeur :

$$\xi_{1m} = \frac{a}{g} \frac{U_0}{T} \frac{2L}{a} = \frac{2U_0 L}{gT}$$

Pour $t_1 = \theta$, l'onde partie de la vanne au temps 0 revient après avoir subi une réflexion avec changement de signe au réservoir R.

Pour étudier le phénomène à partir du temps $t = \theta$, considérons l'instant $t_2 = t_1 + \theta = t_1 + 2L/a$, avec $t_1 \leqslant 2L/a$.

Les équations d'Alliévi donnent (avec $x = 0$) :

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= y_2 - y_0 = F(t_2) - F(t_1) = F_2 - F_1 \\ U_2 - U_0 &= -\frac{g}{a}[F(t_2) + F(t_1)] = -\frac{g}{a}(F_2 + F_1) \end{aligned}\right\}$$

Mais, par hypothèse :

$$U_2 = U_0 \left(1 - \frac{t_2}{T}\right)$$

$$U_2 - U_0 = -\frac{U_0 t_2}{T} = -\frac{g}{a}(F_2 + F_1)$$

d'où :

$$F_2 + F_1 = \frac{aU_0 t_2}{gT}$$

$$F_2 - F_1 = \xi_2$$

avec

$$F_1 = \xi_1 = \frac{aU_0 t_1}{gT}$$

En éliminant F_1 et F_2 entre ces trois équations il vient :

$$\xi_2 = \frac{aU_0}{gT}\left(\frac{2L}{a} - t_1\right)$$

Or :

$$0 < t_1 \leqslant \frac{2L}{a}$$

donc :

$$0 < \frac{2L}{a} - t_1 \leqslant \frac{2L}{a}$$

et

$$0 < \xi_2 \leqslant \frac{aU_0}{gT} \frac{2L}{a}$$

ou

$$\xi_2 \leqslant \frac{2U_0 L}{gT}$$

Autrement dit pendant la seconde période s'écoulant du temps θ au temps 2θ après le début de la manoeuvre de fermeture de la vanne, la surpression maximale est encore donnée par l'expression :

$$\xi_{2m} = \xi_{1m} = \frac{2U_0 L}{gT}$$

On montrerait facilement qu'il en est de même pour les intervalles suivants (de 2θ à 3θ, de 3θ à 4θ, etc . . .).

Cette formule qui donne la surpression maximale :

$$\boxed{\xi_m = \frac{2U_0L}{gT}}$$

est la *formule de Michaud* ; la seule utilisée pratiquement dans le cas d'une fermeture lente, c'est-à-dire en un temps $T < 2L/a$. En fait cette formule n'est valable que pour une loi de fermeture correspondant à une variation linéaire du débit, loi qui, comme nous l'avons souligné, est rarement réalisée en pratique.

Répartition du coup de bélier le long de la conduite.

M. De Sparre a montré que dans le cas d'une fermeture lente correspondant à une loi linéaire, la répartition de la surpression le long de la conduite était linéaire depuis zéro à l'origine amont A jusqu'à sa valeur maximale :

$$\xi_m = \frac{2U_0L}{gT}$$

(formule de Michaud) à l'extrémité aval B (fig. XI.10.3.7).

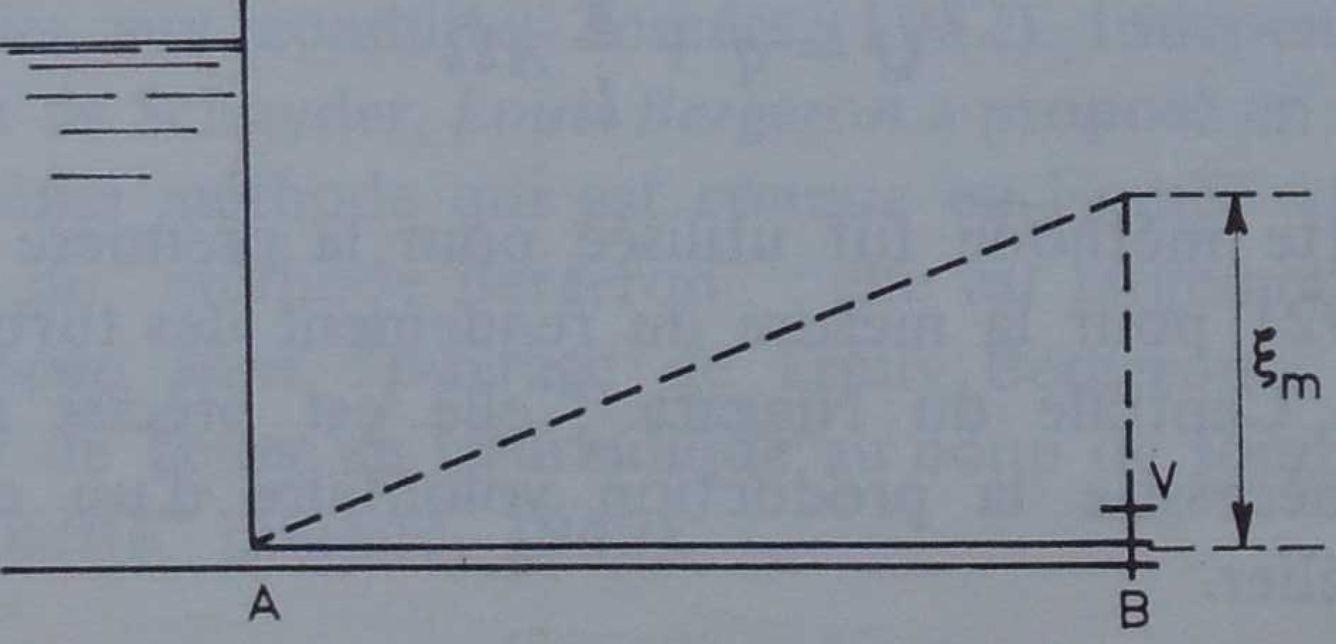


Fig. XI.10.3.7 – Fermeture lente – Répartition de la surpression le long de la conduite

XI.10.3.3. *Etude des phénomènes d'ouverture*

L'étude des ouvertures brusques ou lentes s'effectue de la même façon que celle des fermetures.

Toutefois dans le cas d'une fermeture brusque la surpression maximale aU_0/g n'est limitée que par la valeur de U_0.

Au contraire, dans le cas d'une ouverture, la dépression produite entraîne un ralentissement de l'écoulement ; à la limite cette dépression ne peut dépasser y_0 en valeur absolue car, pour cette valeur, la pression à la vanne devenant égale à la pression atmosphérique, l'écoulement s'arrêterait et tout se passerait comme si la conduite n'était pas ouverte.

Donc, alors que la surpression consécutive à une fermeture brusque n'est limitée que par la valeur initiale de U_0, la dépression consécutive à une ouverture ne peut dépasser $-y_0$.

XI.10.3.4. *Conduites à caractéristiques multiples*

Dans la pratique le diamètre, l'épaisseur et la nature d'une conduite forcée ou d'une conduite de refoulement ne sont pas uniformes. En particulier on augmente généralement l'épaisseur e de la conduite avec la charge statique, en vue d'économiser le métal.

Le phénomène du coup de bélier devient alors plus complexe ; d'une part, la vitesse de propagation des ondes varie avec les tronçons considérés ; d'autre part, des réflexions partielles se produisent aux points où les caractéristiques varient.

L'étude expérimentale (MM. Camichel et De Sparre) a mis en évidence l'existence.

1) *d'une période propre de la conduite*, c'est le temps de parcours aller et retour d'une onde individuelle, soit $T' = 2L/a$ avec

$$\frac{L}{a} = \Sigma \frac{L_p}{a_p}$$

a_p étant la valeur de a pour le tronçon de longueur L_p et de caractéristiques constantes. Autrement dit, dans les formules données précédemment, on remplacera a par sa valeur donnée par l'équation ci-dessus.

En fait, les expériences de MM. Camichel, Eydoux et Gariel ont montré que cette approximation était parfaitement justifiée dans le cas de manoeuvres lentes qui sont d'ailleurs les plus fréquentes.

Dans le cas de manoeuvres brusques, au contraire, la surpression maximale est nettement supérieure à aU_0/g (a ayant la valeur déduite de la formule précédente) et peut atteindre 1,5 à 1,75 fois ce chiffre.

2) d'une *pseudo-période* résultant de la réflexion des ondes successives sur les points singuliers de la conduite et transformant à la longue la courbe des pressions en une courbe dentelée ; cette pseudo-période est plus courte que la période propre.

XI.10.3.5. *Mesure du débit d'une canalisation par la méthode de Gibson*

Cette méthode permet de mesurer le débit d'une canalisation (généralement une conduite forcée) en provoquant volontairement un coup de bélier par fermeture de la canalisation suivant une loi de fermeture quelconque et en enregistrant les variations de pression qui en résultent.

Considérons (fig. XI.10.3.8) un tronçon AB de canalisation de caractéristique unique et désignons par

L la longueur AB (elle est généralement de l'ordre d'une vingtaine de mètres),

Ω la section de la canalisation,

U_0 la vitesse moyenne en régime permanent, c'est-à-dire avant la manoeuvre de la vanne,

U la vitesse moyenne à un instant t de la période de fermeture de la vanne,

T la durée de fermeture complète de la vanne,

p_A la pression en A à l'instant t,

p_B la pression en B au même instant,

$\Delta p = p_B - p_A$.

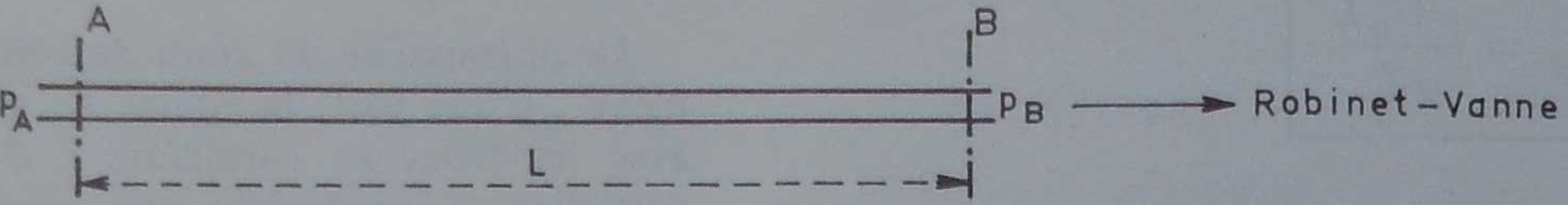


Fig. XI.10.3.8

Pendant la durée de fermeture T on enregistre, en fonction du temps, la variation de pression Δp et on obtient la courbe $\Delta h = \Delta p/\overline{\omega} = f(t)$ (fig. XI.10.3.9). Au-delà du temps T les variations périodiques de Δh sont sans intérêt pour la mesure.

Négligeons l'élasticité des parois de la canalisation, la compressibilité de l'eau, la pesanteur et les frottements sur la longueur L et appliquons le théorème de la projection des quantités de mouvement à la masse d'eau comprise entre les sections A et B, en projection sur l'axe de la canalisation supposée horizontale. Il vient :

$$\frac{\overline{\omega}}{g} \Omega L \frac{dU}{dt} = - \overline{\omega} \Omega \Delta h$$

ou

$$\frac{L}{g} dU = - \Delta h \, dt$$

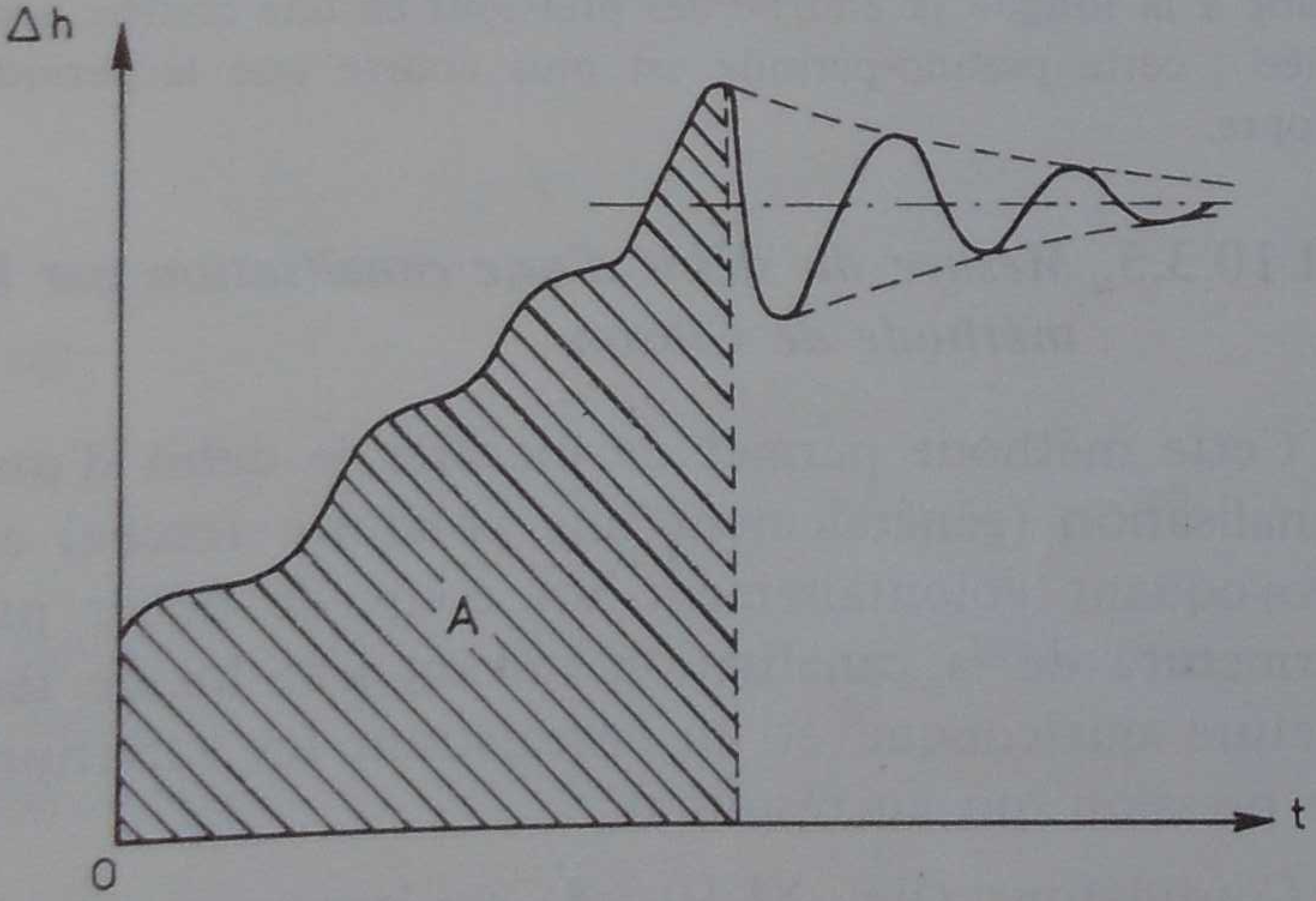


Fig. XI.10.3.9

Intégrons de 0 à T :

$$\frac{L}{g} \int_{U_0}^{U_T} dU = - \int_0^T \Delta h \, dt$$

$$\frac{L}{g} (U_T - U_0) = - A$$

aire hachurée de la courbe (fig. XI.10.3.9)

$$\frac{L}{g} (q - Q) = - A \Omega$$

en désignant par $q = \Omega U_T$ le débit de fuite à travers la vanne, après fermeture complète ; il est facile à mesurer.

On en déduit

$$Q = q + \frac{g}{L} A \Omega$$

Cette méthode fut utilisée pour la première fois en 1921 pour la mesure du rendement des turbines de la Centrale du Niagara ; elle est précise mais elle nécessite la production volontaire d'un coup de bélier.

XI.10.3.6. *Transmission sonique*

La propagation des ondes de surpression résultant de la production d'un coup de bélier est utilisée pratiquement dans la transmission sonique. Une canalisation est remplie de liquide (eau ou huile) à pression élevée (plusieurs centaines de bars) ; à chaque extrémité de cette canalisation se trouve un piston dont l'un est transmetteur et l'autre récepteur. Si le piston transmetteur est mû d'un mouvement alternatif, le piston récepteur reproduira fidèlement ce mouvement avec un déphasage résultant de la vitesse a de propagation des ondes. L'avantage de cette transmission est la faible énergie nécessaire et la grande vitesse de propagation. On l'utilise notamment pour la commande des marteaux riveurs, de certaines machines-outils (tours à reproduire), du tir des mitrailleuses à travers l'hélice des avions (le tir est commandé par un piston sonique entraîné par un excentrique calé sur l'arbre de l'hélice ce qui assure un synchronisme rigoureux).

XI.10.4. Méthode graphique de Schnyder-Bergeron

Les méthodes analytiques de calcul du coup de bélier et les formules auxquelles elles aboutissent n'ont, en définitive, qu'un champ d'application assez restreint.

Notamment, elles ne tiennent pas compte de l'influence des pertes de charge ni des caractéristiques très variées des conduites industrielles et des conditions très variables des manoeuvres de fermeture ou d'ouverture. En particulier en cas de fermeture lente, la seule formule utilisée pratiquement et dont l'expression analytique soit simple est celle de Michaud qui repose sur l'hypothèse de la variation linéaire du débit en fonction du temps, hypothèse qui n'est pratiquement jamais réalisée.

La méthode graphique permet d'aboutir d'une manière très élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes qui, à première vue, paraissent les plus compliqués.

Othmar Schnyder a proposé, en 1929, une méthode graphique de calcul des coups de bélier dans les conduites de refoulement des pompes qu'il a ensuite étendue aux systèmes en charge quelconques en particulier aux conduites forcées (1932). Indépendamment de Schnyder, *Louis Bergeron* a proposé en 1931 la même méthode qui est connue en France sous le nom de "méthode Bergeron" ; elle est largement développée dans l'ouvrage de Louis Bergeron : "Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité" (Dunod, 1949).

XI.10.4.1. *Principe de la méthode*

La théorie d'Alliévi a montré que la surpression existant en un point quelconque d'une conduite à caractéristique unique à un instant déterminé résulte de la superposition à la pression statique de deux ondes F et f se déplaçant, le long de la conduite, en sens inverse l'une de l'autre avec une même vitesse a.

Dans les équations d'Alliévi

$$\begin{cases} \xi = h - h_0 = F + f \\ U = U_0 - \dfrac{g}{a}(F - f) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F = F\left(t - \dfrac{x}{a}\right) \\ f = f\left(t + \dfrac{x}{a}\right) \end{cases}$$

F et f sont les ondes de vitesse absolue a et se dirigeant respectivement

— en sens inverse de la vitesse d'écoulement pour F,

— dans le même sens que la vitesse d'écoulement pour f (fig. XI.10.4.1.1).

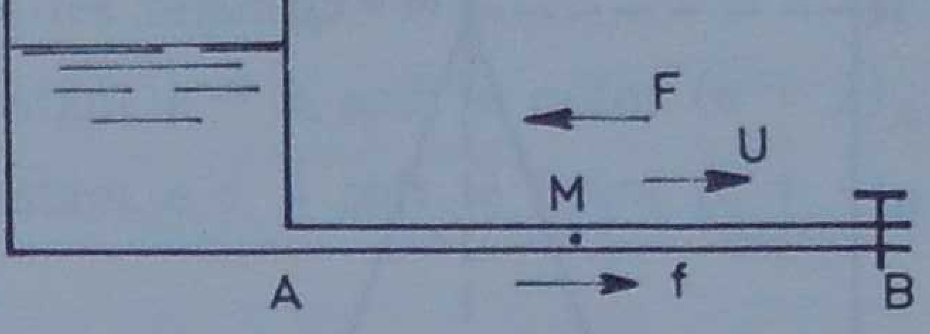


Fig. XI.10.4.1.1

En introduisant le débit $q = U\Omega$, les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} h - h_0 = F + f \\ \dfrac{a}{g\Omega}(q_0 - q) = F - f \end{cases}$$

Considérons un point M de la conduite et portons sur un graphique les valeurs de q en abscisses et les valeurs de h en ordonnées (fig. XI.10.4.1.2) ; q_M et h_M sont respectivement le débit et la pression (en hauteur d'eau) au point M à l'instant t.

Supposons un observateur partant de M au temps t où l'onde F passe en M et se déplaçant le long de la conduite avec la vitesse a en sens inverse de la vitesse d'écoulement, c'est-à-dire de M vers A. Cet observateur verra l'onde F conserver sa valeur $F = F_M$ et en tout lieu où il passera il constatera que :

$$\begin{cases} \dfrac{a}{g\Omega}(q_0 - q) = F_M - f \\ h - h_0 = F_M + f \end{cases}$$

alors qu'au départ, en M, on avait

$$\begin{cases} \dfrac{a}{g\Omega}(q_0 - q_M) = F_M - f_M \\ h_M - h_0 = F_M + f_M \end{cases}$$

En éliminant q_0 et h_0 entre ces quatre équations on obtient

$$\frac{a}{g\Omega}(q_M - q) = f_M - f$$

$$h_M - h = f_M - f$$

et en éliminant $f_M - f$:

$$h - h_M = \frac{a}{g\Omega}(q - q_M)$$

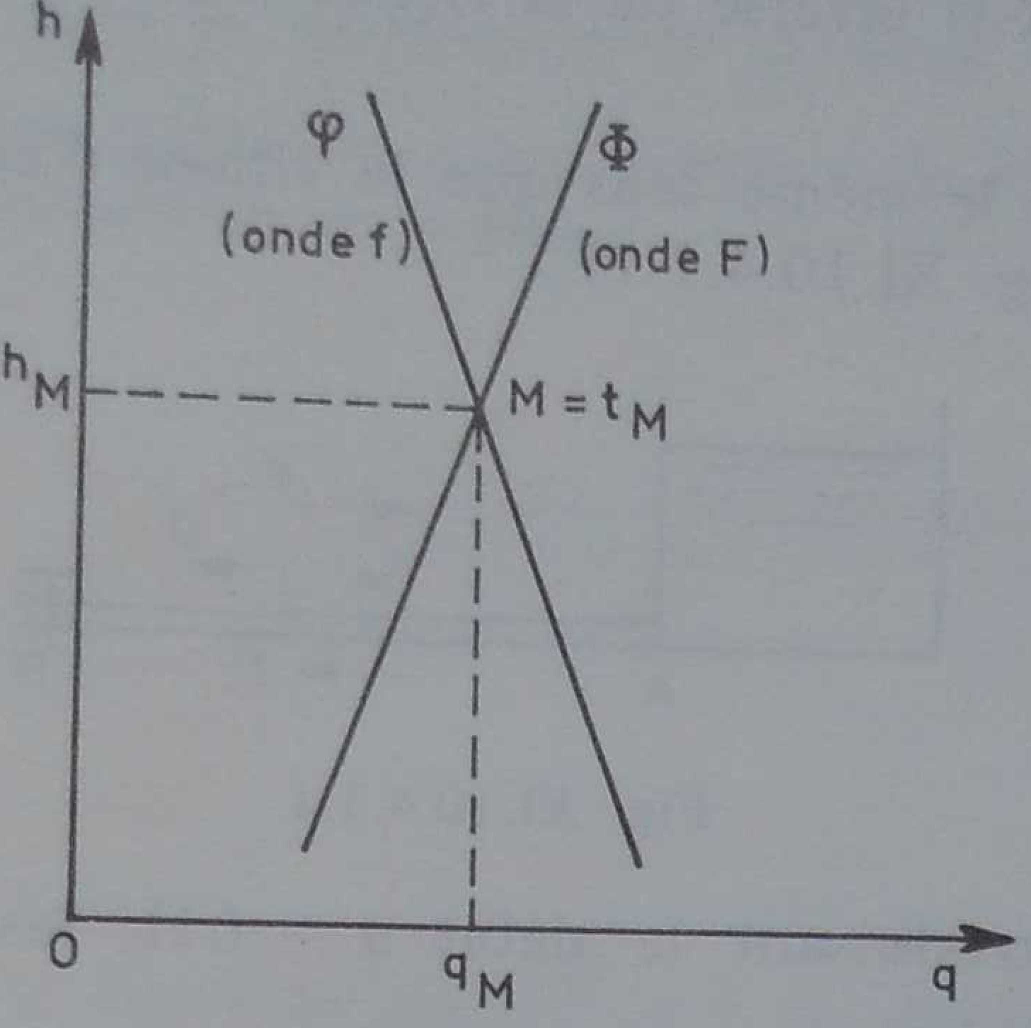


Fig. XI.10.4.1.2

Sur le diagramme (h, q) cette équation est représentée par une droite Φ passant par le point M (coordonnées h_M, q_M) et de coefficient angulaire $a/g\Omega$ (fig. XI.10.4.1.2).

Si l'observateur se déplace en sens inverse, c'est-à-dire de M vers B, avec la vitesse a, en quittant M en même temps que l'onde f, c'est cette onde qui restera constante et égale à f_M. Les mêmes calculs que ceux effectués précédemment montreraient alors que pour cet observateur on a :

$$h - h_M = -\frac{a}{g\Omega}(q - q_M)$$

qui est l'équation de la droite φ passant par M et de coefficient angulaire $-a/g\Omega$, c'est-à-dire symétrique de la droite Φ par rapport à une horizontale passant par M (fig. XI.10.4.1.2).

Convention. Pour la commodité de construction et d'interprétation des épures on adopte la convention suivante :

Les coordonnées du point figuratif étant la hauteur (pression) h et le débit q que l'observateur constate à un temps t en un lieu M, ce point sera désigné par une lettre (ou un chiffre) qui indiquera le temps affectée d'un indice qui indiquera le lieu, soit t_M (fig. XI.10.4.1.2).

En définitive *le principe de base de la méthode graphique* peut s'énoncer comme suit : Si un observateur part d'un lieu M au temps t où le régime est (h_M, q_M) (point figuratif t_M) et s'il se déplace le long de la conduite avec la vitesse a, il constate qu'en tout lieu au moment où il passe, la pression h et le débit q sont liés l'un à l'autre par la même loi linéaire qui ne dépend que des constantes a et Ω de la conduite, du régime (h_M, q_M) existant à l'instant et au lieu de son départ et du sens de son déplacement.

Remarque : On notera combien la loi linéaire enregistrée par l'observateur mobile de Bergeron est étonnamment plus simple que celle du calcul d'Alliévi. C'est une différence de relativité analogue – toutes proportions gardées – à celle qui explique que le système de Copernic soit plus simple que celui de Ptolémée. Vu de la Terre le mouvement des planètes apparaît d'une effrayante complication ; vu du Soleil tout se simplifie et s'ordonne. Au lieu de rester fixe par rapport à la conduite et de regarder, avec Alliévi, les fluctuations très complexes de vitesse et de pression de la colonne qui passe, nous enverrons, avec Bergeron, des observateurs nous renseigner sur les valeurs de la pression et de la vitesse aux endroits et aux instants que nous voudrons(1).

XI.10.4.2. *Application à un cas général* (fig. XI.10.4.2.1)

Supposons un tronçon de conduite de longueur L et de section Ω dans lequel la célérité des ondes est a, terminé à ses extrémités par des appareils A et B quelconques (vanne, turbine, pompe, réservoir d'air, etc ...) dont les courbes caractéristiques $h(q)$ sont respectivement ψ_A et ψ_B et sont variables dans le temps et connues à chaque instant.

Supposons que la vitesse dans la canalisation soit dirigée de A vers B.

Choisissons comme unité de temps $\tau = L/a = 1$, temps mis par l'observateur pour se déplacer entre A et B.

Prenons comme origine des temps l'instant où le premier des appareils, A par exemple, commence à varier et supposons que le second appareil B commence à varier au temps ϵ tel que $0 < \epsilon < 1$.

Avant le temps 0 le point figuratif du régime en tout lieu de A à B est 0_M, point d'intersection des courbes caractéristiques $\psi_{A(0)}$ et $\psi_{B(0)} = \psi_{B(\epsilon)}$ des deux appareils à l'instant 0. Ce point 0_M reste valable pour tout observateur partant de B à un temps antérieur à ϵ et pour tout observateur partant de A à un temps antérieur à 0. D'autre part, le temps -1 est le dernier instant pour lequel l'observateur parti de B trouve encore en A le régime initial puisqu'il y arrive au temps 0.

Enfin $\epsilon - 1$ est le dernier instant pour lequel l'observateur parti de A trouve encore en B le régime initial puisqu'il y arrive au temps ϵ.

Soient $\psi_{A(\epsilon+1)}$ et $\psi_{B(1)}$ les courbes caractéristiques ψ_A à l'instant $\epsilon + 1$ est ψ_B à l'instant 1.

Supposons l'observateur parti de B au temps limite ϵ. Le régime en B à son départ étant encore le régime initial

(1) Chapouthier : "*Hydraulique*" (cf. Bibliographie).

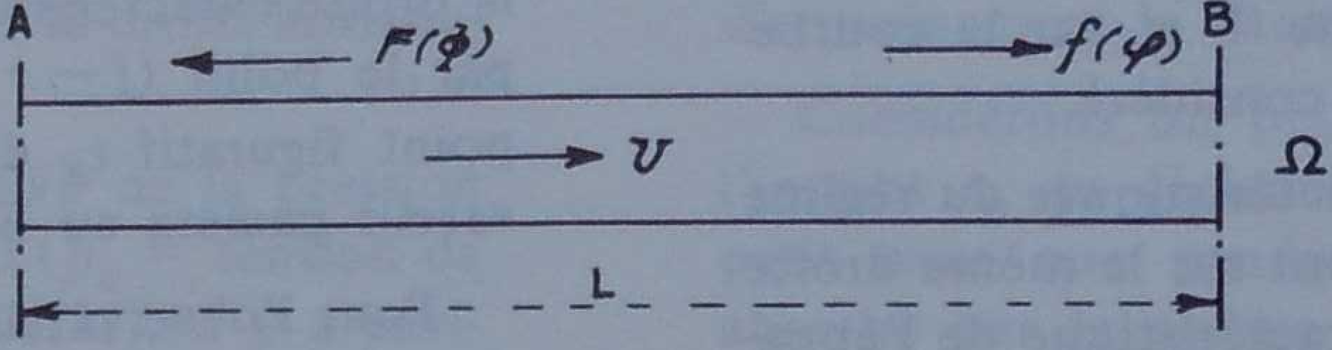
défini par le point $0_M = \epsilon_B$, la droite caractéristique pour cet observateur sera la droite Φ passant par le point ϵ_B et de coefficient angulaire $a/g\Omega$ car il se déplace en sens contraire de la vitesse d'écoulement. A son arrivée en A au temps $(\epsilon + 1)$, le point figuratif du régime sera sur cette droite Φ et sur la courbe caractéristique $\psi_{A(\epsilon+1)}$ de l'appareil A à cet instant ; il sera donc à leur point d'intersection $(\epsilon + 1)_A$.

Si maintenant l'observateur rebrousse chemin de A vers B, la droite caractéristique du régime en tout lieu où il passe sera pour lui la droite φ passant par le point connu $(\epsilon + 1)_A$ et de coefficient angulaire $- a/g\Omega$ puisqu'il se déplace dans le même sens que la vitesse d'écoulement. En arrivant en B au temps $(\epsilon + 2)$, le point figuratif du régime sera sur cette droite φ et sur la courbe caractéristique $\psi_{B(\epsilon+2)}$ de l'appareil B à cet instant ; il sera donc à leur point d'intersection $(\epsilon + 2)_B$.

En faisant repartir l'observateur vers A, on déterminerait successivement les régimes

en A à l'instant $\epsilon + 3$ soit le point $(\epsilon + 3)_A$,

en B à l'instant $\epsilon + 4$ soit le point $(\epsilon + 4)_B$, etc . . .



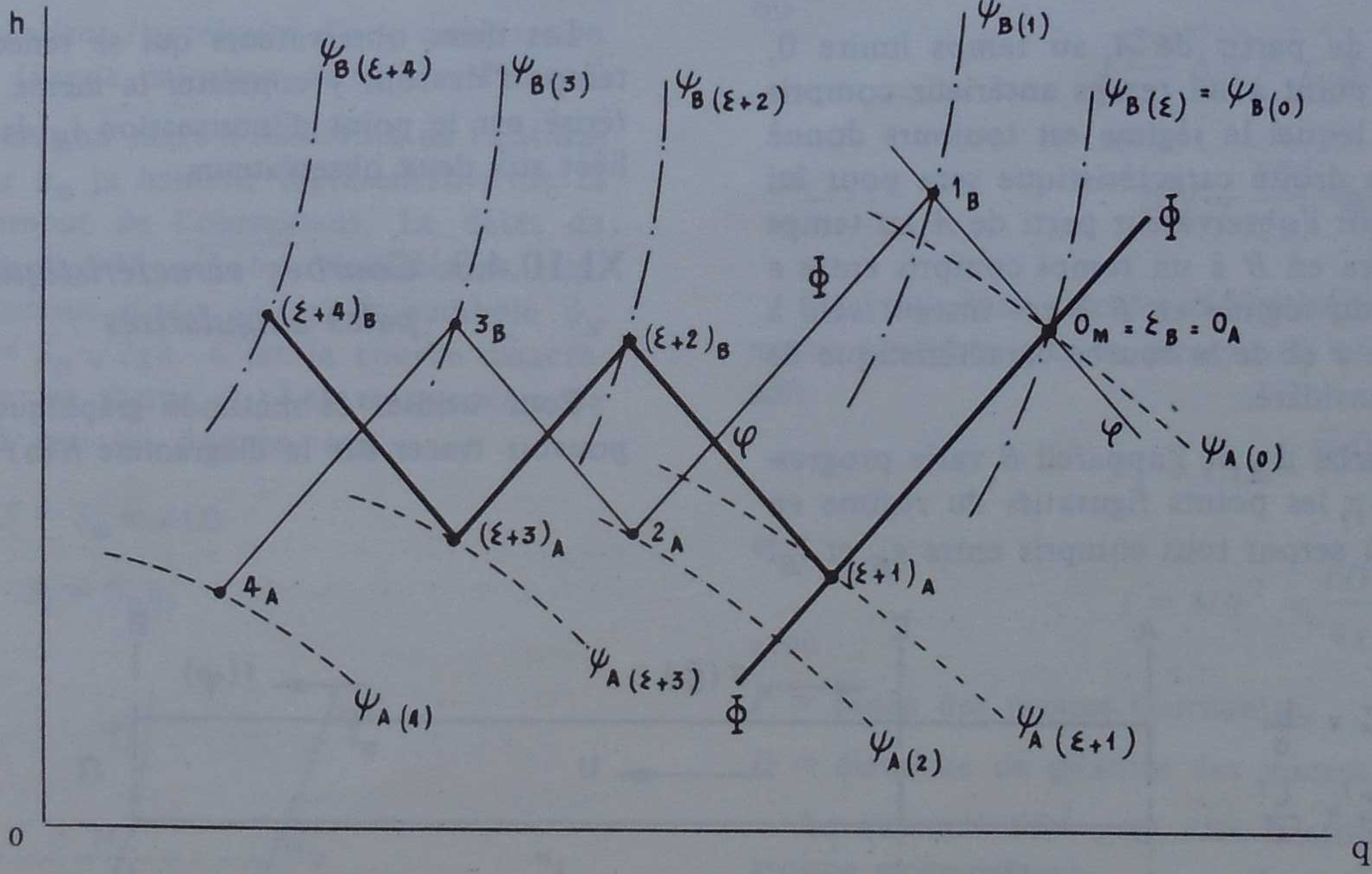


Fig. XI.10.4.2.1

Supposons maintenant l'observateur parti de A au temps limite 0. Le régime en A à son départ étant encore le régime initial défini par le point $0_M = \epsilon_B = 0_A$, la droite caractéristique pour cet observateur sera la droite φ passant par le point 0_A et de coefficient angulaire $- a/g\Omega$ car il se déplace maintenant dans le même sens que la vitesse d'écoulement.

A son arrivée en B au temps 1, le point figuratif du régime sera donc à l'intersection de la droite φ et de la courbe caractéristique $\psi_{B(1)}$ de l'appareil B à cet instant ; il sera donc à leur point d'intersection 1_B.

Si maintenant l'observateur rebrousse chemin de B vers A, la droite caractéristique du régime en tout lieu où il passe sera la droite Φ passant par le point connu 1_B et de coefficient angulaire $+ a/g\Omega$ puisqu'il se déplace en sens inverse de la vitesse d'écoulement. En arrivant en A au temps 2, le point figuratif du régime sera sur cette droite Φ et sur la courbe caractéristique $\psi_{A(2)}$ de l'appareil A à cet instant ; il sera donc à leur point d'intersection 2_A. En faisant repartir l'observateur vers B, on déterminerait successivement les régimes

en B à l'instant 3 soit le point 3_B,

en A à l'instant 4 soit le point 4_A, ect . . .

Régimes intercalaires en A et B (fig. XI.10.4.2.1). La méthode précédemment décrite a permis d'obtenir les régimes en A et B aux temps *limites*

$0, (\epsilon + 1), 2, (\epsilon + 3), 4, \ldots\ldots$ au point A

$\epsilon, 1, (\epsilon + 2), 3, (\epsilon + 4), \ldots\ldots$ au point B.

Il peut y avoir intérêt à connaître les régimes intercalaires à des temps quelconques en A et B.

Si au lieu de partir de B au temps limite ϵ, l'observateur part de ce point à un temps antérieur, compris entre -1 et ϵ, le régime initial sera a fortiori donné par le point ϵ_B ; la droite caractéristique sera donc pour cet observateur toujours la même que pour l'observateur parti au temps ϵ, soit Φ.

Cet observateur arrivera maintenant en A à un temps compris entre 0 et $(\epsilon + 1)$; le point figuratif du régime en A à cet instant sera donc sur la droite Φ et sur la courbe caractéristique de l'appareil à l'instant considéré.

Il en résulte que tous les points caractéristiques du régime en A entre les temps 0 et $(\epsilon + 1)$ seront sur la même droite Φ à son intersection avec la courbe caractéristique de l'appareil A au temps considéré. Si, par exemple, la courbe ψ_A de l'appareil A varie progressivement de $\psi_{A(0)}$ à $\psi_{A(\epsilon+1)}$ les points figuratifs intercalaires seront tous compris entre 0_A et $(\epsilon + 1)_A$.

De même si au lieu de partir de A au temps limite 0, l'observateur part de ce point à un temps antérieur compris entre $(\epsilon - 1)$ et 0 pour lequel le régime est toujours donné par le point $0_A = \epsilon_B$, la droite caractéristique sera pour lui la même droite φ que pour l'observateur parti de A au temps limite 0. Lorsqu'il arrivera en B à un temps compris entre ϵ et 1, le point figuratif du régime en B à cet instant sera à l'intersection de la droite φ et de la courbe caractéristique de l'appareil B à l'instant considéré.

Si par exemple la courbe ψ_B de l'appareil B varie progressivement de $\psi_{B(\epsilon)}$ à $\psi_{B(1)}$ les points figuratifs du régime en B entre les instants ϵ et 1 seront tous compris entre ϵ_B et 1_B.

Régimes intermédiaires entre A et B (fig. XI.10.4.2.2). Proposons-nous maintenant de connaître le régime à un temps i quelconque en un lieu E quelconque entre A et B ; ce régime sera caractérisé par un point i_E.

Désignons par $\tau' = L'/a$ et $\tau'' = L''/a$ le temps mis par l'observateur pour aller respectivement de A à E et de B à E (fig. XI.10.4.2.2.a).

Soit (fig. XI.10.4.2.2.b) $(i - \tau'')_B$ le point figuratif du régime en B au temps $(i - \tau'')$ et soit $(i - \tau')_A$ le point figuratif du régime en A au temps $(i - \tau')$. Ces deux points ont pu être obtenus par la méthode indiquée précédemment.

Pour l'observateur partant de B vers A au temps $(i - \tau'')$, la droite caractéristique de la conduite est la droite Φ passant par le point $(i - \tau'')_B$ et de coefficient angulaire $a/g\Omega$; le point figuratif i_E devra être sur cette droite lorsque l'observateur passera au lieu E au temps $(i - \tau'') + \tau'' = i$.

Pour l'observateur partant de A vers B au temps $(i - \tau')$, la droite caractéristique est φ passant par le point $(i - \tau')_A$ et de coefficient angulaire $- a/g\Omega$; le point figuratif i_E devra être sur cette droite lorsque l'observateur passera au lieu E au temps $(i - \tau') + \tau' = i$.

Les deux observateurs qui se rencontrent ainsi en E au temps i devront y constater le même régime qui sera caractérisé par le point d'intersection i_E des deux droites Φ et φ liées aux deux observateurs.

XI.10.4.3. *Courbes caractéristiques h(q) des principales singularités*

Pour utiliser la méthode graphique de Bergeron, il faut pouvoir tracer sur le diagramme $h(q)$ les courbes caractéris-

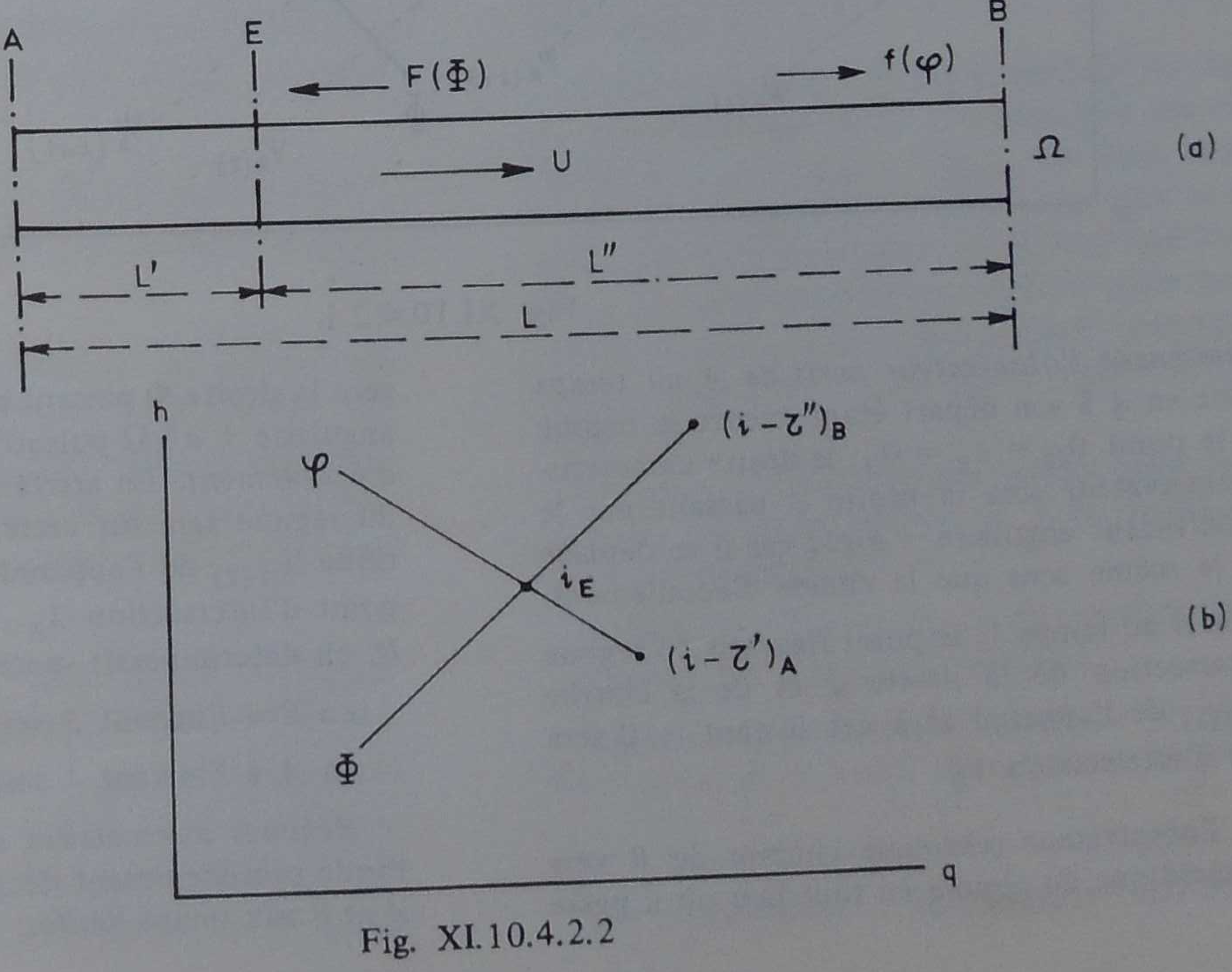


Fig. XI.10.4.2.2

tiques des singularités situées aux extrémités de la conduite et connaître leur évolution en fonction du temps.

Nous donnerons ci-après quelques exemples de telles courbes caractéristiques pour les singularités hydrauliques les plus courantes.

1) *Vanne fermée* : Elle est caractérisée par $q = 0$. Sa courbe caractéristique est donc l'axe des ordonnées du diagramme $h(q)$.

2) *Conduite débouchant dans un réservoir de grande capacité dans lequel le liquide présente une surface libre.* Comme nous l'avons signalé au § XI.10.2.5, la présence d'un tel réservoir impose une pression constante $h = h_0 = p^*/\overline{\omega}$ quel que soit q. La courbe caractéristique est donc la droite horizontale d'ordonnée $h_0 = p^*/\overline{\omega}$.

3) *Cavitation.* Si la hauteur représentative de la pression absolue dans la conduite atteint $h = p_v/\overline{\omega}$ (p_v = tension de vapeur du liquide à la température considérée), il y a cavitation. La courbe caractéristique est alors la droite horizontale d'ordonnée $-(h_a - h_v)$ avec $h_a = p_a/\overline{\omega}$ = hauteur représentative de la pression atmosphérique. Aucun point ne peut se situer au-dessous de cette droite.

4) *Obturateur commandant l'extrémité d'une canalisation débouchant à l'air libre* (vanne, injecteur de turbine Pelton).

Désignons par S_0 la section nette d'ouverture de l'obturateur au temps 0 et par h_0 la hauteur représentative de la pression effective à l'amont de l'obturateur. Le débit de la canalisation est alors $q_0 = S_0\sqrt{2gh_0}$. Considérons (fig. XI.10.4.3.1) dans le système d'axes (h, q) la parabole ψ_0 dont l'équation est $q = S_0\sqrt{2gh}$. C'est la courbe caractéristique de l'obturateur au temps 0. Les manoeuvres de l'obturateur obéissent à une loi donnée, soit

$$S = S_0 \times \varphi(t)$$

ou

$$S_t = S_0\eta_t$$

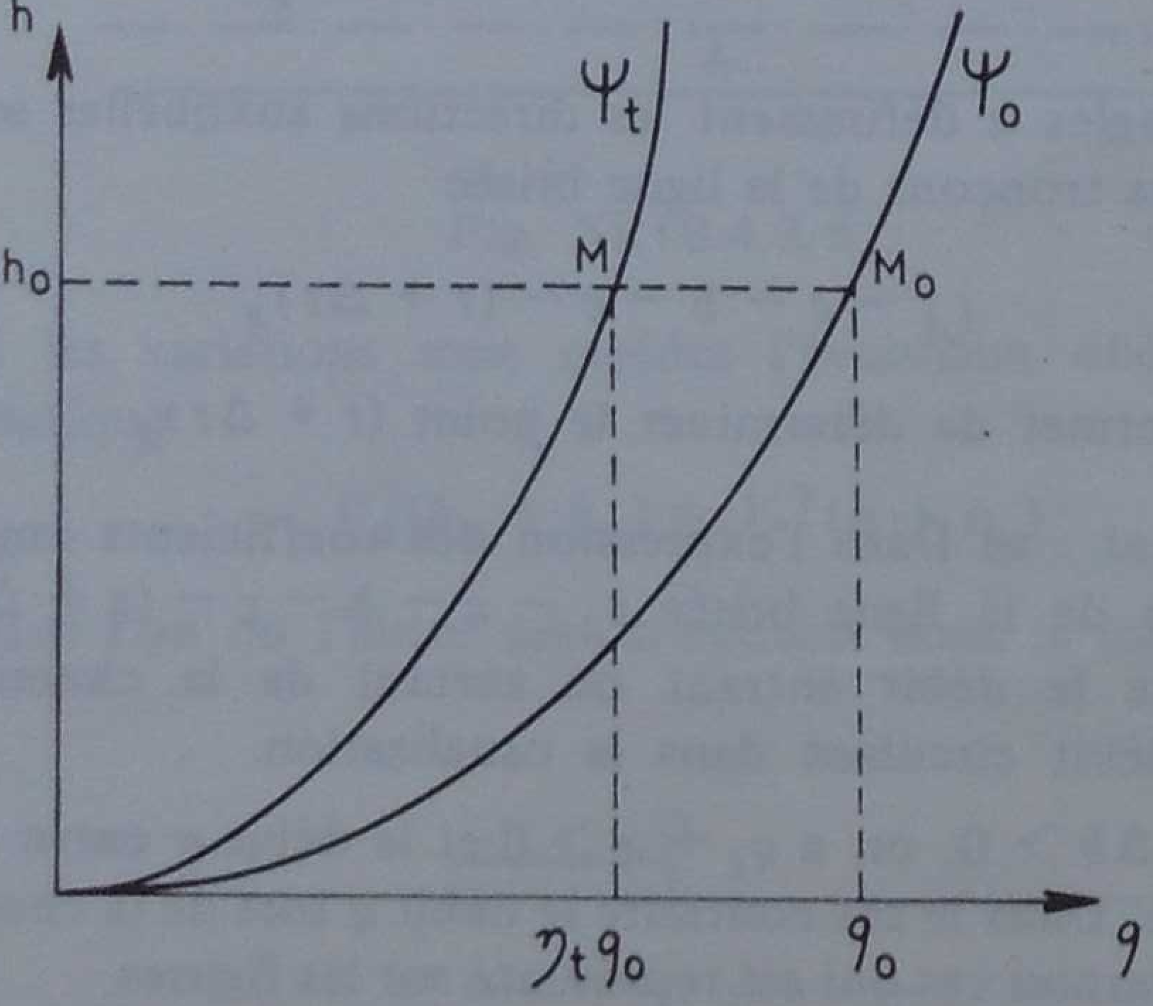


Fig. XI.10.4.3.1

A l'instant t le débit de la canalisation est donc

$$q_t = S_t\sqrt{2gh} = \eta_t S_0\sqrt{2gh}$$

avec $\eta_t < 1$. Cette équation est celle de la parabole ψ_t qui est donc la courbe caractéristique de l'obturateur à l'instant t.

Remarquons que la droite horizontale d'ordonnée h_0 coupe ψ_t au point M d'abscisse

$$(q_t)_0 = S_t\sqrt{2gh_0} = \eta_t S_0\sqrt{2gh_0} = \eta_t q_0$$

L'abscisse de M est donc proportionnelle à η_t c'est-à-dire à l'ouverture de la vanne.

5) *Pompe centrifuge.* On connaît les courbes caractéristiques de la hauteur nette et du rendement de la pompe en fonction du débit, soient $h(q)$ et $\eta(q)$, à la vitesse N_0 en régime permanent. Si la pompe s'arrête par déclenchement de son moteur d'entraînement la vitesse va décroître.

Considérons un petit intervalle de temps Δt à partir de l'instant t_0 du déclenchement et supposons Δt suffisamment petit pour que, pendant cet intervalle, le couple résistant C absorbé par la pompe conserve sa valeur initiale. Si I est le moment d'inertie des masses tournantes et ω la vitesse angulaire du groupe moto-pompe, on peut écrire

$$I\,\Delta\omega = C\,\Delta t$$

ou

$$I\frac{2\pi}{60}\Delta N = C\,\Delta t$$

$$\Delta N = \frac{60C}{2\pi I}\Delta t$$

On peut donc calculer ΔN puisque C se déduit de la puissance absorbée par la pompe P_1 et de son rendement η_1, soit :

$$P_1 = C\omega = \frac{\overline{\omega}Qh}{\eta}$$

et

$$I = MR^2 = \frac{PD^2}{4g}$$

avec

P = poids des masses tournantes,

D = diamètre de giration des masses tournantes.

La quantité PD^2 peut être fournie par le constructeur du groupe moto-pompe.

On en déduit la vitesse de la pompe à l'instant $t_0 + \Delta t$, soit

$$N_1 = N_0 - \Delta N$$

On peut donc construire par points les caractéristiques $h(q)$ et $\eta(q)$ de la pompe à la vitesse N_1. La courbe $h(q)$ est la caractéristique de la pompe à l'instant $t_0 + \Delta t$.

Par un raisonnement analogue on déterminera cette caractéristique aux instants suivants jusqu'à l'arrêt du groupe.

6) *Turbine à réaction.* La caractéristique $h(q)$ de la turbine dépend de sa vitesse N et de l'ouverture du distributeur ; elle peut être fournie par le constructeur.

7) *Cheminée d'équilibre* (fig. XI.10.4.3.2). Pendant l'intervalle de temps dt l'eau remplit le volume dV et h varie de dh.

Soit $V = \varphi(h)$ le volume de la cheminée d'équilibre mesuré à partir de l'axe de la canalisation. La pression en A à la base de la cheminée est supposée égale à la pression statique h, sauf s'il existe un étranglement à la base de la cheminée.

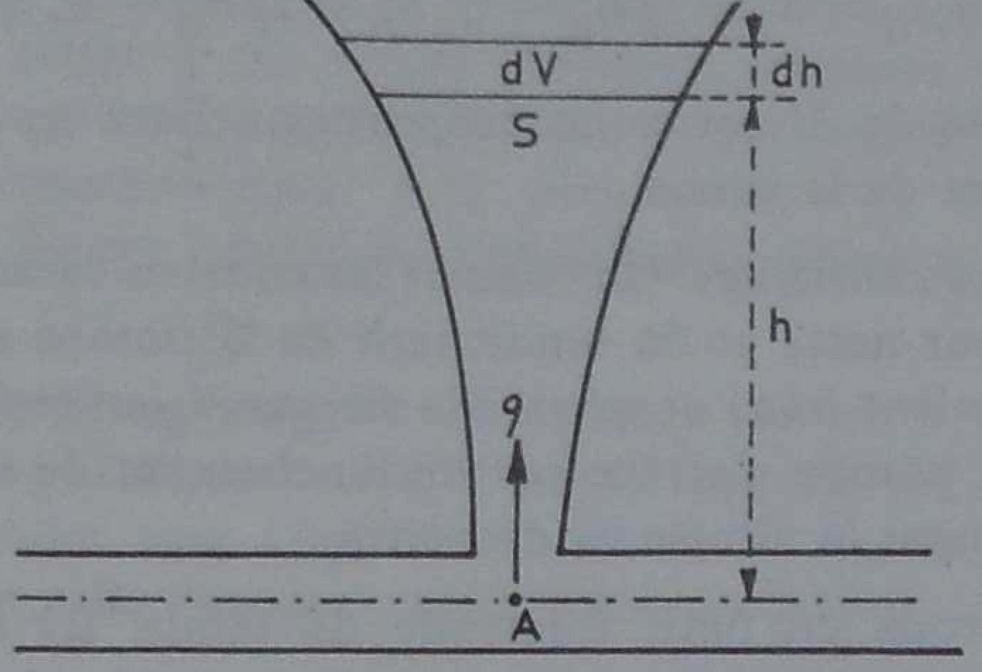


Fig. XI.10.4.3.2

Dans ce dernier cas la hauteur représentative de la pression en A sera $h + \xi$ (ξ = perte de charge pour le débit q) si le débit q va de la conduite vers la cheminée et $h - \xi$ si le débit va de la cheminée vers la conduite.

Supposons que le débit q entre dans la cheminée ; on a alors

$$dV = S\,dh = q\,dt$$

ou, en passant aux différences finies :

$$\Delta V = \frac{dV}{dh}\,\Delta h = \varphi'(h)\,\Delta h = \frac{q_t + q_{t+\Delta t}}{2}\,\Delta t$$

d'où

$$q_t + q_{t+\Delta t} = \frac{2\varphi'(h)}{\Delta t}\,\Delta h \qquad [XI.10.4.3.1]$$

Sur le diagramme $h(q)$ (fig. XI.10.4.3.3) on connaît le point t_A représentant le régime en A à l'instant t.

Considérons le point t'_A symétrique de t_A par rapport à l'axe $0h$ et la droite (D) de coefficient angulaire $\Delta t/2\varphi'(h)$ passant par t'_A. Son équation est

$$\frac{h - h_t}{q + q_t} = \frac{\Delta t}{2\varphi'(h)}$$

ou

$$q + q_t = \frac{2\varphi'(h)}{\Delta t}(h - h_t)$$

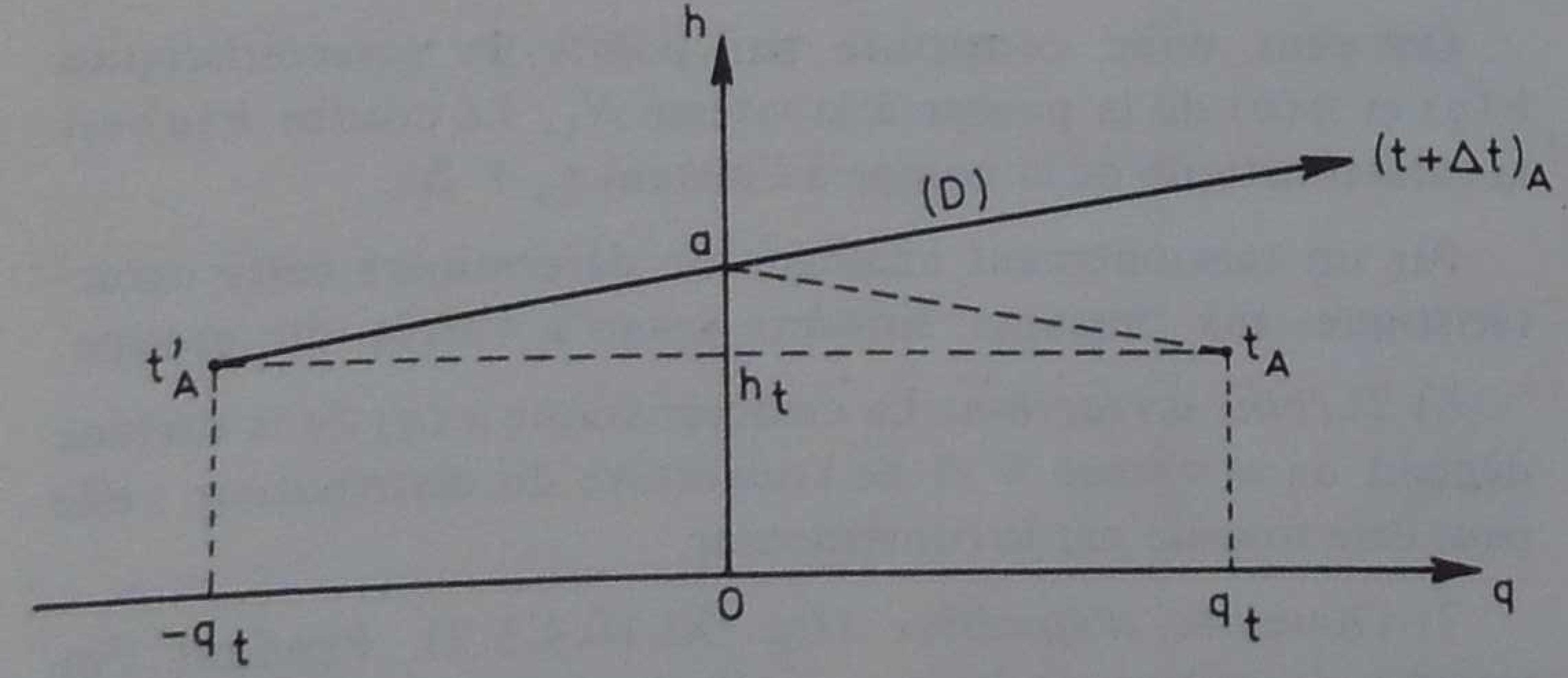


Fig. XI.10.4.3.3

En comparant cette expression avec [*XI.10.4.3.1*] on en déduit que la droite (D) passe par le point $(t + \Delta t)_A$ représentatif du régime en A à l'instant $t + \Delta t$.

Plus simplement, on construit directement le contour $t_A - a - (t + \Delta t)_A$ en traçant successivement :

— à partir de t_A, la droite $t_A\,a$ de pente $-\Delta t/2\varphi'(h)$ qui coupe l'axe $0h$ en a,

— à partir de a, la droite (D) de pente $\Delta t/2\varphi'(h)$.

Si la section droite horizontale de la cheminée n'est pas constante mais varie avec h, la dérivée $\varphi'(h)$ et le coefficient angulaire des droites de construction varient avec h. La construction de l'épure se modifie alors comme suit (fig. XI.10.4.3.4) :

Dans la limite des hauteurs h correspondant aux caractéristiques de la cheminée, on fait choix d'une petite variation Δh et on calcule, pour chaque intervalle de temps Δt, la longueur

$$x = \frac{\Delta t}{2\varphi'(h)}\,\Delta h$$

en donnant à $\varphi'(h)$ sa valeur moyenne pour l'intervalle Δh considéré.

On détermine ainsi les différents angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ tels que

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta t}{2\varphi'(h)} = \frac{x_1}{\Delta h}$$

avec

$$\varphi'(h) = \frac{\varphi'(h_1) + \varphi'(h_2)}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\Delta t}{2\varphi'(h)} = \frac{x_2}{\Delta h}$$

avec

$$\varphi'(h) = \frac{\varphi'(h_2) + \varphi'(h_3)}{2}$$

etc . . . .

Ces angles α définissent les directions auxquelles sont parallèles les tronçons de la ligne brisée

$$t_A - a - b - c - (t + \Delta t)_A$$

ce qui permet de déterminer le point $(t + \Delta t)_A$.

Remarques : a) Dans l'expression des coefficients angulaires des côtés de la ligne brisée $t_A - a - b - c - (t + \Delta t)_A$, q représente le débit entrant ou sortant de la cheminée et non le débit circulant dans la canalisation.

b) Si $\Delta h > 0$, on a $q_t + q > 0$ et le débit q entre dans la cheminée. Dans le cas contraire le débit q sort de la cheminée ; c'est ce dernier cas qui est représenté sur les figures.

8) *Réservoir d'air* (fig. XI.10.4.3.5). De l'air à la pression h est comprimé à la partie supérieure du réservoir ; en négligeant la hauteur d'eau z par rapport à h, on peut admettre que h est la pression en A dans la conduite sauf s'il existe un étranglement à la base du réservoir ; dans ce dernier cas

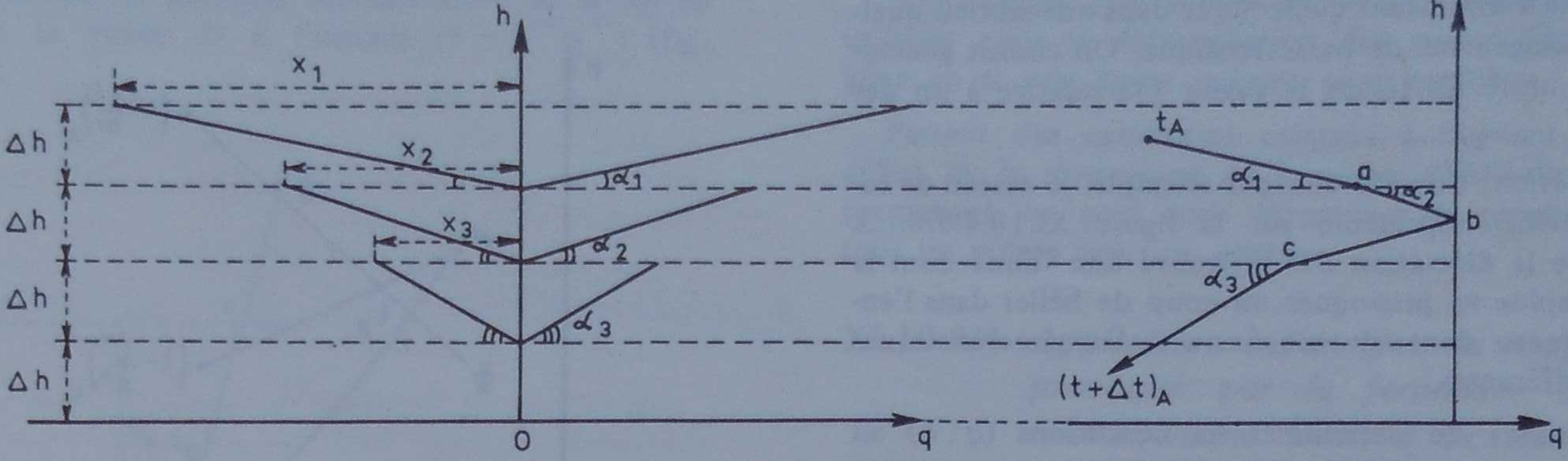


Fig. XI.10.4.3.4

on tient compte de la perte de charge provoquée par cet étranglement comme dans le cas de la cheminée d'équilibre.

Si les variations du volume d'air du réservoir sont lentes on peut admettre que l'évolution de l'air suit la loi isotherme :

$$V_0(h_0 + h_a) = V(h + h_a)$$

avec h_a = hauteur représentative de la pression atmosphérique.

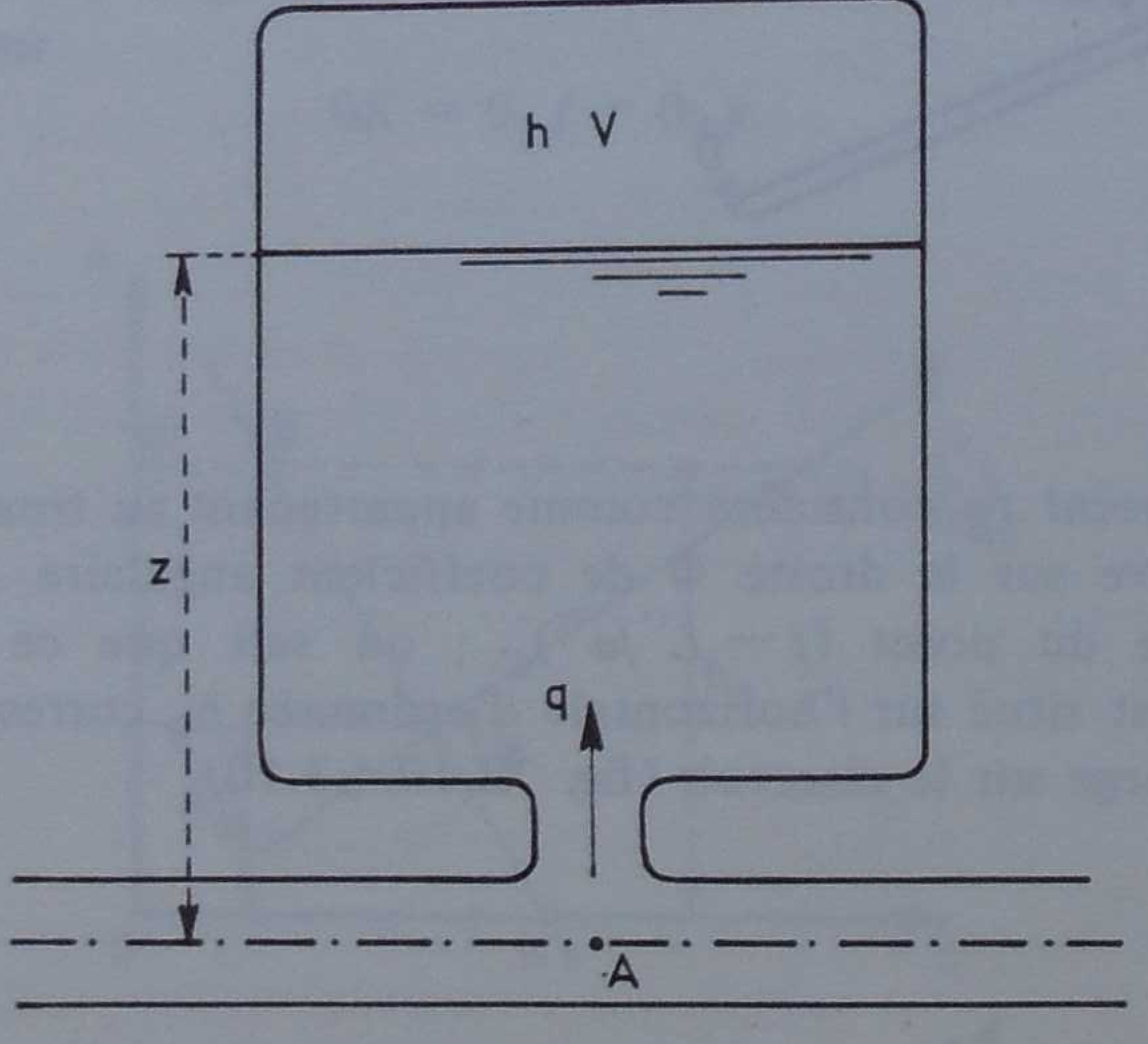


Fig. XI.10.4.3.5

Si les variations sont rapides l'évolution obéit à la loi adiabatique :

$$V_0^{\gamma}(h_0 + h_a) = V^{\gamma}(h + h_a)$$

Dans l'un ou l'autre cas on connaît donc la loi $V = \varphi(h)$.

Supposons qu'un débit q entre dans la cloche. On a donc

$$- dV = q\, dt$$

ou, en passant aux différences finies :

$$- \Delta V = - \frac{dV}{dh} \Delta h = - \varphi'(h) \Delta h = \frac{q_t + q_{t+\Delta t}}{2} \Delta t$$

d'où

$$q_t + q_{t+\Delta t} = - \frac{2 \varphi'(h)}{\Delta t} \Delta h$$

Comme V diminue lorsque h croît, $\varphi'(h) = dV/dh$ est négatif.

En définitive on est ramené au même problème que celui de la cheminée d'équilibre et le tracé de la courbe caractéristique du réservoir d'air se conduit de la même manière.

9) *Canalisation présentant des discontinuités* (fig. XI.10.4.3.6). Considérons une canalisation composée de plusieurs tronçons dont les longueurs L, les sections Ω, les vitesses moyennes U et les célérités a sont différentes et proposons-nous de déterminer les conditions de débit et de pression à un instant t dans la section B située au point de changement des caractéristiques.

Ce point t_B appartenant à la fois aux deux tronçons AB et CB se trouvera à l'intersection (fig. XI.10.4.3.7) :

— de la droite Φ issue du point $(t - L'/a')_A$ et de coefficient angulaire $a'/g\Omega'$,

— de la droite φ issue du point $(t - L''/a'')_C$ et de coefficient angulaire $- a''/g\Omega''$.

En partant, au temps 0, des sections d'extrémité de la canalisation, on détermine ainsi de proche en proche les conditions

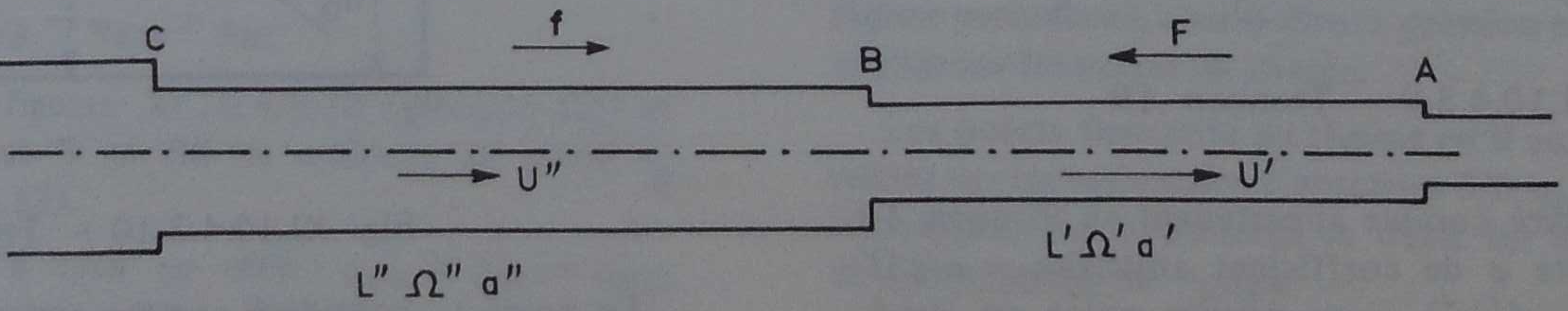


Fig. XI.10.4.3.6

$(h\,,q)$ existant à un instant quelconque dans une section quelconque de changement de caractéristique. On choisit généralement pour unité de temps la valeur L/a relative à un des tronçons.

10) *Bifurcation*. Considérons, par exemple, le réseau de canalisations $ABCD$ représenté sur la figure XI.10.4.3.8. A l'extrémité de la dérivation BD se trouve une vanne dont la manoeuvre rapide va provoquer un coup de bélier dans l'ensemble du réseau dont les tronçons ont des caractéristiques L, Ω et a différentes.

Proposons-nous de déterminer les conditions $(q\,,h)$ au point B à un instant t mesuré à partir du début de la manoeuvre de la vanne D, soit le point t_B. On sait que la somme algébrique des débits au noeud B est nulle et que la pression en B est la même, ce point étant considéré comme appartenant au tronçon AB, BC ou BD.

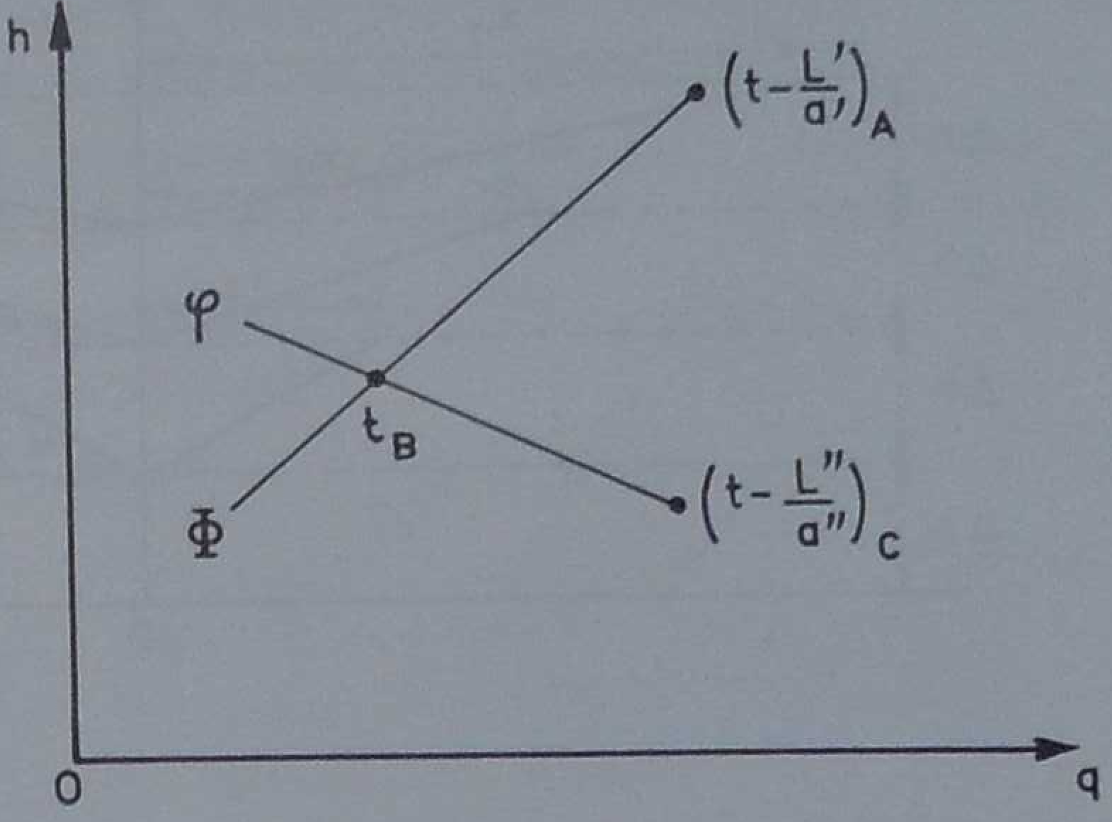


Fig. XI.10.4.3.7

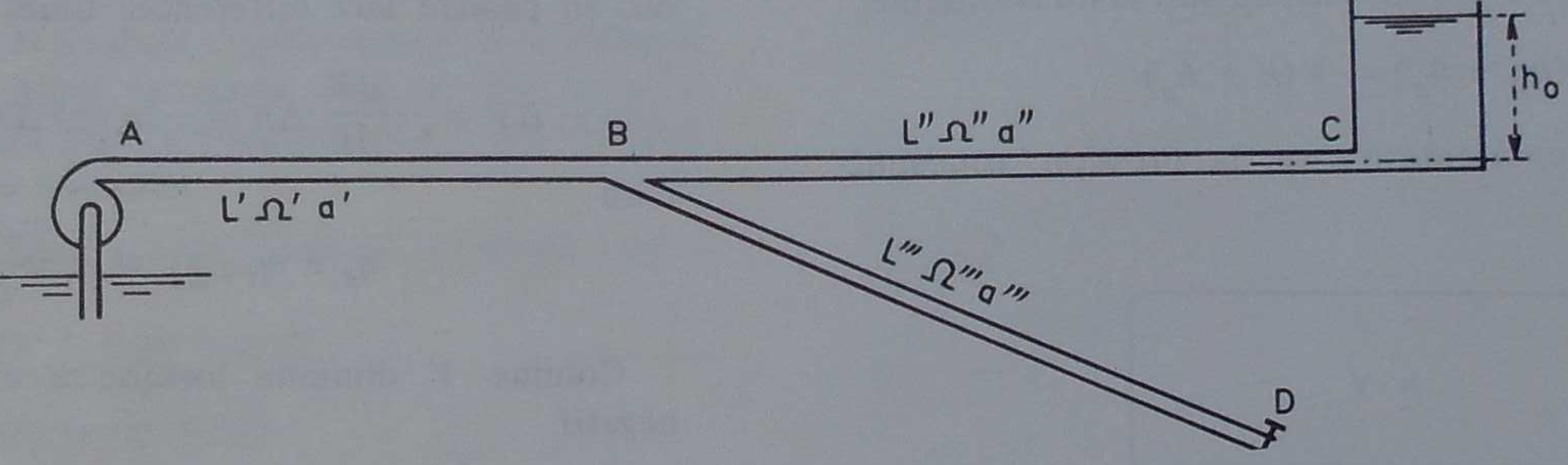


Fig. XI.10.4.3.8

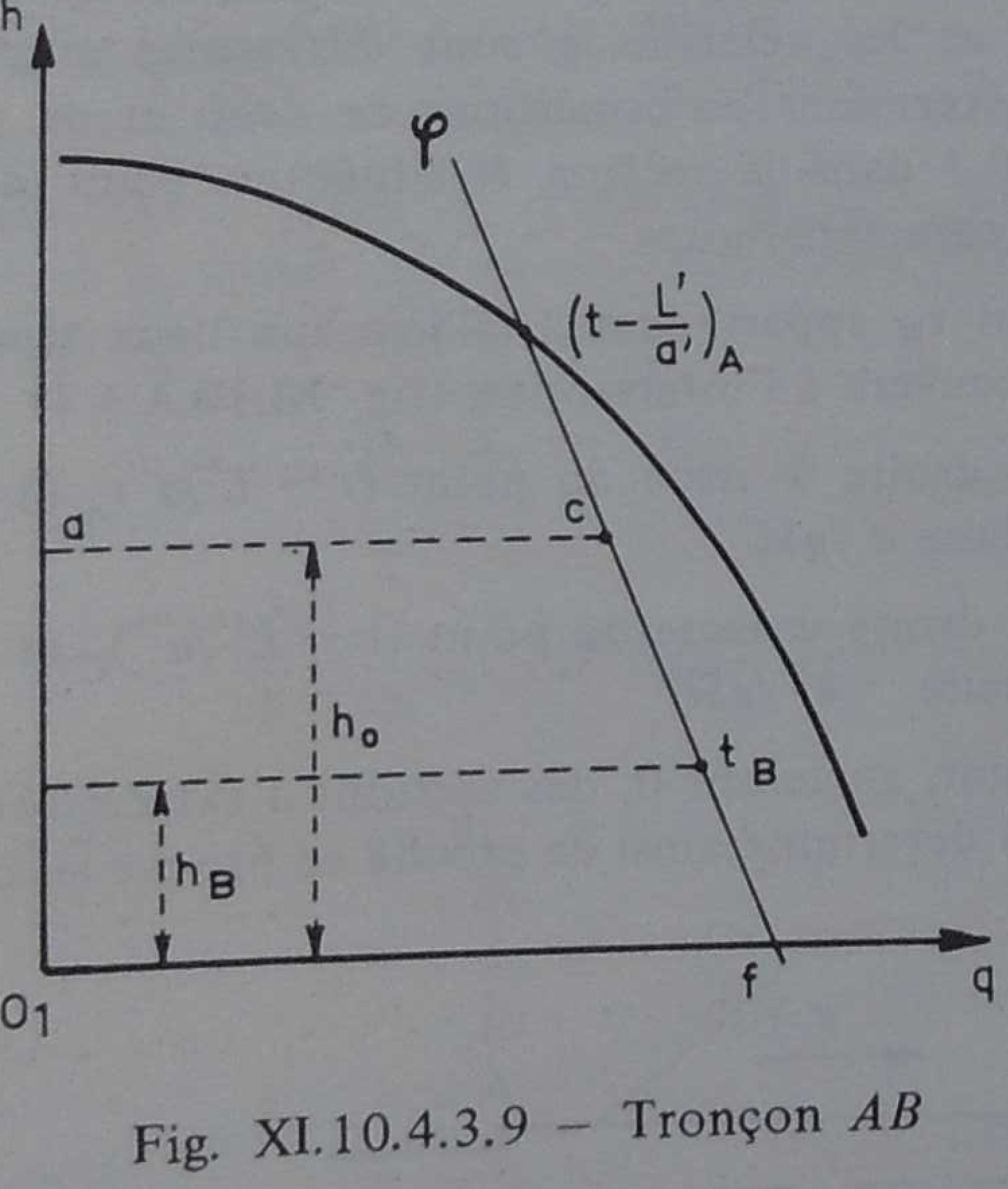


Fig. XI.10.4.3.9 – Tronçon AB

Le point t_B considéré comme appartenant au tronçon AB se trouve sur la droite φ de coefficient angulaire $-\,a'/g\,\Omega'$ et issue du point $(t - L'/a')_A$; ce dernier point est situé, par exemple, sur la courbe caractéristique de la pompe au point de fonctionnement en régime permanent (fig. XI.10.4.3.9).

Le point t_B considéré comme appartenant au tronçon BC se trouve sur la droite Φ de coefficient angulaire $a''/g\Omega''$ et issue du point $(t - L''/a'')_C$; on sait que ce dernier point est situé sur l'horizontale d'ordonnée h_0 correspondant à la charge sur le réservoir (fig. XI.10.4.3.10).

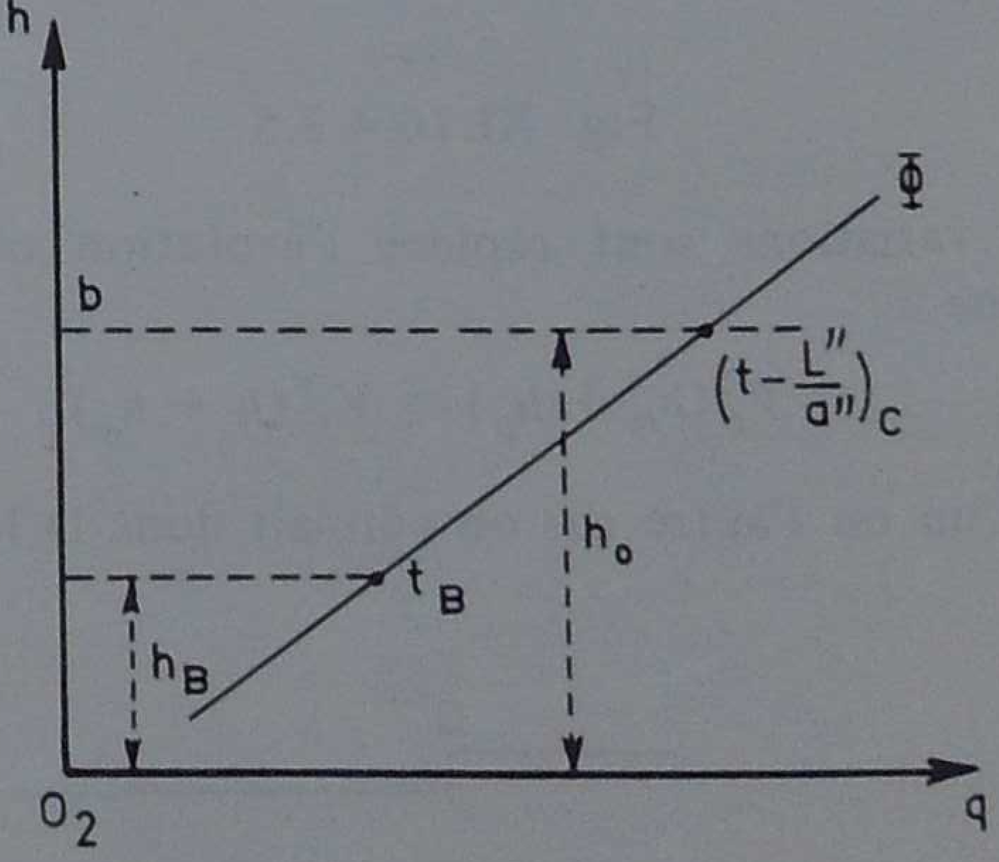


Fig. XI.10.4.3.10 – Tronçon BC

Le point t_B considéré comme appartenant au tronçon BD se trouve sur la droite Φ de coefficient angulaire $a'''/g\Omega'''$ et issue du point $(t - L'''/a''')_D$; on sait que ce dernier

point est situé sur la parabole représentative de la loi de fermeture de la vanne D à l'instant $(t - L'''/a''')$ (fig. XI.10.4.3.11).

Fig. XI.10.4.3.11 – Tronçon BD

Enfin l'équilibre des débits en B impose

$$q_{AB} = q_{BC} + q_{BD}$$

Pour réaliser cette dernière condition, portons dans le système d'axes (q, h) sur la droite d'ordonnée h_0, la longueur $AB = ac - de$ (fig. XI.10.4.3.12) et, sur l'axe des abscisses $0q$, la longueur

$$0K = 0_1 f - 0_3 g$$

Fig. XI.10.4.3.12

La droite BK est donc telle que

— pour l'ordonnée h_0 : $ac - de = q_{AB} - q_{BD}$ = abscisse de B,

— pour l'ordonnée 0 : $0_1 f - 0_3 g = q_{AB} - q_{BD}$ = abcsisse de K.

L'abscisse d'un point quelconque de la droite BK représente donc

$$q_{AB} - q_{BD} = q_{BC}$$

En superposant les figures XI.10.4.3.10 (tronçon BC) et XI.10.4.3.12, les droites Φ et BK se coupent au point t_B cherché (fig. XI.10.4.3.12).

Pour ce point, on a bien en effet, $q_{AB} = q_{BC} + q_{BD}$.

L'ordonnée h_B du point t_B permet alors de représenter ce point sur les figures XI.10.4.3.9, 10 et 11.

Remarquons que toutes les droites analogues à BK et utilisées pour la détermination des points figuratifs du régime en B aux divers instants sont parallèles.

Partant des conditions existant à l'instant 0 avant le début de la manoeuvre de la vanne, c'est-à-dire en régime permanent, on peut donc déterminer de proche en proche tous les points que l'on désire.

XI.10.4.4. *Application à l'analyse du coup de bélier provoqué par la fermeture lente d'un robinet-vanne situé à l'extrémité d'une canalisation alimentée par un réservoir à niveau constant* (fig. XI.10.4.4.1)

Supposons pour simplifier une canalisation de caractéristique unique et négligeons en première analyse les pertes de charge le long de la canalisation.

La durée de fermeture de la vanne est donc supérieure à $2L/a$.

Prenons pour unité de temps $\tau = L/a$ c'est-à-dire la durée de parcours d'une onde F ou f le long de la canalisation de A à B et supposons que la durée totale de fermeture de la vanne soit égale à 6τ. Adoptons l'hypothèse déjà faite au § XI.10.3.2 d'une loi de fermeture caractérisée par une variation linéaire du débit en fonction du temps, soit

$$q = q_0 \left(1 - \frac{t}{6\tau}\right)$$

Cette hypothèse est sans doute fort éloignée des conditions pratiques comme nous l'avons indiqué et comme nous le montrerons clairement plus loin, mais elle simplifie les constructions graphiques et permet de recouper les résultats obtenus par la méthode analytique à partir des équations d'Alliévi (formule de Michaud).

Bien entendu la méthode graphique est utilisable pour des lois de fermeture quelconques.

Comme nous l'avons montré au § XI.10.4.3 la courbe caractéristique de l'extrémité B de la canalisation au temps 0 est représentée par la parabole ψ_0 d'équation

$$q = s_0 \sqrt{2gh}$$

Prenons comme origine des temps l'instant où la vanne commence à se fermer.

Avant le temps 0 le point figuratif du régime en B, soit 0_B, est à l'intersection de la courbe caractéristique ψ_0 de la vanne et de la droite d'ordonnée $h = h_0$ pression initiale en régime permanent, c'est-à-dire la pression statique puisque nous négligeons les pertes de charge.

Les points figuratifs du régime en B aux temps 1, 2 . . . 5, 6, seront sur les ordonnées d'abscisses $5/6\ q_0$, $4/6\ q_0$, . . . $1/6\ q_0$, 0 puisque, par hypothèse, le débit est une fonction linéaire et décroissante du temps.

Le point figuratif du régime en A à l'instant 0, soit 0_A aura pour abscisse q_0 débit en régime permanent et pour

ordonnée $h_A = h_B - z = h_0 - z$ en désignant par z la différence de cote des points A et B qui dépend du profil en long de la canalisation.

La surpression ou la dépression en un point quelconque de la canalisation étant indépendante de la pression initiale en régime permanent au point considéré, pour éliminer z nous conviendrons de porter en ordonnées les hauteurs représentatives des pressions étoilées (c'est-à-dire les hauteurs piézométriques) mesurées à partir du plan horizontal passant par B. Ainsi, au point M de cote z_i où la pression en régime permanent vaut $p_i = \overline{\omega} h_i$ (on néglige les pertes de charge), la pression étoilée vaut $p_i^* = p_i + \overline{\omega} z_i$ et on portera en ordonnée la longueur

$$\frac{p_i^*}{\overline{\omega}} = z_i + \frac{p_i}{\overline{\omega}} = z_i + h_i = h_i^* = h_0$$

Compte tenu de cette convention la courbe caractéristique de l'extrémité A de la canalisation est représentée par la droite d'ordonnée $z + h_A = h_0 = c^{te}$ en raison de la présence du réservoir dont le niveau est maintenu constant.

Le point figuratif du régime en A à l'instant 0, soit 0_A, est donc confondu avec 0_B.

Supposons qu'un observateur parte de A, origine amont de la conduite, *au temps 0* et se déplace dans le sens de l'écoulement à la vitesse a ; il arrive en B à l'instant $L/a = \tau$ c'est-à-dire à l'instant 1. Pour cet observateur la droite caractéristique de la conduite sera donc la droite φ passant par $0_A = 0_B$ et de coefficient angulaire $- a/g\Omega$.

A son arrivée en B au temps 1 le point figuratif du régime, soit 1_B, doit être également sur l'ordonnée d'abscisse $5/6\ q_0$. Il est donc à l'intersection de ces deux droites et la parabole ψ_1 représentant la courbe caractéristique de la vanne au temps 1 devra donc passer par ce point 1_B.

L'observateur arrivé en B au temps 1 rebrousse chemin et repart vers A à la vitesse a ; la droite caractéristique de la conduite est maintenant pour cet observateur la droite Φ passant par 1_B et de coefficient angulaire $a/g\Omega$.

A son arrivée en A au temps 2τ, c'est-à-dire au temps 2, le point figuratif du régime, soit 2_A, doit être également sur la droite d'ordonnée h_0 puisqu'en A la présence du réservoir à surface libre impose une hauteur piézométrique constante $z_A + p_A/\overline{\omega} = z_A + h_A = h_0$ représentée par la droite d'ordonnée h_0 ; le point 2_A est donc à l'intersection de ces deux droites.

Par raison de symétrie le point 2_A sera également sur l'ordonnée d'abscisse $4/6\ q_0$.

Rebroussant chemin, l'observateur repart de A vers B qu'il atteint au temps 3. Le point figuratif du régime en B au temps 3, soit 3_B, sera donné suivant les mêmes principes que précédemment par l'intersection de

— la droite φ de coefficient angulaire $- a/g\Omega$ passant par 2_A,

— l'ordonnée d'abscisse $3/6\ q_0$.

Par raison de symétrie le point 3_B a même ordonnée que le point 1_B.

Par le point 3_B doit passer la parabole ψ_3 caractéristique de la vanne à cet instant.

L'observateur revient de nouveau vers A qu'il atteint au temps 4. Le point figuratif du régime, soit 4_A, sera obtenu comme précédemment ; par raison de symétrie il sera sur l'ordonnée d'abscisse $2/6\ q_0$.

Rebroussant chemin, l'observateur quitte A vers B qu'il atteint au temps 5, d'où le point 5_B qui, par raison de symétrie, a même ordonnée que les points 1_B et 3_B.

Par raison de symétrie, le point 6_A sera sur l'axe des ordonnées ; il est facile de voir que les points suivants (7_B, 8_A, 9_B, 10_A, . . .) sont confondus avec 6_A.

Cette première partie de l'épure permet donc de connaître les régimes au point A aux instants 0, 2, 4, 6, 8, etc . . . et au point B aux instants 0, 1, 3, 5, 7, etc . . .

Pour connaître les régimes en ces points aux instants complémentaires, *nous supposerons que l'observateur, au lieu de partir au temps 0 du point A, parte à cet instant du point B.* A l'instant 1 il arrivera en A où les caractéristiques du régime sont encore q_0 et $h_A^* = z_A + p_A/\overline{\omega} = h_0$; le point figuratif 1_A sera donc confondu avec 0_A.

Rebroussant chemin, l'observateur voit le point de fonctionnement se déplacer sur la droite φ de coefficient angulaire $- a/g\Omega$ passant par 1_A. Il arrive en B à l'instant 2 et le point figuratif 2_B sera donné par l'intersection de la droite précédente et de l'ordonnée d'abscisse $4/6\ q_0$.

Les points figuratifs correspondant aux extrémités des courses de l'observateur en A et B et aux temps successifs s'obtiendront par les mêmes règles que précédemment. Toutefois, en raison de la symétrie des constructions, les points 3_A, 4_B et 5_A seront confondus avec le point 4_A obtenu précédemment.

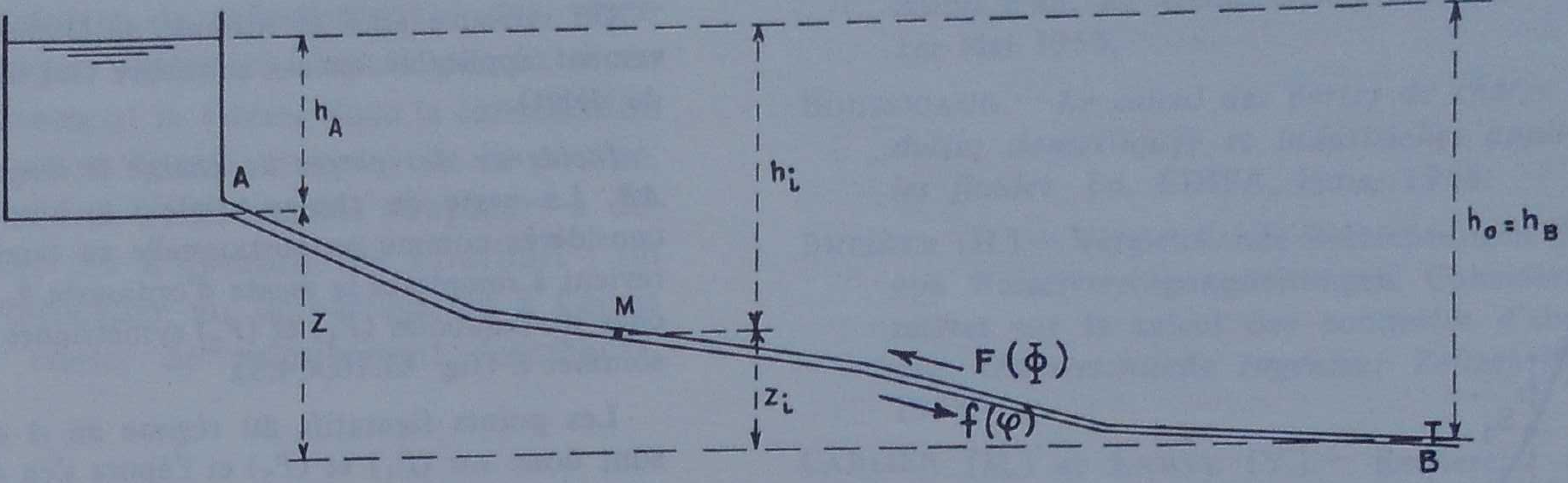
Par ailleurs les points 2_B et 6_B auront même ordonnée. L'épure peut d'ailleurs se poursuivre au-delà du point 6_B et fournirait les points 7_A, 8_B, 9_A, 10_B, etc . . .

Remarquons enfin que les sections utiles de la vanne aux temps 1, 2 . . . 5 seront proportionnelles aux abscisses des points S_1, S_2. . . S_5 d'intersection des paraboles ψ_1, ψ_2. . . ψ_5 avec la droite d'ordonnée h_0, comme nous l'avons démontré au § XI.10.4.3 (alinéa 4).

La loi de variation de la section nette d'ouverture de la vanne en fonction du temps peut alors être représentée par la courbe de la figure XI.10.4.4.2 qui montre clairement combien cette loi est incohérente ; en effet la section utile décroît très rapidement pendant le premier tiers de la fermeture (de S_0 à S_2), puis très lentement au cours du second tiers (S_2 à S_4) et enfin de nouveau très rapidement (de S_4 à S_6).

On se rend clairement compte qu'il serait à peu près impossible de réaliser mécaniquement une telle loi et cependant c'est celle qui est admise pour fixer la grandeur de la surpression maximale dans le cas d'une fermeture lente (formule de Michaud).

On peut d'ailleurs retrouver facilement la valeur de cette surpression maximale qui est égale à la différence des ordon-



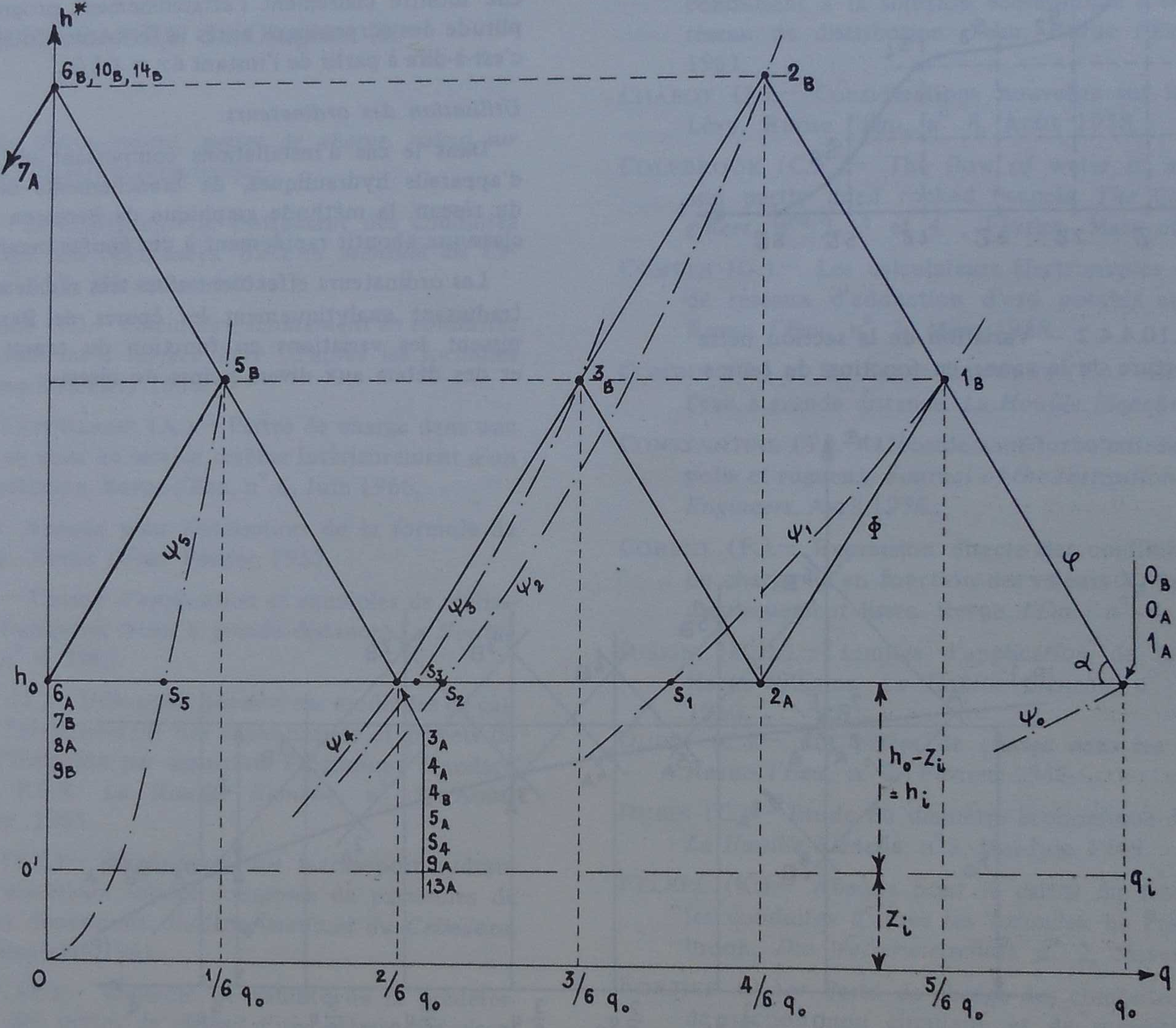


Fig. XI.10.4.4.1

nées des points 2_B et 0_B ; dans le triangle rectangle $0_B 2_B 2_A$ on a (fig. XI.10.4.4.1) : $2_A 2_B = \xi_m = 0_B 2_A \operatorname{tg} \alpha$

ou
$$\xi_m = \frac{(q_0 - q_2)\, a}{g \Omega}$$

Compte tenu de la loi de variation du débit on a :

$$q_2 = q_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

avec
$$t = 2\tau = \frac{2L}{a}$$

En remplaçant dans l'expression de ξ_m, on obtient

$$\xi_m = \frac{2\, U_0 L}{g T}$$

avec $U_0 = q_0 / \Omega$ = vitesse initiale dans la canalisation.

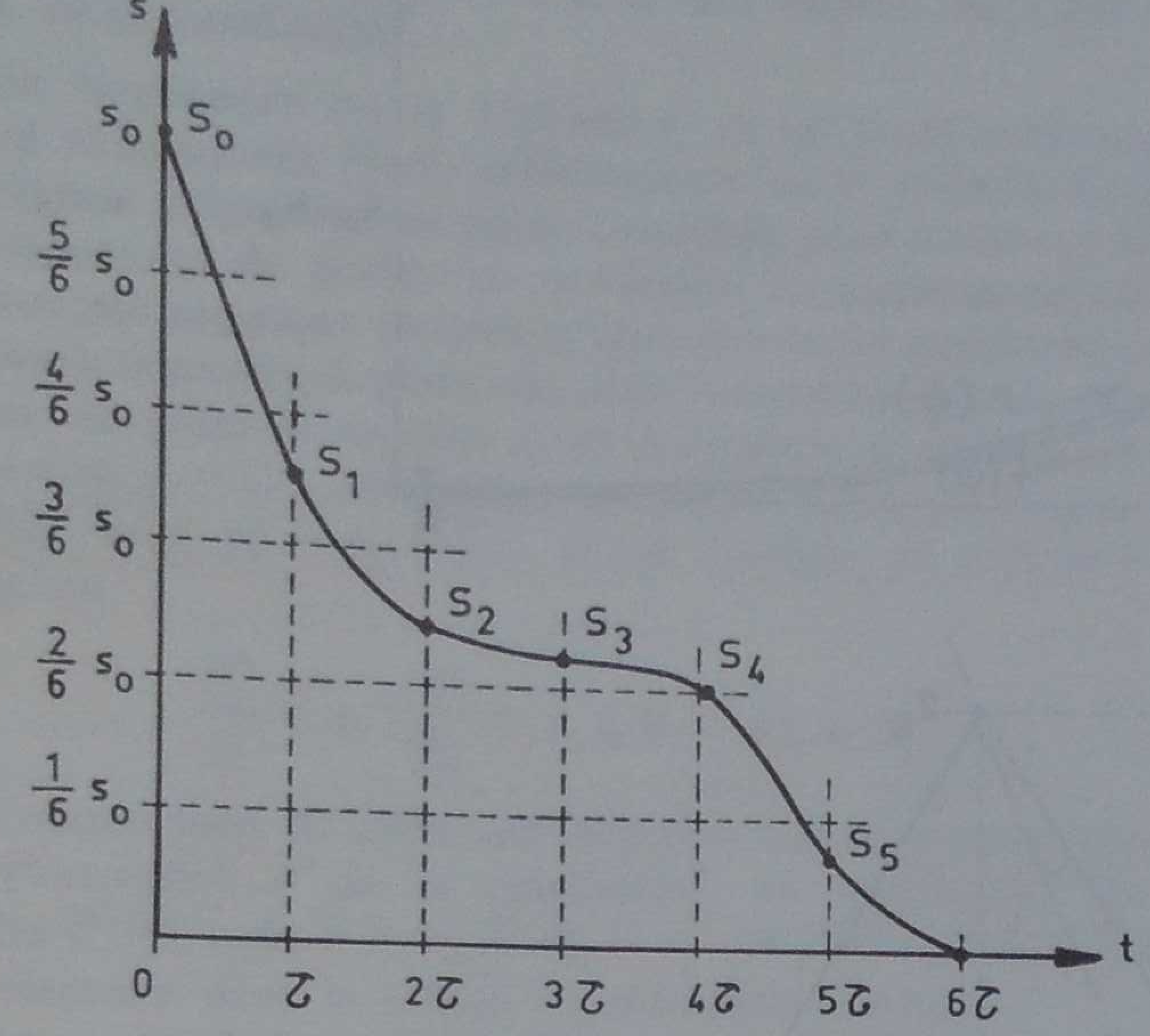


Fig. XI.10.4.4.2 – Variation de la section nette d'ouverture de la vanne en fonction du temps

On retrouve ainsi la formule de Michaud qui est effectivement applicable au cas considéré (loi linéaire de variation du débit).

Incidence des pertes de charge le long de la canalisation AB. La perte de charge totale j le long de AB peut être considérée comme proportionnelle au carré du débit, ce qui revient à remplacer la droite d'ordonnée h_0 par les deux branches de paraboles (P_1) et (P_2) symétriques par rapport à leur sommet E (fig. XI.10.4.4.3).

Les points figuratifs du régime en A aux divers instants sont donc sur (P_1) et (P_2) et l'épure s'en déduit facilement ; elle montre clairement l'affaiblissement progressif de l'amplitude des surpressions après la fermeture totale de la vanne, c'est-à-dire à partir de l'instant $6\tau = 6L/a$.

Utilisation des ordinateurs

Dans le cas d'installations comportant un grand nombre d'appareils hydrauliques, de branchements ou de maillages du réseau, la méthode graphique de Bergeron sous sa forme classique aboutit rapidement à des épures inextricables.

Les ordinateurs effectuent alors très rapidement les calculs traduisant analytiquement les épures de Bergeron et fournissent les variations en fonction du temps des pressions et des débits aux divers points du réseau.

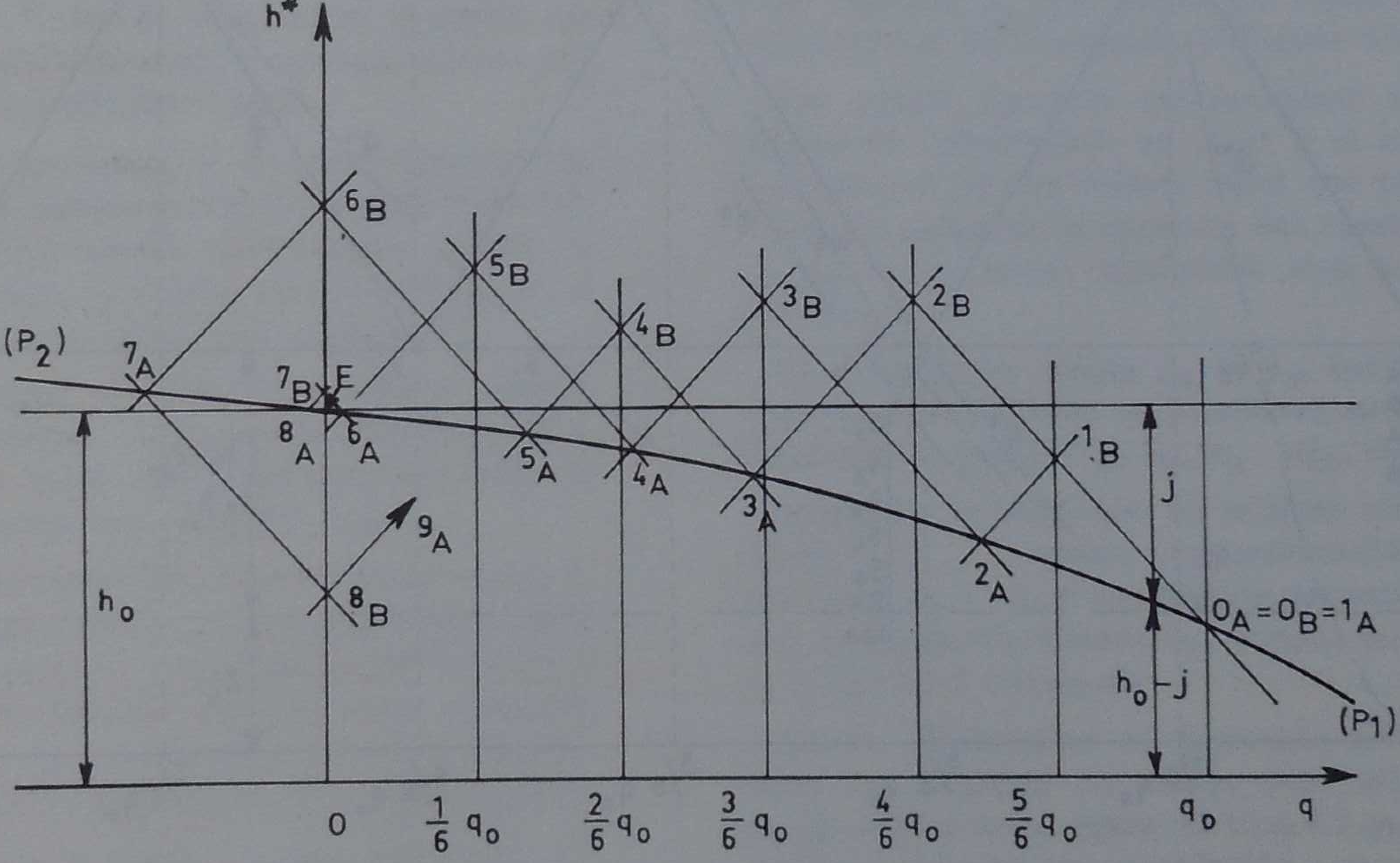


Fig. XI.10.4.4.3

XI.10.5. Protection contre les coups de bélier

On protège les canalisations par des dispositifs *anti-béliers* qui sont essentiellement :

1) sur les conduites forcées : des cheminées d'équilibre déversantes ou non et qui sont, en somme, des tubes piézométriques placés en certains points de la conduite ; l'efficacité de la cheminée d'équilibre est améliorée en disposant un étranglement (diaphragme ou tuyère) de dimensions et de profil convenables au débouché de la cheminée dans la canalisation. On transforme ainsi le coup de bélier d'onde en une oscillation en masse ; la compressibilité de l'eau peut à nouveau être négligée.

2) sur les conduites de refoulement : des réservoirs d'air, soupapes tarées et clapets percés. Pour ralentir progressivement la vitesse dans la canalisation de refoulement avant l'arrêt complet de la pompe, on utilise des volants d'inertie, des coupleurs à démarrage centrifuge ou à courants de Foucault ; on peut également procéder au démarrage ou à l'arrêt du groupe sur vanne de refoulement fermée[1].

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre XI

1 — *Formules d'écoulement, pertes de charge, calcul sur les canalisations, diamètre économique.*

ANNEN (G.).— Le coefficient de frottement des conduites transportant des eaux usées. *Bulletin mensuel du Cebedeau*, n° 132, Décembre 1961.

ARGHYROPOULOS (P.).— *Calcul de l'écoulement en conduites sous pression ou à surface libre* (d'après les formules de Manning-Strickler) 1958.

AURE (G.) et CAPOULADE (A.).— Pertes de charge dans une conduite en acier en service revêtue intérieurement d'un émail bitumineux. Revue *l'Eau*, n° 6, Juin 1966.

BARDIN (M.).— Abaque pour l'utilisation de la formule de Colebrook. Revue *l'Eau*, Février 1957.

BÉCHAUX (J.).— Champ d'application et exemples de réalisations de transports d'eau à grande distance. *La Houille Blanche*, n° 4, 1967.

DE BOISSEZON (J.).— Utilisation des moyens modernes de calcul pour l'établissement des avant-projets et projets de réseaux d'irrigation par aspersion. Programme Standard Réseaux, P.S.R. *La Houille Blanche*, n° 5, Août-Septembre 1965.

BONNINGTON (S.T.).— Expériences sur le transport hydraulique de matériaux solides composés de particules de différentes dimensions. *Bulletin mensuel du Cebedeau*, n° 132, Décembre 1961.

BOURGUIGNON (P.).— Contrôle de validité de la prédétermination des pertes de charge d'une galerie par circulation d'air. *La Houille Blanche*, n° spécial A/1956.

BOURGUIGNON (P.) et RÉMÉNIERAS (G.).— Prédétermination des pertes de charge d'une canalisation d'eau par circulation d'air. *Le Génie civil*, 15 Mars, 1er et 15 Avril, 1er Mai 1953.

BOUSSICAUD.— *Le calcul des pertes de charge dans les conduites domestiques et industrielles applicables à tous les fluides.* Ed. EDIPA, Paris, 1958.

BREINER (H.).— Vergleichende Betrachtungen zur Bemessung von Wasserversorgungsleitungen. Considérations comparatives sur le calcul des conduites d'alimentation en eau. *Osterreichische Ingenieur Zeitschrift*, n° 5, Mai 1958.

CARLIER (M.) et LABYE (Y.).— Recherche des diamètres conduisant à la solution économique d'ensemble d'un réseau de distribution d'eau. Revue *l'Eau*, n° 5, Mai 1961.

CHABOT (J.).— Considérations nouvelles sur la formule de Lévy. Revue *l'Eau*, n° 8, Août 1958.

COLEBROOK (C.F.).— The flow of water in inclined, lined and partly lined rocked tunnels. *The Consulting Engineer*, n^{os} 2, 3 et 4 ; Février, Mars et Avril 1959.

COMBES (G.).— Les calculateurs électroniques et les projets de réseaux d'adduction d'eau potable et d'irrigation. Revue *l'Eau*, n° 3, Mars 1958.

COMBES (G.) et DE SAINT-LAURENT (F.).— Le transport de l'eau à grande distance. *La Houille Blanche*, n° 4, 1967.

CONSTANTINE (T.).— L'écoulement turbulent dans les tuyaux polis et rugueux. *Journal of the Institution of Municipal Engineers*, Avril 1956.

CORBET (F.).— Expression directe des coefficients de perte de charge λ, en fonction des valeurs λ_0 des tuyaux hydrauliquement lisses. Revue *l'Eau*, n° 4, Avril 1963.

DISKIN (M.H.).— Limites d'application de la formule de Hazen-Williams. *La Houille Blanche*, n° 9, Novembre 1960.

DUBIN (C.).— Les pertes de charge dans les canalisations. Revue *l'Eau*, n° 2, Février 1948.

DUBIN (C.).— Etude du diamètre économique des conduites. *La Houille Blanche*, n°3, Mai-Juin 1949.

FELKEL (K.).— Abaque pour le calcul du frottement dans les conduites d'après les formules de Prandtl et Colebrook. *Die Wasserwirtschaft*, n° 2, Novembre 1957.

FORTIER (A.).— Perte de charge des conduites cylindriques de section non circulaire et de rugosité hétérogène. *La Houille Blanche*, Mai-Juin 1957.

GIBERT (R.).— Transport hydraulique et refoulement des mixtures en conduites. Résultats d'essais, calcul des pertes de charge et conclusions pratiques. *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 3, Mai-Juin 1960.

GILLOT (R.).— *Distribution de l'eau dans les immeubles d'habitation*. Dunod, 1958.

GUYON (G.).— Méthode de calcul des diamètres des canalisations d'un réseau collectif d'irrigation par aspersion ramifié, dans le cadre d'une solution économique d'ensemble. *Bulletin du Centre de Recherches et d'Expé-*

---

(1) Ces dispositifs sont étudiés de façon détaillée dans les ouvrages spécialisés concernant la protection des installations de pompage contre les coups de bélier. On en trouvera une description et la théorie de leur fonctionnement notamment dans l'ouvrage suivant : M. Carlier – *Machines hydrauliques* (1968) (cf. Bibliographie).

rimentation de Génie Rural, n° 41, Juillet 1958 ; revue *l'Eau*, nos 9 et 12, Septembre et Décembre 1958 ; *Annales techniques de la Direction Générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, 1962.

GUYON (G.) et PERNÈS (P.).— Etude des pertes de charge dans les tuyaux en polyéthylène haute densité. *Bulletin technique du Génie Rural*, n° SI 60, Septembre 1964.

LABYE (Y.).— Etude des procédés de calcul ayant pour but de rendre minimal le coût d'un réseau de distribution d'eau sous pression. *La Houille Blanche*, n° 5, 1966.

LABYE (Y.) et LECHAPT (G.).— Méthodes permettant de déterminer les caractéristiques optimales d'un réseau de distribution d'eau. *Bulletin Technique du Génie Rural*, n° 50, Avril 1961.

LEVIN (L.).— Difficultés du calcul des pertes de charge linéaires dans les conduites forcées. *La Houille Blanche*, n° 1, 1966.

LEVIN (L.).— *Formulaire des conduites forcées, oléoducs et conduits d'aération*. Dunod, 1968.

MATHIEU (R.).— La protection intérieure des conduites et ses avantages hydrauliques. *Bulletin Bitumastic*, n° 5, Juillet 1939.

MUNIER (N.).— Les normes de calcul actuelles des réseaux de distribution d'eau et d'assainissement sont-elles toujours valables ? Revue *l'eau*, n° 6, Juin 1967.

ONIGA (T.).— *Calcul des tuyaux*. Ed. Matémine-France, 1949.

RAJARATNAM (N.).— Une solution directe pour déterminer le diamètre d'un tuyau rugueux en régime d'écoulement turbulent. *La Houille Blanche*, n° 6, Novembre 1969.

DI RICCO (G.).— Sull' impiego della formula Colebrook e White per il moto uniforme turbolento. Sur l'emploi de la formule de Colebrook et White pour le mouvement uniforme turbulent. *L'Energia Elettrica*, n° 12, Décembre 1963.

RICHTER (H.).— *Rohrhydraulik*. Hydraulique des canalisations. Springer, Berlin 1958.

ROSSEY (F.) et TISON (G.).— La résistance hydraulique des conduites en grès vitrifié. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 200, 15 Août 1963.

SANZOT (E.).— Abaques pour la détermination des pertes de charge et des débits des tuyaux en matière plastique *PVC* ou *PET*. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 197, 15 Mai 1963.

SCHLAG (A.).— Les pertes de charge en conduites transportant des matériaux solides. *Bulletin mensuel du Cebedeau*, n° 111, Mars 1960.

SCHRAGGA IRMAY.— Calcul économique des réseaux de distribution d'eau. *La Houille Blanche*, Mars-Avril 1954.

THIBESSARD (G.).— Perte de charge dans les conduites en polyéthylène de petits diamètres. *Bulletin du Centre belge d'étude et de documentation des eaux*, nos 1 et 43, 1959.

THIBESSARD (G.).— Abaques de la formule de Colebrook. *Bulletin du Centre belge d'étude et de documentation des eaux*, n° 45, 1959.

THIBESSARD (G.).— Perte de charge en conduite rugueuse. *Cebedeau, série "Eau et Corrosion"*, Novembre 1959.

THIBESSARD (G.).— Sur la formule de Darcy. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 17, n° 242, Janvier 1964.

TISON (G.) et VAN DEN HOUWE (C.).— Loi de perte de charge pour conduites d'assainissement en béton. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 207, 15 Mars 1964.

VADOT (L.).— Quelques réflexions sur les pertes de charge. *La Houille Blanche*, n° 2, Mars-Avril 1954.

VIBERT (A.).— L'écoulement dans les conduites d'assainissement à paroi lisse. *Le Génie civil*, n° 11, Novembre 1969.

2 — *Rugosité et couche-limite*

AURE (G.) et CAPOULADE (A.).— Perte de charge dans une conduite en acier en service revêtue intérieurement d'un émail bitumineux. Revue *"l'Eau"*, n° 6, Juin 1966.

BRUN (E.).— *Introduction à l'étude de la couche-limite*. Ed. Gauthier-Villars, 1955.

FUKUSHIMA (E.).— Sur un nouveau rugosimètre. *Métaux-Corrosion-Industries*, n° 391, Mars 1958.

HETTLER (J.P.).— Contributions à l'étude du frottement turbulent des fluides en conduites lisses. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 414, Avril 1965.

MIGNOT (J.).— Quelques problèmes classiques d'hydraulique vus sous l'angle du traitement de l'eau. *La Houille Blanche*, n° 4, 1967.

PFISTERER (E.).— La perte de charge dans les conduites de grand diamètre – Les dépôts, facteurs d'augmentation de la rugosité dans les conduites forcées. *Bulletin du Cebedeau*, n° 54, 1961/4 .

THIBESSARD (G.).— La variation dans le temps de la capacité de transport des conduites. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, 15 Janvier 1957.

THIBESSARD (G.).— Les facteurs de perte de charge dans les conduites de grand diamètre devant la corrosion. *Bulletin trimestriel du Cebedeau*, n° 54, 1961/4.

THIBESSARD (G.).— Les dispositions prises contre le vieillissement des canalisations et leurs effets sur les projets de dimensionnement. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 17, n° 252, Novembre 1964.

WATER PLANNING FOR ISRAEL.— *Effet du vieillissement des conduites sur leur capacité de transport*. Tel – Aviv, P.N. 42, Février 1958.

3 — *Pertes de charge locales*

BUYUKTUR (A.).— Amortissement des perturbations dans les canalisations cylindriques longues. *Publications scien-*

tifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 378, Octobre 1961.

GARDEL (A.).— Les pertes de charge dans les écoulements au travers des branchements en *T. Bulletin technique de la Suisse Romande*, 27 Avril et 11 Mai 1957.

IDEL'CIK (I.E.).— *Memento des pertes de charge.* Coefficients de pertes de charge singulières et de pertes de charge par frottement. *Collection du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou*, Ed. Eyrolles, 1969.

KEYVANFAR (D.).— Contributions à l'étude des pertes de charge dans les réseaux d'irrigation. *Thèse* soutenue à l'Institut de Mécanique des fluides de Toulouse, 1965-66.

LEVIN (L.).— Problèmes de pertes de charge et de stabilité des grilles de prise d'eau. *La Houille Blanche*, n° 3, 1967.

LEVIN (L.).— *Formulaire des conduites forcées, oléoducs et conduits d'aération.* Ed. Dunod, 1968.

OZGUR (C.).— Contribution à l'étude de l'écoulement giratoire dans les divergents. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 394, Avril 1963.

PIGOTT (H.J.S.).— Losses in pipe and fittings. Les pertes de charge dans les conduites et accessoires. *The American Society of Mechanical Engineers*, Transactions, 10 Janvier 1957.

STAROSOLSZKY (Ő.).— *Helyi Nyomásveszteségek számitása Csövezetékekben.* Graphiques pour le calcul des pertes de charge singulières dans les canalisations. Institut de Recherches pour les ressources hydrauliques, Budapest, 1958.

VILLENEUVE (F.).— Contribution à l'étude de l'écoulement dans un diffuseur à six degrés. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 397, Août 1963.

4 — *Service en route*

CLEMENT (F.) et POUZOULET (J.).— Le réseau moderne d'irrigation de Gardanne. *Techniques et Sciences Municipales*, n° 3, Mars 1960.

INDRI (E.).— Recherches expérimentales sur les conduites d'évacuation d'un réservoir. *L'Energia elettrica*, n° 12, Décembre 1958.

LABEGORRE (J.).— Calcul d'une conduite assurant à la fois un service en route et le transit d'un débit. *Travaux publics*, n° 940, 1957.

LEPINE (F.).— Calcul d'une conduite assurant à la fois un service en route et le transit d'un débit. *Travaux publics*, n° 944, 1958.

NOSEDA (G.).— Etude expérimentale de l'écoulement dans un tuyau horizontal dont un tronçon est percé d'orifices uniformément distribués et répartissant l'eau le long du parcours. *Proceedings of the 7 th meeting of AIRH*, Lisbonne, Juillet 1957.

NOSEDA (G.).— Distribution constante des débits dans une conduite en charge perforée. *L'Energia elettrica*, n° 8, Août 1958.

NOSEDA (G.).— Ricerca sperimentale sul moto permanente di correnti in pressione con portata decrescente. Recherches expérimentales sur l'écoulement permanent en charge avec un débit décroissant. *L'Energia elettrica*, n° 1, Janvier 1959.

VIBERT (A.).— Le service en route et le point neutre dans les distributions d'eau. *Le Génie civil*, 1er Mars 1955.

5 — *Conduites de refoulement*

BENFRATELLO (G.).— Remplissage d'une conduite élévatoire alimentée par une pompe centrifuge. *5ème Congrès de l'Hydraulique*, Turin et Milan, 1957.

DUBIN (C.).— Etude du diamètre économique des conduites. *La Houille Blanche*, Mai-Juin 1949.

GUYON (G.).— Calcul économique des conduites de refoulement, enterrées, en fonte. *Bulletin du Centre de Recherches et d'expérimentation de Génie Rural*, n° 33, Mai 1957.

KOCH (P.) et VIBERT (A.).— Le diamètre optimum des conduites de refoulement. *Le Génie civil*, Mars et Octobre 1948.

MELZER (A.).— Sur le calcul économique d'une conduite de refoulement. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 17, n° 242. Janvier 1964.

MUNIER (M.).— A propos du diamètre à donner aux conduites de refoulement. *L'Eau*, n° 3, Mars 1961.

6 — *Coup de bélier*

BERGERON (L.).— *Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité.* Dunod, 1949.

CARLIER (M.).— Cavitation . . . Divin mensonge. *La Houille Blanche*, n° 4, Août-Septembre 1958.

CHAPPEY (A.).— Calcul des coups de bélier et des phénomènes transitoires par calculateurs électroniques. *La Houille Blanche*, n° 2, 1967.

CLARIA (J.), ESCANDE (L.) et RÉMÉNIERAS (G.).— Célérité des ondes et surpressions dans les conduites forcées. *Le Génie civil*, 1er Octobre 1960.

CLEMENT (R.) et SADOULET (M.).— Dans les réseaux d'irrigation : un dispositif de protection contre les surpressions accidentelles. Revue *l'Eau*, n° 2, Février 1962.

COMBES (G.).— Utilisation d'une méthode graphique simple pour l'étude des phénomènes transitoires dans des systèmes d'amenée d'eau. *La Houille Blanche*, n° 3, Mai-Juin 1959.

COMBES (G.).— Analyse des coups de bélier dans les réseaux d'irrigation par aspersion. *La Houille Blanche*, n° 5, 1966.

COMBES (G.) et ZAOUI (J.).— Analyse des erreurs introduites par l'utilisation pratique de la méthode des caractéristiques dans le calcul des coups de bélier. *La Houille Blanche*, n° 2, 1967.

DUBIN (C.).— Calcul du coup de bélier dans le réseau maillé. *Mémoires et Travaux de la S.H.F.*, Mai-Juin 1947.

DUBIN (C.).— Quelques méthodes modernes de calcul dans le domaine de l'hydraulique urbaine. Revue *l'Eau*, n° 7, Juillet 1956.

DUBIN (C.).— Le calcul des coups de bélier par machine électronique. *La Houille Blanche*, n° 11 B, Septembre 1956 .

DUBIN (C.).— Sur une nouvelle démonstration des relations d'Alliévi. *La Houille Blanche*, n° 2, Mars-Avril 1958.

DUC (J.).— Le calcul des coups de bélier dans les conduites de pompage. *Revue technique Sulzer*, n° 1, 1955 et *La Technique de l'Eau*, n° 115, 15 Juillet 1956.

ESCANDE (L.).— Coup de bélier dû à la fermeture instantanée dans une conduite à caractéristiques multiples. *Mémoires et Travaux de la SHF*, n° 1, 1958.

ESCANDE (L.).— Arrêt instantané du débit d'une conduite forcée avec cavitation. *Le Génie civil*, n° 15-16, 1er et 15 Août 1962.

EVANGELISTI (G.).— Etude du coup de bélier par la méthode des caractéristiques. *L'Energia elettrica*, n° 10, Octobre 1969.

GARDEL (A).— *Chambres d'équilibre. Analyse de quelques hypothèses usuelles ; méthodes de calcul rapide.* Ed. Rouge, Lausanne.

LECHAPT (G.).— Etude des surpressions dans les réseaux d'irrigation en charge. *Bulletin technique du Génie Rural*, n° 62, Septembre 1963.

LERY (J.P.).— Le "coup de clapet". *Liaison Cortambert, bulletin du groupe de la Société lyonnaise des eaux et de l'éclairage*, n° 33, Juin 1970.

LEVIN (L.).— Mouvement permanent dans une conduite forcée ou coups de bélier. Solution analytique tenant compte de l'énergie cinétique et de la perte de charge dans la conduite. *Le Génie civil*, n° 10, Octobre 1969.

PARMAKIAN (J.).— *Waterhammer analysis*. Théorie et calcul du coup de bélier. Prentice Hall, New-York, 1955.

RÉMÉNIERAS (G.).— Dispositif simple pour réduire la célérité des ondes élastiques dans les conduites en charge. *La Houille Blanche*, n° A, 1952.

RÉMÉNIERAS (G.).— Maurice Gariel et l'étude des coups de bélier. *Mémoires et Travaux de la SHF*, vol. II, 1960.

SCHLAG (A.).— La lecture des ondes de coups de bélier sur le tracé Bergeron. *Mémoires et Travaux de la SHF*, n° 1, 1957.

SCHLAG (A.).— L'introduction des pertes de charge dans le calcul du coup de bélier. *Le Génie civil*, 15 Février 1961.

SCHLAG (A.).— Sur l'apparition de la cavitation provoquée par le coup de bélier. *L'Energia elettrica*, n° 6, Juin 1961.

SCHLAG (A.).— Le coup de bélier dans un réseau de ville ou d'immeuble de forme télescopique. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 15, n° 223-224, Juin-Juillet 1962.

SCHLAG (A.).— Le coup de bélier, responsable de la pollution des eaux d'un réseau. *La Tribune du Cebedeau*, vol. 16, n° 232, Mars 1963.

SCHLAG (A.).— La transmission du coup de bélier au travers d'une bifurcation. *Le Génie civil*, n° 4, Avril 1968.

STUCKY (A.).— *Cours d'aménagement des chutes d'eau – Chambres d'équilibre*. Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, 1958.

VIBERT (A.).— Influence des pertes de charge sur l'amortissement des coups de bélier dans les conduites. *Le Génie civil*, 15 Mai 1948.

VOELTZEL (A.).— Protection des réseaux d'eau potable contre les coups de bélier. Revue *l'Eau* n° 2, Février 1961.

7 — *Réseaux maillés*

BIESEL et SETRUCK.— Etude d'un modèle réduit de réseau maillé de distribution d'eau. *La Houille Blanche*, Mai-Juin 1947.

DUBIN (C.).— Calcul des réseaux maillés. *Rapport au 2ème Congrès de l'Association Internationale de distribution d'eau*, Juin 1952.

DUBIN (C.).— Quelques méthodes modernes de calcul dans le domaine de l'hydraulique urbaine. Revue *l'Eau*, n° 7, Juillet 1956.

DUBIN (C.).— Le calcul des réseaux : calcul analogique, calcul digital ? Revue *l'Eau*, n° 6, Juin 1966.

GUNZINGER (M.).— Note sur le calcul des réseaux de distribution d'eau. *Schweiz – Technische Zeitschrift*, nos 34-35, Août 1957 ; n° 24, Juin 1962.

HARDY-CROSS.— Analyse de l'écoulement dans les réseaux de conduites ou de conducteurs. *Bulletin de la Station expérimentale d'essais de l'Université d'Illinois*, n° 286, Novembre 1936.

LABYE (Y.) et NOUGARO (J.).— Contribution à l'étude des réseaux maillés. *Le Génie civil*, n° 24, 15 Décembre 1965.

LACROIX (J.) et MINET (G.).— L'étude des réseaux maillés par utilisation des modèles électriques. *La Technique sanitaire et municipale*, n° 4, Avril 1955.

LEFEBVRE (M.).— L'application des calculatateurs électroniques au calcul des gros feeders de distribution. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 234, Juin 1966.

SAEDELEER (A. de).— Le calcul des réseaux maillés par la méthode Hardy-Cross. Solution graphique par application de l'intégration graphique. Solution semi-graphique par la méthode des lignes d'influence. *La Technique de l'Eau*, n° 72, 15 Décembre 1952.

8 — *Siphons*

BENFRATELLO (G.).— Essais sur le régime transitoire des siphons à amorçage automatique. *Proceedings 6th Meeting of the International Association for Hydraulic Research*, 31 Août, 6 Septembre 1955.

BENFRATELLO (G.).— Il transitorio dei sifoni autoinnescantisi adescamento. Phénomènes transitoires dans les siphons auto-amorceurs. *L'Energia elettrica*, n° 11, Novembre 1956.

BENFRATELLO (G.).— Expériences sur le fonctionnement permanent et transitoire des siphons auto-amorceurs. *L'Energia elettrica*, n° 7, Juillet 1957.

BENFRATELLO (G.).— Sur la similitude hydrodynamique dans le fonctionnement des siphons auto-amorceurs – Recherches expérimentales. *L'Energia elettrica*, n° 9, Septembre 1958.

ESCANDE (L.).— Siphon évacuateur de débit solide. *Le Génie civil*, n° 13, 1er Juillet 1958.

MUNIER (M.).— Les siphons et les conduites siphonnantes. Revue *l'Eau*, Février 1958.

9 — *Réservoirs d'équilibre, réservoirs d'air*

BOSANO (E.).— Fonctionnement d'un réseau de distribution d'eau alimenté à niveau constant et pourvu d'un réservoir d'équilibre. *Annales des Ponts et Chaussées*, Novembre-Décembre 1957.

CARLIER (M.).— Application des méthodes graphiques à l'étude des régimes progressivement variables dans les réseaux de canalisations. *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*. Document 77 G, Année 1959.

CLEYET (J.) et COMBES (G.).— Le réservoir d'équilibre – Quelques réflexions sur un vieux problème. *Techniques et sciences municipales l'Eau*, n° 3, 1970.

HOARAU DE LA SOURCE (P.).— Note sur l'association de réservoirs d'accumulation d'eau à cloche d'air à des canalisations de faible diamètre pour alimenter économiquement les écarts de distribution d'eau potable. Méthode graphique de représentation. *Bulletin du Centre de recherches et d'expérimentation de Génie Rural*, n° 33, Novembre 1955.

LABYE (Y.).— Etude du mouvement transitoire dans les réseaux comportant des réservoirs. *Thèse de Docteur es-sciences*, Faculté des Sciences de Toulouse, 1965.

LABYE (Y.).— Etude des mouvements transitoires dans les réseaux de distribution d'eau. *La Houille Blanche*, n° 5, 1966.

PEZARD (R.).— Note sur les réservoirs d'équilibre. *Annales techniques de la Direction Générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, Document 71 C, année 1949 .

VANNIER (P.).— Etude sur l'alimentation des réservoirs dans le cas de service en route. *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, 1952.

VANNIER (P.).— Etude sur l'alimentation simultanée d'un réservoir principal et d'un réservoir d'équilibre. *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, document 75 C, année 1955.

VANNIER (P.).— Etude sur le débit simultané et à gueule bée de deux conduites en parallèle et sur la double alimentation gravitaire d'un réservoir. *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, année 1956.

VANNIER (P.).— Alimentation simultanée et par surverse d'un réservoir principal et de deux réservoirs secondaires en parallèle. *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, document 77 E, année 1959.

VANNIER (P.).— Alimentation gravitaire d'un réservoir dans le cas d'un service à son aval. *Annales techniques de la Direction générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, document 77 F, année 1959.



Canal de la basse Durance

Photothèque EDF – F. Bibal

CHAPITRE XII

ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

Ces écoulements présentent par définition la particularité de comporter *une surface libre en contact avec l'air*, généralement soumise à la pression atmosphérique et dont la *forme* peut varier, ce qui implique une variation possible de la forme et des dimensions de la section transversale de la masse liquide.

Nous nous limiterons en principe aux écoulements en *régime permanent* et écarterons donc de notre étude les régimes variables dans le temps, tels que la formation et la propagation des ondes et intumescences diverses (houle, clapotis, crues, marées, seiches, etc.) ; nous serons toutefois amenés à nous référer à la propagation des ondes superficielles lors de l'étude du ressaut.

Les écoulements à surface libre en régime permanent peuvent présenter deux aspects :

1 – Si la pente longitudinale (dans le sens de l'écoulement) et la section transversale sont constantes tout le long de la masse liquide, le régime est *uniforme*.

2 – Dans le cas contraire, le régime est *varié*.

Nous examinerons successivement ces deux régimes et nous compléterons ce chapitre par l'étude des différentes *méthodes de jaugeage* des écoulements à surface libre.

XII.1. RÉGIME UNIFORME

Si la pente et la section transversale restent constantes, une section transversale ne diffère en rien des autres, la vitesse reste constante tout le long d'un filet liquide et le mouvement permanent est *uniforme* (permanent dans le temps et uniforme dans l'espace).

C'est le cas en particulier de l'écoulement dans un tronçon rectiligne de canal artificiel de pente et de section constantes, à condition de se placer suffisamment loin de ses extrémités amont et aval ; c'est approximativement le cas de l'écoulement dans les cours d'eau naturels sur des tronçons rectilignes de pente constante dans lesquels la section transversale ne varie pratiquement pas et en dehors des périodes de crues ou d'étiages.

Nous étudierons essentiellement l'écoulement en régime uniforme dans les *canaux artificiels* et nous indiquerons incidemment dans quelles mesures certains résultats obtenus peuvent s'appliquer aux *cours d'eau naturels*.

Le débit et la vitesse moyenne étant constants, la surface libre est un plan parallèle au fond du canal.

Surface libre et fond ont donc même pente tg $i = I$.

XII.1.1. Formule générale de l'écoulement

L'équation générale s'appliquant au cas considéré est celle du courant rectiligne en régime permanent et uniforme (cf. § VII.4), soit :

$$\sin i - \frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{B}{\Omega} \varphi(U) \qquad \text{[VII.4.3]}$$

Plaçons l'axe des s dans la surface libre ; le long de cet axe la pression p_0 est constante et égale à la pression atmosphérique, donc :

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$$

et :

$$\sin i = \frac{B}{\Omega}\,\varphi(U)$$

L'angle i est ici très faible ; les canaux et rivières ont des pentes de l'ordre de quelques centimètres ou décimètres par kilomètre ; on peut donc écrire :

$$\sin i = \operatorname{tg} i = I$$

L'équation devient :

$$I = \frac{B}{\Omega}\,\varphi(U)$$

On pose

$$\frac{\Omega}{B} = R$$

R est le *rayon hydraulique moyen* de la section.

L'équation s'écrit alors :

$$RI = \varphi(U)$$

Par analogie avec l'écoulement dans les canalisations on pose :

$$\varphi(U) = bU^2$$

et, d'une manière plus générale, pour les écoulements à surface libre on remplace le coefficient b par un autre coefficient C tel que :

$$b = \frac{1}{C^2}$$

La formule générale de l'écoulement prend alors la forme :

$$U^2 = C^2 RI$$

$$\boxed{U = C\sqrt{RI}}$$

Cette formule a été établie pour la première fois en 1775 par *Antoine Chézy*, Ingénieur du Pavé de Paris, à la suite des expériences auxquelles il avait procédé dans le but de déterminer les caractéristiques du canal nécessaire pour dériver les eaux de l'Yvette jusqu'à Paris. En fait, Chézy n'a pas isolé le rapport Ω/B et c'est le comte Du Buat qui, quelques années plus tard, introduisit dans les résultats de Chézy la notation $R = \frac{\Omega}{B}$ et donna à la formule de Chézy sa forme classique.

Le coefficient C (homologue de b_1 ou λ pour les canalisations) dépend des paramètres géométriques et hydrauliques de l'écoulement, notamment de la forme de la section et de la nature des parois du canal. C est appelé parfois *"coefficient de Chézy"* ; il a pour dimensions $L^{1/2}\,T^{-1}$, c'est-à-dire la racine carrée d'une accélération. On en donne généralement la valeur en prenant pour unités le mètre et la seconde.

Remarques :

1 – *Signification hydraulique de I* (fig. XII.1.1).

Considérons dans la masse liquide en écoulement rectiligne et uniforme un filet liquide MM' et appliquons entre ces deux points le théorème de Bernoulli :

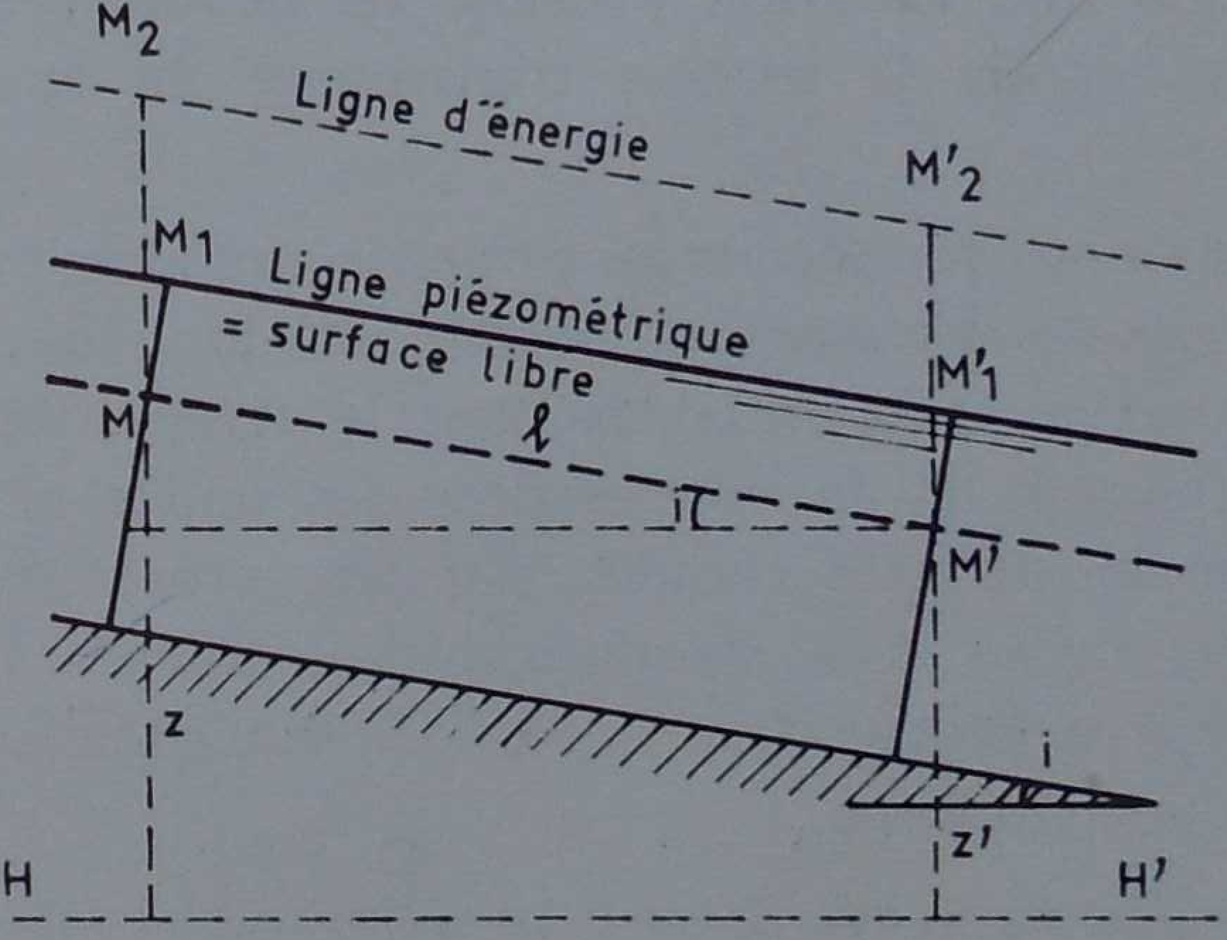


Fig. XII.1.1 – Ligne piézométrique et ligne d'énergie d'un écoulement à surface libre en régime uniforme

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = z' + \frac{p'}{\varpi} + \frac{V'^2}{2g} + j$$

Le régime étant uniforme : $V = V'$.

Par ailleurs, le filet liquide considéré est parallèle au fond et à la surface libre, donc :

$$p = p'\,.$$

La charge entre les deux points est donc :

$$h = z - z' = j$$

Si l est la distance séparant les deux points M et M', la perte de charge par mètre est donc :

$$J = \frac{j}{l} = \frac{h}{l} = \sin i \simeq \operatorname{tg} i = I$$

Dans un écoulement à surface libre en régime uniforme la perte de charge par mètre ou pente "hydraulique" de l'écoulement J est donc égale à la pente "géométrique" I.

2 – Effectuons en chacun des points M et M' la *construction graphique de Bernoulli.*

Les niveaux piézométriques M_1 et M'_1 sont pratiquement sur la surface libre puisque la pente du canal est faible et que les lois de l'hydrostatique s'appliquent au cas considéré d'un écoulement rectiligne et uniforme.

Portons les hauteurs représentatives des vitesses :

$$M_1 M_2 = M'_1 M'_2 = \frac{V^2}{2g}$$

La ligne d'énergie $M_2 M'_2$ est parallèle au fond et sa pente J est donc bien égale à la pente géométrique I du canal (fig. XII.1.1).

En définitive, *pour un écoulement rectiligne à surface libre en régime uniforme, la ligne des niveaux piézométriques est pratiquement confondue avec la surface libre et la ligne d'énergie est parallèle au fond et à la surface libre.*

XII.1.2. Formules usuelles pour les canaux artificiels

De nombreux hydrauliciens ont proposé des expressions du *coefficient C* de la formule générale $U = C\sqrt{RI}$.

A priori ce coefficient doit dépendre :

– de la forme de la section transversale,

– de la nature des parois,

– et, suivant les auteurs, de la vitesse ou de la pente.

Nous citerons les formules les plus usuelles.

Formule de Prony

Par analogie avec la formule qu'il a proposée pour les canalisations, Prony pose :

$$b = \frac{1}{C^2} = \frac{a'}{U} + b'$$

avec

$$a' = 0{,}000\,044$$

$$b' = 0{,}000\,309$$

et la formule de l'écoulement s'écrit donc :

$$RI = a'\,U + b'\,U^2$$

Formule de Tadini

$$b = \frac{1}{C^2} = 0{,}0004 = C^{te}$$

d'où

$$C = \frac{1}{\sqrt{0{,}0004}} = 50$$

$$U = 50\sqrt{RI}$$

Cette formule, appliquée longtemps en Italie, a l'avantage d'être très simple ; toutefois elle est par trop approximative ; elle peut donner rapidement un ordre de grandeur de la vitesse dans les canaux profonds à faible pente.

Formule de Bazin

Bazin a présenté d'abord une *première formule* :

$$b = \frac{1}{C^2} = \alpha' + \frac{\beta'}{R}$$

analogue à la formule de Darcy pour les canalisations, les coefficients α' et β' ayant des valeurs différentes suivant la nature et l'état des parois du canal ; cette formule avait l'inconvénient d'avoir deux coefficients variables aussi, après de nombreuses expériences, Bazin présenta une *seconde formule* :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

ce qui donne :

$$U = \frac{87\sqrt{RI}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

avec, pour γ, les valeurs suivantes correspondant à six catégories de parois :

N° des catégories	Nature des parois	γ
1	Parois très unies (ciment, bois raboté)	0,06
2	Parois unies (planches, briques, pierres de taille, etc.)	0,16
3	Parois en maçonnerie de moëllons	0,46
4	Parois de nature mixte (sections en terre très régulières)	0,85
5	Canaux en terre dans les conditions ordinaires	1,30
6	Canaux en terre avec fonds de galets, parois herbées	1,75

Comme le coefficient C ne dépend que de γ et R on a dressé des *tables* qui en donnent la valeur en fonction de ces deux paramètres ; ces tables sont reproduites en annexe (Annexe 2).

On a également établi des *abaques* permettant de calculer rapidement l'une des quatre quantités U, R, I et γ connaissant les trois autres ; un de ces abaques établi par M. D'Ocagne est encarté à la fin du présent volume (Annexe 3).

La formule de Bazin est couramment utilisée en France. La principale difficulté de son application concerne le choix judicieux de la valeur à attribuer au coefficient γ.

Formule de Ganguillet et Kutter

En Allemagne, en Angleterre et en Autriche, on utilise parfois la formule proposée en 1869-70 par Ganguillet et Kutter, formule qui est analogue à celle utilisée pour les tuyaux sous pression:

$$C = \frac{23 + \dfrac{0,00155}{I} + \dfrac{1}{n}}{1 + \left(23 + \dfrac{0,00155}{I}\right)\dfrac{n}{\sqrt{R}}}$$

avec pour n les valeurs données dans le tableau annexé au présent volume (Annexe 4).

Cette formule, plus compliquée que celle de Bazin, ne donne pas des résultats supérieurs.

Pour les faibles pentes (pratiquement inférieures à 0,0001) le terme $0,00155/I$ prend des valeurs trop importantes et la formule de Ganguillet et Kutter devient nettement moins précise.

Formule de Kutter

Pour le calcul des égouts Kutter propose une simplification de la formule établie en collaboration avec Ganguillet.

Cette formule de Kutter s'écrit ainsi :

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{b + \sqrt{R}}$$

Le coefficient b est fonction de la nature des parois de l'aqueduc ; en voici quelques valeurs :

b = 0,15 pour ciment lissé et bois raboté ;
0,20 pour grandes canalisations en béton et acier, maçonneries de briques soignées et neuves, planches ;
0,27 pour tuyaux en grès vernissé et acier non rouillé ;
0,20 à 0,45 pour maçonneries de briques ordinaires ;
0,45 à 0,80 pour vieilles maçonneries à joints dégarnis.

Formule de Manning

L'Irlandais Robert Manning a proposé la formule suivante :

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

soit :

$$U = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2}$$

Le coefficient n est variable suivant la nature des parois du canal ; il a la même valeur que celle adoptée pour la formule de Ganguillet et Kutter (cf. Annexe 4).

La formule de Manning présente l'avantage d'avoir une *forme monôme* ce qui permet des calculs plus simples et réalisables à la règle.

Son application est encore facilitée en utilisant des tables donnant les puissances 2/3 du rayon moyen R ; un extrait de ces tables est annexé au présent volume (Annexe 5).

Formule de Strickler

Strickler a cherché à déterminer la valeur du coefficient n des formules de Manning, Ganguillet et Kutter, en fonction de la dimension des matériaux constitutifs des parois du canal.

Pour des parois (fond et berges) en matériaux non cohérents (terre non revêtue) il propose la formule :

$$k = \frac{1}{n} = 26\left(\frac{R}{d_{35}}\right)^{1/6}$$

avec $R = \dfrac{\Omega}{B}$ (rayon hydraulique moyen en m),

d_{35} = diamètre (en m) auquel correspond 35 % (en poids) de matériaux de diamètre supérieur (abscisse de la courbe granulométrique correspondant à l'ordonnée 0,35).

La formule de Manning-Strickler s'écrit alors :

$$U = kR^{2/3} I^{1/2}$$

L'annexe 6 reproduit un abaque permettant de déterminer, soit le coefficient $k = \dfrac{1}{n}$ en fonction de la nature du lit, soit l'une des quatre valeurs U, k, R et I connaissant les trois autres.

A titre indicatif, le coefficient $k = \frac{1}{n}$ applicable au Rhône coulant dans ses propres alluvions, dans le tiers central de sa vallée (pente de la ligne d'eau = 0,7 m par km) est d'environ 35 (ce qui correspond à un coefficient $n = 0{,}0286$) ; pour le canal d'amenée de l'usine de Kembs $k = 46$ ($n = 0{,}0218$) pour le canal de navigation et $k = 57$ ($n = 0{,}0176$) pour le canal usinier.

Plus récemment (1957) le hongrois Szesztay, se basant sur de nombreuses observations de vitesses relatées dans la littérature technique, a proposé la relation suivante entre le coefficient n de Manning, Ganguillet et Kutter et la dimension moyenne ϵ des rugosités des parois :

$$\frac{1}{n} = 19{,}8 \log \frac{915}{\epsilon} \qquad (\epsilon \text{ en cm})$$

Formule de Cowan

Cette formule permet d'estimer la valeur du coefficient n en séparant l'influence des différents facteurs. Elle s'écrit :

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4)\, m_5$$

Les valeurs de ces divers coefficients sont explicitées ci-après :

Coefficient n_0 : c'est le coefficient valable pour un cours d'eau ou un canal rectiligne dont les parois, les berges et le fond sont homogènes et lisses. La valeur de n_0 ne dépend alors que de la nature des parois et peut être prise égale à

$n_0 = 0{,}020$	pour	la terre
0,025	pour	le rocher
0,024	pour	le gravier fin
0,028	pour	le gravier grossier

Coefficient n_1 : il traduit l'influence des *irrégularités de surface* du fond et des parois ; on peut adopter les valeurs suivantes :

– Parois lisses, comparables aux meilleures surfaces susceptibles d'être obtenues avec le matériau considéré : $n_1 = 0$.

– Parois comportant de légères irrégularités : $n_1 = 0{,}005$.

– Parois comportant des irrégularités modérées ; ce sera le cas par exemple des canaux peu ou pas dragués, des cours d'eau naturels dont les berges sont modérément érodées ou affaissées : $n_1 = 0{,}010$.

– Parois comportant des irrégularités importantes ; ce sera le cas par exemple des cours d'eau naturels ou des canaux dont les berges sont très marécageuses, érodées ou affaissées, des canaux de contours et de surfaces irrégulièrement taillés dans la pierre : $n_1 = 0{,}020$.

Coefficient n_2 : il traduit l'influence des *variations de forme et de dimensions de la section mouillée.*

– Pour une section présentant une variation progressive on adoptera $n_2 = 0$.

– Pour une section présentant des variations alternées occasionnelles (alternance des grandes et petites sections, déplacement du courant principal d'une rive à l'autre résultant des variations de forme) on adoptera $n_2 = 0{,}005$.

– Pour une section présentant des variations alternées fréquentes on adoptera $n_2 = 0{,}010$ à $0{,}015$.

Coefficient n_3 : il traduit l'influence des *obstructions* de la section mouillée par des dépôts d'ordures, racines apparentes, souches d'arbres, blocs de pierre, troncs d'arbres tombés ou enracinés, etc.

Pour apprécier l'influence de ces obstacles, il faut éviter de faire intervenir les facteurs considérés précédemment ; il convient d'estimer notamment jusqu'à quel point les obstructions réduisent la surface moyenne de la section mouillée, la forme de ces obstructions (les obstacles anguleux provoquent une turbulence plus grande que ceux dont les formes sont arrondies et les surfaces polies), la position et l'espacement des obstructions dans le sens transversal et dans le sens longitudinal dans le bief considéré.

Compte tenu de ces remarques, on pourra adopter pour le coefficient n_3 les valeurs suivantes :

– Obstructions négligeables : $n_3 = 0$

– Obstructions faibles : $n_3 = 0{,}010$ à $0{,}015$

– Obstructions appréciables : $n_3 = 0{,}020$ à $0{,}030$

– Obstructions importantes : $n_3 = 0{,}040$ à $0{,}060$

Coefficient n_4 : il traduit l'influence de la *végétation.*

– *Végétation de faible importance* : pousses denses d'herbes flexibles (gazon) dont la hauteur moyenne est de l'ordre de la moitié ou du tiers de la profondeur (par exemple l'herbe bleue ou Bermuda), jeunes plantations arbustives souples (saule, tamaris) dont la hauteur moyenne est de l'ordre du tiers ou du quart de la profondeur.

On prendra : $n_4 = 0{,}005$ à $0{,}010$.

– *Végétation modérée* : herbes dont la hauteur moyenne est de l'ordre de la moitié de la profondeur, herbes résistantes ou jeunes plantations arbustives à feuillage peu épais dont la hauteur moyenne est de l'ordre du tiers à la moitié de la profondeur ; buissons peu denses (saules de un à deux ans) en hiver le long des berges, sans végétation importante dans le lit du cours d'eau dont le rayon hydraulique est supérieur à 0,70 m.

On prendra : $n_4 = 0{,}010$ à $0{,}025$.

– *Végétation importante* : herbes dont la hauteur moyenne est de l'ordre de la profondeur ; arbres de 8 à 10 ans entremêlés de quelques buissons sans feuillage en hiver, pour des cours d'eau dont le rayon hydraulique est supérieur à 0,70 m ; en période végétative, arbres tels que des saules touffus de un an, entremêlés d'herbes très développées sur les berges, sans végétation notable dans le lit du cours d'eau dont le rayon hydraulique est supérieur à 0,70 m.

On prendra $n_4 = 0{,}025$ à $0{,}050$.

– *Végétation très importante* : herbes dont la hauteur moyenne dépasse le double de la profondeur ; en période végétative, présence de saules de un an touffus, entremêlés d'herbes en pleine croissance sur les berges, ou pousses denses de roseaux au fond du lit du cours d'eau dont le rayon hydraulique reste partout inférieur à 3 à 5 m ; en période végétative, présence d'arbres entremêlés d'herbes et de buissons très feuillus, le rayon hydraulique restant partout inférieur à 3 à 5 m.

On prendra : $n_4 = 0{,}050$ à $0{,}10$.

Coefficient m_5 : ce facteur correctif traduit l'importance des *méandres* qui peut être estimée par le rapport de la longueur du profil longitudinal du cours d'eau à la longueur du segment de droite joignant les deux extrémités du bief considéré.

L'influence des méandres est dite *modérée* pour des rapports de l'ordre de 1 à 1,2 et on prendra $m_5 = 1$.

Cette influence est dite *appréciable* pour des rapports de l'ordre de 1,2 à 1,5 et on prendra $m_5 = 1{,}15$.

L'influence est *importante* pour des rapports supérieurs à 1,5 et on prendra $m_5 = 1{,}3$.

Remarques : Les valeurs des coefficients de la formule de Cowan ont été établies à partir d'un échantillon de 40 à 50 cours d'eau de faible importance ; néanmoins la méthode s'applique également à des cours d'eau plus larges dont le rayon hydraulique dépasse 5 m.

Cette méthode ne fait pas intervenir l'influence des particules en suspension.

Application aux écoulements à surface libre des formules universelles de perte de charge.

Le nombre considérable d'études consacrées aux pertes de charge dans les canalisations à partir des recherches de Prandtl, Nikuradse, Karman, Colebrook, etc. devait avoir pour conséquence de rechercher dans quelle mesure ces formules "universelles" pourraient s'appliquer aux écoulements à surface libre.

Rappelons au préalable l'expression du *nombre de Reynolds* de l'écoulement dans un canal.

On sait que pour une canalisation de diamètre D, on a

$$\mathcal{R} = \frac{UD}{\nu}$$

Dans le cas d'un canal de section circulaire ou demi-circulaire, $D = 4R$ puisque

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{D}{4}.$$

Donc

$$\mathcal{R} = \frac{4UR}{\nu}$$

Ceci étant posé, les recherches ont porté sur la manière dont le nombre de Reynolds pourrait intervenir dans le coefficient C de la formule de Chézy.

Remarquons que puisque $C = \frac{1}{\sqrt{b_1}}$ et $\lambda = 8gb_1$, le coefficient de Chézy est lié au coefficient adimensionnel de résistance λ par l'expression $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$.

Formules de Thijsse (1949)

On retrouve les trois catégories d'écoulement suivant la valeur du nombre de Reynolds et le degré de rugosité des parois.

a) *Pour les parois lisses* :

$$C = 18 \log \frac{3\mathcal{R}}{C}$$

ou

$$C = 18 \log \frac{12}{\nu} R^{3/2} I^{1/2}$$

C n'est fonction que de $\mathcal{R}$, comme pour l'écoulement dans les canalisations (cf. formules de Von Karman, Blasius, etc.).

b) *Pour les parois rugueuses* :

$$C = 18 \log \frac{12R}{\epsilon}$$

ϵ représentant la hauteur des aspérités des parois.

Le coefficient C n'est plus fonction que de la rugosité relative ϵ/R et est indépendant du nombre de Reynolds comme dans les formules de Nikuradse sur le régime de pleine turbulence dans les canalisations.

c) *Pour la zone de transition* :

$$C = -18 \log \left[\frac{\epsilon}{12R} + \frac{C}{3\mathcal{R}} \right]$$

On retrouve ici une formule qui associe les deux précédentes et qui est l'homologue de la formule de Colebrook pour l'écoulement dans les canalisations.

Formules de Powell (1950)

L'américain Powell reprenant les résultats obtenus par Keulegan (1938) propose les formules suivantes très voisines de celles de Thijsse :

a) *Pour les parois lisses :*

$$C = 23 \log \frac{3,3\,\mathcal{R}}{C}$$

b) *Pour les parois rugueuses :*

$$C = 23 \log \frac{R}{\epsilon}$$

c) *Pour la zone de transition :*

$$C = -\,23 \log \left[\frac{\epsilon}{R} + \frac{C}{3,3\,\mathcal{R}}\right]$$

Powell donne, en outre, les valeurs suivantes pour ϵ, hauteur des aspérités :

Eternit (d'aprés Heyndrickx)	ϵ = 0,03 mm
Ciment lissé	0,06 mm
Bois non raboté	0,3 mm
Béton	1,3 mm
Terre (canaux rectilignes et uniformes)	13 mm
Terre (canaux dragués)	33 mm

Formule de Crump (1956)

Cette formule se déduit immédiatement de la formule de Colebrook en y introduisant le coefficient de Chézy C à la place du coefficient de résistance λ $\left(\lambda = \frac{8g}{C^2}\right)$ et le rayon hydraulique moyen R à la place du nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ $\left(\mathcal{R} = \frac{4\,UR}{\nu}\right)$. On obtient ainsi :

$$C = -\sqrt{32g}\,\log\left[0,0676\,\frac{\epsilon}{R} + \frac{0,222\,\nu}{R\,\sqrt{gJR}}\right]$$

dans laquelle :

C est le coefficient de Chézy,
ν est le coefficient de viscosité cinématique en m^2/s,
ϵ est la hauteur moyenne des rugosités des parois en m,
R est le rayon hydraulique moyen de la section en m,
J est la perte de charge unitaire ou la pente du canal en *m. p. m.*

La formule de Crump est donc une autre forme de l'équation de Colebrook et, à ce titre, s'applique aussi bien aux canalisations en charge qu'aux écoulements à surface libre.

Formule de Chen Che-Pen

Soient λ le coefficient de perte de charge dans un canal, c'est-à-dire

$$\lambda = 8gb_1 = \frac{8gRI}{U^2}$$

et λ' le coefficient de perte de charge dans une canalisation de section droite circulaire correspondant à la même valeur du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement considéré.

En régime laminaire $\lambda = \lambda'$.

En régime turbulent $\lambda > \lambda'$ en raison de l'influence de la surface libre dans le canal, cette influence se traduisant par la formule suivante déduite des expériences de Chen Che-Pen :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda'}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 41,5\,\lambda\mathcal{F}^2\,\frac{B}{L} - 3,2\,\mathcal{F} + 2,92$$

avec

$\mathcal{F}$ = nombre de Froude de l'écoulement $= \dfrac{U}{\sqrt{gh}}$,

U = vitesse moyenne $= \dfrac{Q}{\Omega}$,

h = profondeur,

B = périmètre mouillé de la section transversale du canal,

L = largeur superficielle.

Formule de White et Colebrook

Cette formule explicite le coefficient de Chézy C :

$$C = 18 \log \frac{6R}{\epsilon + \frac{\delta}{7}}$$

R = rayon hydraulique moyen de la section mouillée (m),
ϵ = longueur caractérisant la rugosité des parois (m),
δ = épaisseur de la couche-limite (m).

Pour des parois rugueuses $\delta \simeq 0$ et pour des parois lisses $\epsilon \simeq 0$.

Détermination de ϵ : C'est la hauteur moyenne de la rugosité équivalente, c'est-à-dire le rayon des sphères qui, couvrant uniformément les parois et le fond du canal, provoqueraient la même perte de charge.

Voici quelques valeurs de ϵ :

Rochers ou pierres	: ϵ = 0,5 à 1 fois le diamètre des pierres suivant leur espacement ;
Sable sans rides	: ϵ = 0,5 fois le diamètre des grains ;
Sable avec rides	: ϵ = 0,75 à 1 fois la hauteur des rides ;
Terre lissée	: ϵ = 10 à 25 mm ;
Graviers	: ϵ = 5 à 25 mm ;
Maçonnerie	: ϵ = 2,5 à 10 mm ;
Béton	: ϵ = 1 à 10 mm suivant le degré de lissage ;
Acier	: ϵ = 0,5 à 1 mm ;
Acier asphalté	: ϵ = 0,01 à 0,025 mm ;
Amiante ciment	: ϵ = 0,25 à 1 mm ;
Bois rugueux	: ϵ = 0,25 à 1 mm ;
Bois raboté	: ϵ = 0,1 à 0,25 mm.

Epaisseur de la couche-limite δ : On peut déduire δ de la formule :

$$\delta = \frac{12\nu}{\sqrt{gRI}}$$

ν = viscosité cinématique du liquide en m^2/s,

R = rayon hydraulique moyen de la section mouillée (m),

I = pente longitudinale du canal ($m. p. m.$).

L'influence de la couche-limite n'est appréciable que pour $\delta > \frac{\epsilon}{3}$ ce qui nécessite de faibles vitesses et des parois lisses. Dans les canaux en terre δ peut être négligée.

La formule de White et Colebrook est parfois préférée à celle de Manning pour les canaux revêtus et ne comportant pas de végétation.

Remarque générale sur les formules universelles de perte de charge appliquées aux écoulements à surface libre.

D'une manière générale l'utilisation de ces formules "universelles" rencontre bien des oppositions de la part de nombreux hydrauliciens qui leur préfèrent les formules de Bazin, Manning, Strickler, etc. Ils estiment en effet que l'emploi de ces formules "universelles" ne présente guère d'avantages puisqu'en somme les coefficients γ (Bazin), n (Manning) ou k (Strickler) des formules anciennes sont remplacés ici par ϵ dont le choix et la détermination ne sont guère plus commodes.

Il faut cependant faire remarquer que ces formules nouvelles présentent une structure plus conforme aux lois de la mécanique que les formules empiriques souvent établies d'après les résultats d'expériences faites dans un domaine assez limité et employées par la suite dans tous les cas possibles avec des extrapolations que ceux qui les utilisent ne soupçonnent même pas.

XII.1.3. Formules de l'écoulement dans les cours d'eau naturels

XII.1.3.1. *Application aux cours d'eau naturels des formules de l'écoulement dans les canaux*

Parmi ces formules celle de Ganguillet et Kutter paraît moins utilisée depuis quelques années et il semble bien que ce soient, en définitive, les formules de Bazin et de Manning-Strickler qui aient la faveur des Ingénieurs.

L'avantage de la formule de Manning-Strickler est d'ailleurs augmenté par la donnée complémentaire de Strickler donnant à $k = \frac{1}{n}$ la valeur $26 \left(\frac{R}{d_{35}}\right)^{1/6}$ suivant la formule donnée précédemment.

En définitive, pour les cours d'eau naturels on utilisera les formules de Bazin ou de Manning-Strickler en adoptant les *coefficients du tableau suivant emprunté à Pardé* :

N° des catégories(1)	C de Chézy	$k = \frac{1}{n}$ de Manning-Strickler	γ de Bazin
1	35 à 32	23 à 26	2,20 à 3
2	33 à 38	27 à 29	2 à 2,70
3	39 à 42	30 à 33	1,80 à 2,50
4	43 à 45	34 à 37	1,75 à 2
5	46 à 48	38 à 40	1,50 à 1,80
6	49 à 52	41 à 42	1,40 à 1,70
7	50 à 55	43 à 45	1,20 à 1,50
8	56 à 65	46 à 50	1 à 1,50

Ajoutons enfin que le *coefficient* à utiliser dans les formules est *susceptible de varier dans une même section* du cours d'eau.

----

(1) *Catégories-types de rivières au point de vue de la rugosité* :

1 – Petits cours d'eau de montagne à fond très irrégulier, largeur de l'ordre de 10 à 30 mètres.

2 – Cours d'eau de montagnes larges de 30 à 50 mètres, avec pentes supérieures à 0,002 et fond de gros graviers (par exemple 10 à 20 centimètres de diamètre pour beaucoup d'entre eux).

3 – Rivières de largeur comparable ou supérieure, à pente comprise entre 0,0008 et 0,002, avec fond de graviers dont le diamètre extrême en général ne dépasse pas 8 à 10 centimètres (Rhin à Bâle).

4 – Pente comprise entre 0,0006 et 0,0008, graviers de 4 à 8 centimètres (Rhône à Lyon).

5 – Même pente mais cailloux plus petits (Rhône à la Porte de Scex avant le Léman).

6 – Pente inférieure à 0,0006 et supérieure à 0,00025, cailloux très petits ou sable (Danube à Vienne).

7 – Cours d'eau peu turbulents, avec pentes de 0,00012 à 0,00025, fond de sable et de boue (Seine, Saône, Rhin inférieur).

8 – Très gros cours d'eau à très faible pente (moins de 0,00012) et fond très lisse (Volga, Danube hongrois, Mississipi inférieur).

Ces variations peuvent être dues :

a) Aux modifications de rugosité dues à l'état de la végétation (voir au § XII.1.4 le cas des sections hétérogènes) ;

b) A celles dues au déplacement des bancs de sable et de gravier ;

c) Aux variations de la forme de la section et du niveau de l'eau pour un même débit dues elles-mêmes à de multiples causes humaines ou naturelles (voir au § XII.1.4 le cas des sections composées) ;

d) Aux variations des quantités de matières entraînées ou en suspension ;

e) Aux modifications de viscosité dues à la température ou aux matières en suspension ;

f) A la formation ou à la disparition de "ripple marks" ;

g) Aux modifications des vitesses d'approche.

En général les débits moyens et les faibles crues ont un coefficient assez stable (sauf si le mouvement des matériaux s'intensifie) qui peut être considéré comme typique pour la section mais ce coefficient (n ou γ) est souvent beaucoup plus grand pour les basses eaux.

XII.1.3.2. *Formules sans coefficient de rugosité*

Certains Ingénieurs estiment que pour les cours d'eau naturels la rugosité des parois dépend essentiellement du caractère du cours d'eau et est donc définie par la *largeur superficielle* L, la *profondeur moyenne* h_m et la *pente* I ; un coefficient de rugosité serait donc dans ces conditions superflu. D'ailleurs le coefficient de rugosité d'un cours d'eau varie avec le niveau de la surface libre.

Reste à savoir si les caractéristiques en question (L, h_m et I) suffisent pour déterminer la rugosité, indépendamment de la nature et des dimensions des matériaux constitutifs du lit.

Quoiqu'il en soit, d'assez nombreuses formules de ce type ont été proposées ; nous retiendrons les suivantes :

1. *Hermanck* (1905) :

pour une profondeur moyenne :

$$\frac{\Omega}{L} = h_m < 1{,}50 \text{ m} \qquad U = 30{,}7\, h_m\, I^{0{,}5}$$

$$1{,}50 < h_m < 6{,}00 \text{ m} \qquad U = 34\, h_m^{0{,}75}\, I^{0{,}5}$$

$$h_m > 6{,}00 \text{ m} \qquad U = 44{,}5\, h_m^{0{,}6}\, I^{0{,}5}$$

ou

$$U = \left(50{,}2 + \frac{h_m}{2}\right)\sqrt{h_m\, I}$$

2 – *Gerald Lacey* (1939-40) a donné la formule :

$$U = 10{,}7\, R^{2/3}\, \sqrt{I} \qquad \left(R = \frac{\Omega}{B}\right)$$

utilisable pour les rivières coulant dans leurs alluvions.

3 – *Malhotra* (1939-40) propose de remplacer le coefficient 10,7 par 12,1.

Ces différentes formules ne sont guère répandues vraisemblablement à cause de leur caractère local. Gerald Lacey a d'ailleurs limité l'application de sa formule à des rivières coulant dans leurs alluvions en état de régime, c'est-à-dire des rivières qui, en crue, ont remis leurs alluvions en mouvement et ne les ont pas encore déposées (il s'agit donc de rivières au sommet de leur crue).

Pour les écoulements ordinaires Lacey présente une autre formule, celle de Lea-Lacey (1940) qui ne diffère que très peu de celle de Manning.

On est donc ramené aux formules classiques établies pour des canaux artificiels avec choix judicieux du coefficient.

XII.1.4. Cas des sections composées ou hétérogènes

XII.1.4.1. *Section composée*

Ce cas peut se présenter lors du débordement d'un canal ou de l'inondation d'un cours d'eau (fig. XII.1.4).

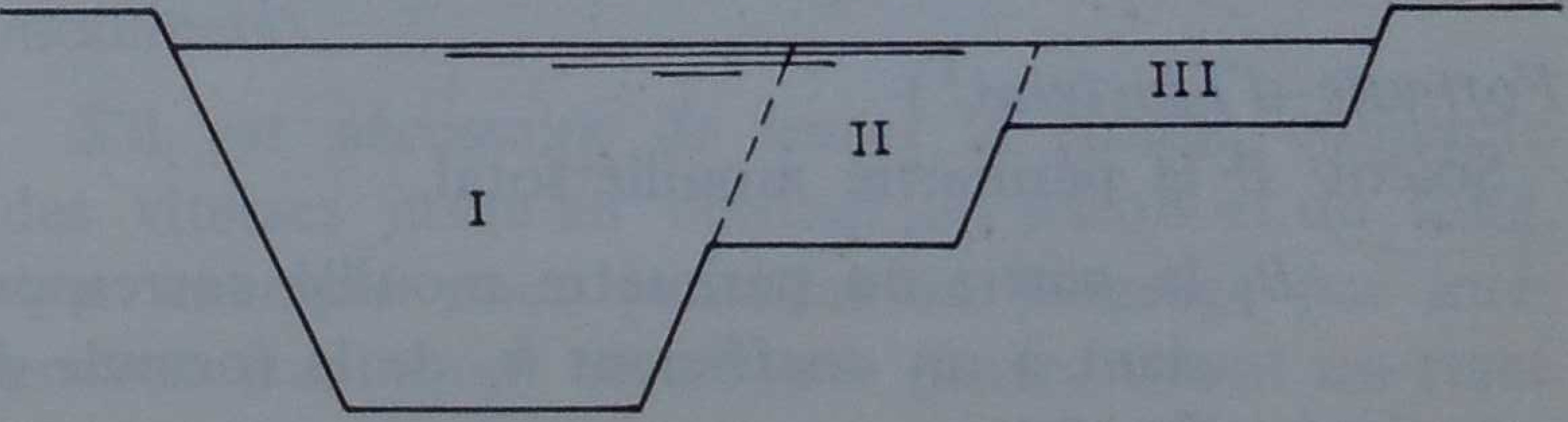


Fig. XII.1.4 – Section composée

Il convient alors de décomposer la section en fractions I, II, III, etc. et de calculer les valeurs de C, Ω et R correspondant à chaque section élémentaire. On utilise la formule :

$$Q = (C_1\, \Omega_1 \sqrt{R_1} + C_2\, \Omega_2 \sqrt{R_2} + \cdots)\sqrt{I}$$

Pour le partage de la section totale en sections partielles Ω_1, Ω_2, Ω_3... Grantz conseille de tracer

les surfaces prolongeant les talus noyés, ces surfaces marquant grossièrement la séparation des vitesses.

XII.1.4.2. *Section hétérogène*

Pour une section homogène la formule de Chézy permet d'écrire :

$$I = \frac{U^2}{C^2 R}$$

ou

$$I = \frac{U^2}{\Omega}\ \frac{B}{C^2}$$

Si $B_1, B_2, \ldots B_n$ sont les parties du périmètre mouillé d'une section hétérogène dont les rugosités sont définies respectivement par les coefficients de Chézy $C_1, C_2, \ldots C_n$, on peut écrire :

$$I = \frac{U^2}{\Omega}\left(\frac{B_1}{C_1^2} + \frac{B_2}{C_2^2} + \cdots + \frac{B_n}{C_n^2}\right)$$

Si, par exemple, on utilise la formule de Bazin :

$$I = \frac{U^2}{87^2 \Omega} \left[B_1\left(1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{R}}\right)^2 + \cdots + B_n\left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{R}}\right)^2\right]$$

ou

$$U = \frac{87\sqrt{\Omega I}}{\sqrt{B_1\left(1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{R}}\right)^2 + \cdots + B_n\left(1 + \frac{\gamma_n}{\sqrt{R}}\right)^2}}$$

Formule d'Einstein[1]

Soient B le périmètre mouillé total,

B_i la partie du périmètre mouillé correspondant à un coefficient k_i de la formule de Strickler,

k le coefficient de rugosité moyen applicable à la section totale.

On a :

$$k = \left[\frac{B}{\sum \frac{B_i}{k_i^{3/2}}}\right]^{2/3}$$

ce qui revient à admettre :

$$\frac{B}{k^{3/2}} = \sum \frac{B_i}{k_i^{3/2}}$$

c'est-à-dire que $1/k^{3/2}$ est la moyenne pondérée proportionnellement à B_i des coefficients de rugosité $1/k_i^{3/2}$ correspondants.

La formule d'Einstein, établie par voie théorique, donne dans certains cas un coefficient de rugosité moyen k supérieur à la réalité ; supposons, par exemple, un profil comprenant deux rugosités :

k_1 sur une très faible fraction B_1,

$k_2 > k_1$ sur une fraction $B_2 = B - B_1$.

Dans ce cas la turbulence engendrée par la fraction la plus rugueuse B_1 s'étend, dans le profil en travers, bien au-delà de la zone que lui assigne le raisonnement d'Einstein et le coefficient de rugosité moyen k est inférieur à celui donné par la formule qui conduirait donc à une vitesse supérieure à la réalité.

* * *

D'une manière générale, *les formules des écoulements à surface libre* en régime uniforme *sont moins précises* que celles concernant l'écoulement dans les canalisations sous pression.

Ceci tient d'une part au fait que la *forme de la section transversale* d'une canalisation est toujours circulaire et parfaitement définie par un seul paramètre (son diamètre) alors que la forme des sections transversales des canaux est très variable ; les paramètres de l'écoulement dans une canalisation tiennent essentiellement à la nature et la rugosité des parois alors que dans un canal il intervient, en plus, la *forme beaucoup plus complexe de la section transversale* que le paramètre R (rayon hydraulique moyen) ne suffit pas toujours à traduire très exactement dans les formules, surtout lorsqu'on s'écarte des formes usuelles.

D'autre part, *l'existence d'une surface libre* entraîne, comme nous l'avons déjà souligné, une complication supplémentaire par suite de la résistance différente de l'air et des parois solides sur la masse liquide en écoulement.

(1) "Schweizerische Bauzeitung", 24 février 1934.

XII.1.5. Vitesses

XII.1.5.1. *Répartition des vitesses dans une section transversale*

La forme des courbes de répartition des vitesses dans une section transversale d'un canal en régime uniforme confirme les indications données précédemment en ce qui concerne la répartition des vitesses dans une section transversale d'un courant liquide en régime turbulent.

Fig. XII.1.5.1

Par exemple (fig. XII.1.5.1) dans un canal de section trapézique la répartition des vitesses le long d'une verticale AB se présente suivant la courbe ab ; la vitesse maximale V est obtenue en un point M très-proche de la surface libre $\left(AM \leqslant \frac{H}{3}\right)$

Le long d'une horizontale CD (fig. XII.1.5.2) la courbe de répartition des vitesses cd est symétrique par rapport à l'axe de la section.

Fig. XII.1.5.2

Les courbes joignant, dans une section transversale, les points d'égale vitesse sont appelées *isodromes* ou *isotaches*. Pour une section régulière et homogène elles ont l'allure indiquée sur la figure XII.1.5.3.

Fig. XII.1.5.3

Pour des sections de forme irrégulière (rivière) la forme des isodromes est beaucoup plus variable ; notamment il peut exister plusieurs zones de vitesse maximale dans la section (fig. XII.1.5.4).

Fig. XII.1.5.4

Au voisinage des parois (fond et talus) il existe, comme nous le savons, une *couche-limite* à fort gradient de vitesse, la vitesse au contact immédiat de la paroi étant évidemment nulle.

En fait, les appareils de mesure usuels ne permettent pas de déceler la couche-limite et on appellera "vitesse à la paroi" la vitesse mesurée au point le plus proche de la paroi susceptible d'être atteint par les appareils de mesure utilisés (tube de Pitot, moulinets).

S'il est nécessaire de tracer la courbe complète des vitesses jusqu'au contact des parois et du fond (par exemple pour procéder au jaugeage par intégration graphique) on adopte généralement un tracé conventionnel dans la zone de la couche-limite (cf. § XII.3.7.2).

Si on désigne par :

V la vitesse maximale à la surface libre de la section,

U la vitesse moyenne $= \frac{Q}{\Omega}$,

V' la vitesse au fond,

on peut donner les relations *approchées* suivantes :

$$U = 0{,}8\ V \text{ (Prony)}$$

$$V' = 0{,}6\ V \text{ (Prony)}$$

$$U = 0{,}842\ V \text{ (Fargue)}$$

$$U = V - 14\sqrt{RI} \text{ (Bazin)}$$

ou

$$U = V\,\frac{C}{C + 14}$$

$$U = 0{,}82\ V\,\frac{1 + 0{,}6\sqrt{R}}{1 + 0{,}9\sqrt{R}} \text{ (Koechlin) pour } R < 3 \text{ m.}$$

Ces relations permettent de déduire U, donc le débit $Q = \Omega U$, de la plus grande vitesse en surface, laquelle peut être facilement mesurée avec un flotteur.

Toutefois cette méthode de jaugeage est très approximative et ne peut être utilisée que sur des canaux artificiels bien réguliers ; elle ne donne en tout état de cause que des ordres de grandeur.

Les observations faites à l'occasion des crues de 1953 et 1955 ont montré que le rapport U/V est généralement supérieur aux valeurs données ci-dessus et qu'il serait plutôt de l'ordre de 0,90 à 0,92 sur des cours d'eau naturels dans des sections aussi régulières et uniformes que possible.

XII.1.5.2. Vitesses limites

Dans un canal artificiel les vitesses au voisinage des parois et du fond ne doivent pas dépasser certaines valeurs qui risqueraient de provoquer l'érosion des berges. Les vitesses limites à ne pas dépasser sont évidemment fonction de la nature des parois ; elles peuvent être choisies dans le tableau suivant :

Nature des parois	Vitesses maximales (m/s)		
	moyenne U	en surface V	au fond V'
Terres détrempées et terres glaises	0,10	0,15	0,08
Argiles grasses	0,25	0,30	0,15
Sables	0,50	0,60	0,30
Graviers	0,95	1,25	0,70
Pierres cassées	1,25	1,50	0,95
Schistes tendres, poudingues	1,85	2,20	1,50
Roches en couches	2,25	2,75	1,80
Roches dures	3,70	4,25	3,15

D'autre part, lorsque les eaux transportent des matières solides en suspension (vases, limons, sables, graviers, etc.) il faut éviter que la vitesse descende au-dessous d'un certain *minimum* pour éviter le dépôt des matériaux transportés ; c'est le cas notamment des canaux utilisés pour le colmatage ou le limonage de certains terrains. On admet généralement que ces vitesses minimales sont de 0,25 m/s pour des limons fins et de 0,50 m/s pour des sables.

XII.1.6. Sections transversales – profils en travers

XII.1.6.1. *Section transversale*

C'est une section plane normale à la direction générale de l'écoulement (fig. XII.1.6.1).

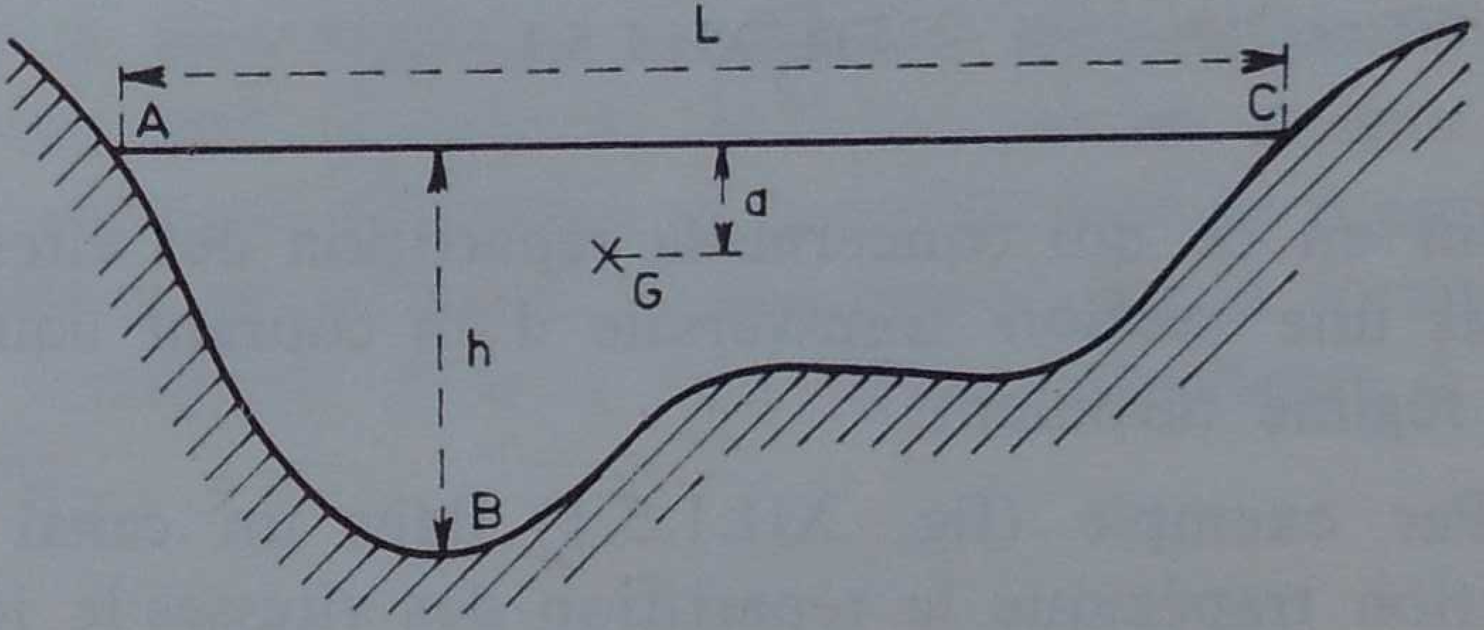


Fig. XII.1.6.1 – Eléments géométriques d'une section transversale

La section mouillée Ω est la portion de section transversale occupée par le liquide.

Les éléments géométriques essentiels de la section mouillée sont :

– *la profondeur h* ou hauteur d'eau au-dessus du fond, appelée parfois *tirant d'eau.* A moins qu'il n'en soit autrement spécifié cette profondeur sera conventionnellement la profondeur maximale ;

– *le périmètre mouillé B* est la longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et le lit (ligne ABC) ;

– *le rayon moyen,* ou rayon hydraulique $R = \dfrac{\Omega}{B}$;

– *la largeur superficielle L,* largeur de la section transversale à la surface libre (corde AC) ;

– *la profondeur moyenne* $h_m = \dfrac{\Omega}{L}$;

– *la profondeur du centre de gravité a.*

XII.1.6.2. *Eléments normaux*

Considérons un canal uniforme (c'est-à-dire dont la section transversale et la pente sont constantes, l'axe rectiligne et les parois homogènes) de pente I, portant un débit Q.

On appelle *profondeur normale* h_n pour le débit Q et la pente I, la profondeur du courant en régime uniforme.

La surface libre, parallèle au fond, définit le *niveau normal* N_n.

Les *éléments normaux* sont les éléments géométriques de la section (R, Ω, B, etc.) correspondant à la profondeur normale h_n ainsi que ceux qui en découlent directement (b, C, etc.).

La profondeur normale h_n se calcule en associant les deux formules suivantes :

Formule de l'écoulement en régime uniforme :

$$U = C\sqrt{RI}$$

Formule du débit :

$$Q = \Omega U$$

soit

$$Q = \Omega C\sqrt{RI} = f(h_n)$$

Pour un canal de pente et de rugosité données, à chaque valeur du débit Q correspond une valeur définie de la profondeur normale h_n déduite des formules ci-dessus.

Si Q varie, h_n varie également et dans le même sens que Q. La courbe $h_n(Q)$ a l'allure indiquée figure XII.1.6.2, c'est *la courbe des profondeurs normales*.

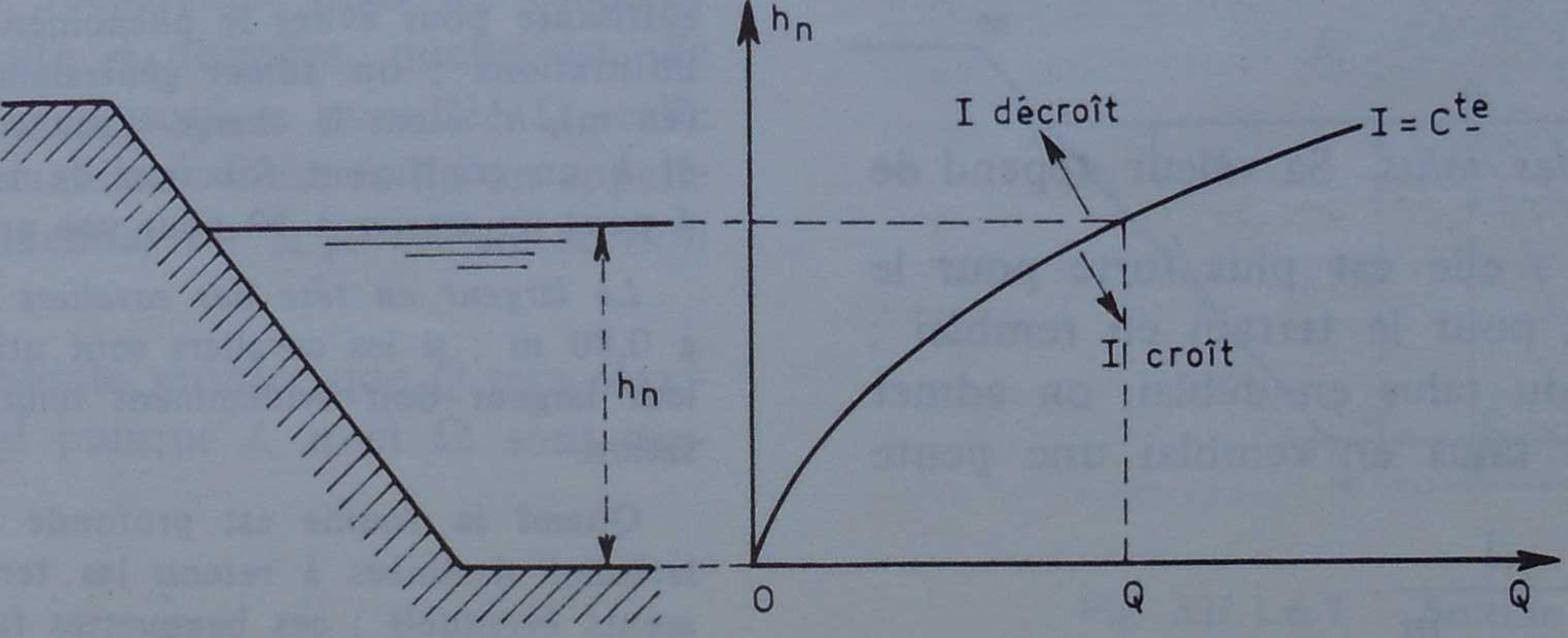


Fig. XII.1.6.2 – Courbe des profondeurs normales

Pour les sections évasées vers le haut (cas général des cours d'eau naturels et de la plupart des canaux artificiels) la courbe des profondeurs normales est univoque, c'est-à-dire qu'à une valeur de Q correspond une seule valeur de h_n.

Dans le cas de sections fermées (aqueducs) nous montrerons au § XII.1.9 que dans une certaine zone de la courbe, à une valeur de Q peuvent correspondre deux valeurs de h_n.

La relation $Q = \Omega U = \Omega C\sqrt{RI}$ montre que la profondeur normale d'un canal de forme donnée dépend de Q, I et de la rugosité des parois. Elle montre également que le régime uniforme n'est possible qu'en canal descendant ($I > 0$).

Pour $I = 0$ (canal horizontal) la profondeur normale serait infinie.

Lorsque le régime n'est plus uniforme, la profondeur dans une section déterminée diffère de h_n. Ainsi que nous le préciserons plus loin lors de l'étude des régimes variés, le régime uniforme, même s'il n'apparaît pas, sera toujours choisi comme référence ; sa profondeur h_n constituera un paramètre entièrement défini, une fois donnés le débit et les caractéristiques du canal (forme et dimensions de la section transversale, nature des parois, pente longitudinale).

XII.1.6.3. *Profils en travers*

La forme générale de la section transversale diffère suivant qu'il s'agit de canaux découverts ou de canaux fermés (aqueducs). La forme de ces derniers est indiquée plus loin.

Les canaux découverts artificiels ont le plus souvent une section *trapézoïdale isocèle* ou *rectangulaire*, parfois *demi-circulaire* ou *parabolique*.

Dans le cas très fréquent d'une section trapézique, on définit les éléments suivants (fig. XII.1.6.3) :

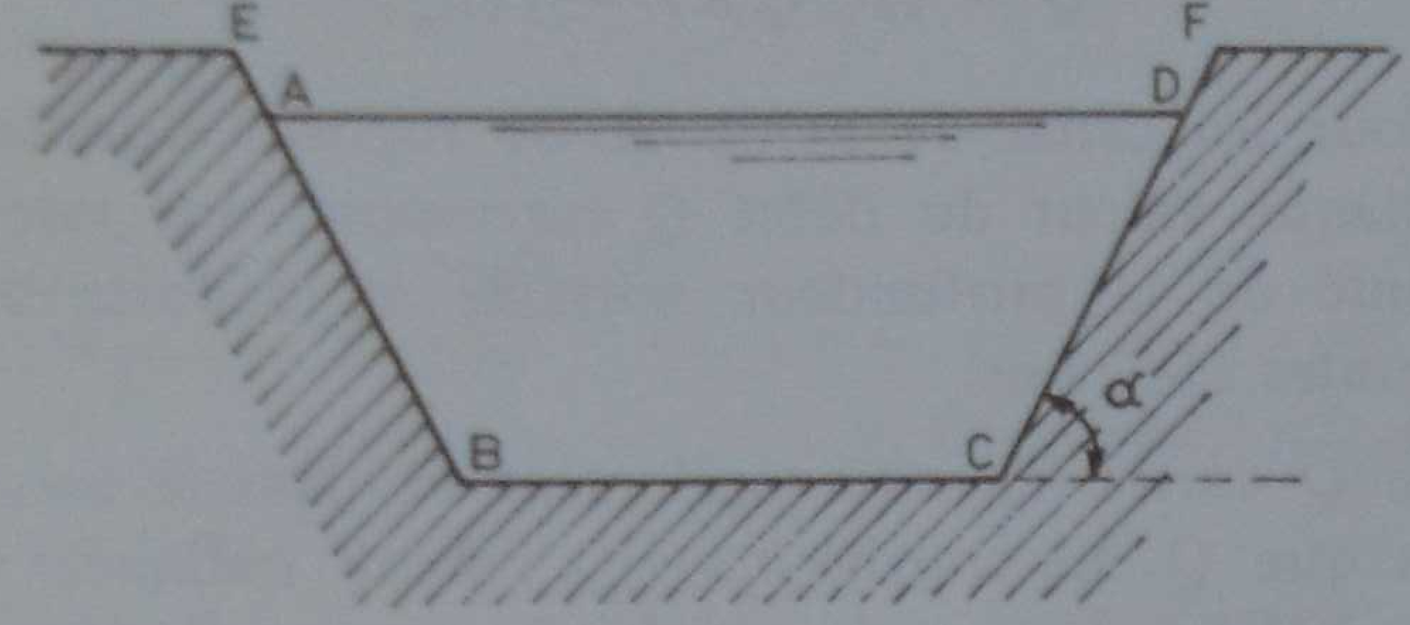


Fig. XII.1.6.3

EF = *gueule* (ou largeur en gueule) ;

BC = *plafond* (ou largeur au plafond) ;

BE et CF = *talus* ;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{m}$ = *pente des talus.* Sa valeur dépend de la nature des parois ; elle est plus forte pour le terrain en déblai que pour le terrain en remblai ; si $1/m$ est la pente du talus en déblai, on admet généralement pour le talus en remblai une pente

$$\frac{1}{m + \frac{m}{2}}.$$

Voici *quelques valeurs de m* :

Rocher compact, maçonnerie ordinaire, béton	0 à 0,25
Rocher fissuré, maçonnerie en pierres sèches	0,50
Argile dure	0,75
Alluvions compactes	1
Gros gravier	1,50
Terre ordinaire, sable grossier	2
Terre remuée, sable moyen	2,50 à 2

Profil mixte : Il est constitué comme le montre la figure XII.1.6.4. Les déblais provenant de la fouille sont disposés en *cavaliers* le long du canal, ce qui donne la possibilité de surélever le plan d'eau au-dessus du terrain naturel. On ménage une *revanche r* entre le niveau de la surface libre et le couronnement des berges, afin de parer aux fluctuations accidentelles de la surface libre ; cette revanche est ordinairement comprise entre 0,20 m pour les petits canaux et 1 m pour les grands, mais ces valeurs sont parfois majorées dans les régions exposées aux grands vents ainsi qu'à l'extérieur des coudes.

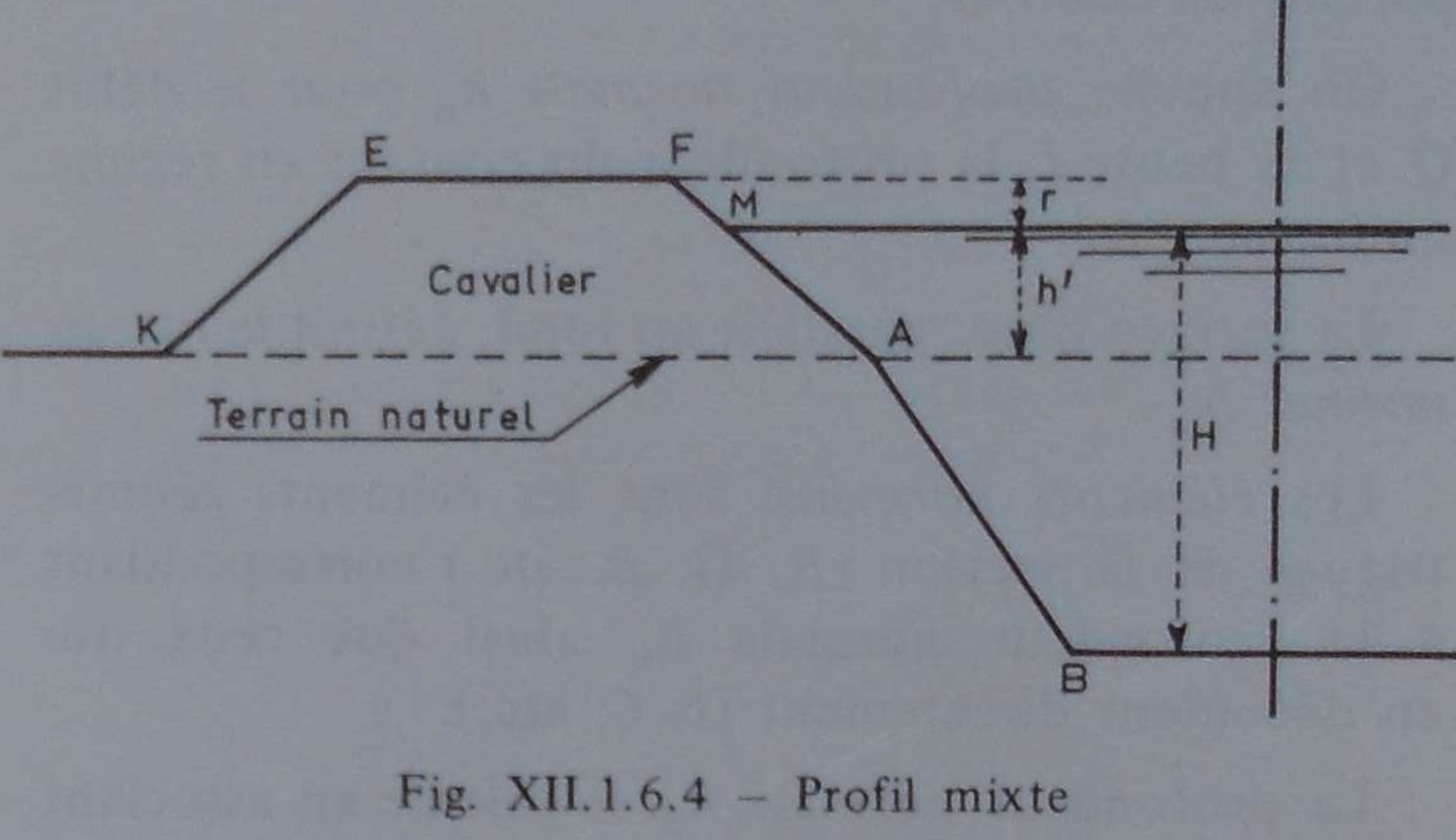


Fig. XII.1.6.4 – Profil mixte

La largeur à la base des cavaliers doit avoir une valeur suffisante pour éviter le phénomène de renard du fait des infiltrations ; on admet généralement : $KA = 0{,}50 + kh'$ (en m), h' étant la charge d'eau sur le pied A du remblai et k un coefficient fonction de la nature du remblai (de 4 pour un gravier à 10 pour une argile).

La largeur en tête des cavaliers (EF) est au moins égale à 0,80 m ; si les cavaliers sont utilisés pour la circulation, leur largeur doit évidemment tenir compte de cette utilisation.

Quand la fouille est profonde on crée des *banquettes* latérales destinées à retenir les terres provenant d'éboulements éventuels ; ces banquettes facilitent en outre la circulation du personnel et l'entretien du canal (fig. XII.1.6.5).

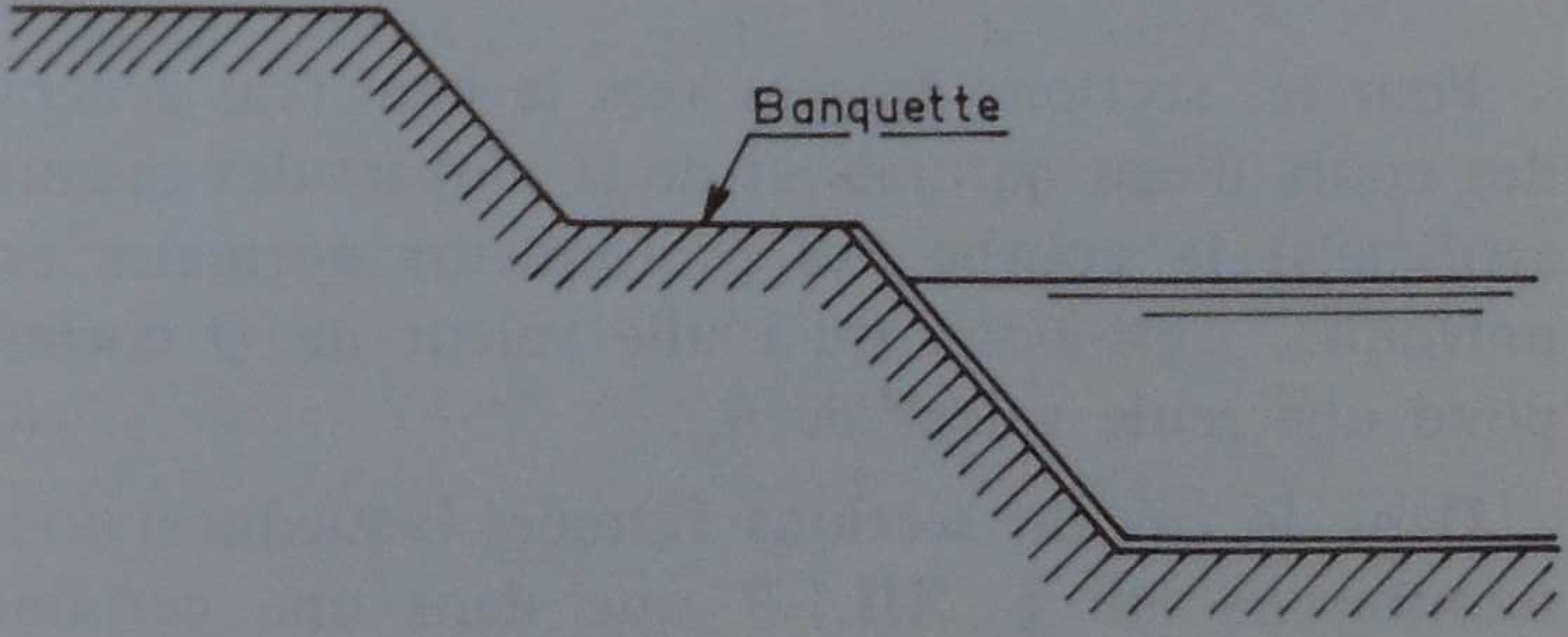


Fig. XII.1.6.5 – Profil mixte avec banquette

Infiltrations – Sections revêtues : Dans les canaux non revêtus, des pertes par infiltration se produisent à travers le fond et les parois ; ces pertes dépendent de la composition et de la consistance du terrain, elles croissent avec le tirant d'eau. En terrain alluvionnaire, pour de grands canaux, elles peuvent atteindre 10 à 30 litres par seconde et par kilomètre. Elles diminuent avec l'âge du canal.

Lorsque l'eau est rare et précieuse, on réduit les pertes par un *revêtement étanche* qui diminue la rugosité des parois, permet de réduire la section et l'encombrement du canal et facilite son entretien.

L'épaisseur du revêtement est minimale lorsque la pente des talus n'excède pas la pente naturelle du terrain ; dans le cas contraire le revêtement doit résister à la poussée des terres et son épaisseur est plus grande.

Les types usuels de revêtements (béton, bitume, asphalte, etc.) sont étudiés dans les ouvrages techniques spécialisés.

XII.1.6.4. *Profil de débit maximal ou forme de section la plus avantageuse*

Considérons une des formules du type Chézy, par exemple celle de Manning :

$$Q = U\Omega = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} \Omega$$

Proposons-nous de rechercher, pour un canal de pente I et de rugosité n données, quelle est, de toutes les formes d'égale surface mouillée Ω, celle qui portera le débit maximal. C'est ce qu'on appelle le *profil de débit maximal* ou la *forme de section la plus avantageuse.*

L'expression précédente montre que Q sera maximal pour R maximal puisque I, n et Ω sont supposés constants.

Or :

$$R = \frac{\Omega}{B}$$

Donc R sera maximal pour B minimal.

XII.1.6.4.1. *Forme demi-circulaire*

De toutes les formes possibles de sections évasées vers le haut c'est évidemment la forme demi-circulaire qui réalise le périmètre minimal pour une aire donnée. Dans ce cas, on a (fig. XII.1.6.6)

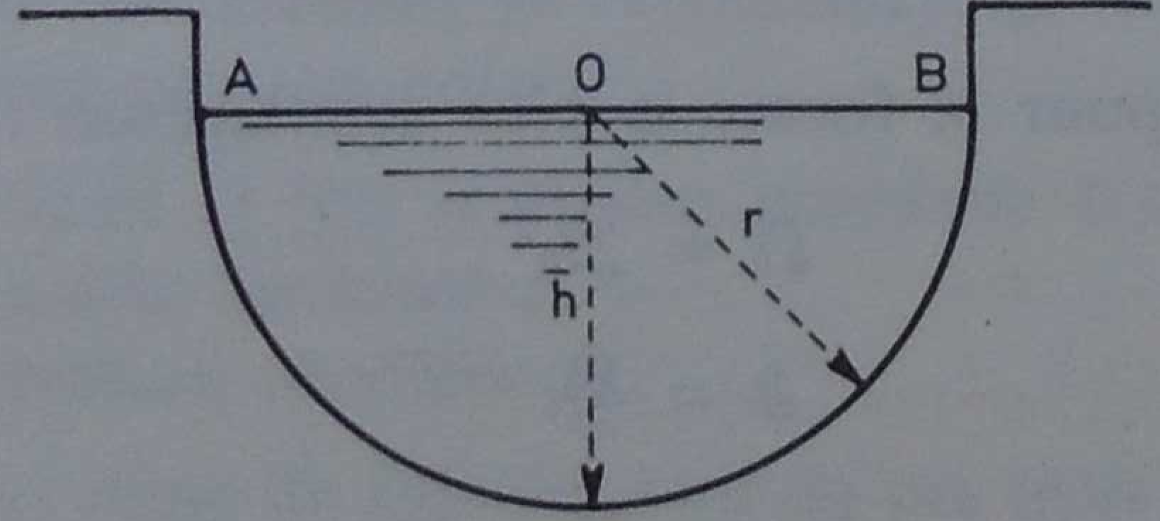


Fig. XII.1.6.6

$$\Omega = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$B = \pi r$$

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{r}{2} = \frac{h}{2}$$

XII.1.6.4.2. *Forme trapézoïdale*

Toutefois la forme demi-circulaire n'est réalisable que pour des canaux artificiels (béton, maçonnerie, amiante-ciment, etc.).

Dans le cas de canaux en terre la forme demi-circulaire entraînerait l'éboulement et la dégradation des parois dans leur partie quasi-verticale et on est donc conduit à la section de forme *trapézoïdale* (fig. XII.1.6.7).

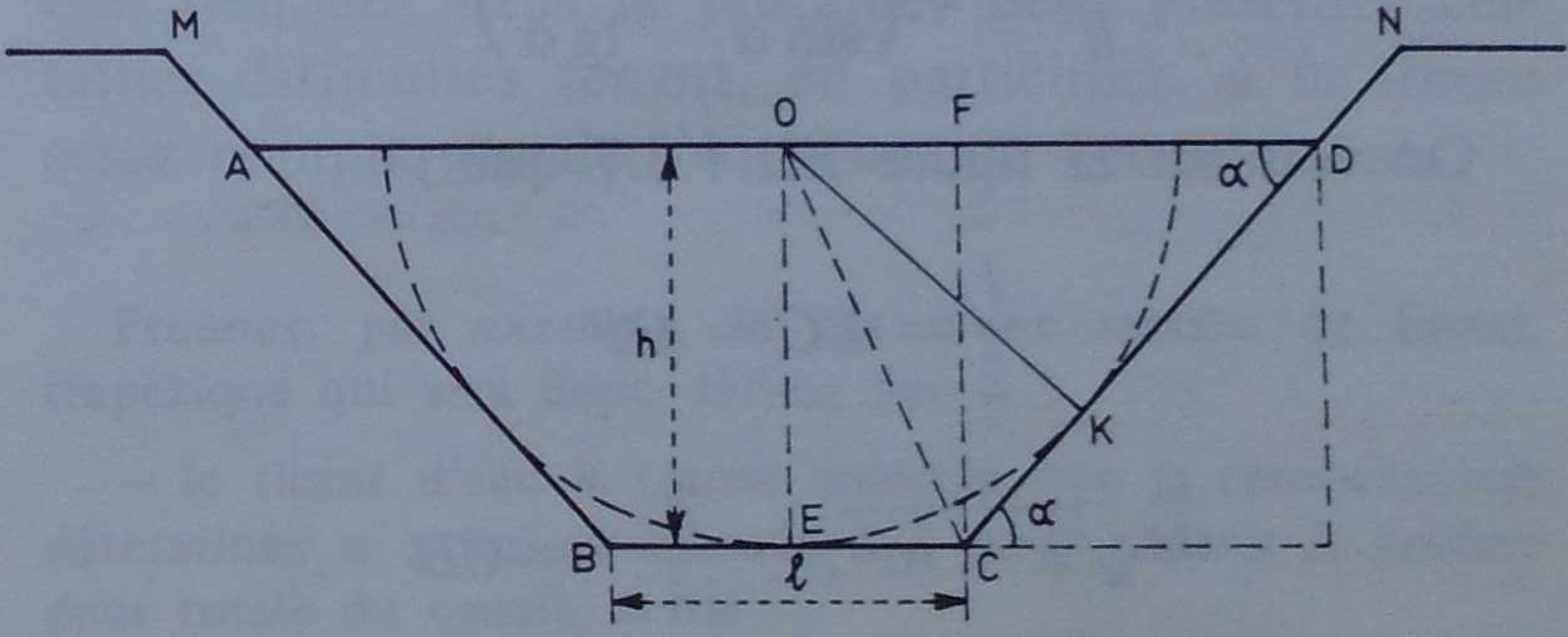


Fig. XII.1.6.7 – Section trapézoïdale de forme la plus avantageuse

Le trapèze isocèle correspondant à la section mouillée sera défini par trois éléments :

– la largeur au plafond $l = BC$,

– la profondeur h,

– la pente des talus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}$.

En fait $m = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ est fonction de la nature des parois et il ne reste donc que deux variables l et h pour définir la forme de section la plus avantageuse.

On a :

$$\Omega = h(l + mh)$$

$$B = l + 2h\sqrt{1 + m^2}$$

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{h(l + mh)}{l + 2h\sqrt{1 + m^2}}$$

l et h étant les deux variables.

Puisque Ω est constant, on doit avoir $d\Omega = 0$
Puisque B est minimal, on doit avoir $dB = 0$

ce qui donne les deux équations suivantes pour définir la forme la plus avantageuse de la section mouillée :

$$d\Omega = h\,dl + (l + 2\,mh)\,dh = 0$$

$$dB = dl + 2\sqrt{1 + m^2}\,dh = 0$$

En éliminant dl et dh il vient, tous calculs faits :

$$\boxed{\frac{l}{2} = h\sqrt{1 + m^2} - mh} \quad [\text{XII.1.6.4.2}]$$

ou

$$\frac{l}{h} = 2\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

On voit sur la figure XII.1.6.7 que :

$$\frac{l}{2} = EC = OF$$

$$h\sqrt{1 + m^2} = \frac{h}{\sin\alpha} = CD$$

$$mh = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} = FD$$

La relation [XII.1.6.4.2] peut donc s'écrire :

$$OF = CD - FD$$

$$OF + FD = OD = CD$$

Le triangle OCD est donc isocèle et ses hauteurs CF et OK sont égales ; on a donc, en définitive :

$$OK = CF = OE = h$$

Le profil trapézoïdal isocèle de débit maximal est donc *circonscriptible à la demi-circonférence dont le diamètre coïncide avec la surface libre et dont le rayon est égal à la profondeur du canal.*

Les *éléments géométriques* de ce profil s'obtiendront en remplaçant dans les formules précédentes l par sa valeur déduite de [XII.1.6.4.2], soit :

$$l = 2(h\sqrt{1 + m^2} - mh)$$

Il vient ainsi :

$$\Omega = h^2(2\sqrt{1 + m^2} - m)$$

$$B = 2h(2\sqrt{1 + m^2} - m)$$

d'où :

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{h}{2}$$

indépendant de la pente des talus du canal.

XII.1.6.4.3. *Forme rectangulaire* (fig. XII.1.6.8)

Cette forme de section est adoptée fréquemment pour les canaux réalisés sur place en matériaux artificiels (maçonnerie, béton).

On peut déduire le rectangle du trapèze en posant :

$$m = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = 0$$

Les formules précédemment établies pour la section trapézoïdale donnent alors :

$$\Omega = lh$$

$$B = l + 2h$$

$$R = \frac{h}{l + 2h}$$

$$l = 2h$$

(caractéristique de la forme la plus avantageuse)

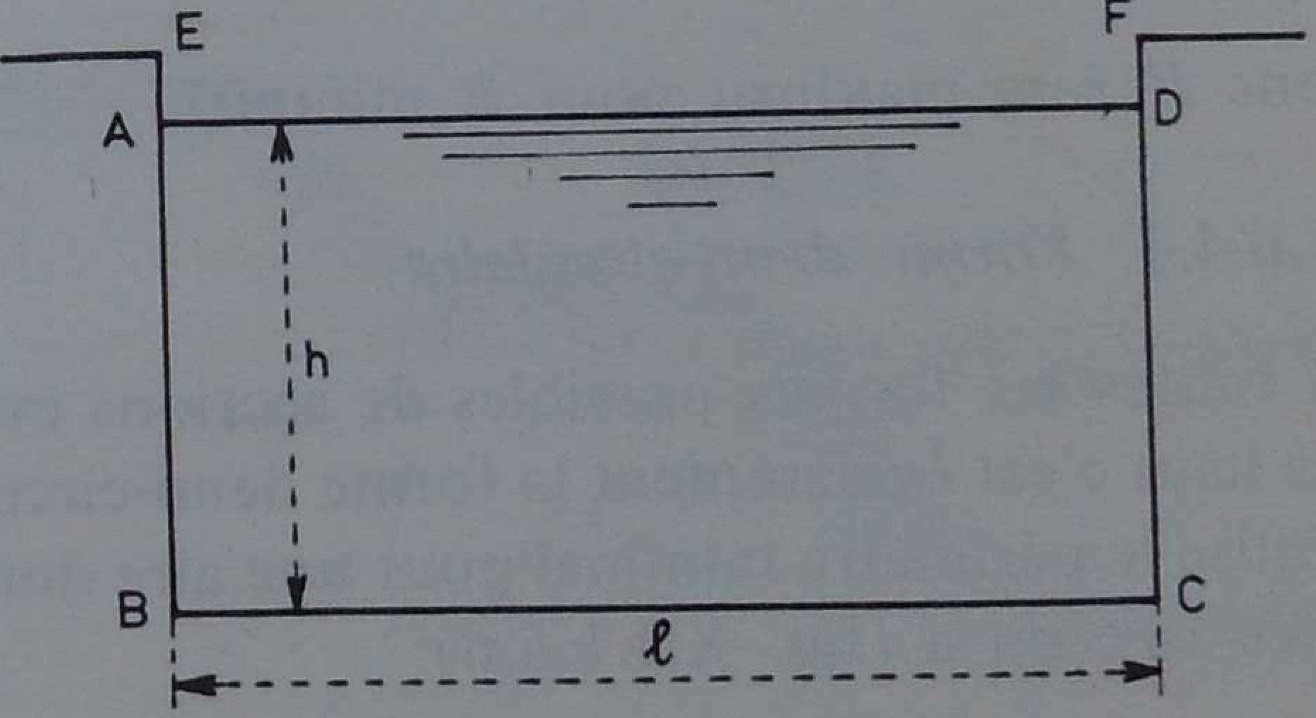


Fig. XII.1.6.8

D'où, pour la forme la plus avantageuse :

$$\Omega = 2h^2$$

$$B = 4h$$

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{h}{2}$$

XII.1.6.4.4. *Comparaison des trois formes précédentes*

Dans tous les cas le rayon hydraulique moyen de la section la plus avantageuse conserve la même expression :

$$R = \frac{h}{2}$$

La section de forme la plus avantageuse est celle qui :

– pour un débit et une pente donnés, exigera la section minimale,

– pour une surface de section et une pente données, portera le débit maximal,

– pour une surface de section et un débit donnés, nécessitera la pente minimale.

Le choix du profil de débit maximal est donc toujours avantageux a priori puisque l'aire mouillée et le périmètre y étant minimaux, ce profil correspond au minimum de dépenses pour les déblais et éventuellement pour le revêtement. Cependant ce profil de débit maximal correspond à une profondeur relativement grande, de sorte qu'on est parfois conduit à choisir une forme moins profonde qui présente notamment l'avantage de faciliter les fouilles et l'entretien du canal, de diminuer les dangers de ruptures et de réduire les pertes par infiltration, surtout lorsque le canal est en terre non revêtue. Par ailleurs, on s'efforce souvent de réaliser dans une même section l'égalité des volumes des remblais et déblais ; enfin les caractéristiques des engins utilisés pour creuser ou entretenir le canal (largeur des godets des pelles mécaniques) conditionnent parfois les dimensions à donner à la section (largeur au plafond des petites sections).

XII.1.7. Problèmes usuels sur les canaux en régime uniforme

La formule générale de l'écoulement $Q = \Omega C \sqrt{RI}$ donne une relation entre :

– le débit Q (ou la vitesse moyenne U),
– la pente du canal I,
– la section mouillée Ω,

et permet donc de calculer l'un de ces trois éléments connaissant les deux autres. D'où *trois types de problèmes usuels* :

1 – Calculer le débit connaissant la section mouillée et la pente.

2 – Calculer la pente connaissant la section mouillée et le débit.

3 – Calculer la section mouillée connaissant la pente et le débit.

Dans tous les cas la nature des parois et du fond du canal est supposée connue ce qui permet de choisir le coefficient convenable dans la formule de l'écoulement utilisée ainsi que la pente des talus dans le cas d'une section trapézique.

Les deux premiers problèmes ne présentent pas de difficulté particulière, le résultat cherché se déduisant immédiatement de la formule de l'écoulement dont l'utilisation est facilitée par des tables ou abaques.

Par contre le *troisième problème* (qui est d'ailleurs très fréquent dans la pratique) peut présenter certaines difficultés tenant, en particulier, à la forme assez compliquée de l'équation de l'écoulement.

Prenons, par exemple, le cas d'une section de forme trapézique qui sera donc définie par :

– le tirant d'eau h (étant entendu que la revanche sera déterminée a priori et ajoutée à h pour obtenir la profondeur totale du canal),

– la largeur au plafond l,

– la pente des talus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}$.

La pente des talus sera choisie en tenant compte de la nature des parois ; il reste donc deux inconnues l et h, ce qui nécessite d'adjoindre à l'équation de l'écoulement :

$$Q = \Omega C \sqrt{RI} \qquad \text{[XII.1.7.1]}$$

une seconde relation

$$f(l, h) = 0 \qquad \text{[XII.1.7.2]}$$

On pourra, par exemple, adopter pour la relation [XII.1.7.2] celle qui caractérise la forme de section la plus avantageuse.

Toutefois la solution du système des deux équations [XII.1.7.1 et 2] en l et h est longue et compliquée, surtout si la formule d'écoulement adoptée n'est pas monôme (telle la formule de Bazin).

Il est alors préférable de procéder *par approximations* de la manière suivante.

Soit U_M la valeur maximale admissible de la vitesse moyenne eu égard à la nature des parois ; on en déduit l'aire minimale $\Omega_m = \frac{Q}{U_M}$ de la section mouillée susceptible de porter

le débit Q. Adoptons la forme la plus avantageuse de cette section, soit :

$$f(l, h) = 0 \qquad [XII.1.7.2]$$

et exprimons Ω_m en fonction de l, h et $m = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$ soit :

$$\Omega_m = \frac{Q}{U_M} = h(l + mh)$$

ou, plus généralement :

$$\Omega_m = \varphi(l, h) \qquad [XII.1.7.3]$$

Du système des deux équations [XII.1.7.2 et 3] on déduit facilement les solutions $l = l_1$ et $h = h_1$.

On calcule aisément la vitesse moyenne U_1 et le débit Q_1 dans cette section en utilisant les tables ou abaques d'application de la formule d'écoulement.

Deux cas peuvent se produire :

1^er cas : $Q_1 > Q$ c'est-à-dire $U_1 > U_M$

La vitesse moyenne obtenue dans la section est trop grande et risquerait d'entraîner l'érosion des parois. Pour réduire la vitesse, on s'écarte de la forme la plus avantageuse en adoptant une profondeur h_2 différente de h_1.

La relation [XII.1.7.3] donnera l_2 et on calculera de nouveau la vitesse moyenne et le débit dans cette section (l_2, h_2) et ainsi de suite jusqu'à obtenir la section de forme convenable pour porter le débit Q.

2^ème cas : $Q_1 < Q$ c'est-à-dire $U_1 < U_M$

Dans la section de forme la plus avantageuse la vitesse est encore insuffisante pour fournir le débit Q. Comme il n'est pas possible d'augmenter la vitesse on doit augmenter la section mouillée. On se donnera donc une section $\Omega' > \Omega_m$ et on reprendra les calculs en partant de la forme la plus avantageuse de la section mouillée Ω'. Si cela apparaît nécessaire on modifiera de nouveau les dimensions de la section Ω' jusqu'à obtenir le débit demandé.

Bien entendu, dans tous ces calculs on tient compte des diverses conditions pratiques auxquelles doivent éventuellement satisfaire les dimensions de la section du canal (largeur minimale au plafond, équilibre des déblais et des remblais dans un même profil, etc.).

XII.1.8. Formules simplifiées de Porchet pour les petits canaux

Pour éviter les calculs toujours assez longs auxquels conduit, comme nous venons de le montrer, la solution du problème de la recherche des dimensions de la section mouillée, Porchet a proposé une méthode approximative et simplifiée applicable aux fossés et aux canaux en terre, de faibles dimensions, de section trapézique.

Cette méthode a fait l'objet d'une étude publiée en 1928 dans les Annales du Ministère de l'Agriculture (fascicule N° 56). Nous en donnons simplement les résultats ci-après.

Pour des canaux en terre dans lesquels $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{m}$ est supérieur à $\dfrac{2}{3}$ $(m < 1{,}5)$ et $0{,}5\ m < h < 1{,}5\ m$, on fait une erreur au plus égale à 3,4 % en adoptant pour le tirant d'eau h et la largeur au plafond l, les valeurs suivantes :

$$h = 0{,}26836\left(\frac{Q}{\sqrt{I}}\right)^{0{,}353}$$

$$l = 2h\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\right) = 2h\left(\sqrt{1 + m^2} - m\right)$$

Ces relations correspondent à un coefficient $\gamma = 1{,}30$ dans la formule de Bazin.

On reconnaît dans cette dernière relation celle qui caractérise la forme la plus avantageuse de la section mouillée.

Dans ces diverses formules on utilise le mètre et la seconde pour unités. Porchet a d'ailleurs conçu une règle à calcul spéciale pour exécuter rapidement les calculs correspondants.

Il convient de calculer la vitesse moyenne pour la section obtenue afin de vérifier si elle n'est pas excessive ; sinon il faut modifier la forme de la section pour réduire la vitesse.

XII.1.9. Aqueducs

Dans un aqueduc l'eau se trouve, à sa surface libre, à la pression atmosphérique, par conséquent les lois de l'écoulement sont les mêmes que dans un canal découvert.

Comme l'aqueduc se compose de tronçons successifs le long de chacun desquels la pente et la section sont constantes, dans chaque tronçon le régime est *uniforme* et, par conséquent, on applique aux aqueducs les équations et relations établies pour les canaux en régime uniforme.

Les *formes* des profils en travers des aqueducs sont très variées : rectangulaire, circulaire, ovoïde, en anse de panier, etc. (fig. XII.1.9.1) il y a donc dans chaque cas un problème de géométrie à résoudre pour déterminer Ω, B et R.

Il y a lieu de remarquer que l'on n'a pas dans un aqueduc le débit maximal lorsque l'ouvrage coule à plein, mais lorsque la surface libre se trouve à une certaine distance au-dessous de la génératrice supérieure.

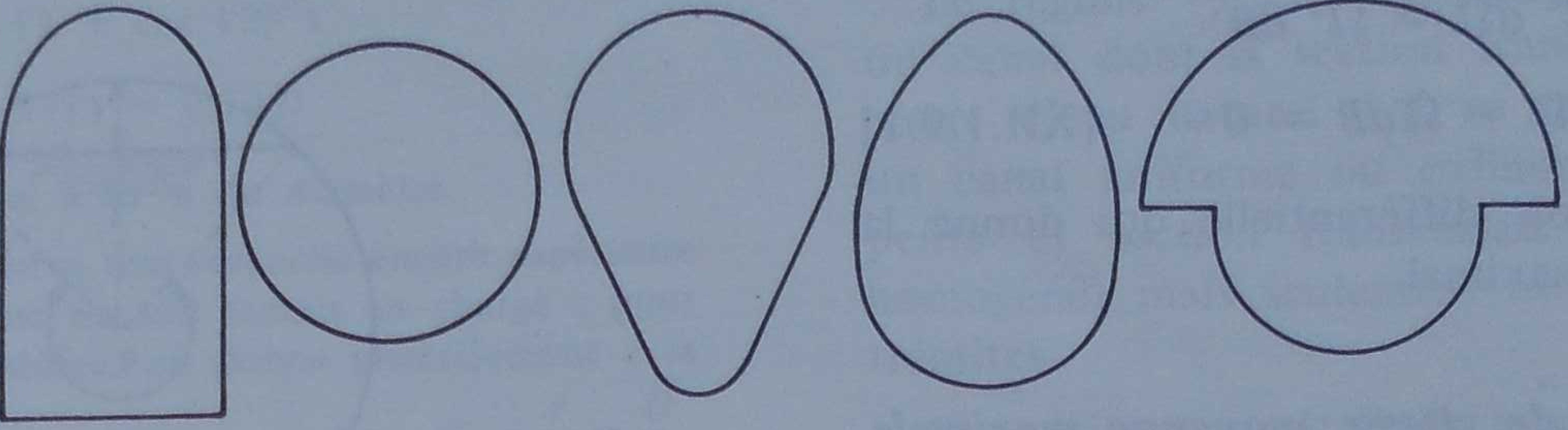


Fig. XII.1.9.1 – Formes des profils en travers des aqueducs

Ceci tient à la forme particulière de la section des aqueducs qui n'est pas évasée vers le haut comme pour les canaux ordinaires et les cours d'eau mais qui est une section fermée. La *courbe des profondeurs normales* d'un aqueduc n'est plus univoque et présente l'allure indiquée sur la figure XII.1.9.2.

Lorsque le niveau atteint une certaine valeur correspondant à un tirant d'eau h_1, une augmentation du tirant d'eau entraîne un accroissement sensible du périmètre mouillé B, d'où une réduction du rayon hydraulique $R = \frac{\Omega}{B}$ et l'incidence de cette réduction de R dans la formule du débit

$$Q = \Omega C \sqrt{RI}$$

est prédominante sur celle de l'accroissement de section.

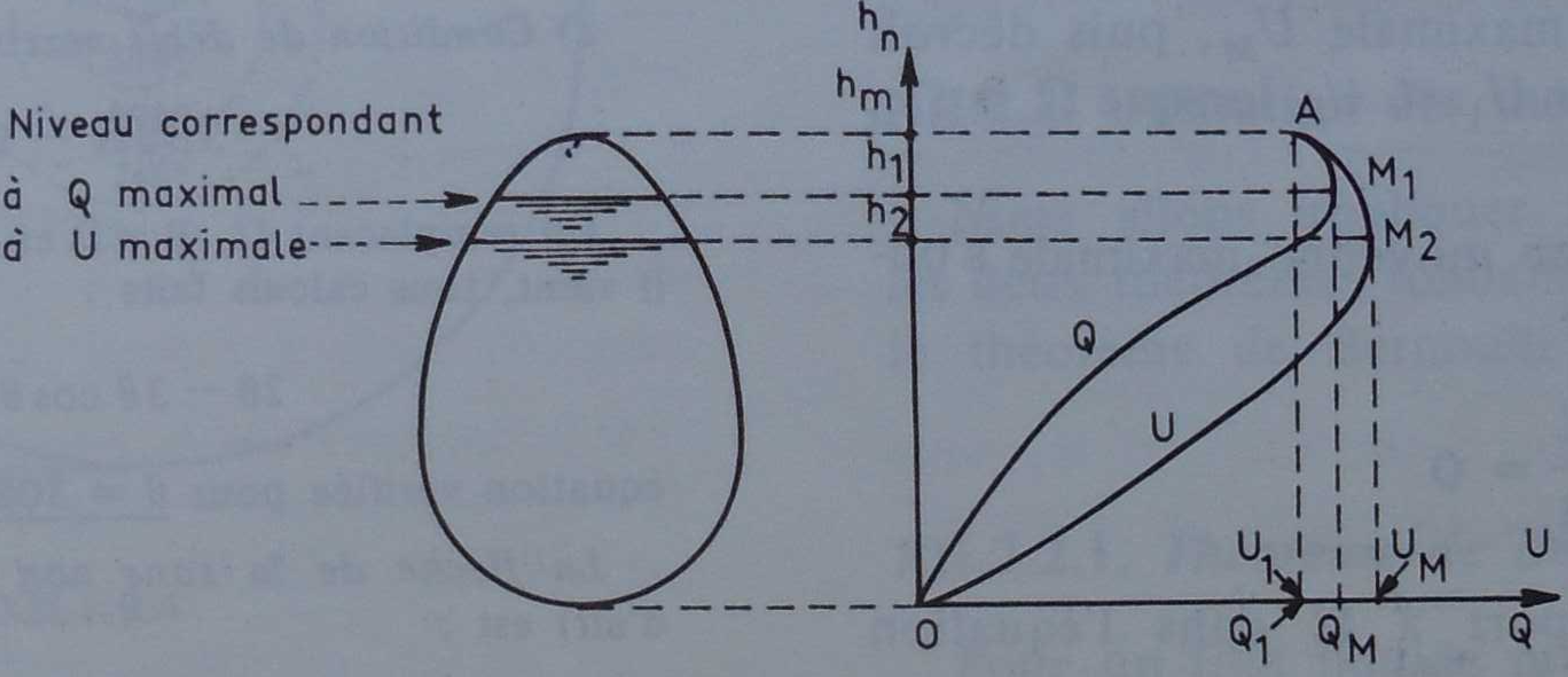


Fig. XII.1.9.2 – Courbe des profondeurs normales d'un aqueduc

Pour la même raison, la courbe $U = \varphi(h_n)$ présente un maximum pour une profondeur h_2 inférieure à la profondeur normale h_m correspondant à l'aqueduc plein (fig. XII.1.9.2).

XII.1.9.1. *Condition de débit maximal*

Proposons-nous de rechercher la condition pour laquelle le débit de l'aqueduc sera maximal.

Lorsque la section mouillée Ω croît de 0 à Ω_M correspondant à l'aqueduc plein mais non en charge, le débit croît de 0 à sa valeur maximale Q_M puis décroît pour atteindre une valeur $Q_1 < Q_M$ lorsque $\Omega = \Omega_M$ (fig. XII.1.9.2).

Le débit maximal sera donc obtenu pour :

$$\frac{dQ}{d\Omega} = 0$$

avec

$$Q = \Omega U = \Omega C \sqrt{RI} = C \sqrt{I} \sqrt{\frac{\Omega^3}{B}}$$

Dérivons par rapport à Ω en supposant I et C constants et annulons la dérivée :

$$\frac{dQ}{d\Omega} = C \sqrt{I} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\Omega^3}{B}}} \frac{3 B \Omega^2 - \Omega^3 \frac{dB}{d\Omega}}{B^2} = 0$$

$$3B\Omega^2\, d\Omega = \Omega^3\, dB$$

$$3B d\Omega - \Omega dB = 0 \qquad [\text{XII.1.9.1}]$$

Telle est l'équation différentielle qui donne la condition de débit maximal.

XII.1.9.2. *Condition de vitesse moyenne maximale*

On peut chercher de manière analogue la condition qui correspond au maximum de la vitesse moyenne U, ce qui est intéressant dans la pratique pour faciliter l'auto-curage de l'aqueduc.

Considérons la formule générale de Chézy :

$$U = C\sqrt{RI}$$

$$U = C\sqrt{\frac{\Omega}{B} I} \qquad [\text{XII.1.9.2}]$$

Lorsque Ω croît de 0 à Ω_M correspondant à l'aqueduc plein mais non en charge, la vitesse moyenne croît de 0 à sa valeur maximale U_M, puis décroît pour atteindre une valeur $U_1 < U_M$ lorsque $\Omega = \Omega_M$ (fig. XII.1.9.2).

La condition de vitesse moyenne maximale s'obtiendra donc en écrivant

$$\frac{dU}{d\Omega} = 0$$

Dérivons U par rapport à Ω dans l'équation [XII.1.9.2] en supposant I et C constants et annulons cette dérivée :

$$\frac{dU}{d\Omega} = C\sqrt{I}\ \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{\Omega}{B}}}\ \frac{B - \dfrac{dB}{d\Omega}\Omega}{B^2} = 0$$

La condition cherchée est donc :

$$B d\Omega - \Omega dB = 0 \qquad [\text{XII.1.9.3}]$$

XII.1.9.3. *Application à l'aqueduc de section circulaire*

Appliquons les résultats obtenus à un aqueduc de section circulaire de rayon r (fig. XII.1.9.3).

Prenons pour variable l'angle au centre θ correspondant au périmètre mouillé.

On établit facilement les relations géométriques suivantes :

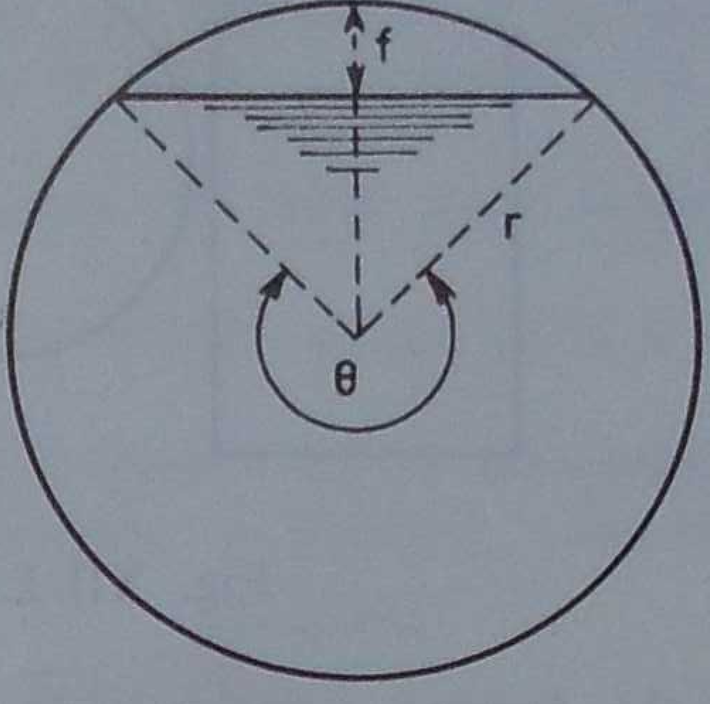


Fig. XII.1.9.3

$$\Omega = \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta)$$

$$d\Omega = \frac{r^2}{2}(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$B = r\theta \ ; \ dB = r d\theta$$

a) *Condition de débit maximal*

$$3B d\Omega - \Omega dB = 0 \qquad [\text{XII.1.9.1}]$$

En remplaçant Ω, B, $d\Omega$ et dB par leurs valeurs ci-dessus, il vient, tous calculs faits :

$$2\theta - 3\theta\cos\theta + \sin\theta = 0$$

équation vérifiée pour $\underline{\theta = 308°}$.

La flèche de la zone non mouillée (revanche ou tirant d'air) est :

$$f = r\left(1 + \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

pour $\theta = 308°$, $f = 0{,}1\ r$ soit $0{,}05\ D$ (D = diamètre de l'aqueduc).

Autrement dit le tirant d'eau est égal à 95 % du diamètre. Il est facile de constater que le débit maximal Q_M ainsi obtenu dépasse de 5 % celui donné par l'aqueduc plein et non en charge, soit (fig. XII.1.9.2) :

$$Q_M = 1{,}05\ Q_1$$

b) *Condition de vitesse moyenne maximale* :

$$B d\Omega - \Omega dB = 0 \qquad [\text{XII.1.9.3}]$$

On obtient, après simplifications :

$$\sin\theta - \theta\cos\theta = 0$$

équation vérifiée pour $\underline{\theta = 258°}$.

La flèche de la zone non mouillée est alors égale à :

$$f' = r(1 + \cos 129°)$$

$$f' = 0{,}371\, r = 0{,}19\, D$$

Le tirant d'eau est égal à 81 % du diamètre.

Pratiquement on conserve une revanche encore supérieure pour éviter que l'aqueduc ne soit jamais en charge ; pour l'aqueduc circulaire considéré, on donne généralement à la flèche de la zone non mouillée une valeur $f'' = \frac{r}{2} = \frac{D}{4}$, c'est-à-dire que le tirant d'eau est égal à 75 % du diamètre ce qui correspond à $\underline{\theta = 240°}$. Le débit, dans ces conditions, est égal à 85 % du débit maximal Q_M.

La figure XII.1.9.4 résume ces divers résultats.

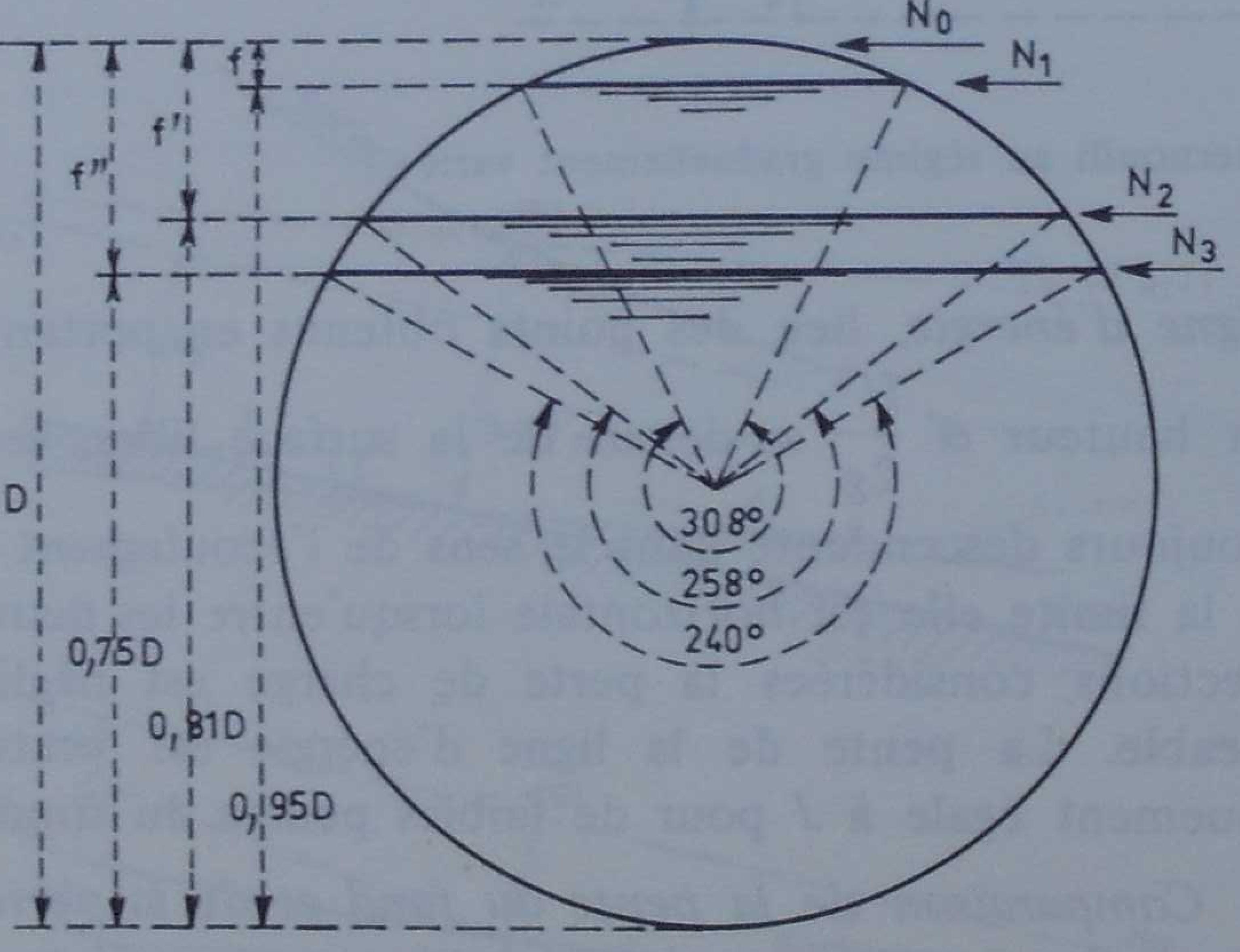


Fig. XII.1.9.4

N_0 = Aqueduc plein non en charge ($Q = Q_1$)

N_1 = Niveau correspondant au débit maximal $Q_m = 1{,}05\, Q_1$

N_2 = Niveau correspondant à la vitesse moyenne maximale

N_3 = Niveau usuel ($Q = 0{,}85\, Q_m$)

XII.2 – RÉGIME PERMANENT VARIÉ

XII.2.1. Définitions

Lorsque les trajectoires des différents filets liquides s'écoulant dans un canal ne sont plus parallèles entre elles on a affaire à un mouvement (ou régime) *varié* ; la surface libre et le fond du canal ne sont plus parallèles.

Le régime varié se produit nécessairement dans un canal dont la section transversale varie, tel un cours d'eau naturel ; il se rencontre même dans un canal uniforme ou cylindrique (axe rectiligne, pente et section transversale constantes, rugosité homogène) mais seulement au voisinage de ses extrémités.

Si la vitesse croît dans le sens de l'écoulement, le mouvement varié est dit *accéléré*. Il est *retardé* dans le cas contraire.

On peut classer les mouvements variés en deux grandes catégories :

– les mouvements *graduellement variés* dans lesquels les paramètres hydrauliques varient très progressivement d'une section à l'autre (remous d'exhaussement ou d'abaissement)

– les mouvements *brusquement variés* caractérisés par une variation plus rapide et parfois même discontinue des phénomènes (chutes, rapides, ressaut).

XII.2.2. Utilisation des théorèmes fondamentaux

Nous allons appliquer à l'écoulement considéré les deux théorèmes fondamentaux de l'hydraulique : le théorème de Bernoulli et le théorème d'Euler.

XII.2.2.1. *Théorème de Bernoulli*

Pour un filet liquide pris dans une masse liquide en régime d'écoulement permanent, rappelons l'expression classique de ce théorème :

$$z + \frac{p}{\omega} + \frac{V^2}{2g} + j = C^{te} = H$$

Dans le cas d'un écoulement à surface libre en régime permanent varié (fig. XII.2.2.1.1), on généralise cette équation à toute la section transversale du courant, ce qui nécessite donc d'introduire le coefficient de Coriolis α pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses dans la section transversale considérée. Entre deux sections transversales (S_1) et (S_2) on écrira donc :

$$z_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \int_{s_1}^{s_2} J\,ds \quad \text{[XII.2.2.1.1]}$$

expression dans laquelle :

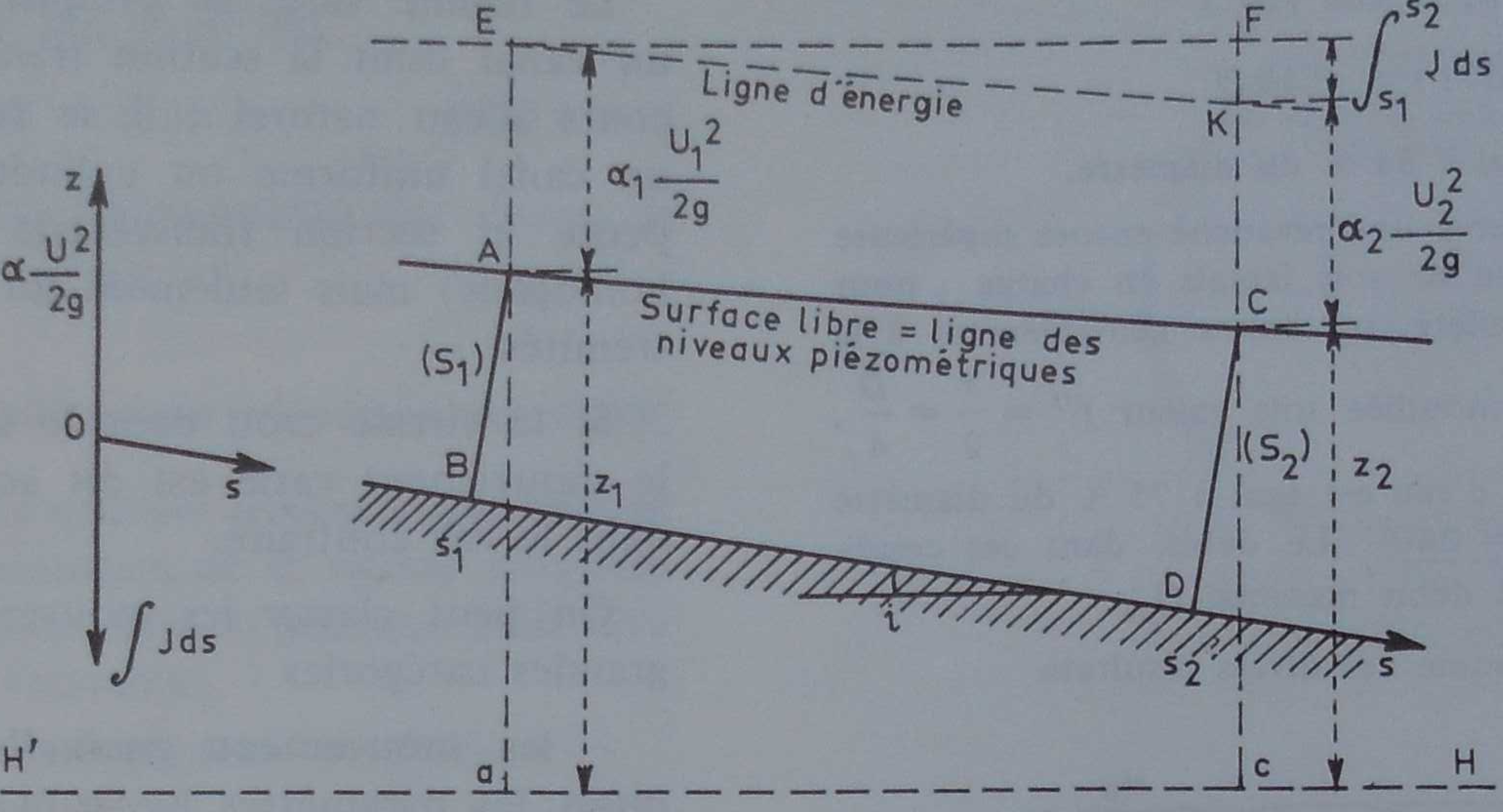


Fig. XII.2.2.1.1 – Application du théorème de Bernoulli au régime graduellement varié

z_1 et z_2 sont les *cotes de la surface libre* dans chaque section,

U_1 et U_2 sont les *vitesses moyennes* correspondantes.

La valeur de α est généralement très voisine de l'unité et souvent nous l'assimilerons à l'unité mais, il ne faut pas perdre de vue l'ordre de grandeur de l'approximation ainsi faite.

En mettant en évidence *l'énergie* H_1 et H_2 dans chacune des deux sections l'équation de Bernoulli peut encore s'écrire :

$$H_1 = H_2 + \int_{s_1}^{s_2} J ds \quad [XII.2.2.1.2]$$

Enfin l'équation [XII.2.2.1.1] est souvent utilisée sous sa *forme différentielle* :

$$dz + d\left(\alpha \frac{U^2}{2g}\right) + J ds = 0 \quad [XII.2.2.1.3]$$

à laquelle nous ferons notamment appel pour l'étude du régime graduellement varié.

Rappelons que dans cette équation différentielle :

z est mesuré sur un axe vertical ascendant,

J est positif quand ds a le même sens que la vitesse.

Comme nous l'avons déjà noté en régime uniforme la ligne des niveaux piézométriques est pratiquement confondue avec la surface libre et la *ligne d'énergie,* lieu des points obtenus en portant la hauteur $\alpha \frac{U^2}{2g}$ au-dessus de la surface libre, est toujours descendante dans le sens de l'écoulement ; à la limite elle est horizontale lorsqu'entre les deux sections considérées la perte de charge est négligeable. La pente de la ligne d'énergie est pratiquement égale à J pour de faibles pentes du fond.

Comparaison de la pente du fond et de la perte de charge unitaire en régime uniforme et en régime graduellement varié :

En régime uniforme U et J sont constants tout le long du canal et l'équation [XII.2.2.1.1] devient :

$$z_1 - z_2 = J(s_2 - s_1)$$

$$J = \frac{z_1 - z_2}{s_2 - s_1} = \sin i \simeq \operatorname{tg} i = I = I'$$

avec

I = pente du fond.

I' = pente de la surface libre.

J peut donc être calculé à partir des formules usuelles de l'écoulement :

$$U = C\sqrt{RI} = C\sqrt{RJ}$$

Comme par ailleurs J est nécessairement positif (énergie absorbée par les frottements), la relation $J = I = I'$ montre que le régime uniforme ne peut se produire qu'en canal descendant ($I > 0$).

En régime graduellement varié on peut encore calculer la perte de charge unitaire J dans une section transversale donnée en admettant qu'elle est identique à celle d'un courant uniforme *de même vitesse et de même profondeur* circulant dans la section considérée. Dans ces conditions, J varie d'une section à l'autre et ne peut plus être confondu avec I ou I'.

Proposons-nous précisément de comparer I et J en régime graduellement varié. Considérons (fig. XII.2.2.1.2) un canal uniforme (axe rectiligne, pente longitudinale et forme de la section transversale constantes, rugosité des parois homogène).

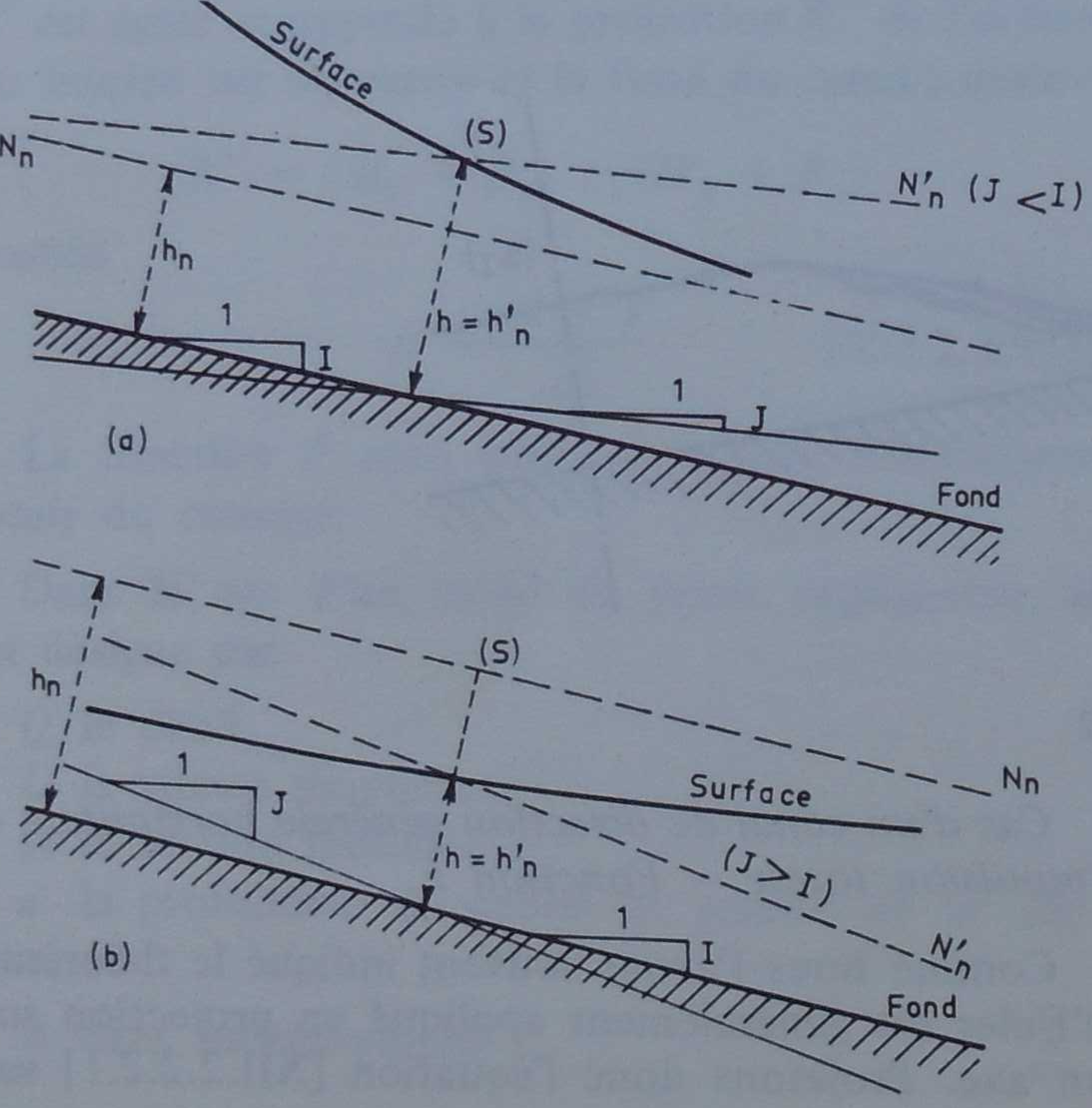


Fig. XII.2.2.1.2 – Comparaison de la pente du fond et de la perte de charge unitaire en régime uniforme et en régime graduellement varié

(a) $h > h_n$ ou $I > J$

(b) $h < h_n$ ou $I < J$

En régime uniforme la surface libre occupe le niveau normal N_n, la profondeur est la profondeur normale h_n et la surface libre est parallèle au fond :

$$J = I = I'.$$

Adoptons la formule de Manning dont la forme monôme simplifiera le raisonnement. Pour le régime uniforme considéré elle s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n}\,\Omega_n R_n^{2/3}\, I^{1/2} \qquad [\text{XII}.2.2.1.4]$$

Ω_n et R_n étant respectivement la surface mouillée et le rayon hydraulique moyen correspondant à la profondeur normale h_n.

Etablissons dans ce canal un *régime graduellement varié* et supposons que *le débit Q reste le même.* En régime permanent la surface libre occupe une position différente et la perte de charge unitaire J varie d'une section à une autre et diffère de la pente du fond I.

Dans une section mouillée quelconque (S) proposons-nous de comparer J et I.

Faisons l'hypothèse définie précédemment, à savoir que J est assimilable à la perte de charge que donnerait dans la section (S) un régime uniforme de même profondeur $h'_n = h$ et de même vitesse ; on aura donc :

$$Q = \frac{1}{n}\,\Omega R^{2/3}\, J^{1/2} \qquad [\text{XII}.2.2.1.5]$$

Ω et R étant respectivement la section mouillée et le rayon hydraulique moyen pour la profondeur $h = h'_n$ considérée.

En comparant [XII.2.2.1.4] et [XII.2.2.1.5], il vient :

$$\frac{J}{I} = \left(\frac{R_n}{R}\right)^{4/3} \left(\frac{\Omega_n}{\Omega}\right)^2$$

Or, pour les formes usuelles des sections transversales des canaux (rectangulaires ou évasées vers le haut), R et Ω sont des fonctions croissantes de la profondeur h.

L'expression précédente permet donc d'écrire : en régime uniforme :

$$h = h_n \quad \text{donc} \quad J = I$$

en régime graduellement varié :

si $h > h_n$ on a $I > J$ (fig. XII.2.2.1.2.a)

si $h < h_n$ on a $I < J$ (fig. XII.2.2.1.2.b)

Le mouvement uniforme *fictif* de profondeur $h = h'_n$ et de niveau normal N'_n auquel on assimile le courant graduellement varié en vue du calcul de sa perte de charge unitaire, diffère donc du régime uniforme qui existerait dans le canal pour

le même débit (profondeur h_n) ; ce régime fictif est le régime uniforme qui existerait si le canal avait une pente égale à J.

Le résultat ainsi établi pour un régime graduellement varié n'est plus valable en régime brusquement varié. Dans ce dernier cas, en effet, l'inclinaison mutuelle des trajectoires des filets liquides rend inapplicable la formule de Chézy et on ne peut plus calculer la perte de charge unitaire par cette méthode. Il faut alors évaluer la perte de charge globale entre deux sections transversales limitant le phénomène étudié en utilisant non plus le théorème de Bernoulli mais le théorème d'Euler.

XII.2.2.2. *Théorème d'Euler*

Considérons (fig. XII.2.2.2) un tronçon de canal compris entre deux sections transversales (S_1) et (S_2). Nous supposerons que le régime est permament et brusquement varié entre ces deux sections mais que dans chacune de ces sections le régime est uniforme ou graduellement varié ; il suffira pour cela de choisir les sections (S_1) et (S_2) suffisamment éloignées de la zone perturbée.

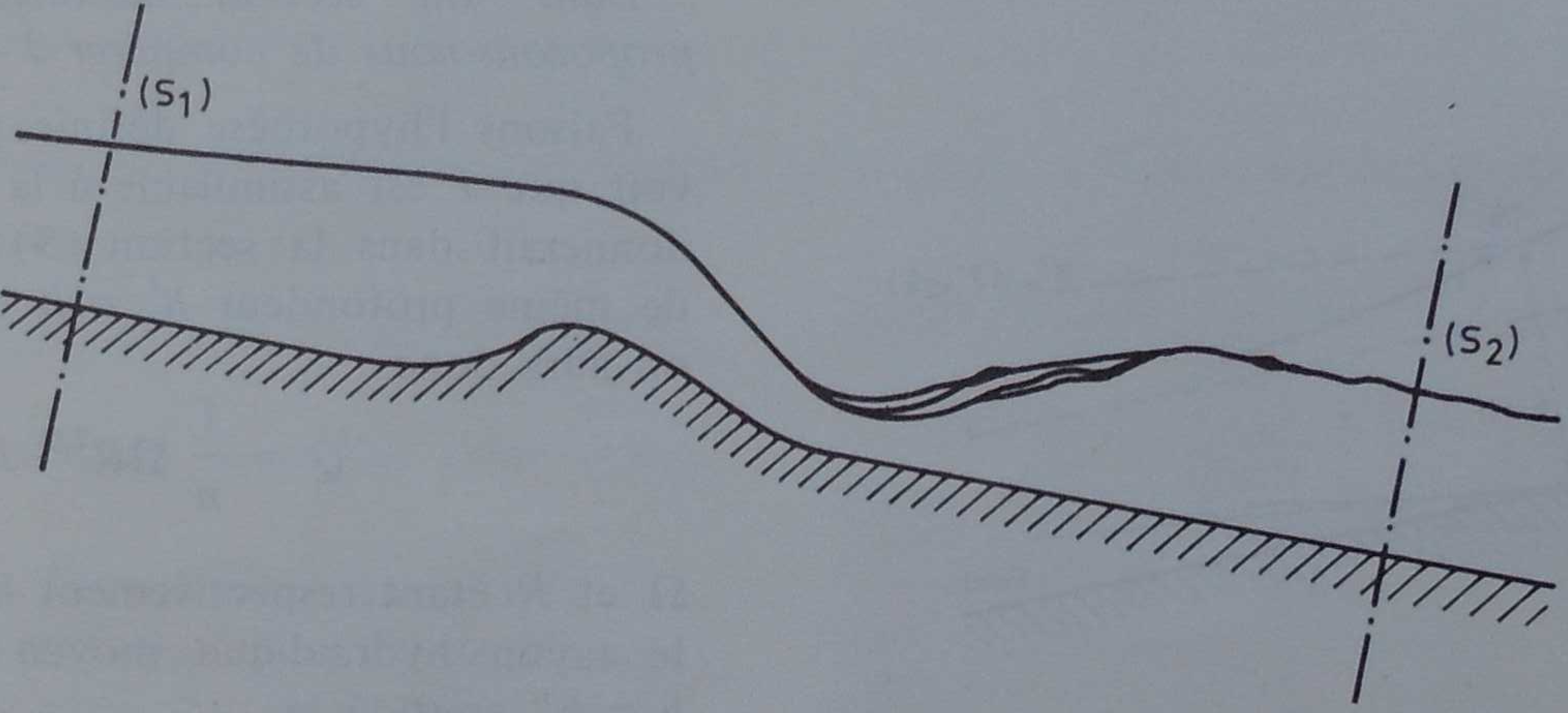


Fig. XII.2.2.2

Appliquons à la masse liquide comprise entre (S_1) et (S_2) le théorème d'Euler :

$$\frac{\overline{\omega}}{g} Q\beta_2 \vec{U}_2 - \frac{\overline{\omega}}{g} Q\beta_1 \vec{U}_1 = \vec{F} \qquad [XII.2.2.2.1]$$

$\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ sont les vitesses moyennes dans les sections (S_1) et (S_2) ; elles sont affectées respectivement des coefficients β_1 et β_2 pour tenir compte de l'inégale répartition des vitesses dans chacune de ces sections.

$\vec{F}$ est la résultante de toutes les *forces extérieures* appliquées à la masse liquide comprise entre (S_1) et (S_2) ; ces forces comprennent :

– le poids de la masse liquide considérée,

– les pressions totales sur les sections (S_1) et (S_2),

– les réactions des parois et du fond du canal entre ces deux sections,

– la résistance de l'air sur la surface libre (généralement négligeable).

Cas d'un canal de direction générale horizontale – Impulsion totale – Fonction F.

Comme nous l'avons souvent indiqué le théorème d'Euler est généralement appliqué en projection sur un axe. Projetons donc l'équation [XII.2.2.2.1] sur l'axe longitudinal du canal supposé horizontal sur la courte distance séparant les sections (S_1) et (S_2) ; faisons, en outre, l'approximation $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

Il vient :

$$\frac{\overline{\omega}}{g} Q (U_2 - U_1) = f$$

f représente

– les pressions totales P_1 et P_2 sur les sections (S_1) et (S_2),

– la somme des composantes tangentielles des réactions des parois et du fond du canal, soit R'.

$$\frac{\overline{\omega}}{g} Q(U_2 - U_1) = P_1 - P_2 + R'$$

Posons

$$M_1 = \frac{\bar{\omega}}{g} QU_1$$

$$M_2 = \frac{\bar{\omega}}{g} QU_2$$

$M = \frac{\bar{\omega}}{g} QU$ représente donc la quantité de mouvement de la masse liquide écoulée par unité de temps

Il vient alors :

$$M_2 - M_1 = P_1 - P_2 + R'$$

ou

$$R' = (M_2 + P_2) - (M_1 + P_1)$$

R' est égale et opposée à la projection R'' de *l'action* du liquide sur les parois et le fond du canal ; donc :

$$R'' = (M_1 + P_1) - (M_2 + P_2)$$

Posons

$$F = \frac{M + P}{\bar{\omega}} \qquad [XII.2.2.2.2]$$

La fonction F ainsi définie s'appelle *l'impulsion totale* du courant.

Dans le cas d'un canal de pente négligeable, si on désigne par

Q le débit,
U la vitesse moyenne,
Ω la section mouillée,
a la profondeur du centre de gravité de la section,

il vient sucessivement :

$$M = \frac{\bar{\omega}}{g} QU = \frac{\bar{\omega}}{g} \frac{Q^2}{\Omega}$$

$$P = \bar{\omega} a \Omega$$

$$\boxed{F = \frac{Q^2}{g\Omega} + a\Omega} \qquad [XII.2.2.2.3]$$

L'équation aux dimensions de F montre que cette grandeur a les dimensions d'un volume.

On a donc :

$$R'' = \bar{\omega}(F_1 - F_2) \qquad [XII.2.2.2.4]$$

Le produit du poids volumique du liquide par la diminution de l'impulsion totale du courant entre les deux sections (S_1) et (S_2) est donc égal à la poussée exercée par la masse liquide comprise entre ces deux sections sur les parois et le fond du canal. Si, par exemple, un canal horizontal comporte un rétrécissement de sa section transversale entre (S_1) et (S_2), l'expression $\bar{\omega}(F_1 - F_2)$ représente la poussée exercée par le courant sur les parois de la partie convergente du canal limitée par les sections (S_1) et (S_2).

Si entre les deux sections (S_1) et (S_2) on peut *négliger les frottements des parois et du fond du canal,* on a $R' = R'' = 0$ et $F = C^{te}$

$$\frac{Q^2}{g\Omega_1} + a_1 \Omega_1 = \frac{Q^2}{g\Omega_2} + a_2 \Omega_2 \qquad [XII.2.2.2.5]$$

Dans le cas particulier d'un *canal de section rectangulaire* de largeur l, en introduisant le débit par unité de largeur ou débit unitaire $q = \frac{Q}{l}$ et les profondeurs h_1 et h_2, il vient, tous calculs faits :

$$\frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \qquad [XII.2.2.2.6]$$

ce qui exprime que l'impulsion par unité de largeur du canal reste constante entre les deux sections (S_1) et (S_2) considérées, soit :

$$\frac{F}{l} = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} = C^{te}$$

On étend les relations [XII.2.2.2.5] et [XII.2.2.2.6] au cas d'un canal de pente très faible, dans la mesure où les projections sur l'axe longitudinal du canal du poids et des réactions des parois et du fond sont négligeables vis-à-vis des autres projections, en particulier des pressions.

Nous utiliserons ces relations pour l'étude du ressaut (§ XII.2.9.2).

XII.2.3. Energie spécifique

XII.2.3.1. *Définition*

L'énergie spécifique (ou "charge spécifique") (désignée par le symbole E) dans une section transversale mouillée est la valeur moyenne de l'énergie des molécules du liquide de cette section par unité de poids du liquide, cette énergie étant rapportée à l'axe horizontal passant par le point le plus bas de la section. E est donc homogène à une longueur.

Cette notion, introduite par *Bakhmeteff* en 1912, joue un rôle essentiel dans l'étude des écoulements variés, comme nous le montrerons par la suite.

Considérons (fig. XII.2.3.1) une section transversale (S) et designons par

U la vitesse moyenne dans cette section,

h la profondeur maximale,

$I = \operatorname{tg} i$ la pente du fond du canal au droit de cette section.

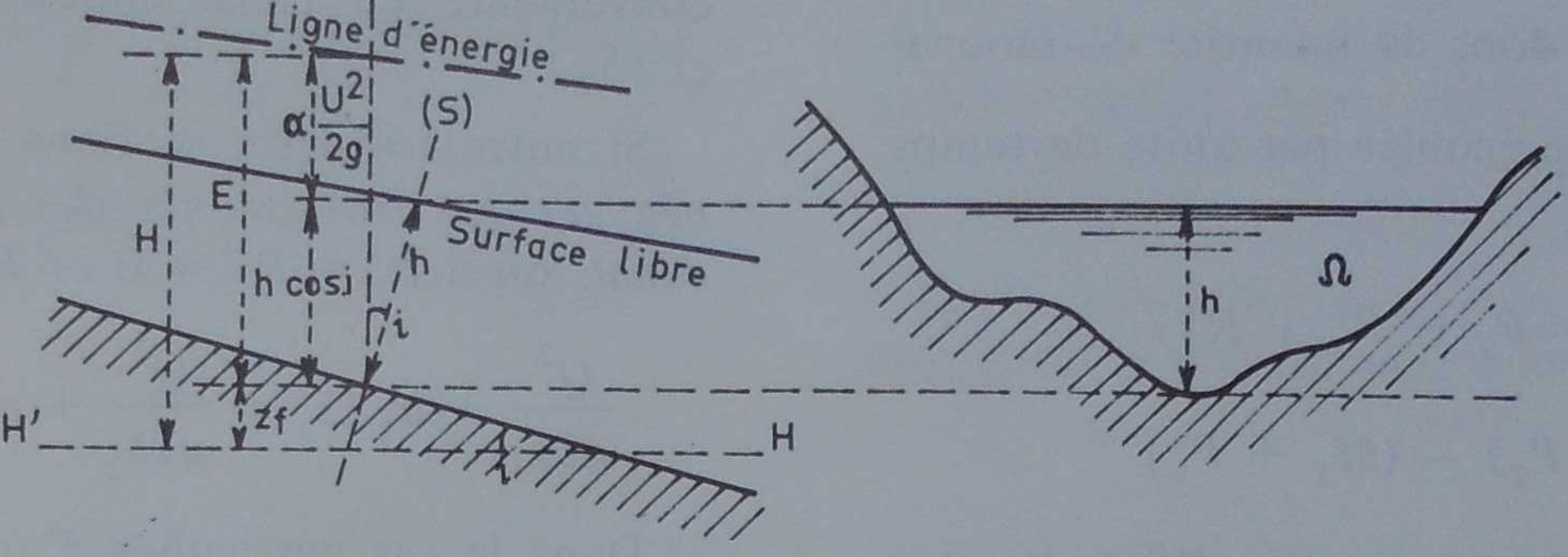


Fig. XII.2.3.1 – Energie spécifique

Par définition, l'énergie spécifique dans la section (S) sera :

$$E = h \cos i + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

Très souvent, la pente étant très faible, on supposera $\cos i = 1$; de plus on fera l'approximation $\alpha = 1$ et, en définitive, on adoptera l'expression approchée suivante de l'énergie spécifique :

$$\boxed{E = h + \frac{U^2}{2g}} \qquad [\text{XII.2.3.1.1}]$$

ou, en introduisant le débit Q :

$$\boxed{E = h + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}} \qquad [\text{XII.2.3.1.2}]$$

Si on désigne par z_f la cote du point le plus bas de la section transversale considérée et par H l'énergie totale dans cette section, on voit que (fig. XII.2.3.1) :

$$H = E + z_f$$

L'énergie spécifique représente donc la distance verticale de la ligne d'énergie au point le plus bas de la section.

Pour une section transversale de forme donnée Ω est fonction de h et l'expression [XII.2.3.1.2] est une relation de la forme :

$$f(E\,,\,h\,,\,Q) = 0 \qquad [\text{XII.2.3.1.3}]$$

représentée dans un espace à trois dimensions h, E, Q, par une surface dont nous allons étudier les intersections par les plans $E = \text{C}^{\text{te}}$ et $Q = \text{C}^{\text{te}}$, étant entendu que cette étude sera faite pour des sections transversales rectangulaires ou évasées vers le haut qui sont d'ailleurs les formes les plus usuelles.

Il convient, en outre, de noter que la pente I du canal et la rugosité des parois n'interviennent pas dans cette étude dont les conclusions seront donc indépendantes de ces paramètres.

XII.2.3.2. *Courbe h(Q) pour E constant*

L'équation [XII.2.3.1.2] s'écrit

$$Q^2 = 2g\Omega^2 (E - h)$$

ce qui montre que Q est nul pour $\Omega = 0$, c'est-à-dire $h = 0$ et pour $h = E$.

La valeur maximale de Q s'obtiendra en annulant la dérivée de $Q^2/2g$ par rapport à h, soit

$$\frac{d}{dh}\left(\frac{Q^2}{2g}\right) = \frac{d}{dh}\left[\Omega^2 (E - h)\right] = 0$$

$$2\Omega \frac{d\Omega}{dh}(E - h) - \Omega^2 = 0$$

avec $\dfrac{d\Omega}{dh} = L$, largeur superficielle de la section (fig. XII.2.3.2.1).

ou enfin

$$\boxed{\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1} \qquad [\text{XII.2.3.2.1}]$$

Il y correspond pour la profondeur h une valeur h_c qu'on appelle la *profondeur critique* et le régime correspondant, caractérisé par l'équation [XII.2.3.2.1], est le *régime critique* ; c'est le régime qui correspond au débit maximal dans la section considérée pour l'énergie spécifique donnée.

La courbe $h(Q)$ est représentée sur la figure XII.2.3.2.2. Son sommet C_1 représentatif du régime critique s'éloigne de l'origine lorsque E augmente.

Fig. XII.2.3.2.1

soit

$$2L\,(E - h) = \Omega$$

$$E - h = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} = \frac{\Omega}{2L}$$

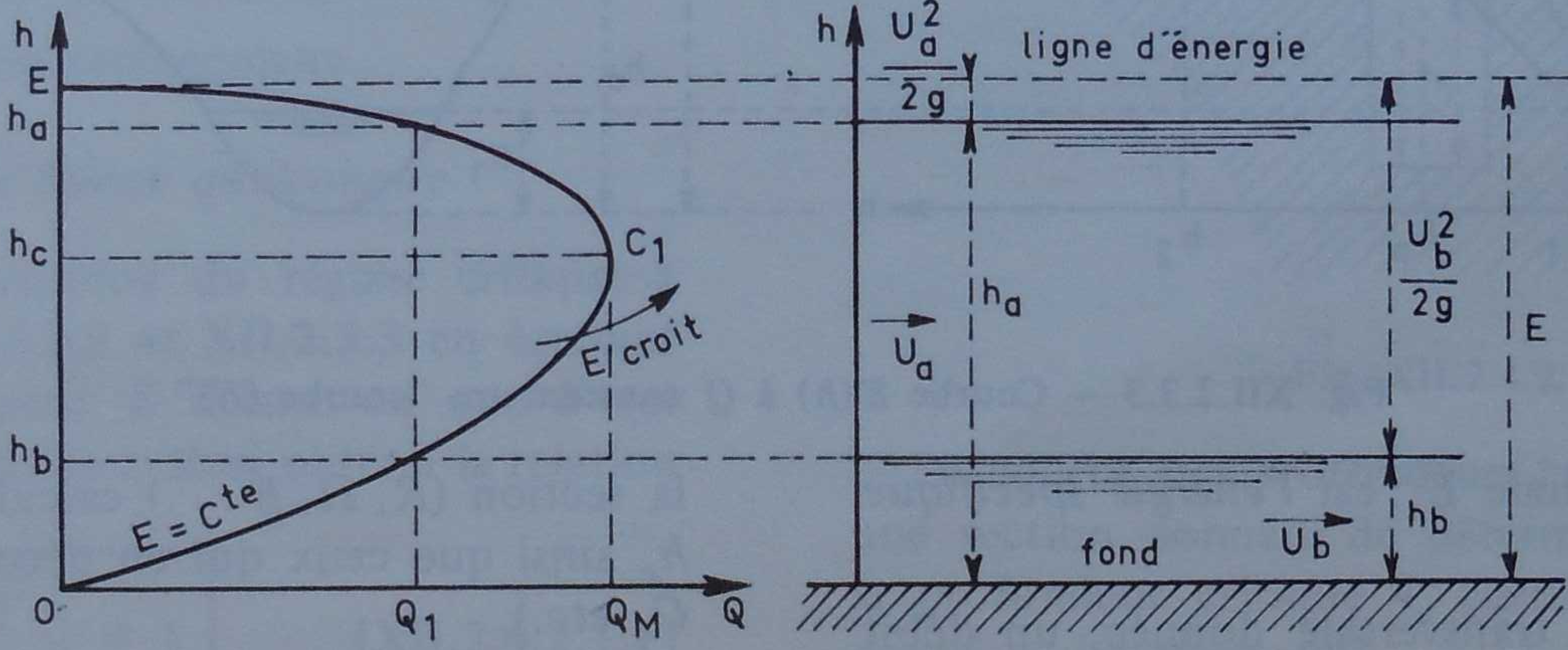


Fig. XII.2.3.2.2 – Courbe $h(Q)$ pour E constant

Cette courbe montre que pour un débit donné Q_1, il existe généralement deux profondeurs h_a et h_b correspondant à la même énergie spécifique ; si ce débit Q_1 augmente, les deux profondeurs h_a et h_b se rapprochent l'une de l'autre et tendent vers une valeur commune h_c, profondeur critique qui est obtenue pour le débit maximal Q_M. Si $Q > Q_M$ il n'y a plus de solution, c'est-à-dire que l'écoulement n'est pas possible pour l'énergie spécifique E considérée.

La courbe $h(Q)$ de la figure XII.2.3.2.2 représentée en grandeurs adimensionnelles constitue le *diagramme universel de Silber* qui est utilisé pour le calcul graphique des courbes de remous (cf. § XII.2.7.5).

XII.2.3.3. *Courbe $E(h)$ pour $Q = C^{te}$*

L'expression

$$E = h + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \qquad [\text{XII.2.3.1.2}]$$

montre que pour $Q = C^{te}$ la courbe $E(h)$ présente deux branches asymptotes respectivement

– à la première bissectrice $E = h$ (pour $h \to \infty$, $\Omega \to \infty$ et $E \to h$)

– à l'axe des E (pour $h \to 0$, $\Omega \to 0$ et $E \to \infty$)

La courbe présente un minimum C qui correspond à

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{2}{\Omega^3}\,\frac{d\Omega}{dh}\right) = 0$$

ou

$$\boxed{\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1} \qquad [\text{XII.2.3.3.1}]$$

expression identique à [XII.2.3.2.1] et qui est caractéristique du *régime critique*. L'abscisse de C est donc la profondeur critique h_c.

La courbe (E) représentée sur la figure XII.2.3.3 montre que pour une énergie spécifique donnée E_1

il existe deux profondeurs h_1 et h_2 correspondant au même débit ; elles sont appelées *profondeurs correspondantes* ; si E_1 décroît, les profondeurs correspondantes tendent l'une vers l'autre et deviennent égales à h_c lorsque l'énergie spécifique prend sa valeur minimale pour le débit considéré.

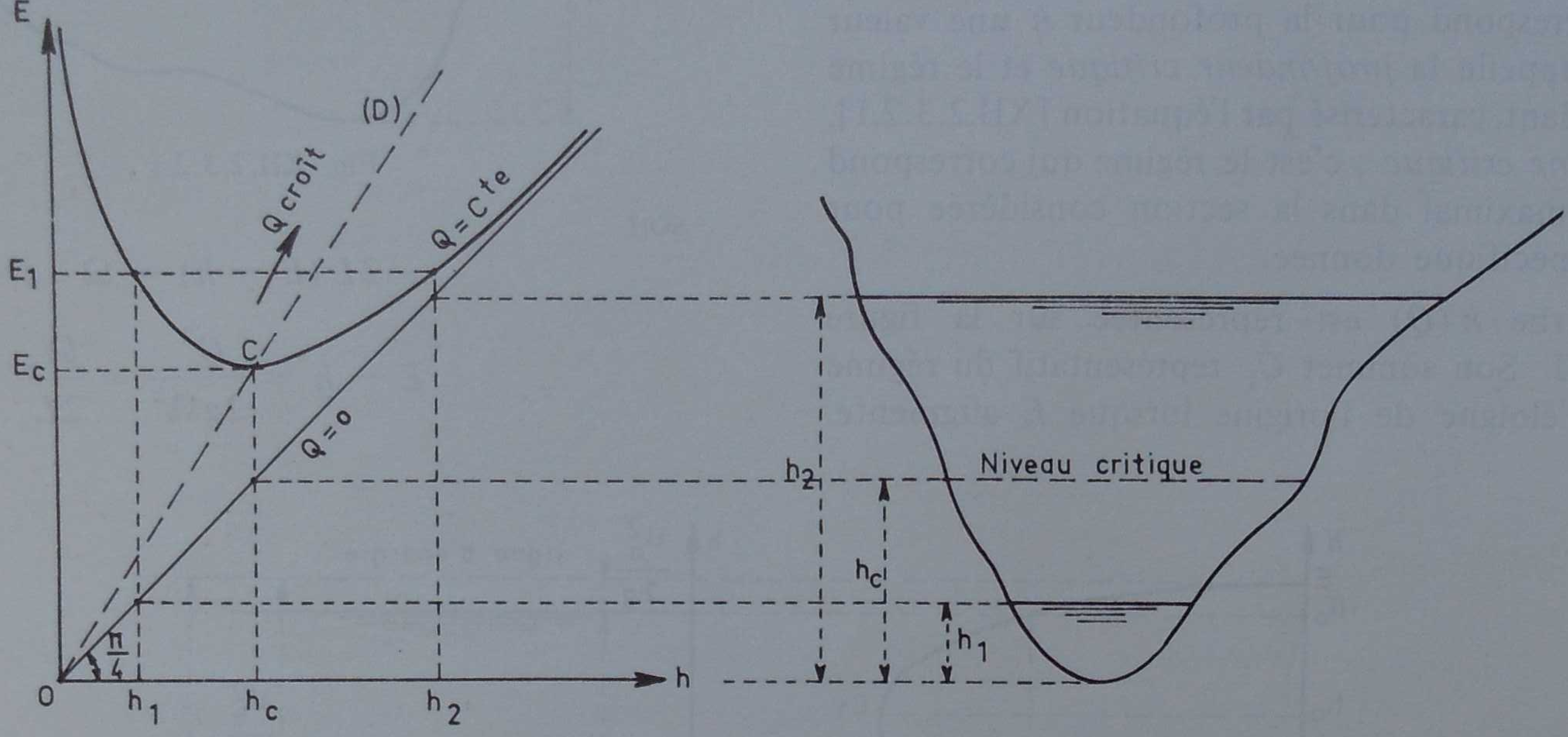


Fig. XII.2.3.3 – Courbe $E(h)$ à Q constant ou "courbe (E)"

Cette valeur minimale E_c est *l'énergie spécifique critique*.

Dans une section transversale donnée, un débit donné ne peut donc être assuré que si l'énergie spécifique est au moins égale à une valeur minimale E_c ; ce minimum est d'autant plus grand que le débit est lui-même plus grand car le sommet C s'éloigne de l'origine 0 lorsque Q croît.

XII.2.4. Régime critique

XII.2.4.1. *Définitions*

La valeur commune de h_c définie par les ordonnées des points C_1 et C des courbes $h(Q)$ (fig. XII.2.3.2.2) et $E(h)$ (fig. XII.2.3.3) s'appelle la *profondeur critique.* Pour un canal donné la profondeur critique est donc celle correspondant

– au débit maximal pour une énergie spécifique donnée (fig. XII.2.3.2.2),

– à l'énergie spécifique minimale pour un débit donné (fig. XII.2.3.3).

Lorsque la profondeur h prend la valeur h_c on dit que le *régime critique* est atteint ; la surface libre occupe alors le *niveau critique* N_c. On appellera *éléments critiques* les éléments géométriques de la section $(R, \Omega, B \ldots)$ calculés pour la profondeur h_c ainsi que ceux qui en découlent directement (b, C, etc.).

On définit également *l'énergie spécifique critique* E_c correspondant à l'abscisse du sommet C de la courbe (E) (fig. XII.2.3.3) et *la vitesse critique* U_c qui est la vitesse moyenne dans la section quand la profondeur est égale à h_c.

Par définition, au régime critique E est minimale (fig. XII.2.3.3) c'est-à-dire $dE = 0$.

En différentiant l'équation [XII.2.3.1.1] :

$$E = h + \frac{U^2}{2g},$$

il vient :

$$dh + d\left(\frac{U^2}{2g}\right) = 0$$

ce qui montre qu'au voisinage du régime critique il s'établit une sorte de compensation entre la profondeur et l'énergie cinétique, les variations de ces deux grandeurs étant égales et opposées.

Le régime critique est souvent instable (fluctuations de la surface libre) puisque, comme le montre la courbe (E) (fig. XII.2.3.3), au voisinage de C une petite variation de l'énergie E provoque des

variations sensibles de profondeur de part et d'autre de h_c.

Remarque : Il ne faut pas confondre le régime critique ainsi défini avec le *nombre de Reynolds limite* $\mathcal{R}_c$ (appelé parfois *critérium*) qui marque la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent d'un courant. Le régime critique peut, en effet, exister dans l'un ou l'autre de ces deux modes d'écoulement.

XII.2.4.2. ***Formules du régime critique***

Nous considérerons deux cas suivant la forme de la section du canal :

XII.2.4.2.1 – Section de forme quelconque,

XII.2.4.2.2 – Section rectangulaire.

XII.2.4.2.1. *Section de forme quelconque*

La relation caractéristique du régime critique a été établie aux § XII.2.3.2 et XII.2.3.3 en écrivant que Q est maximal pour E donné ou que E est minimal pour Q donné. On a ainsi obtenu la relation

$$\boxed{\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1} \qquad [\text{XII.2.4.2.1.1}]$$

Dans cette relation, Ω et L sont respectivement la surface et la largeur superficielle de la section mouillée lorsque, dans cette section, la profondeur est égale à la profondeur critique pour le débit considéré.

Compte-tenu de la forme géométrique de la section, l'équation [XII.2.4.2.1.1] est donc de la forme $h_c = f(Q)$. Autrement dit, *dans un canal de forme donnée la profondeur critique ne dépend que du débit.*

En particulier, pour un tel canal on pourra tracer par points la courbe dite "*des profondeurs critiques*" qui est la courbe $h_c = f(Q)$ dans laquelle Q est tiré de la relation [XII.2.4.2.1.1] :

$$Q = \sqrt{\frac{g\Omega^3}{L}}$$

Généralement, la courbe des profondeurs critiques est *univoque*, c'est-à-dire qu'à un débit donné correspond une seule profondeur critique et inversement.

Exceptionnellement il peut en être autrement, en particulier pour les formes de sections transversales s'évasant rapidement telle que la forme de la figure XII.2.4.2.1. Ceci provient du fait que pour de telles sections lorsque h croît, $R = \dfrac{\Omega}{B}$ et $h_m = \dfrac{\Omega}{L}$ marquent une légère décroissance temporaire lorsque h atteint et dépasse la valeur h_1 (fig. XII.2.4.2.1).

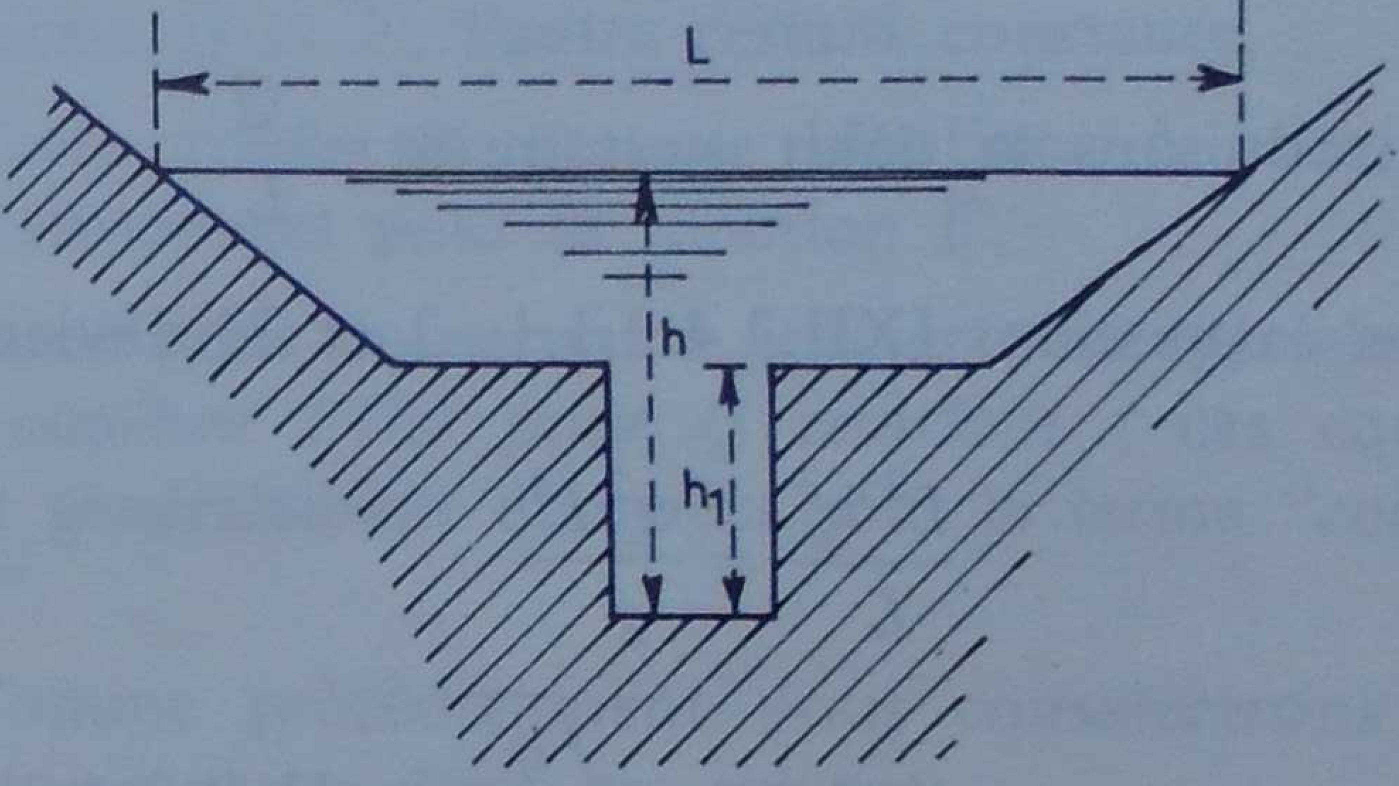


Fig. XII.2.4.2.1

La courbe des profondeurs critiques permet, pour une section donnée, de déterminer immédiatement la profondeur critique h_c correspondant à un débit donné et inversement.

Si dans l'équation [XII.2.4.2.1.1] on remplace Q par ΩU_c et Ω/L par h_{mc} (*profondeur moyenne critique*), il vient :

$$h_{mc}\Omega^2 = \frac{U_c^2\,\Omega^2}{g}$$

$$h_{mc} = \frac{U_c^2}{g} \qquad [\text{XII.2.4.2.1.2}]$$

Cette expression montre qu'au régime critique l'énergie cinétique $U_c^2/2g$ est égale à la moitié de de la profondeur moyenne.

Dans ces conditions reprenons l'expression de E donnée par [XII.2.3.1.1] :

$$E = h + \frac{U^2}{2g}$$

(h est ici la profondeur maximale de la section).

Sa valeur E_c lorsque le régime critique est réalisé est *l'énergie spécifique critique*. Son expression est donnée par :

$$E_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g}$$

$$E_c = h_c + \frac{h_{mc}}{2} \qquad \text{[XII.2.4.2.1.3]}$$

XII.2.4.2.2. *Section rectangulaire*

On a dans ce cas :

$$\Omega = Lh \quad \text{et} \quad h = h_m .$$

Introduisons le débit unitaire $q = \dfrac{Q}{L}$

Les expressions [XII.2.4.2.1.1, 2 et 3] deviennent alors :

$$\frac{L^3 h_c^3}{L} = \frac{q^2 L^2}{g}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \qquad \text{[XII.2.4.2.2.1]}$$

$$h_c = \frac{U_c^2}{g} \qquad \text{[XII.2.4.2.2.2]}$$

$$E_c = \frac{3}{2}\, h_c \qquad \text{[XII.2.4.2.2.3]}$$

Cette dernière expression montre que sur la courbe (E) le lieu des points C (points critiques) lorsque Q varie est la droite de pente 3/2 passant par l'origine (droite (D) fig. XII.2.3.3).

La relation [XII.2.4.2.2.1] permet de calculer immédiatement la profondeur critique h_c correspondant à un débit $Q = qL$ donné, sans qu'il soit nécessaire de tracer la courbe des profondeurs critiques.

XII.2.4.3. *Régime torrentiel et régime fluvial – Correspondance avec le nombre de Froude*

Rappelons que dans une section transversale de profondeur h dans laquelle la vitesse moyenne est U le *nombre de Froude* caractéristique de l'écoulement est défini par la grandeur adimensionnelle

$$\mathfrak{F} = \frac{U}{\sqrt{gh}}$$

Nous démontrerons plus loin (§ XII.2.8.2) que la vitesse de propagation d'une onde superficielle infiniment petite dans une masse d'eau au repos de profondeur h en canal prismatique horizontal est donnée par la *formule de Lagrange* : $U = \sqrt{gh}$.

Le nombre de Froude d'un écoulement à surface libre représente donc le rapport de la vitesse moyenne du courant à la vitesse de propagation d'une onde superficielle infiniment petite le long du courant considéré.

Revenant aux résultats obtenus précédemment on peut donc énoncer les conclusions suivantes pour un écoulement en canal prismatique caractérisé par un débit constant unitaire q, donc par une hauteur critique $h_c = \sqrt[3]{\dfrac{q^2}{g}}$:

1 – *Si* $h < h_c$ la vitesse moyenne U est supérieure à la vitesse critique U_c, soit $U > \sqrt{gh_c} > \sqrt{gh}$; le nombre de Froude $\mathfrak{F} = \dfrac{U}{\sqrt{gh}}$ est supérieur à l'unité. Les ondes superficielles dont la vitesse $\sqrt{gh}$ est inférieure à U ne peuvent remonter vers l'amont. Le point figuratif de l'écoulement sur la courbe $E(h)$ est sur la branche (T) située à gauche de C (fig. XII.2.4.3) donc $\dfrac{\partial E}{\partial h} < 0$. Le régime d'écoulement considéré est appelé régime *torrentiel* ou supercritique.

2 – *Si* $h > h_c$ la vitesse moyenne U est inférieure à la vitesse critique U_c, soit $U < \sqrt{gh_c} < \sqrt{gh}$.

Le nombre de Froude $\mathfrak{F} = \dfrac{U}{\sqrt{gh}}$ est inférieur à l'unité. Les ondes superficielles dont la vitesse $\sqrt{gh}$ est supérieure à U peuvent remonter vers l'amont. Le point figuratif de l'écoulement sur la courbe $E(h)$ est sur la branche (F) située à droite de C (fig. XII.2.4.3) donc $\dfrac{\partial E}{\partial h} > 0$. Le régime d'écoulement considéré est appelé régime *fluvial* ou infracritique.

3 – *Si* $h = h_c$ on est au cas limite :

$$U = U_c = \sqrt{gh_c} \; ;$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_c = \frac{U_c}{\sqrt{gh_c}} = 1 .$$

Le régime *critique* est établi.

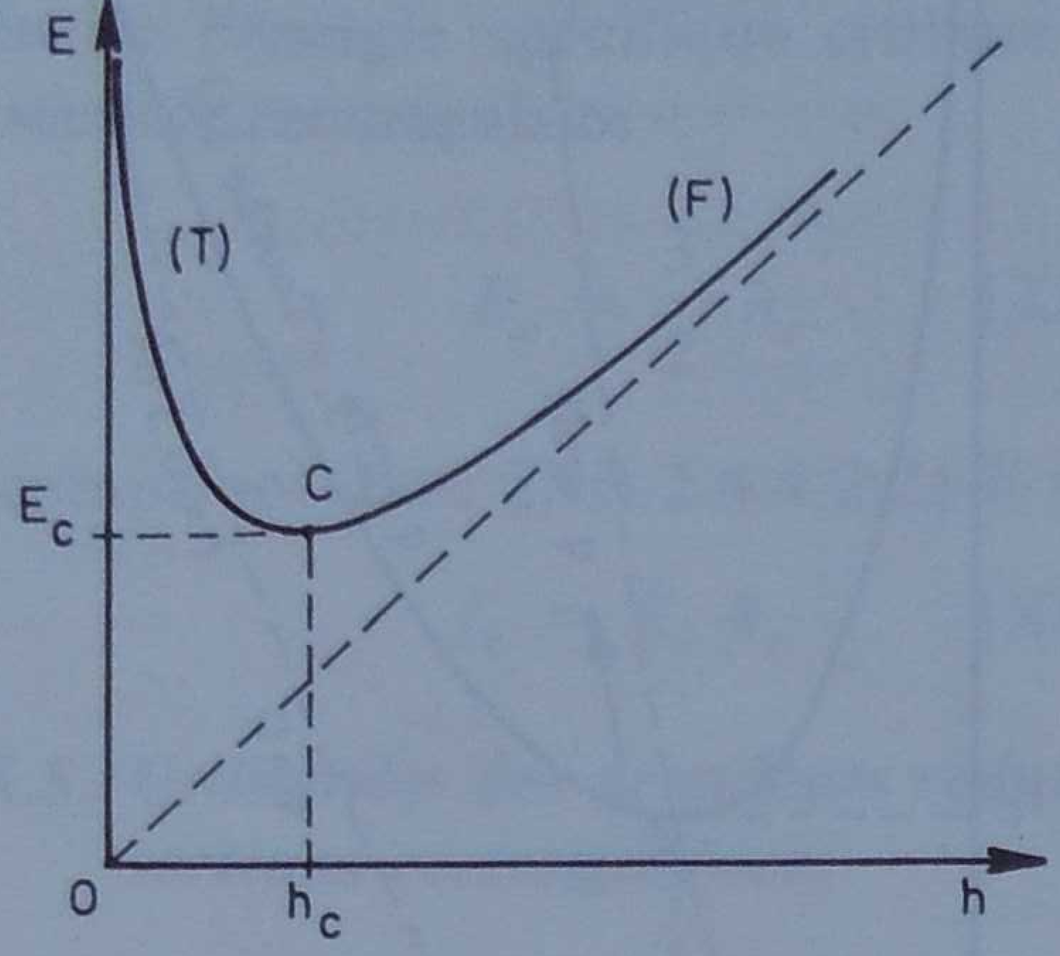


Fig. XII.2.4.3 – Régime fluvial (F) et torrentiel (T) sur la courbe (E)

Analogie avec les écoulements des fluides compressibles

Les régimes que nous venons de définir pour un écoulement à surface libre d'un liquide incompressible ont leurs homologues dans le cas de l'écoulement des fluides compressibles.

Au nombre de Froude de l'écoulement liquide correspond le *nombre de Mach* de l'écoulement gazeux :

$$\mathfrak{M} = \frac{U}{C} = \frac{U}{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}$$

avec K = compressibilité volumique du fluide ; le nombre de Mach est donc le rapport de la vitesse du fluide à la vitesse de propagation d'une onde sonore dans le fluide.

Si $U > C$ le régime est *supersonique*, $\mathfrak{M} > 1$. C'est l'homologue du régime torrentiel ou supercritique du liquide.

Si $U < C$ le régime est *subsonique*, $\mathfrak{M} < 1$. C'est l'homologue du régime fluvial ou infracritique du liquide.

Si $U = C$ le régime est *sonique*, $\mathfrak{M} = 1$. C'est l'homologue du régime critique du liquide.

L'analogie se poursuit pour ce qui concerne le passage du premier régime ($\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{M}$ supérieur à l'unité) au second ($\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{M}$ inférieur à l'unité) ; en hydraulique, ce passage se manifeste par une onde stationnaire ou *ressaut* homologue de l'*onde de choc* d'un écoulement gazeux.

XII.2.4.4. *Courbe (F) – Impulsion totale – Impulsion critique*

Nous avons établi au § XII.2.2.2 l'expression suivante de la fonction F ou impulsion totale pour un canal horizontal ou de pente négligeable :

$$F = \frac{Q^2}{g\Omega} + a\Omega \qquad [XII.2.2.2.3]$$

dans laquelle a est la profondeur du centre de gravité de la section mouillée Ω.

Pour une section de forme donnée, a et Ω sont fonction de la profondeur h, de sorte que l'expression précédente est de la forme :

$$h = g(Q , F)$$

Comme nous l'avons fait pour la fonction E on peut étudier de la même manière la variation de la profondeur h en fonction de l'une des deux variables Q et F, l'autre restant constante.

Cette étude est presque identique à celle faite précédemment pour la fonction E.

Nous nous bornerons à étudier plus spécialement les *courbes F(h) pour Q constant* ; ces courbes sont généralement désignées sous le terme "*courbes (F)*".

Comme précédemment nous considérerons successivement les deux cas suivants :

XII.2.4.4.1 – Section de forme quelconque,

XII.2.4.4.2 – Section rectangulaire.

XII.2.4.4.1. *Section de forme quelconque*

Pour $Q = C^{te}$ l'expression [XII.2.2.2.3] montre que $F \to \infty$ pour $h \to 0$ ou $h \to \infty$. Entre ces deux valeurs 0 et ∞ de h, F passe donc par un minimum qui sera réalisé pour $\frac{dF}{dh} = 0$, Q étant constant.

Soit donc

$$\frac{dF}{dh} = \frac{Q^2}{g}\frac{d}{dh}\left(\frac{1}{\Omega}\right) + \frac{d(a\Omega)}{dh}$$

$$= -\frac{Q^2}{g\Omega^2}\frac{d\Omega}{dh} + \text{limite de } \frac{\Delta(a\Omega)}{\Delta h} \text{ pour } \Delta h \to 0 \qquad [XII.2.4.4.1]$$

$\Delta(a\Omega)$ est l'accroissement du moment statique $a\Omega$ de la section mouillée par rapport à la surface libre pour un accroissement Δh de la profondeur, soit (fig. XII.2.4.4.1) :

$$\Delta(a\Omega) = (a + \Delta h)\,\Omega + L\,\frac{(\Delta h)^2}{2} - a\Omega$$

$$= \Omega\Delta h + L\,\frac{(\Delta h)^2}{2}$$

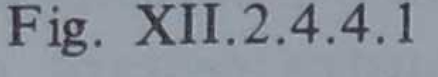


Fig. XII.2.4.4.1

$$\frac{\Delta(a\Omega)}{\Delta h} = \Omega + L\,\frac{\Delta h}{2}$$

Si $\Delta h \to 0$

$$\text{limite de } \frac{\Delta(a\Omega)}{\Delta h} = \Omega$$

Enfin, on sait que $\dfrac{d\Omega}{dh} = L$ (fig. XII.2.4.4.1).

En revenant à l'équation [XII.2.4.4.1] :

$$\frac{dF}{dh} = -\frac{Q^2 L}{g\Omega^2} + \Omega = 0$$

$$\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1$$

expression déjà obtenue aux § XII.2.3.2 et XII.2.3.3 et qui est caractéristique du régime critique.

En définitive *dans un canal sensiblement horizontal, lorsque la profondeur est égale à la profondeur critique, il y a simultanéité du minimum de l'énergie spécifique et de celui de l'impulsion totale.*

XII.2.4.4.2. *Section rectangulaire*

Dans ce cas, la fonction F par unité de largeur du canal prend la forme suivante établie au § XII.2.2.2 :

$$f = \frac{F}{l} = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \qquad \text{[XII.2.4.4.2.1]}$$

Sous cette forme, on voit que la courbe $f(h)$ pour $q = C^{te}$ possède une asymptote verticale pour $h \to 0$; pour $h \to \infty$ la courbe tend vers la parabole

$f = \dfrac{h^2}{2}$ (fig. XII.2.4.4.2).

Fig. XII.2.4.4.2 – Courbe $f(h)$ pour q constant (section rectangulaire)

La fonction f, toujours positive (pour h positif) et continue, passe donc nécessairement par un minimum obtenu pour :

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{q^2}{gh^2} + h = 0$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = h_c$$

ce qui vérifie le résultat obtenu précédemment pour une section quelconque.

La valeur correspondante de f sera :

$$f_c = \frac{q^2}{gh_c} + \frac{h_c^2}{2}$$

$$f_c = \frac{3}{2}\,h_c^2 \qquad \text{[XII.2.4.4.2.2]}$$

Le lieu du minimum C des courbes $f(h)$ est la parabole (P) d'équation

$$f_c = \frac{3}{2}\,h_c^2 \quad \text{(fig. XII.2.4.4.2)}$$

f_c est appelée *impulsion critique* (par unité de largeur du canal).

Au § XII.2.4.2.2 nous avons établi l'expression suivante de l'énergie spécifique critique dans le cas d'une section rectangulaire :

$$E_c = \frac{3}{2} h_c \qquad [XII.2.4.2.2.3]$$

En comparant avec [XII.2.4.4.2.2] il vient :

$$f_c = E_c\, h_c \qquad [XII.2.4.4.2.3]$$

XII.2.4.5. *Utilisation des grandeurs réduites (cas des sections rectangulaires)*

Les courbes (E) et (F) ont été établies pour un débit donné. Si on doit considérer plusieurs débits on est obligé de tracer autant de courbes qu'il y a de débits.

On peut simplifier la résolution des problèmes nécessitant l'utilisation de ces courbes en utilisant des *grandeurs réduites*. Le procédé est surtout intéressant dans le cas des sections rectangulaires qui seront les seules que nous étudierons pour ce problème.

Supposons donc un courant de section rectangulaire de débit unitaire q et de profondeur h.

On définit comme suit les grandeurs réduites :

Profondeur réduite :

$$h' = \frac{h}{h_c} = \frac{h}{\sqrt[3]{\dfrac{q^2}{g}}} \qquad [XII.2.4.5.1]$$

Energie spécifique réduite :

$$E' = \frac{E}{h_c} = \frac{1}{h_c}\left(h + \frac{q^2}{2gh^2}\right) = h' + \frac{1}{2h'^2} \qquad [XII.2.4.5.2]$$

Valeur réduite de F (par unité de largeur du canal) :

$$f' = \frac{f}{h_c^2} = \frac{1}{h_c^2}\left(\frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}\right) = \frac{1}{h'} + \frac{h'^2}{2} \qquad [XII.2.4.5.3]$$

On obtient ainsi des grandeurs réduites h', E' et f' qui sont adimensionnelles. Pour un canal rectangulaire et sensiblement horizontal de largeur quelconque et pour tous les débits possibles on obtiendra donc une seule courbe $E' = f(h')$ et une seule courbe $f' = g(h')$ (fig. XII.2.4.5). Pour utiliser ces courbes dans chaque cas réel il suffira de calculer la profondeur critique

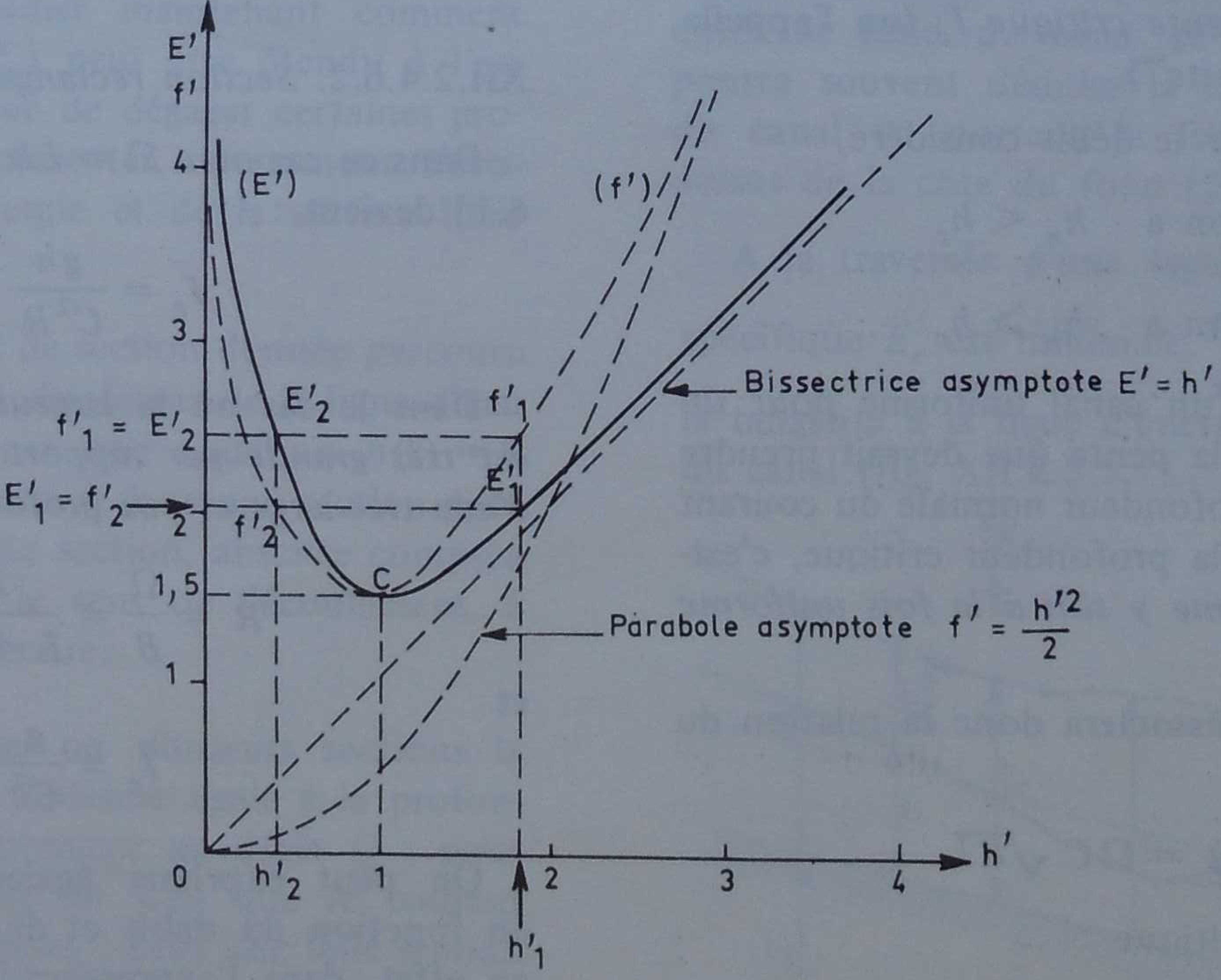


Fig. XII.2.4.5 – Courbes $E' = f(h')$ et $f' = g(h')$ (grandeurs réduites)

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

et de passer ensuite aux valeurs réelles à partir des relations de définition :

$$h = h'\,h_c \quad ; \quad E = E'\,h_c \quad ; \quad f = f'\,h_c^2.$$

Les relations [XII.2.4.5.2 et 3] montrent que E' se transforme en f' et réciproquement si on remplace h' par $1/h'$. A chaque écoulement de hauteur réduite h'_1 correspond

donc un écoulement conjugué de hauteur réduite inverse $h'_2 = \frac{1}{h'_1}$, ces deux écoulements étant tels que l'énergie spécifique réduite de l'un égale la fonction f' réduite de l'autre et inversement. Graphiquement cela se traduit par la possibilité de tracer dans chaque cas un rectangle $f'_1 E'_1 f'_2 E'_2$ de côtés parallèles aux axes et ayant ses sommets sur les courbes (E') et (f') (fig. XII.2.4.5).

Nous aurons l'occasion d'utiliser ces courbes à propos du ressaut (§ XII.2.9).

XII.2.4.6. *Pente critique*

Considérons un canal de section constante et de pente variable portant un débit constant.

La profondeur critique h_c est constante puisqu'elle ne dépend que du débit mais la *profondeur normale* h_n c'est-à-dire la profondeur correspondant au régime uniforme pour le débit considéré (qui dépend à la fois du débit et de la pente) va varier et diminuera si la pente du fond I croît et inversement.

Pour une certaine valeur de la pente h_n sera égale à h_c. Cette valeur particulière de la pente du fond du canal est appelée *pente critique* I_c (on l'appelle parfois aussi "pente limite").

Bien entendu si, pour le débit considéré,

$$I > I_c \quad \text{on a} \quad h_n < h_c$$

et

$$I < I_c \quad \text{on a} \quad h_n > h_c$$

La pente critique d'un canal uniforme *pour un débit donné* est donc la pente que devrait prendre ce canal pour que la profondeur normale du courant considéré soit égale à la profondeur critique, c'est-à-dire *pour que le régime y soit à la fois uniforme et critique.*

Pour calculer I_c on associera donc la relation du régime uniforme :

$$Q = U\Omega = \Omega C \sqrt{RI}$$

avec celle du régime critique :

$$\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1$$

Au régime critique ces deux équations doivent être satisfaites pour une même valeur de la profondeur ; en éliminant Q entre ces deux relations on obtiendra le résultat cherché.

Nous ferons l'étude en distinguant comme d'habitude, les deux cas suivants :

XII.2.4.6.1 – Section de forme quelconque,

XII.2.4.6.2 – Section rectangulaire.

XII.2.4.6.1. *Section de forme quelconque*

L'élimination de Q entre les deux expressions précédentes conduit à :

$$I_c = \frac{g\Omega}{C^2 RL} = \frac{bg\Omega}{RL} = \frac{bgh_m}{R} \qquad [XII.2.4.6.1]$$

avec :

$$bC^2 = 1$$

et

$$h_m = \frac{\Omega}{L} \qquad \text{(profondeur moyenne)}$$

Les éléments b, C, R, Ω, h_m figurant dans l'équation [XII.2.4.6.1] sont bien entendu les éléments critiques du canal, c'est-à-dire calculés à partir de la profondeur critique h_c qui correspond au débit considéré.

XII.2.4.6.2. *Section rectangulaire*

Dans ce cas on a $\Omega = Lh$ et l'expression [XII.2.4-6.1] devient :

$$I_c = \frac{gh}{C^2 R} = \frac{bgh}{R} \qquad [XII.2.4.6.2.1]$$

Dans le cas où la *largeur du canal rectangulaire est très grande par rapport à sa profondeur* (cours d'eau très large et peu profond) on a pratiquement :

$$R = \frac{\Omega}{B} = \frac{Lh}{L + 2h} \simeq h$$

et

$$I_c = \frac{g}{C^2} = bg \qquad [XII.2.4.6.2.2]$$

On peut exprimer également la pente critique en fonction du débit et de la rugosité des parois ; en effet, dans l'expression [XII.2.4.6.2.2] calculons C par exemple par la formule de Manning :

$$C = \frac{R^{1/6}}{n} \qquad \text{avec} \qquad R = h = h_c$$

(canal de section infiniment large en régime critique) ; il vient ainsi :

$$I_c = \frac{gn^2}{R^{1/3}} = \frac{gn^2}{h_c^{1/3}} = g^{10/9}\,\frac{n^2}{q^{2/9}} = 12{,}65\,\frac{n^2}{q^{2/9}}$$

On constate donc que la pente critique d'un tel canal est fonction croissante de la rugosité du lit et fonction décroissante du débit. La pente critique d'un cours d'eau peut donc être supérieure à la pente réelle de ce cours d'eau pour les petits débits et inférieure pour les forts débits.

Par ailleurs, la pente critique est proportionnelle à n^2 et son évaluation exacte est donc difficile en raison de l'imprécision sur la valeur à attribuer au coefficient de rugosité n.

XII.2.5. Utilisation de la courbe (*E*) pour l'étude des régimes variés

Jusqu'à présent nous avons considéré une section transversale d'un canal pour laquelle nous avons défini les courbes (E) et (F) et les éléments critiques. Nous allons étudier maintenant comment l'usage de la courbe (E) peut être étendu à l'ensemble du courant en vue de dégager certaines propriétés de celui-ci et représenter, notamment, l'évolution de la ligne d'énergie et de la surface libre tout le long du courant.

Considérons un canal de section donnée parcouru par un débit constant Q. La forme de la ligne d'eau peut être représentée par une équation $h(s) = 0$ reliant la profondeur d'eau h dans une section donnée à l'abscisse s de cette section, abscisse comptée le long du canal dans le sens de l'écoulement, à partir d'une origine arbitraire.

Il se peut qu'en une ou plusieurs sections la profondeur du courant devienne égale à la profondeur critique h_c correspondant au débit Q ; pour chacune de ces sections on dira que le courant traverse une *section critique* ; dans une telle section la vitesse sera égale à la vitesse critique U_c et l'énergie spécifique E_c sera minimale.

Pour mieux préciser ces indications nous examinerons successivement :

– le cas d'un canal uniforme,

– celui d'un canal de section non uniforme.

XII.2.5.1. *Canal uniforme*

Quelle que soit la section transversale considérée, à une même profondeur correspond la même vitesse moyenne U, donc la même énergie spécifique

$$E = h + \frac{U^2}{2g}\,.$$

La courbe (E) *est donc unique* pour toutes les sections du canal.

Si le régime est uniforme $h = C^{te}$, $U = C^{te}$, donc $E = C^{te}$ et le point figuratif de l'écoulement sur la courbe (E) est le même pour toutes les sections.

Si le régime est varié, en passant d'une section à une autre le point figuratif se déplace sur la courbe (E) et l'énergie spécifique passe par sa valeur minimale E_c lorsqu'on traverse une section critique. On sait que l'énergie totale $H = z + \frac{p}{\varpi} + \frac{U^2}{2g}$ ne peut que décroître dans le sens de l'écoulement alors que l'énergie spécifique E peut augmenter ou diminuer. Comme E représente la distance verticale entre le fond du canal et la ligne d'énergie, on pourra souvent déduire la ligne d'énergie du fond du canal en portant la longueur verticale E au-dessus de la cote du fond (fig. XII.2.5.1.1).

A la traversée d'une section critique S_c l'énergie spécifique E_c est minimale, $\frac{dE}{dh} = 0$, c'est-à-dire que la tangente à la ligne d'énergie est parallèle au fond du canal (fig. XII.2.5.1.1).

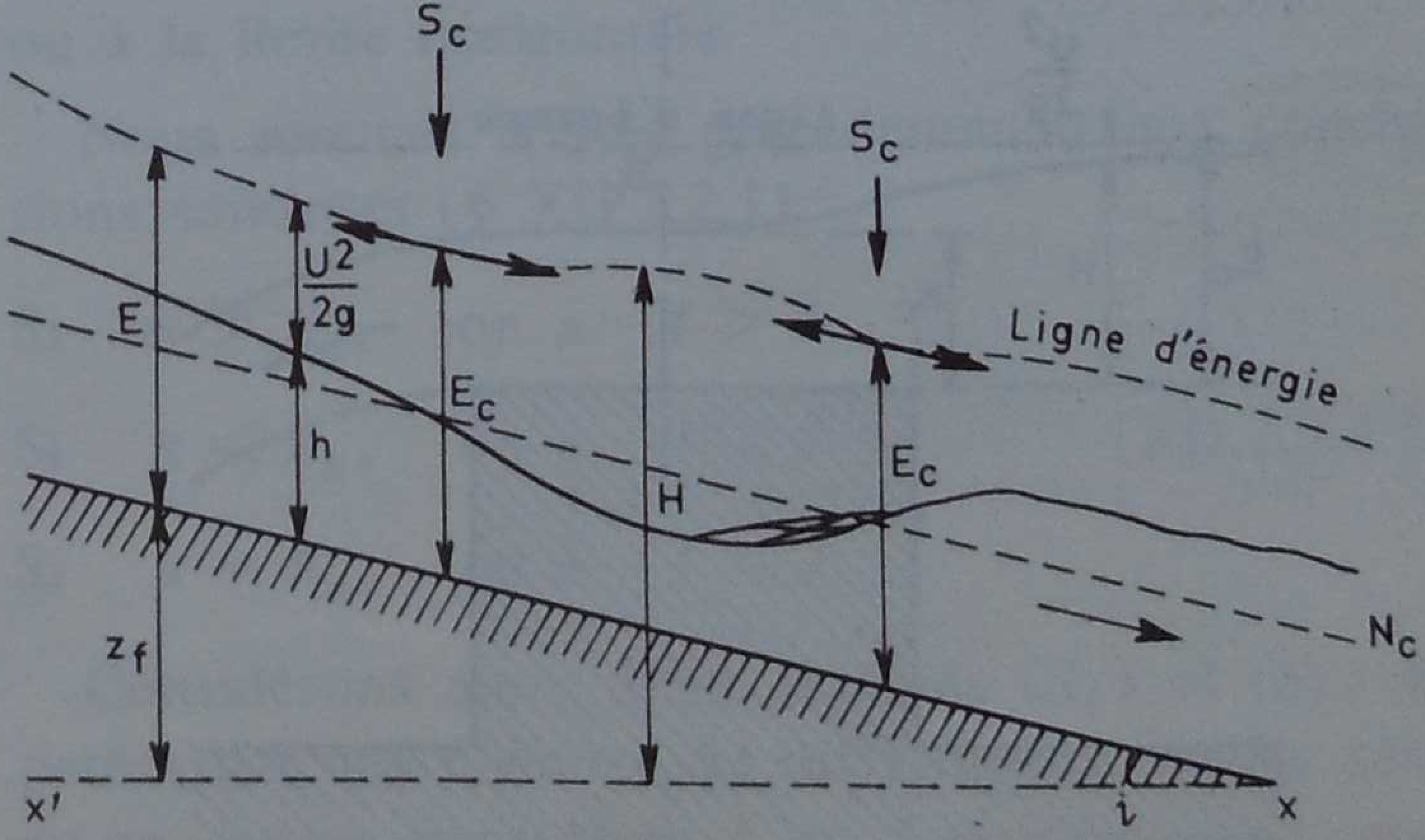


Fig. XII.2.5.1.1 – Evolution de la ligne d'énergie dans un canal uniforme en régime varié

Dans le cas particulier fréquent où les *pertes de charge peuvent être négligées* sur la faible distance considérée (cas des régimes brusquement variés)

la ligne d'énergie est horizontale ; dans chaque section on en déduit E et, grâce à la courbe (E), la profondeur h dans la section considérée. Dans ce cas la section critique, si elle existe, correspond au point le plus élevé du fond (fig. XII.2.5.1.2).

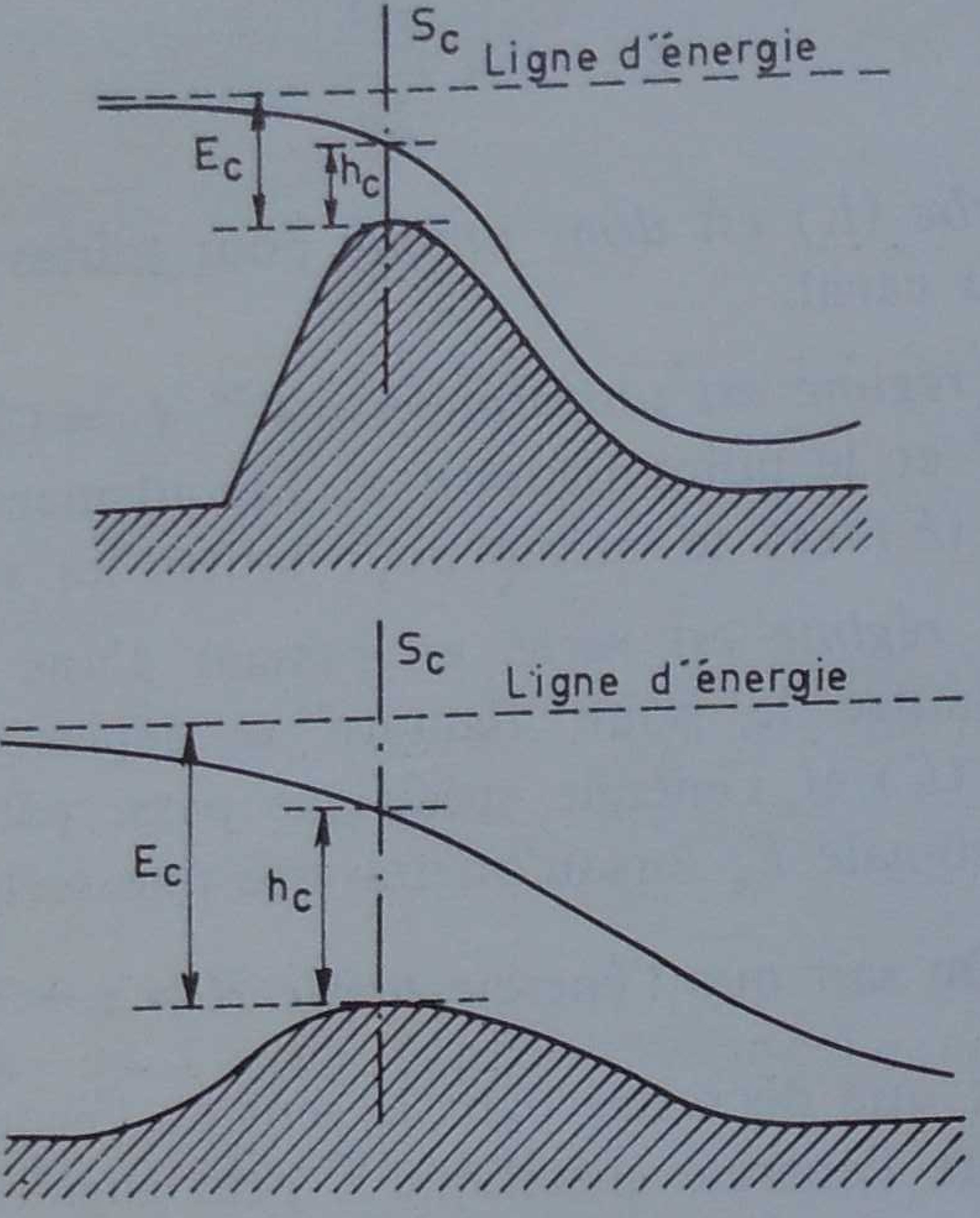


Fig. XII.2.5.1.2 – Section critique en régime varié dans le cas où les pertes de charge sont négligeables

Par exemple, dans le cas d'un *déversoir à crête épaisse* (fig. XII.2.5.1.3), en raisonnant sur une tranche longitudinale de l'écoulement de largeur unité (débit unitaire q), la section critique (S_c) est située au-dessus de la crête et dans ce cas on sait que :

$$E_c = \frac{3}{2}\, h_c \qquad \text{ou} \qquad h_c = \frac{2}{3}\, E_c$$

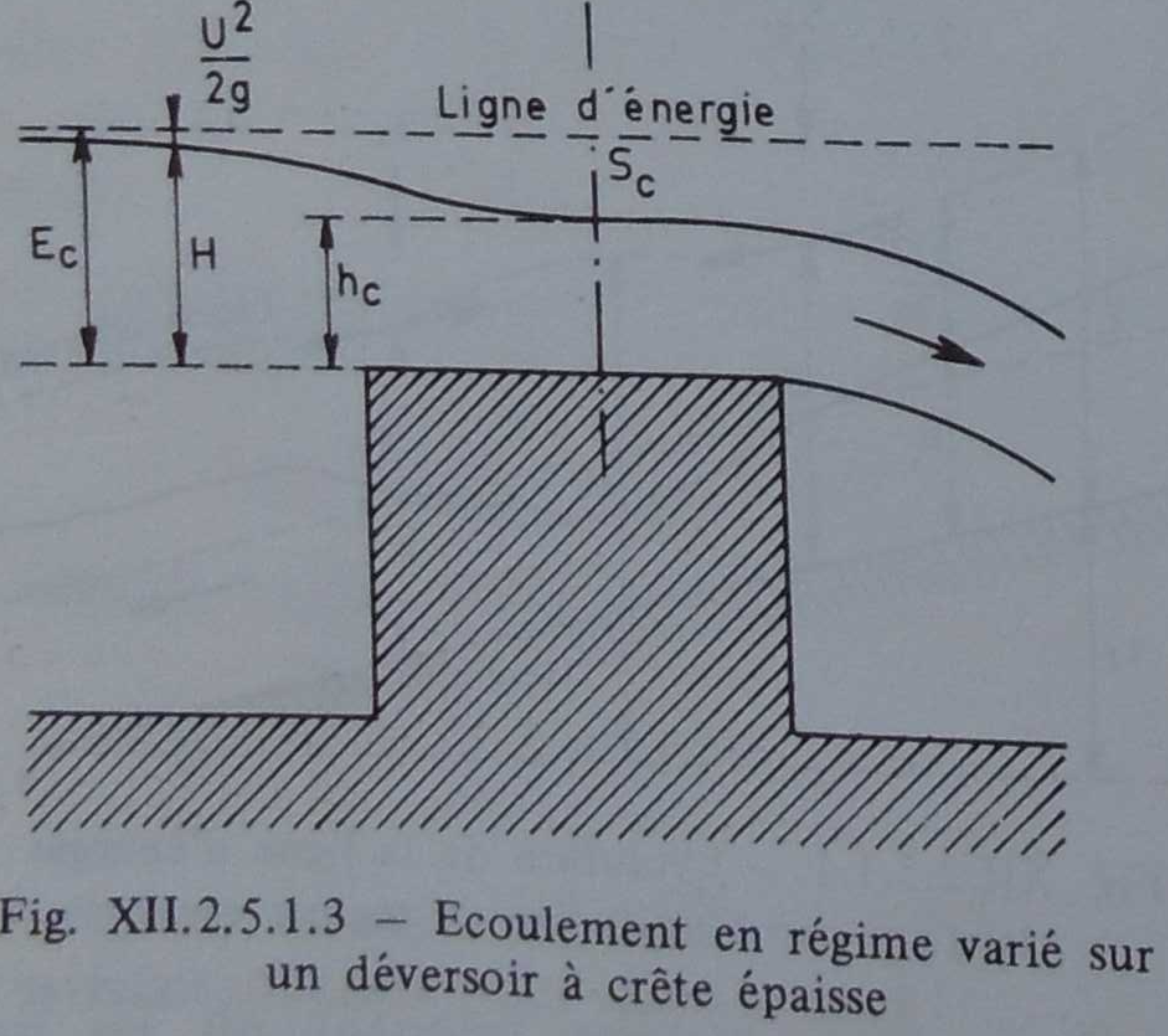


Fig. XII.2.5.1.3 – Ecoulement en régime varié sur un déversoir à crête épaisse

Si on néglige la hauteur représentative de la vitesse U à l'amont, $E_c = H$ charge sur le déversoir,

et
$$h_c = \frac{2}{3}\, H$$

On retrouve le résultat classique.

Par ailleurs, on vérifie bien que l'apparition de la section critique correspond à l'obtention du débit maximal, comme le montre la courbe $h(Q)$ à E constant (point C_1 de la figure XII.2.3.2.2). On retrouve également le résultat déduit du principe du débit maximal sur un déversoir à large seuil (cf. § X.2.2.2).

XII.2.5.2. *Canal de section non uniforme*

Il y a autant de courbes (E) que de formes de sections et h_c varie donc d'une section à l'autre.

Un cas particulier intéressant est celui d'une *section rectangulaire dont la largeur varie progressivement,* par exemple un tronçon convergent. Si la largeur l diminue, le débit unitaire $q = \dfrac{Q}{l}$ augmente et l'évolution du point figuratif suit une courbe continue $A_1\, A_2\, A_3$ sur le réseau des courbes (E) tracées pour les diverses valeurs de q (fig. XII.2.5.2).

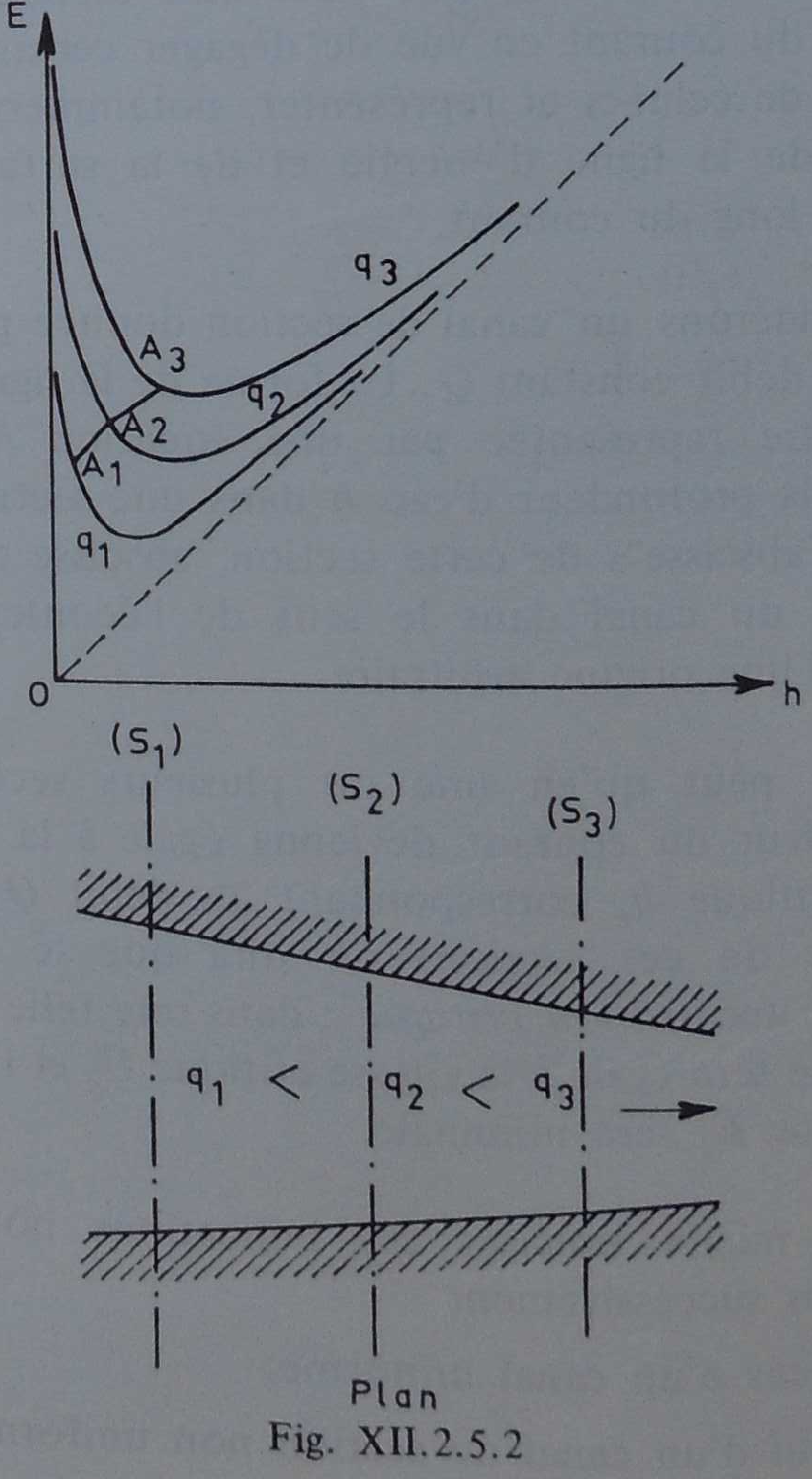


Fig. XII.2.5.2

En conclusion les courbes (E) permettent de lier les variations de la profondeur h aux fluctuations de la ligne d'énergie et inversement. Elles ne suffisent généralement pas à déterminer complètement les caractéristiques de l'écoulement (profondeur et énergie) sauf toutefois dans le cas où on peut négliger les pertes de charge mais, d'une manière générale, elles donnent une indication qualitative sur l'allure probable des phénomènes et, à ce titre, elles constituent un précieux moyen d'investigation.

XII.2.5.3. *Pentes "faibles" et "fortes"*

Les propriétés hydrauliques d'un canal ou d'une rivière diffèrent considérablement suivant les grandeurs relatives de sa pente I et de la pente critique I_c pour le débit considéré.

Si $I < I_c$ ce qui correspond à $h_n > h_c$, la pente est dite *faible*, le cours d'eau est un *fleuve*.

Si $I > I_c$ ce qui correspond à $h_n < h_c$, la pente est dite *forte*, le cours d'eau est un *torrent*.

Comme I_c varie en fonction inverse du débit (§ XII.2.4.6), un même cours d'eau pourra donc présenter le caractère d'un fleuve à l'étiage et celui d'un torrent en période de crue.

Associant ces définitions à celles données précédemment concernant les régimes fluvial, torrentiel et critique, on peut résumer comme suit les résultats obtenus (fig. XII.2.5.3) :

Faible pente (fleuve) :

$$I < I_c \quad ; \quad h_n > h_c$$

Forte pente (torrent) :

$$I > I_c \quad ; \quad h_n < h_c \qquad \text{[XII.2.5.3.1]}$$

Pente critique :

$$I = I_c \quad ; \quad h_n = h_c$$

Régime fluvial :

$$h > h_c \; ; \; U < U_c \; ; \; \mathcal{F} < 1 \; ; \; \frac{\partial E}{\partial h} > 0$$

Régime torrentiel :

$$h < h_c \; ; \; U > U_c \; ; \; \mathcal{F} > 1 \; ; \; \frac{\partial E}{\partial h} < 0 \qquad \text{[XII.2.5.3.2]}$$

Régime critique :

$$h = h_c \; ; \; U = U_c \; ; \; \mathcal{F} = 1 \; ; \; \frac{\partial E}{\partial h} = 0$$

Fig. XII.2.5.3

On peut dire que *la pente impose son caractère au cours d'eau* (fleuve ou torrent) et *le débit impose son caractère au régime* (fluvial ou torrentiel).

Enfin soulignons à nouveau que cette terminologie n'a aucun rapport avec les régimes laminaire et turbulent.

XII.2.5.4. *Signe de $\partial E/\partial s$ le long d'un écoulement en canal uniforme et en régime graduellement varié*

Considérons une section dans laquelle E est l'énergie spécifique, I la pente du canal (positive si le canal descend, négative dans le cas contraire) et J la perte de charge unitaire pour le débit considéré ; J représente la pente de la ligne d'énergie, elle est toujours positive ou nulle à la limite, la ligne d'énergie étant toujours descendante dans le sens du courant ou à la limite horizontale.

Nous sommes arrivés précédemment aux conclusions suivantes (§ XII.2.2.1) :

$$\begin{aligned} &\text{Si} \quad h > h_n, \quad \text{on a} \quad I > J \\ &\text{Si} \quad h < h_n, \quad \text{on a} \quad I < J \\ &\text{Si} \quad h = h_n, \quad \text{on a} \quad I = J \end{aligned} \qquad \text{[XII.2.5.4.1]}$$

Considérons alors deux sections (S_1) et (S_2) séparées par une distance Δs suffisamment petite pour qu'on puisse considérer I et J comme constantes entre (S_1) et (S_2) (fig. XII.2.5.4).

L'équation de Bernoulli appliquée entre (S_1) et (S_2) permet d'écrire :

$$E_1 + z_1 = E_2 + z_2 + J\Delta s$$

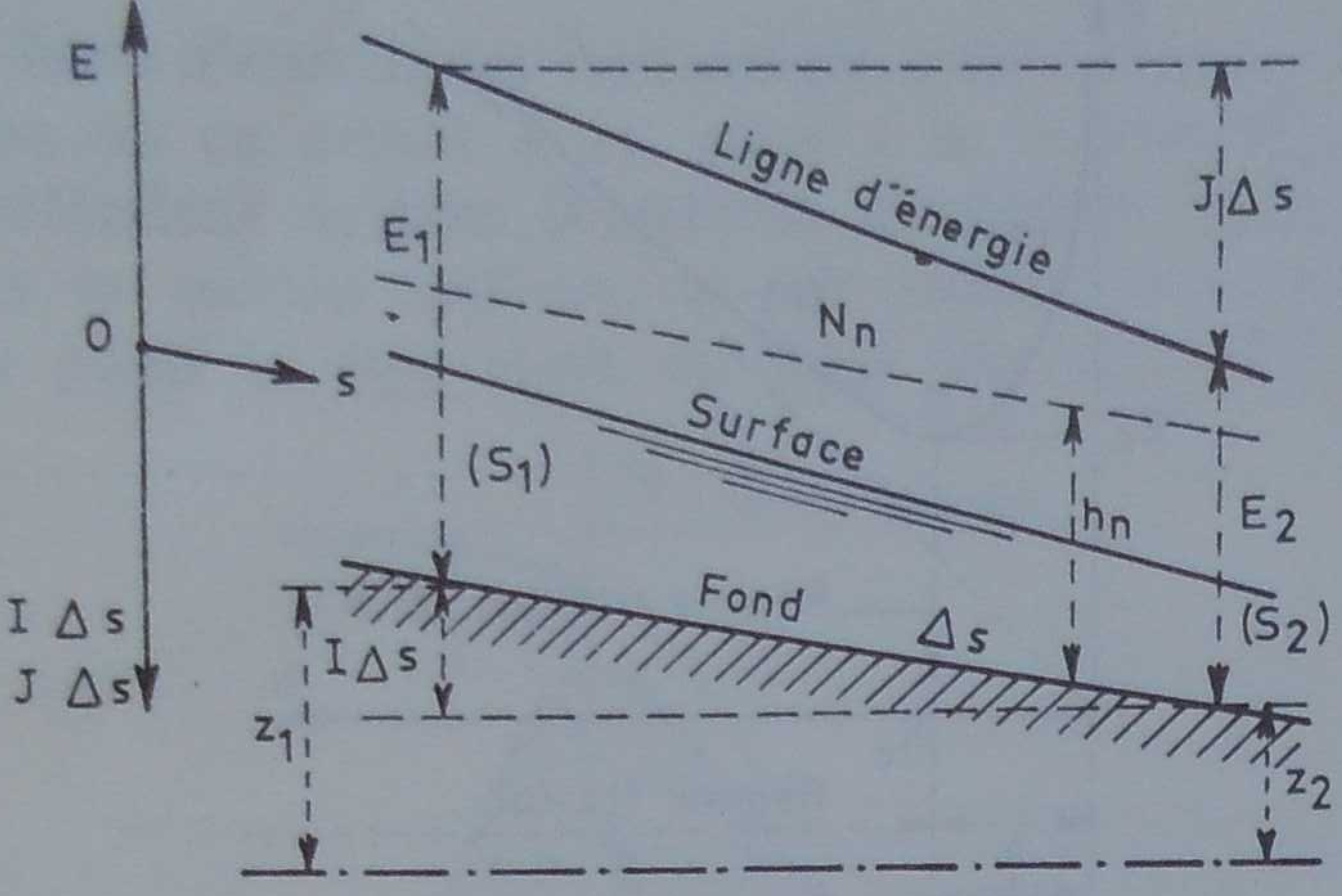


Fig. XII.2.5.4

z_1 et z_2 étant les cotes du fond respectivement en (S_1) et (S_2).

Posons :

$$E_2 - E_1 = \Delta E$$

$$z_1 - z_2 = I \Delta s$$

il vient :

$$\Delta E = I \Delta s - J \Delta s$$

$$\Delta E = (I - J) \Delta s \qquad \text{[XII.2.5.4.2]}$$

et à la limite :

$$\boxed{\frac{dE}{ds} = I - J} \qquad \text{[XII.2.5.4.3]}$$

$J\Delta s$ est la perte de charge ou hauteur représentative de l'énergie perdue par suite de la viscosité et de la turbulence (positive vers le bas).

$I\Delta s$ est la hauteur représentative du travail fourni par la pesanteur (diminution de l'énergie de position) (positive vers le bas).

L'expression [XII.2.5.4.2] montre donc que la variation de l'énergie spécifique est égale à la différence entre le travail fourni par la pesanteur et la dissipation d'énergie dans le liquide.

Cette dissipation d'énergie $J\Delta s$ est essentiellement positive et irrécupérable mais $I\Delta s$ peut être positif (canal descendant) ou négatif (canal ascendant).

Rapprochant les expressions [XII.2.5.4.1 et 3] on peut ainsi dresser le tableau ci-après[1]

Remarques : 1 – La pente de la surface libre par rapport au fond du canal peut être, dans chaque cas, différente de celle indiquée sur les figures ; pour $I > 0$ la forme de la surface libre dépend, en effet, des valeurs comparées de I et I_c comme il sera précisé au chapitre suivant.

2 – En régime uniforme E est constante tout le long du canal, les pertes de charge sont exactement compensées par l'abaissement correspondant du lit ; le régime uniforme ne peut donc se produire qu'en canal descendant.

3 – En canal descendant l'expression dE/ds est nulle dans le régime uniforme et peut être positive ou négative en régime graduellement varié suivant que h est supérieure ou inférieure à la profondeur normale h_n.

4 – Si on peut négliger les pertes de charge c'est-à-dire la pente de la ligne d'énergie par rapport à la pente du fond (canaux à forte pente, mouvements quasi-potentiels), la ligne d'énergie est horizontale et une remontée du fond réduit l'énergie spécifique tandis qu'une descente l'accroît.

XII.2.6. Etude générale des mouvements graduellement variés

XII.2.6.1. *Généralités* et *hypothèses*

Nous supposerons que le canal considéré est de section de forme quelconque mais constante, évasée vers le haut et que le lit est donc une surface cylindrique et conserve la même nature physique d'une section à l'autre ; un tel canal est dit *uniforme* comme nous l'avons déjà défini.

Rappelons qu'un *mouvement graduellement varié* est caractérisé par une variation progressive des divers paramètres hydrauliques le long du courant.

La courbe représentant la ligne d'eau d'un tel mouvement est généralement appelée *courbe de remous* ; le *remous* en un point est la différence $|h - h_n|$ entre la profondeur du courant et la profondeur normale du régime uniforme pour le débit considéré.

La courbe de remous est parfois appelée également "*axe hydraulique*" ou "*ligne d'eau*".

Si h croît dans le sens de l'écoulement, $\frac{\partial h}{\partial s} > 0$ et par conséquent $\frac{\partial U}{\partial s} < 0$, on a affaire à un écoulement *graduellement retardé* et *un remous d'exhaussement*.

Si h décroît dans le sens de l'écoulement, $\frac{\partial h}{\partial s} < 0$ et par conséquent $\frac{\partial U}{\partial s} > 0$, on a affaire à un écoulement *graduellement accéléré* et un *remous d'abaissement*.

- - - - - - - - - - - - - -

(1) (cf. page suivante).

Nature du mouvement	$I > 0$ (Canal descendant)	$I = 0$ (Canal horizontal)	$I < 0$ (Canal ascendant)
Uniforme $h = h_n$ $I = J$	$\frac{dE}{ds} = 0 \quad ; \quad E_2 = E_1$ Les pertes de charge sont exactement compensées par la pesanteur	$I = J = 0$ Comme J est nécessairement positif, ce mouvement est impossible $h_n = \infty$	$J < 0$ Mouvement impossible (J nécessairement positif)
Graduellement varié	1) $h > h_n \quad ; \quad J < I$ $\frac{dE}{ds} > 0 \quad ; \quad E_2 > E_1$	$h > h_n \quad ; \quad I > J$ donc $J < 0$ Mouvement impossible (J nécessairement positif)	$h > h_n \quad ; \quad I > J$ donc $J < 0$ Mouvement impossible (J nécessairement positif)
	1) $h < h_n \quad ; \quad J > I$ $\frac{dE}{ds} < 0 \quad ; \quad E_2 < E_1$	$h < h_n \quad ; \quad J > I$ $\frac{dE}{ds} < 0 \quad ; \quad E_2 < E_1$	$h < h_n \quad ; \quad J > I$ $\frac{dE}{ds} < 0 \quad ; \quad E_2 < E_1$

Légende : L.E. = Ligne d'énergie.

Nous supposerons que le canal considéré est uniforme et de grande longueur et possède seulement une *singularité localisée* (exemple : déversoir, vanne de fond, seuil, etc.). Cette singularité rompt l'uniformité de l'écoulement et donne à celui-ci un caractère brusquement varié aux abords immédiats de la singularité et graduellement varié sur tout le reste du canal.

Nous ferons les *hypothèses suivantes* :

1 – Le canal est suffisamment *long* pour que le mouvement graduellement varié puisse s'y établir.

2 – Nous écarterons le cas où la singularité placée dans le canal est un *coude*, c'est-à-dire que nous nous limitons au cas où l'axe du canal se projette sur le plan horizontal suivant une droite.

3 – Le courant est *rectiligne et parallèle*, c'est-à-dire que les composantes transversales des vitesses sont négligeables par rapport à leurs composantes longitudinales parallèles à la direction générale de l'écoulement.

4 – Le liquide s'écoule *en bloc*, c'est-à-dire que, dans une section quelconque, toutes les vitesses sont supposées égales à la vitesse moyenne dans cette section ; nous savons d'ailleurs comment tenir compte de l'inégale répartition des vitesses dans une section transversale en faisant intervenir les coefficients α et β.

5 – La *pente* du lit ($I = \text{tg}\, i$) est suffisamment faible pour que l'on puisse admettre $\cos i = 1$ et $\sin i = \text{tg}\, i = I$.

XII.2.6.2. *Equation différentielle du mouvement graduellement varié en canal uniforme*

Elle se déduit immédiatement de l'équation suivante établie au § XII.2.5.4 :

$$\frac{dE}{ds} = I - J \qquad \text{[XII.2.5.4.3]}$$

On peut écrire en effet :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\partial E}{\partial h}\frac{dh}{ds} = \frac{\partial}{\partial h}\left(h + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}\right)\frac{dh}{ds}$$

$$= \left(1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3}\frac{\partial\Omega}{\partial h}\right)\frac{dh}{ds}$$

$$\frac{dE}{ds} = I - J = \left(1 - \frac{Q^2 L}{g\Omega^3}\right)\frac{dh}{ds}$$

et finalement :

$$\boxed{\frac{dh}{ds} = I\,\frac{1 - \dfrac{J}{I}}{1 - \dfrac{Q^2 L}{g\Omega^3}}} \qquad \text{[XII.2.6.2]}$$

Dans cette expression, I et Q sont constants et Ω, L et J sont des fonctions de h puisque J est donnée par la relation :

$$J = \frac{bU^2}{R} = \frac{b}{R}\frac{Q^2}{\Omega^2}$$

L'équation [XII.2.6.2] est donc l'équation différentielle $ds = f(h)\, dh$ de la ligne d'eau en mouvement graduellement varié pour un écoulement en régime permanent à filets sensiblement parallèles se déplaçant en bloc en canal uniforme de faible pente.

XII.2.6.3. *Etude qualitative systématique et classification des différentes lignes d'eau des mouvements permanents graduellement variés*

Cette étude se déduit de l'équation [XII.2.6.2].

Son *premier membre* dh/ds est la pente de la surface libre rapportée au fond du canal (h est mesurée positivement vers le haut).

Son *second membre* peut prendre un certain nombre de valeurs caractéristiques :

– le *numérateur* s'annule pour

$$\left.\begin{array}{l} I = J, \text{ c'est-à-dire } h = h_n \\ \text{Il est positif pour} \\ I > J, \text{ c'est-à-dire } h > h_n \\ \text{Il est négatif pour} \\ I < J, \text{ c'est-à-dire } h < h_n \end{array}\right\} \text{relations} \qquad \text{[XII.2.5.4.1]}$$

– le *dénominateur* est précisément

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 1 - \frac{Q^2 L}{g\Omega^3}$$

En se reportant à la courbe (E) (fig. XII.2.6.3.1) on constate que :

$$\frac{\partial E}{\partial h} = 0 \quad \text{pour} \quad h = h_c \quad \text{(régime critique)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial h} > 0 \quad \text{pour} \quad h > h_c \quad \text{(régime fluvial)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial h} < 0 \quad \text{pour} \quad h < h_c \quad \text{(régime torrentiel)}$$

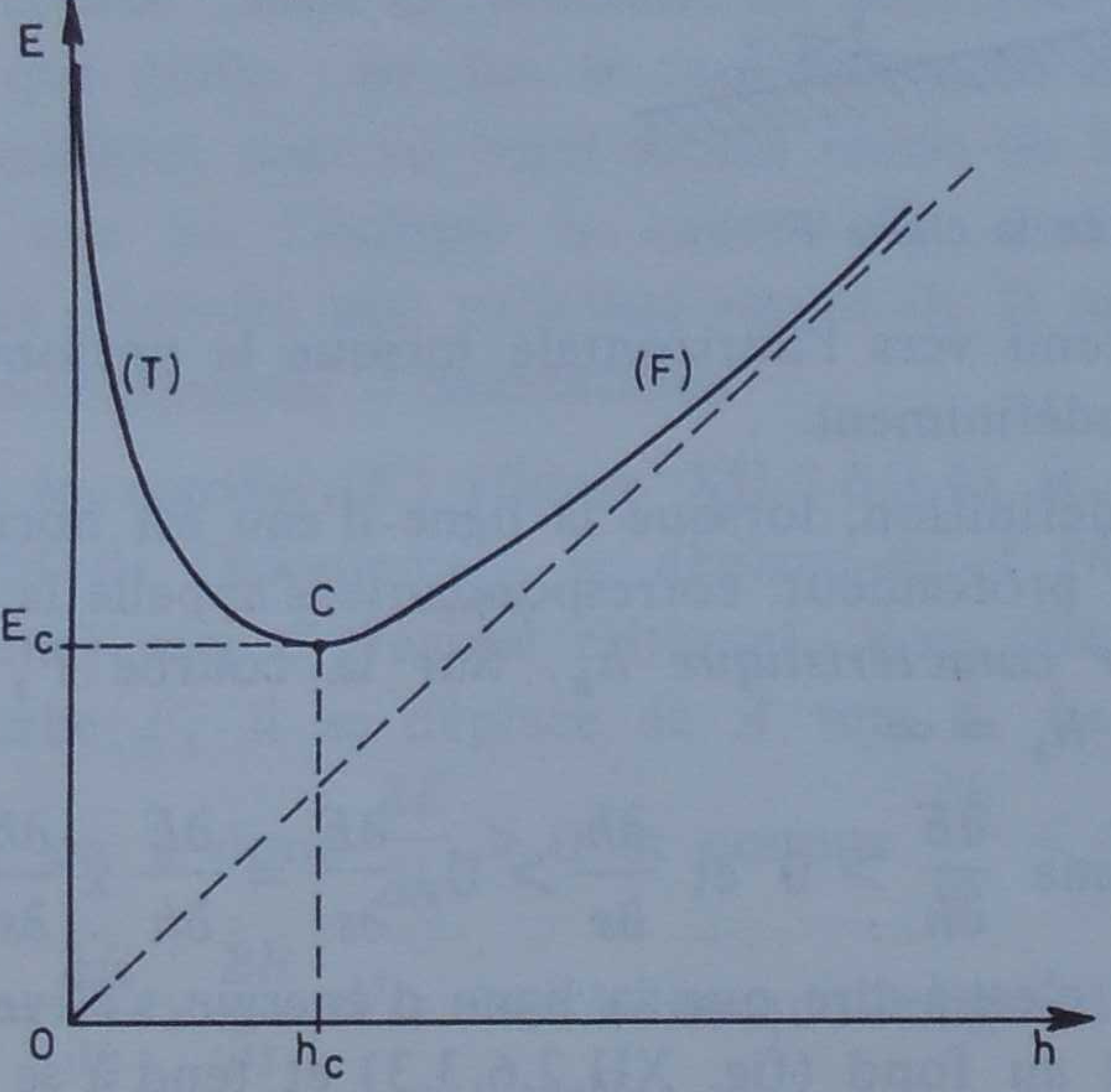


Fig. XII.2.6.3.1

Avant de procéder à l'étude systématique de l'équation [XII.2.6.2] il nous faut encore définir les *conventions et symbôles utilisés* pour la représentation et le repérage de la ligne d'eau.

On caractérisera la *classe* du phénomène par une lettre majuscule dépendant de la pente :

$I > 0$ Canal descendant
- F pour $I < I_c$ (le cours d'eau est un *fleuve*)(1)
- T pour $I > I_c$ (le cours d'eau est un *torrent*)(1)
- C pour $I = I_c$ (le cours d'eau possède la pente *critique*)

$I = 0$ Canal *horizontal* : H

$I < 0$ Canal *ascendant* : A

----

(1) Les symboles F et T utilisés ici sont parfois remplacés respectivement par M et S qui tirent leur origine de la terminologie anglo-saxonne : M = "mild slope" (pente douce) et S = "steep slope" (pente rapide).

A l'intérieur de chaque classe on représentera par un chiffre allant de 1 à 3 la *région* susceptible d'être occupée par la ligne d'eau. Dans le cas général, en effet, les droites N_n (niveau normal) et N_c (niveau critique) séparent l'espace en trois régions numérotées de 1 à 3 en allant de la surface vers le fond. La région 1 sera donc celle située au-dessus de N_n et N_c, la région 3 au-dessous et la région 2 (quand elle existera) entre N_n et N_c.

En somme la *classe* de la ligne d'eau (F, T, C, H, A) dépend du caractère du cours d'eau et la *région* dépend des grandeurs relatives de h, h_n et h_c, c'est-à-dire du *régime*.

Enfin, pour mieux représenter les phénomènes, nous utiliserons dans les figures qui vont suivre une échelle des hauteurs très grande par rapport à celle des longueurs de façon à exagérer les pentes.

Compte-tenu de ces conventions, nous pouvons maintenant procéder à l'étude complète de l'équation [XII.2.6.2] qui nous permettra de préciser les formes générales des lignes d'eau et de classer ces différentes formes.

Cette étude est une application du problème classique du tracé de la courbe représentative d'une fonction connaissant le signe de sa dérivée et les conditions aux limites.

1^er^ Cas : Canal descendant $I > 0$

L'allure générale de la ligne d'eau est fonction des valeurs relatives de I et I_c pente critique du canal pour le débit considéré.

1) $I < I_c$: *classe F* – Dans ces conditions, en partant du fond on trouve de bas en haut : le niveau critique N_c puis le niveau normal N_n.

Autrement dit $I < I_c$ entraîne $h_n > h_c$ comme nous l'avons d'ailleurs déjà constaté (équation [XII.2.5.3.1]).

Trois cas peuvent se produire (fig. XII.2.6.3.2) :

a) $h > h_n > h_c$ (région 1) : c'est-à-dire $I > J$.

Le numérateur et le dénominateur de [XII.2.6.2] sont positifs ; $\frac{dh}{ds} > 0$. La ligne d'eau a l'allure représentée en F_1 sur la figure XII.2.6.3.2 (classe F, région 1).

Lorsque $h \to h_n$, $I \to J$ et $\frac{dh}{ds} \to 0$, ce qui signifie

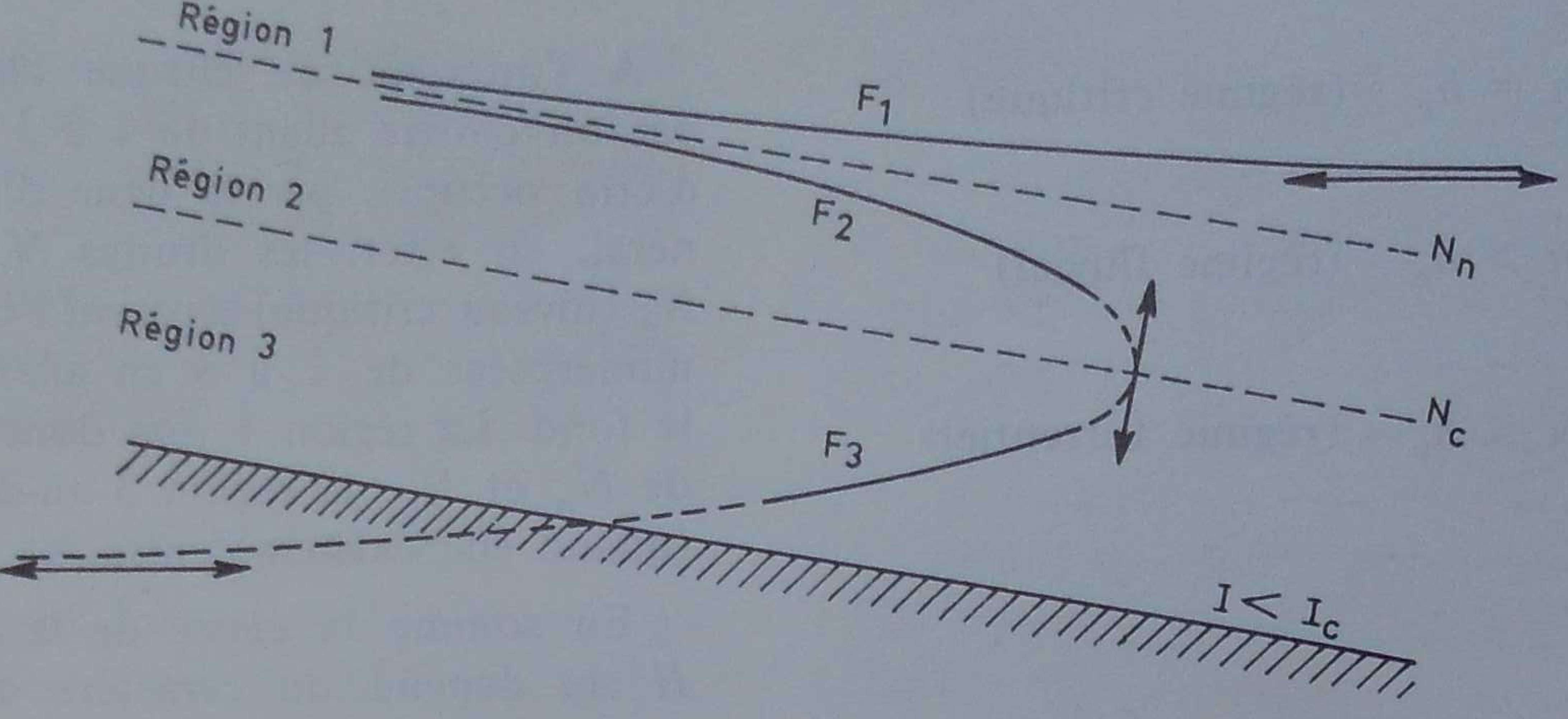


Fig. XII.2.6.3.2 – Courbes de remous de la classe F

que la courbe F_1 se raccorde asymptotiquement à l'amont au niveau normal.

Lorsque $h \to \infty$, la courbe (E) (fig. XII.2.6.3.1) montre que $\dfrac{dE}{dh} = 1 - \dfrac{Q^2 L}{g\Omega^3} \to 1$ (branche de la courbe (E) asymptote à la première bissectrice), le dénominateur de [XII.2.6.2] tend donc vers l'unité ; par ailleurs pour les formes de sections évasées vers le haut $\dfrac{B}{\Omega} \to 0$, donc $J = \dfrac{B}{\Omega}\,\varphi(U) \to 0$ et le numérateur de [XII.2.6.2] tend vers I. En définitive lorsque $h \to \infty$, $\dfrac{dh}{ds} \to I$, ce qui signifie que la ligne d'eau tend vers l'horizontale lorsque la profondeur croît indéfiniment.

Par définition, lorsque la ligne d'eau est horizontale la profondeur correspondante s'appelle la *profondeur caractéristique* h_k. Sur la courbe F_1, on a donc $h_k = \infty$.

Comme $\dfrac{\partial E}{\partial h} > 0$ et $\dfrac{\partial h}{\partial s} > 0$, $\dfrac{\partial E}{\partial s} = \dfrac{\partial E}{\partial h} \times \dfrac{\partial h}{\partial s}$ est positif, c'est-à-dire que la ligne d'énergie s'élève par rapport au fond (fig. XII.2.6.3.3) et tend à se confondre avec la ligne d'eau horizontale lorsque $h \to \infty$.

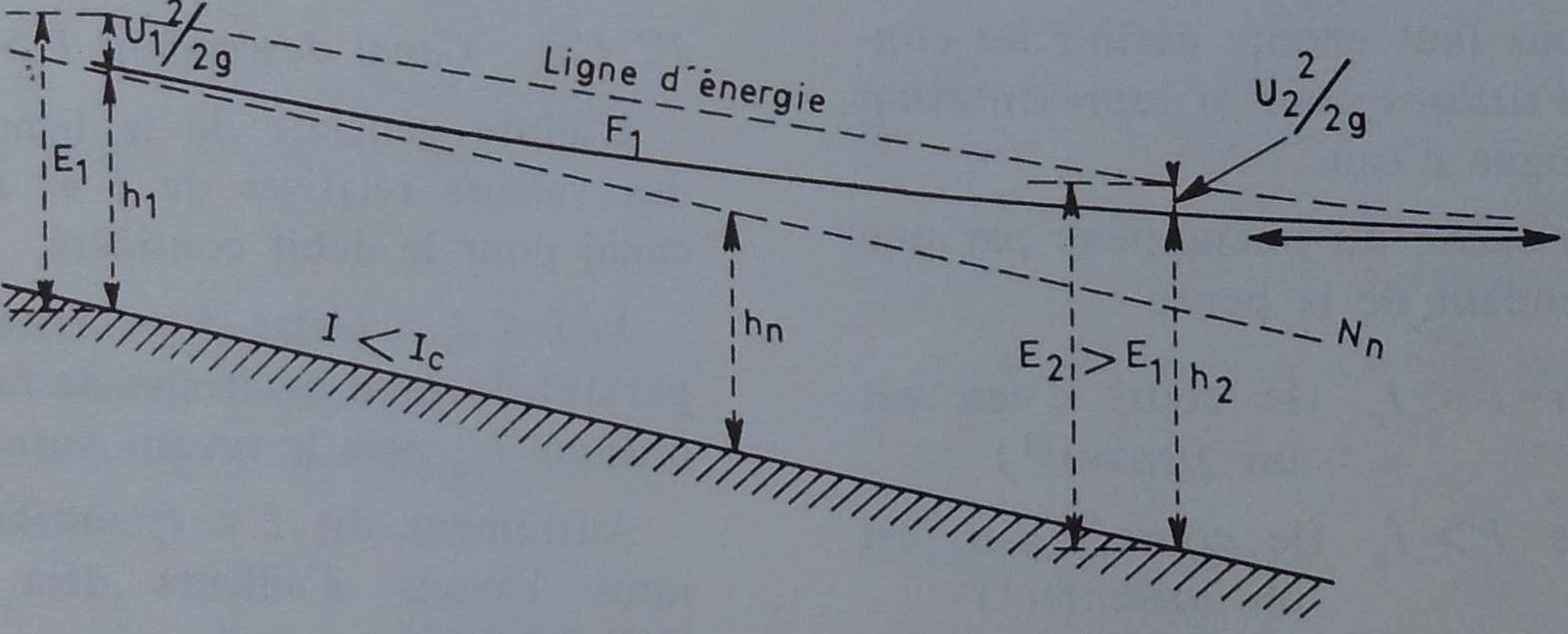


Fig. XII.2.6.3.3 – Courbe F_1 (remous d'exhaussement)

Cette courbe F_1, très fréquente, est une courbe de *remous d'exhaussement* ; elle correspond à un *mouvement graduellement retardé* et se rencontre sur les rivières (régime fluvial $I < I_c$) en amont d'un obstacle obligeant la ligne d'eau à s'élever au-dessus du niveau normal, par exemple à l'amont d'un barrage ou de piles de pont.

b) $h_c < h < h_n$ (région 2) : c'est-à-dire $I < J$.

Le numérateur de [XII.2.6.2] est négatif ; son dénominateur est positif ; donc $\dfrac{dh}{ds} < 0$. La ligne d'eau est représentée en F_2 (fig. XII.2.6.3.2) (classe F, région 2).

Lorsque $h \to h_n$, $I \to J$ et $\dfrac{dh}{ds} \to 0$ ce qui signifie que la courbe F_2 se raccorde asymptotiquement à l'amont au niveau normal.

Lorsque $h \to h_c$, $\dfrac{dh}{ds} \to -\infty$ c'est-à-dire que la ligne d'eau franchit le niveau critique suivant une direction perpendiculaire au fond ; en fait dans cette région les hypothèses simplificatrices de base sont en défaut, les vitesses ne sont plus parallèles au fond du canal et leurs composantes transversales ne sont plus négligeables ; la portion correspondante de la courbe (tracé en pointillé) est donc plus théorique que réelle ; en fait le franchissement du niveau critique, tout en étant moins voisin de la verticale que ne l'indique la courbe F_2, comporte presque toujours une variation rapide de la surface libre accompagnée d'ondulations.

Sur la courbe (E) (figure XII.2.6.3.4) le point figuratif de l'écoulement se déplace de A (régime uniforme) vers C (régime critique), alors que pour la courbe F_1 il se déplace de A vers B. Le long de F_2 on a donc $\dfrac{\partial E}{\partial h} > 0$ et comme $\dfrac{\partial h}{\partial s} < 0$, on a $\dfrac{\partial E}{\partial s} = \dfrac{\partial E}{\partial h} \times \dfrac{\partial h}{\partial s} < 0$ c'est-à-dire que la ligne d'énergie s'abaisse par rapport au fond (fig. XII.2.6.3.5) ; l'énergie spécifique est minimale dans la section critique où la tangente à la ligne d'énergie est parallèle au fond.

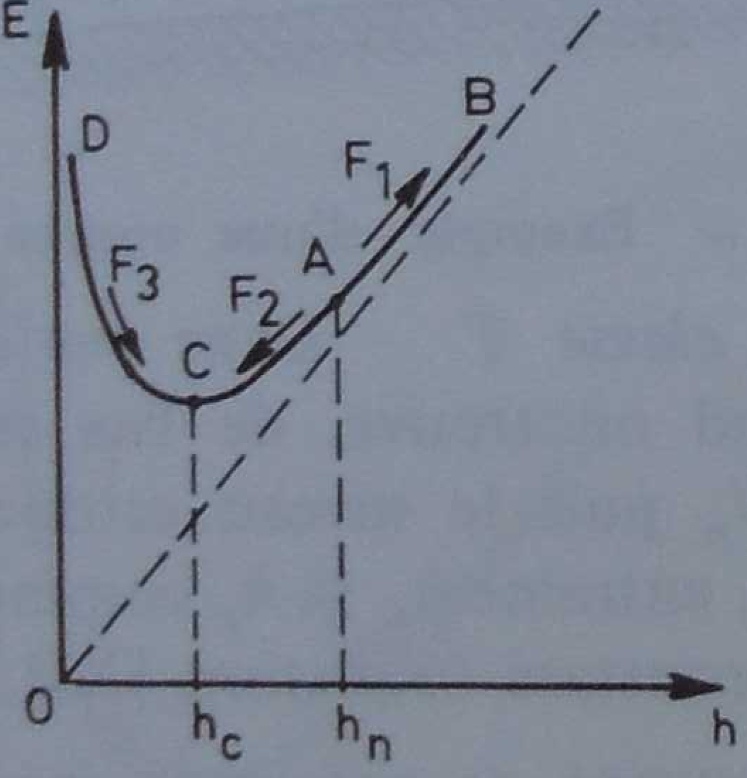


Fig. XII.2.6.3.4 – Evolution sur la courbe (E) du point figuratif de l'écoulement pour les courbes de remous de la classe F

Cette courbe F_2 est une courbe *de remous d'abaissement* et correspond à un *mouvement graduellement accéléré.* Elle se rencontre sur les rivières (fleuve $I < I_c$ en régime fluvial) à l'amont d'une singularité obligeant la ligne d'eau à s'abaisser au-dessous

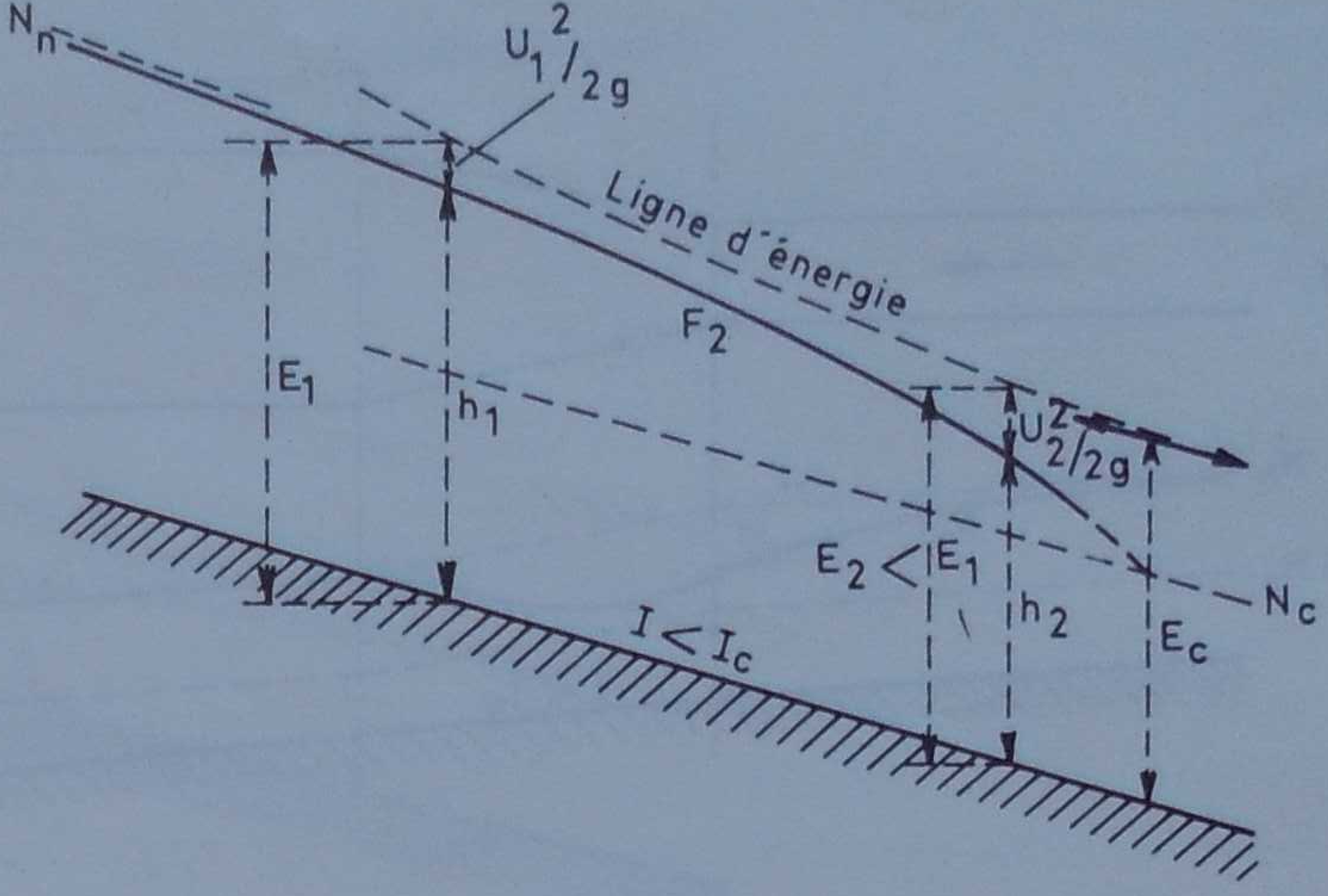


Fig. XII.2.6.3.5 – Courbe F_2 (remous d'abaissement)

du niveau normal, par exemple à l'amont d'une augmentation de pente (fig. XII.2.6.3.6), à l'amont du débouché d'un canal dans un réservoir (fig. XII.2.6.3.7), à l'amont d'un élargissement (fig. XII.2.6.3.8).

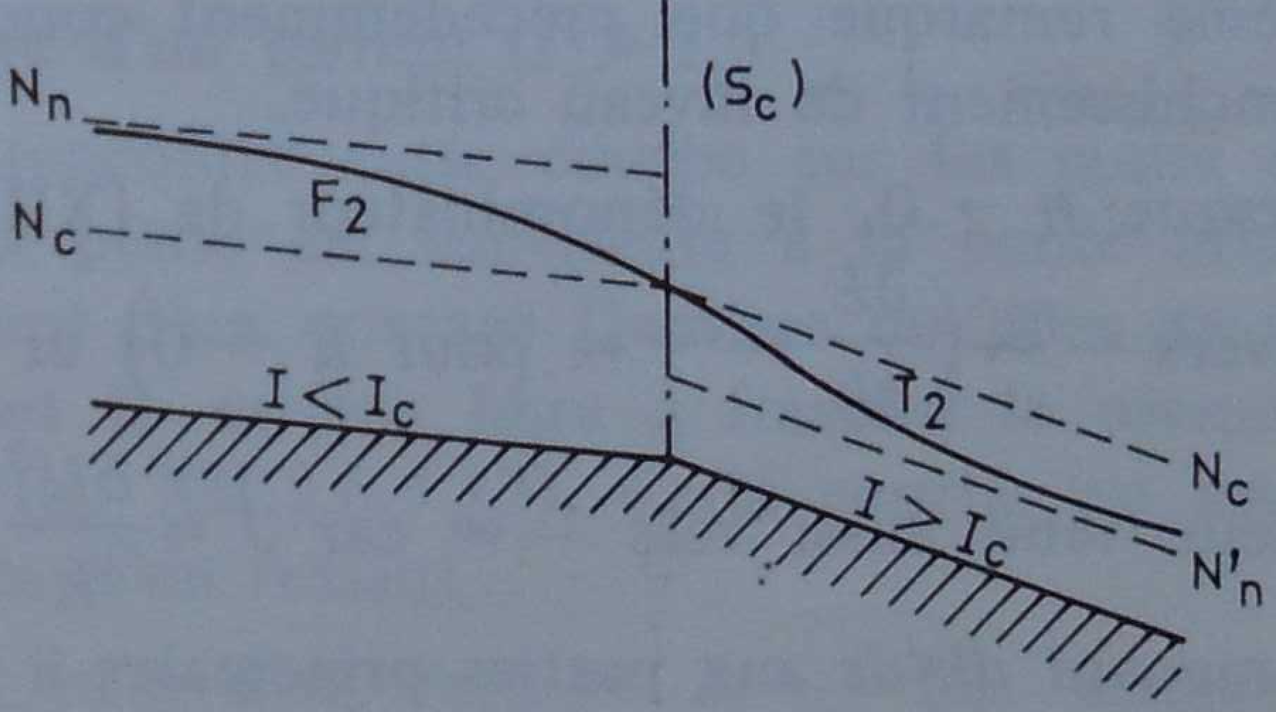


Fig. XII.2.6.3.6 – Exemple de courbes de remous F_2 et T_2

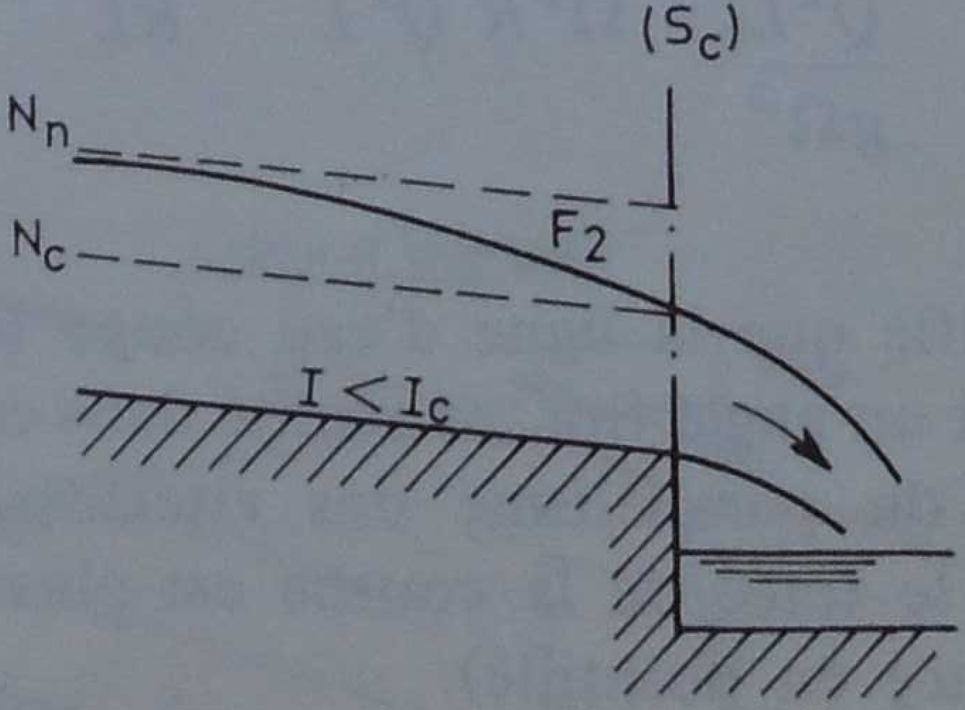


Fig. XII.2.6.3.7 – Exemple d'une courbe de remous F_2

c) $h < h_c < h_n$ (région 3) : c'est-à-dire $I < J$. Le numérateur et le dénominateur de [XII.2.6.2] sont négatifs donc $\dfrac{dh}{ds} > 0$. La ligne d'eau est représentée

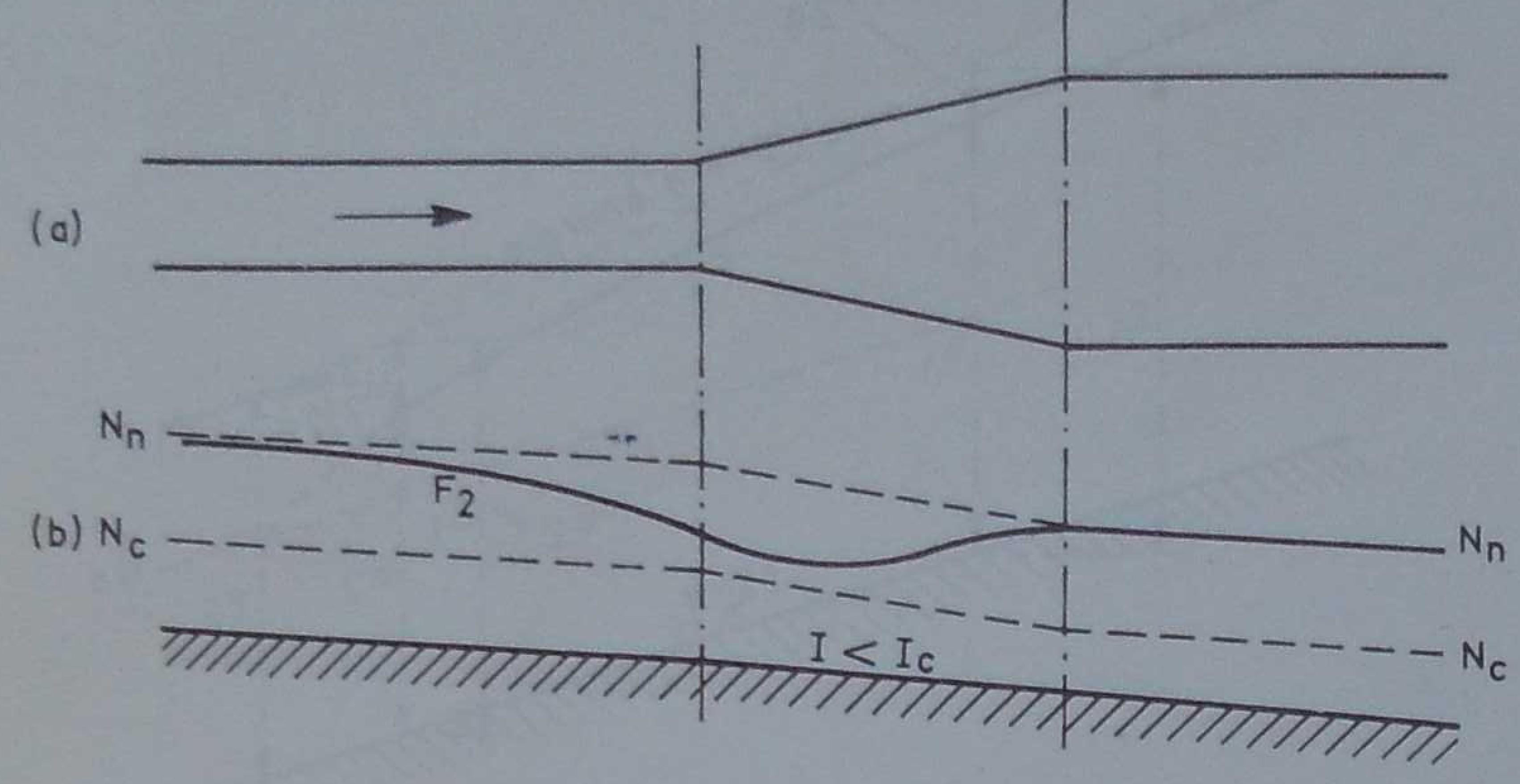


Fig. XII.2.6.3.8 – Exemple d'une courbe de remous F_2 à l'amont d'un élargissement progressif de la section transversale
(a) Vue en plan
(b) Profil en long

en F_3 (fig. XII.2.6.3.2) – (classe F, région 3).

Lorsque $h \to h_c$, $\frac{dh}{ds} \to +\infty$, on peut faire ici la même remarque que précédemment concernant le franchissement du niveau critique.

Lorsque $h \to 0$, le dénominateur de [XII.2.6.2] tend vers $-\infty \left(\frac{\partial E}{\partial h} \to -\infty \text{ pour } h \to 0\right)$ et le numérateur tend aussi vers $-\infty$ car $J = \frac{bU^2}{R} \to \infty$.
En ramenant dh/ds aux parties principales il vient :

$$\frac{dh}{ds} \simeq \frac{J}{\frac{Q^2 L}{g\Omega^3}} = \frac{\frac{bU^2}{R}}{\frac{Q^2 L}{g\Omega^3}} = \frac{bQ^2}{\Omega^2 R}\,\frac{g\Omega^3}{Q^2 L} = \frac{bg\Omega}{RL} = \frac{bgB}{L} > 0$$

ce qui signifie que la ligne d'eau coupe le fond du canal suivant un angle fini ; en réalité dans cette région l'hypothèse du parallélisme des vitesses n'est plus satisfaite et le tracé de la courbe est plus théorique que réel (tracé en pointillé).

Lorsque $h \to -\infty$, $\frac{dh}{ds} \to I$ (même raisonnement que pour la courbe F_1) ce qui indique qu'à l'infini amont la courbe présente une asymptote horizontale (tracé en pointillé, la courbe n'ayant plus de sens physique dans cette zone).

Sur la courbe (E) (fig. XII.2.6.3.4) le point figuratif de l'écoulement se déplace de D vers C (régime critique) c'est-à-dire que la ligne d'énergie s'abaisse par rapport au fond (fig. XII.2.6.3.9) ; l'énergie spécifique est minimale dans la section critique où la tangente à la ligne d'énergie est parallèle au fond du canal.

Cette courbe F_3 est une courbe de *remous d'exhaussement* et correspond à un *mouvement graduellement retardé* ; c'est un cas assez rare d'un régime torrentiel ($h < h_c$) sur un fleuve ($I < I_c$) ; elle se rencontre quand, dans un cours d'eau de pente inférieure à la pente critique, on oblige la ligne d'eau à descendre en-dessous du niveau critique, par exemple à l'aval d'une vanne de fond dénoyée dont la levée a est plus petite que h_c (fig. XII.2.6.3.9) ; la courbe F_3 est souvent prolongée par un ressaut permettant de passer du régime torrentiel au régime fluvial. La partie utile de la courbe est donc limitée dans sa longueur, le tracé des extrémités amont ($h \to 0$) et aval ($h \to h_c$) manquant de précision pour les raisons indiquées précédemment.

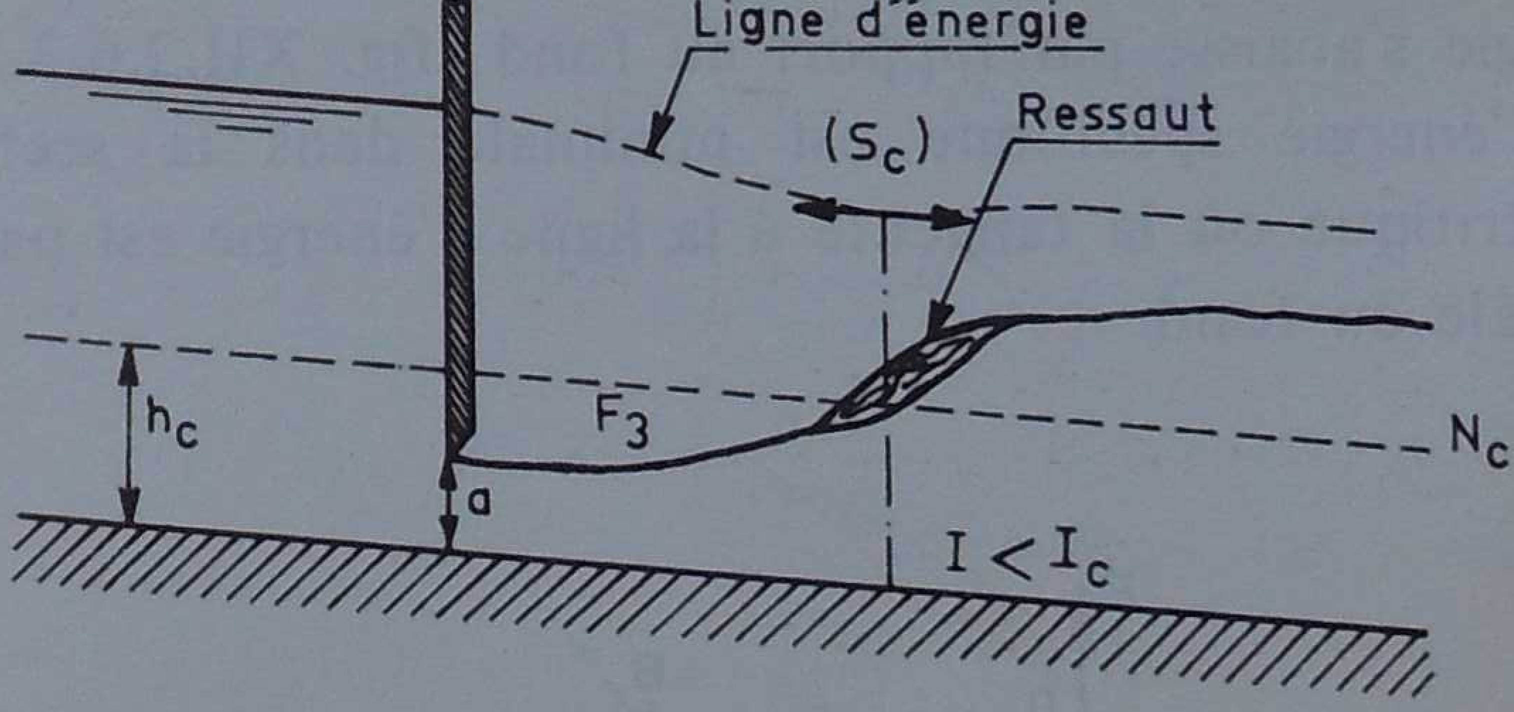


Fig. XII.2.6.3.9 – Exemple d'une courbe de remous F_3

2) $I > I_c$: *classe T* – Dans ces conditions en partant du fond on trouve, de bas en haut, le niveau normal N_n puis le niveau critique N_c. Autrement dit, $I > I_c$ entraîne $h_n < h_c$ comme nous l'avons d'ailleurs déjà constaté (équation [XII.2.5.3.1]).

Trois cas peuvent se présenter suivant les grandeurs respectives de h, h_n et h_c (fig. XII.2.6.3.10).

a) $h > h_c$ *(région 1)* – Comme $h > h_n$, on a $I > J$ et le numérateur de [XII.2.6.2] est positif. Comme $h > h_c$, $\frac{\partial E}{\partial h} > 0$ et le dénominateur de [XII.2.6.2] est positif. On a donc $\frac{dh}{ds} > 0$. Les valeurs aux limites s'obtiennent comme précédemment :

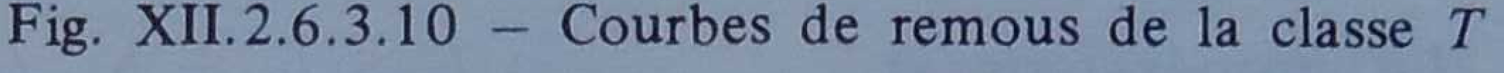


Fig. XII.2.6.3.10 – Courbes de remous de la classe T

Pour $h \to h_c$, $\dfrac{dh}{ds} \to \infty$ c'est-à-dire que la ligne d'eau franchit le niveau critique quasi-verticalement (cf. remarques précédentes, tracé en pointillé).

Pour $h \to \infty$, $\dfrac{dh}{ds} \to I$ ce qui signifie qu'à son extrémité aval la ligne d'eau possède une asymptote horizontale lorsque la profondeur croît indéfiniment.

Sur la courbe (E) (fig. XII.2.6.3.11) le point figuratif de l'écoulement se déplace de C (régime critique) vers D, c'est-à-dire que la ligne d'énergie s'élève par rapport au fond.

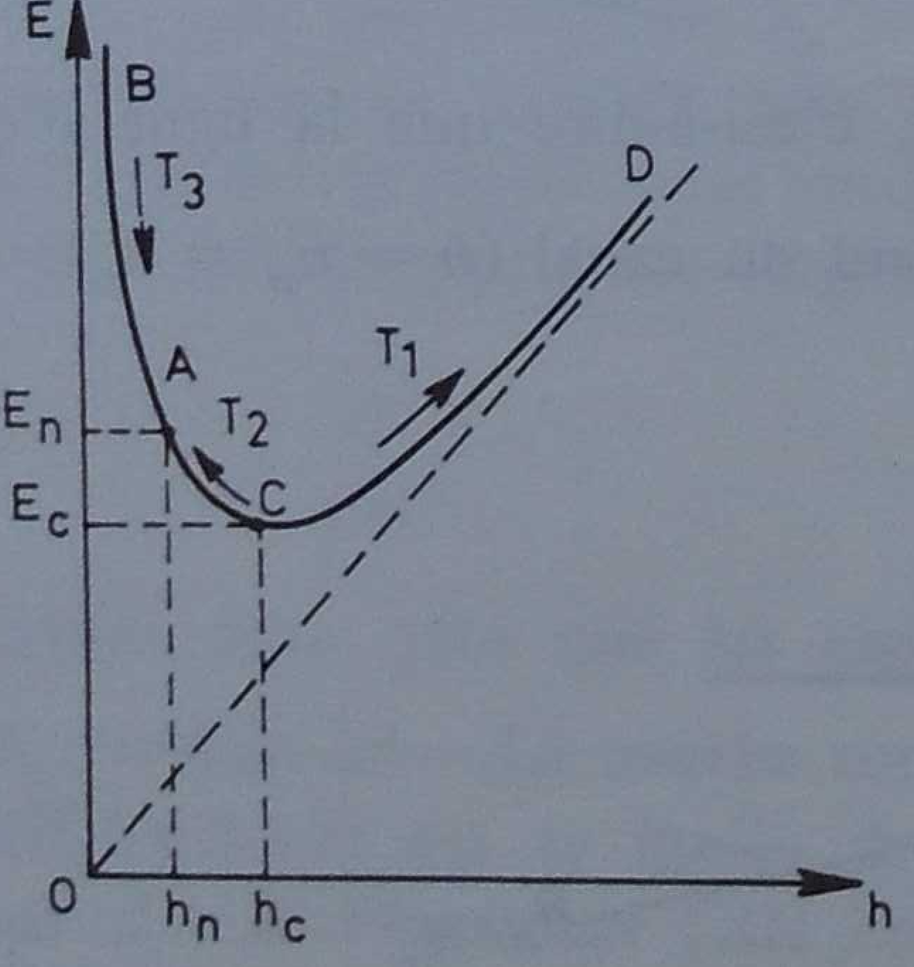


Fig. XII.2.6.3.11 – Evolution sur la courbe (E) du point figuratif de l'écoulement pour les courbes de remous de la classe T

La ligne d'eau est représentée en T_1 (fig. XII.2.6.3.10). C'est une courbe de *remous d'exhaussement* qui correspond à un *mouvement graduellement retardé* ; c'est un cas assez rare d'un régime fluvial ($h > h_c$) sur un cours d'eau ayant le caractère d'un torrent ($I > I_c$).

On rencontre cette courbe sur les cours d'eau dont la pente est supérieure à la pente critique, à l'amont d'un ouvrage (barrage ou piles de pont) obligeant la surface libre à franchir le niveau critique (fig. XII.2.6.3.12). Cette courbe est souvent précédée d'un ressaut.

b) $h_n < h < h_c$ *(région 2)* – Les mêmes raisonnements que précédemment conduisent aux résultats suivants : le numérateur de [XII.2.6.2] est positif et son dénominateur est négatif ; donc $\dfrac{dh}{ds} < 0$.

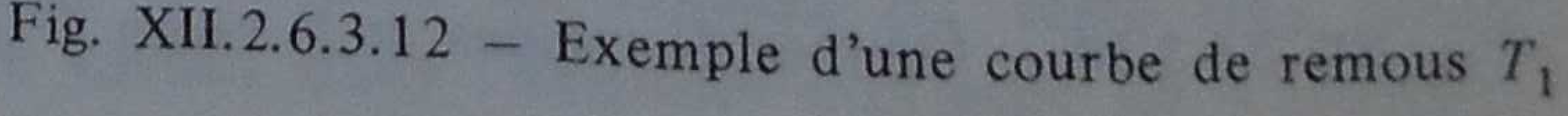


Fig. XII.2.6.3.12 – Exemple d'une courbe de remous T_1

Pour $h \to h_c$, $\dfrac{dh}{ds} \to -\infty$ et pour $h \to h_n$, $\dfrac{dh}{ds} \to 0$.

Sur la courbe (E) (fig. XII.2.6.3.11) le point figuratif se déplace de C vers A, c'est-à-dire que la ligne d'énergie s'élève par rapport au fond.

La ligne d'eau est représentée en T_2 (fig. XII.2.6.3.10). C'est une courbe de *remous d'abaissement* qui correspond à un *mouvement graduellement accéléré.* On rencontre cette courbe sur les cours d'eau dont la pente est supérieure à la pente critique à l'aval d'une singularité obligeant la ligne d'eau à franchir le niveau critique, par exemple à l'aval d'une augmentation brusque de pente (fig. XII.2.6.3.6).

c) $h < h_n < h_c$ *(région 3)* – Le numérateur et le dénominateur de [XII.2.6.2] sont négatifs ; $\dfrac{dh}{ds} > 0$. Pour $h \to h_n$, $\dfrac{dh}{ds} \to 0$; pour $h \to 0$, $\dfrac{dh}{ds} > 0$ c'est-à-dire que, théoriquement, la ligne d'eau coupe le fond du canal sous un angle non nul ; pour $h \to -\infty$, $\dfrac{dh}{ds} \to I$; la courbe, dans sa partie théorique, possède donc une asymptote horizontale. Sur la courbe (E) (fig. XII.2.6.3.11), le point figuratif se déplace de B vers A, c'est-à-dire que la ligne d'énergie s'abaisse par rapport au fond.

La ligne d'eau est représentée en T_3 (fig. XII.2.6.3.10) ; c'est un *remous d'exhaussement* correspondant à un *régime graduellement retardé.* On rencontre cette courbe sur les cours d'eau dont la pente est supérieure à la pente critique, en aval d'un obstacle obligeant la ligne d'eau à s'abaisser en-dessous du niveau normal, par exemple à l'aval d'une vanne de fond dénoyée dont la hauteur de levée a est inférieure à h_n (fig. XII.2.6.3.13).

3) $I = I_c$: *classe C* – Cette classe représente la limite commune des classes F et T avec disparition de la région 2 puisque $h_n = h_c$. Il reste donc seulement deux cas à étudier :

Fig. XII.2.6.3.13 – Exemple d'une courbe de remous T_3

a) $h > h_c = h_n$ *(région 1)* – Dans le cas particulier fréquent où la largeur du cours d'eau est très grande par rapport à sa profondeur nous démontrerons plus loin, à propos du calcul des courbes de remous par la méthode de Bresse (§ XII.2.7.1.1), que l'équation différentielle de base :

$$\frac{dh}{ds} = I\,\frac{1 - \dfrac{J}{I}}{1 - \dfrac{Q^2 L}{g\,\Omega^3}} \qquad [XII.2.6.2]$$

se met sous la forme :

$$\frac{dh}{ds} = I\,\frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_c^3} \qquad [XII.2.6.2.1]$$

En adoptant cette approximation on voit que si $h_n = h_c$ il vient $\dfrac{dh}{ds} = I$, sauf si $h = h_n$ auquel cas $\dfrac{dh}{ds} = 0$, c'est-à-dire que la ligne d'eau est parallèle au fond du canal ($h = h_n = h_c$).

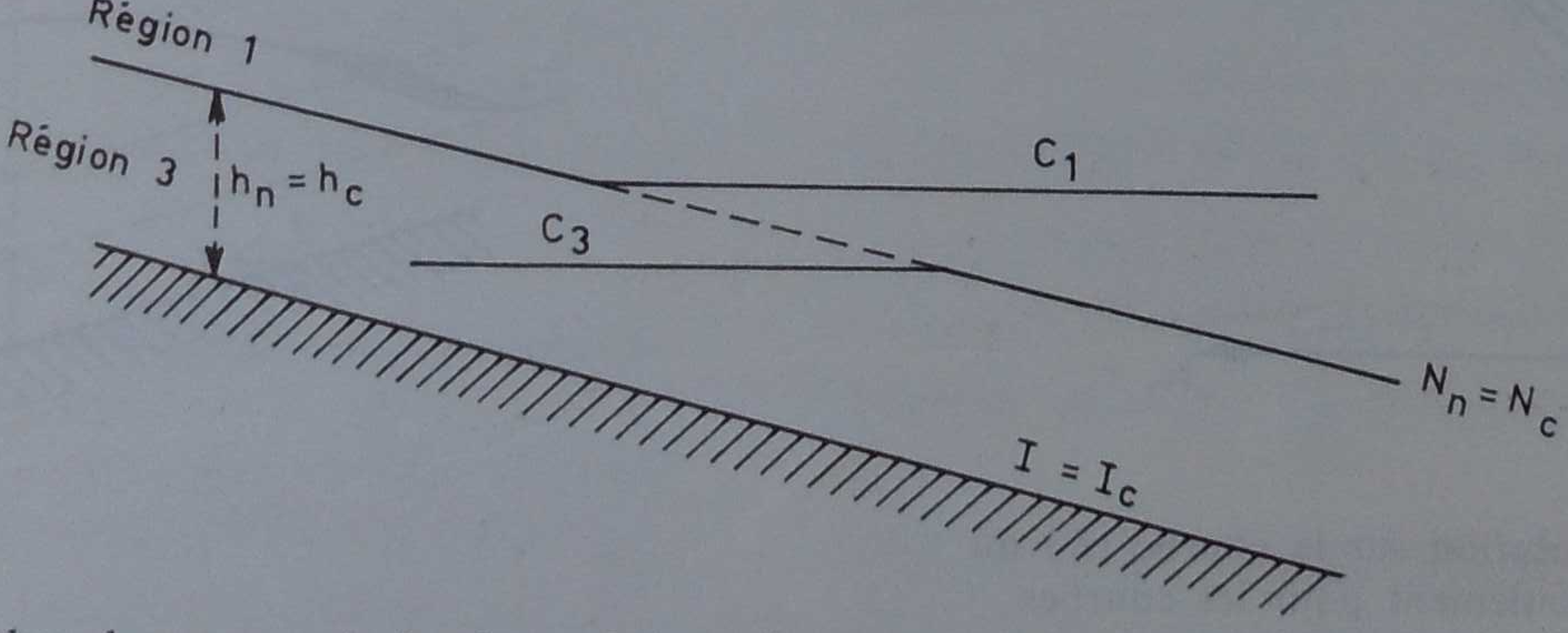


Fig. XII.2.6.3.14 – Courbes de remous de la classe C (cas d'une section de grande largeur par rapport à sa profondeur)

Dans le cas où $h > h_n = h_c$, $\frac{dh}{ds} = I$ ce qui signifie que la ligne d'eau est horizontale (courbe C_1) correspondant à la limite commune des courbes F_1 et T_1 (fig. XII.2.6.3.14).

Ce remous d'exhaussement particulier se rencontre, par exemple, au raccordement d'un canal de pente critique et d'un bassin (fig. XII.2.6.3.15).

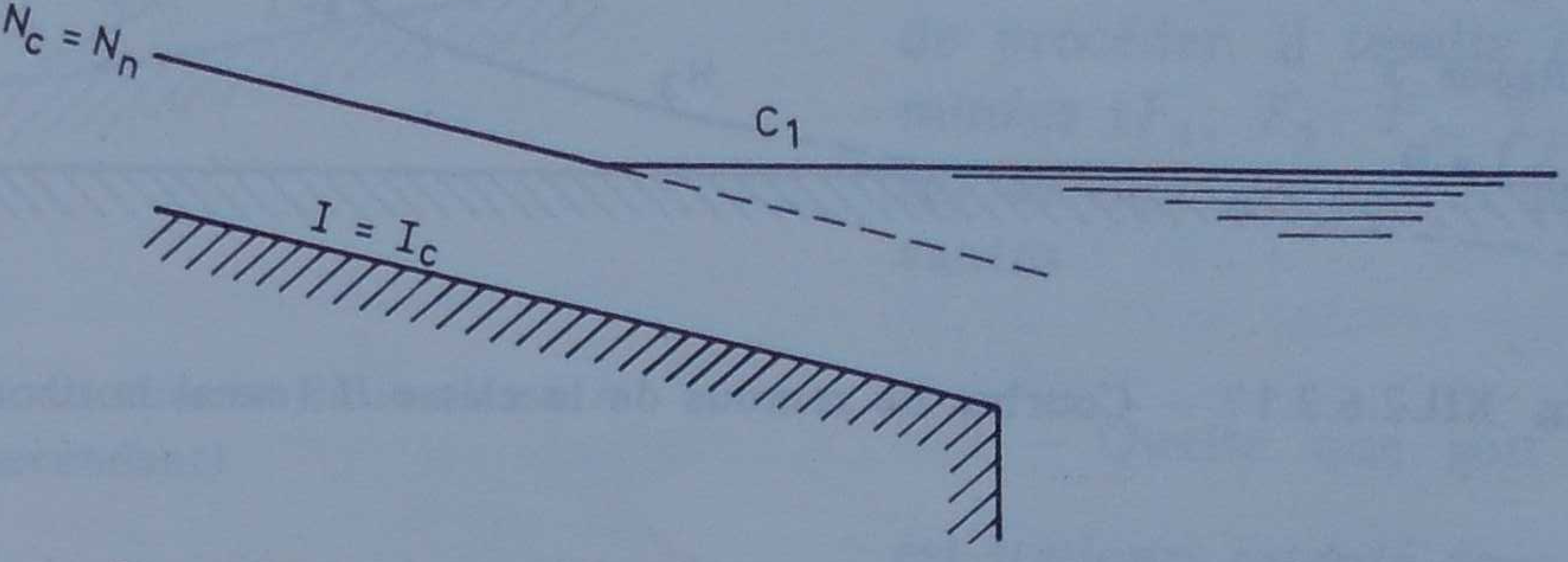


Fig. XII.2.6.3.15 – Exemple d'une courbe de remous C_1

b) $h < h_c = h_n$ *(région 3)* – Dans le cas d'un canal de grande largeur on a encore $\frac{dh}{ds} = I$ correspondant à une droite horizontale C_3, limite commune des courbes F_3 et T_3 (fig. XII.2.6.3.14). Ce remous d'exhaussement particulier se rencontre, par exemple, lors d'une réduction de pente aboutissant à la pente critique (fig. XII.2.6.3.16).

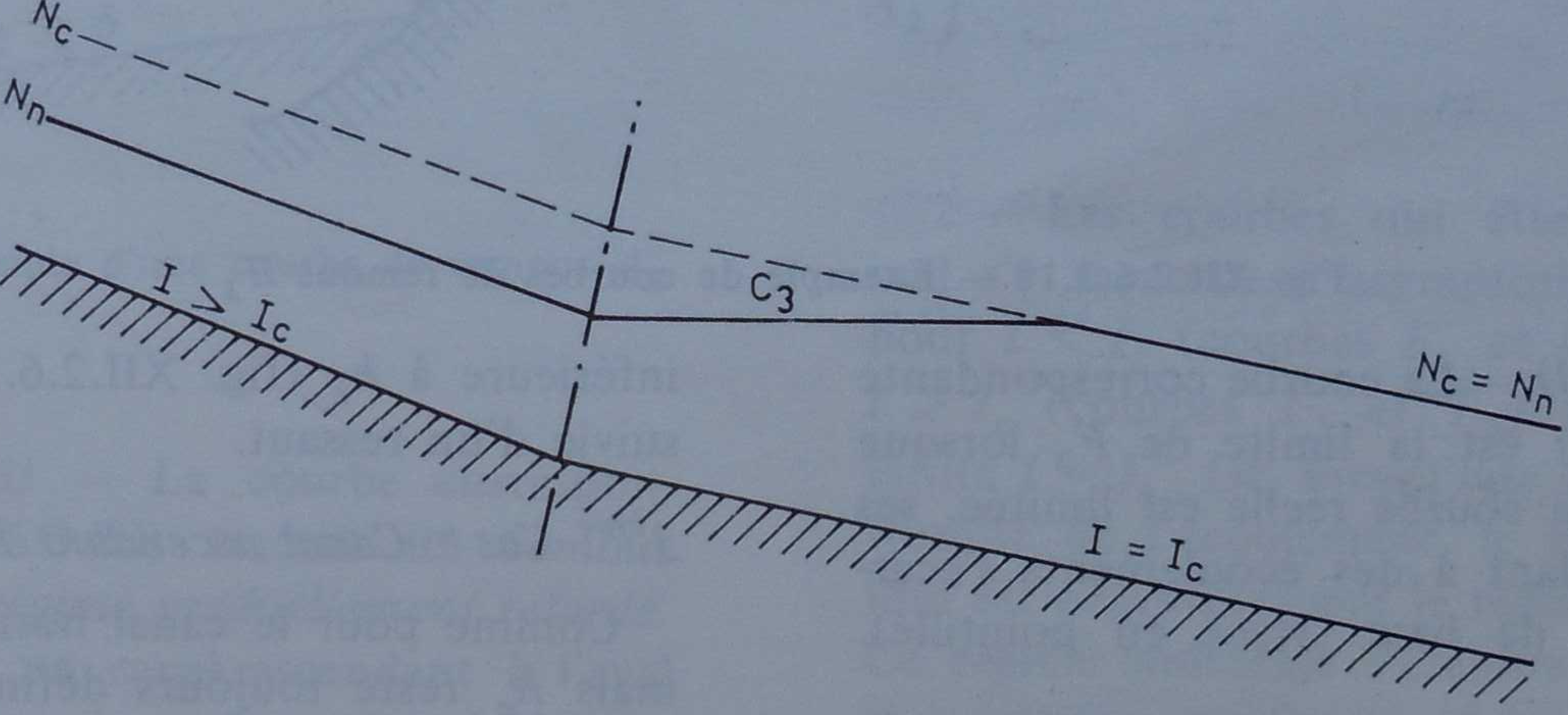


Fig. XII.2.6.3.16 – Exemple d'une courbe de remous C_3

2ème Cas : Canal horizontal $I = 0$ (classe H)

Nous savons que dans ce cas $h_n = \infty$. La profondeur critique qui ne dépend que du débit et est indépendante de la pente reste toujours définie par la relation caractéristique du régime critique :

$$\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1$$

Il ne subsiste donc plus que les régions 2 et 3.

a) $h > h_c$ *(région 2)* – La courbe correspondante H_2 (fig. XII.2.6.3.17) est la limite de F_2 lorsque $I \to 0$. Pour $I = 0$ l'équation [XII.2.6.2] s'écrit :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{I - J}{1 - \frac{Q^2 L}{g\Omega^3}} = - \frac{J}{1 - \frac{Q^2 L}{g\Omega^3}}$$

Lorsque $h \to \infty$, $J \to 0$ et $\Omega \to \infty$; le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers 1 ; donc $\frac{dh}{ds} \to 0$ c'est-à-dire qu'à l'infini amont, lorsque la profondeur augmente indéfiniment, la courbe admet une asymptote horizontale (fig. XII.2.6.3.17).

La courbe H_2 est un *remous d'abaissement* correspondant à un *régime graduellement accéléré* qui se rencontre fréquemment dans les canaux horizontaux débouchant dans un exutoire dont la cote du niveau est variable (estuaire soumis au régime des marées). Si la surface libre de l'exutoire s'abaisse au-dessous du niveau critique, une section critique apparaît au voisinage de l'extrémité aval du canal (fig. XII.2.6.3.18) et pour un débit maintenu constant la courbe de remous H_2 reste fixe même si le niveau dans l'exutoire continue de s'abaisser.

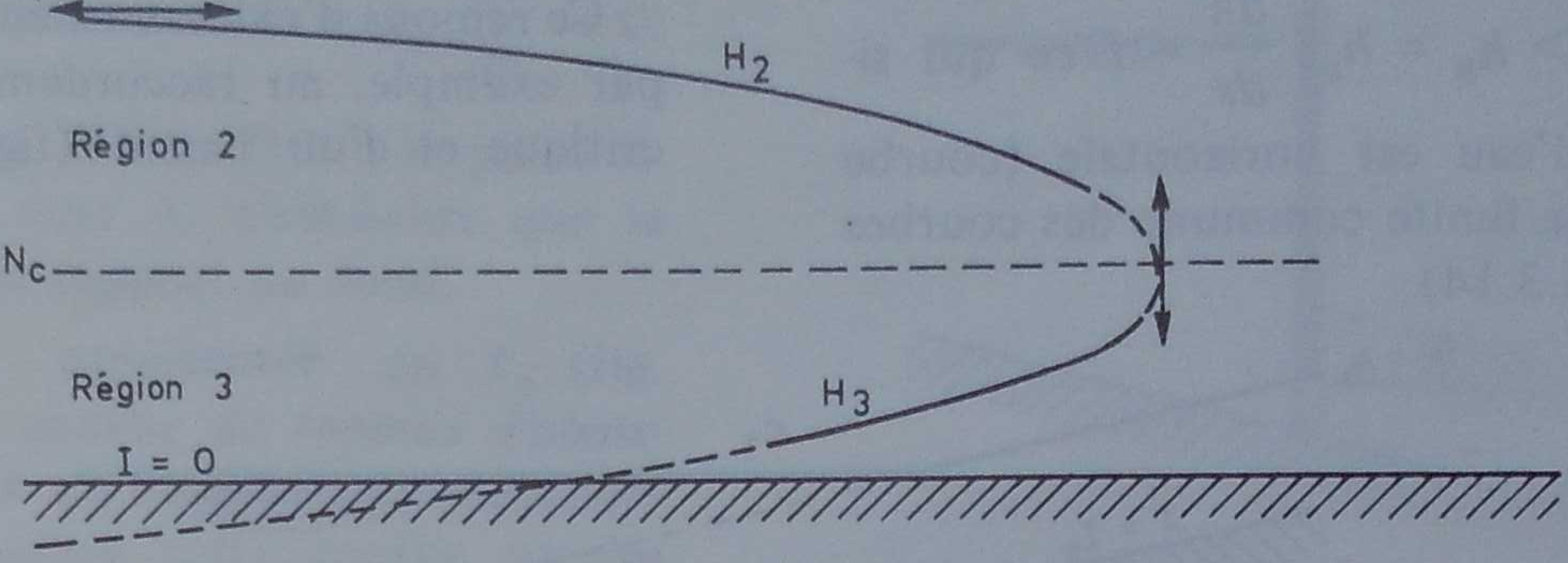


Fig. XII.2.6.3.17 – Courbes de remous de la classe H (canal horizontal)

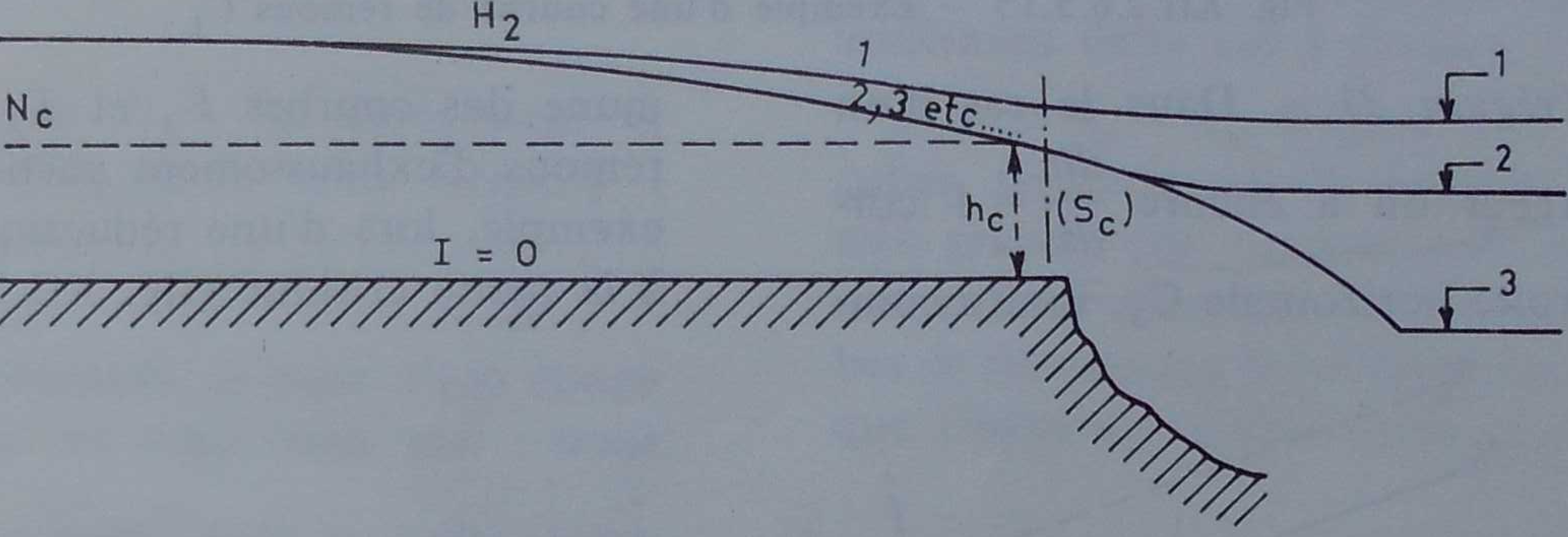


Fig. XII.2.6.3.18 – Exemple de courbes de remous H_2

b) $h < h_c$ *(région 3)* – La courbe correspondante H_3 (fig. XII.2.6.3.17) est la limite de F_3 lorsque $I \to 0$. Comme F_3, la courbe réelle est limitée, ses extrémités correspondant à des écoulements s'écartant des hypothèses de base (tracé en pointillé).

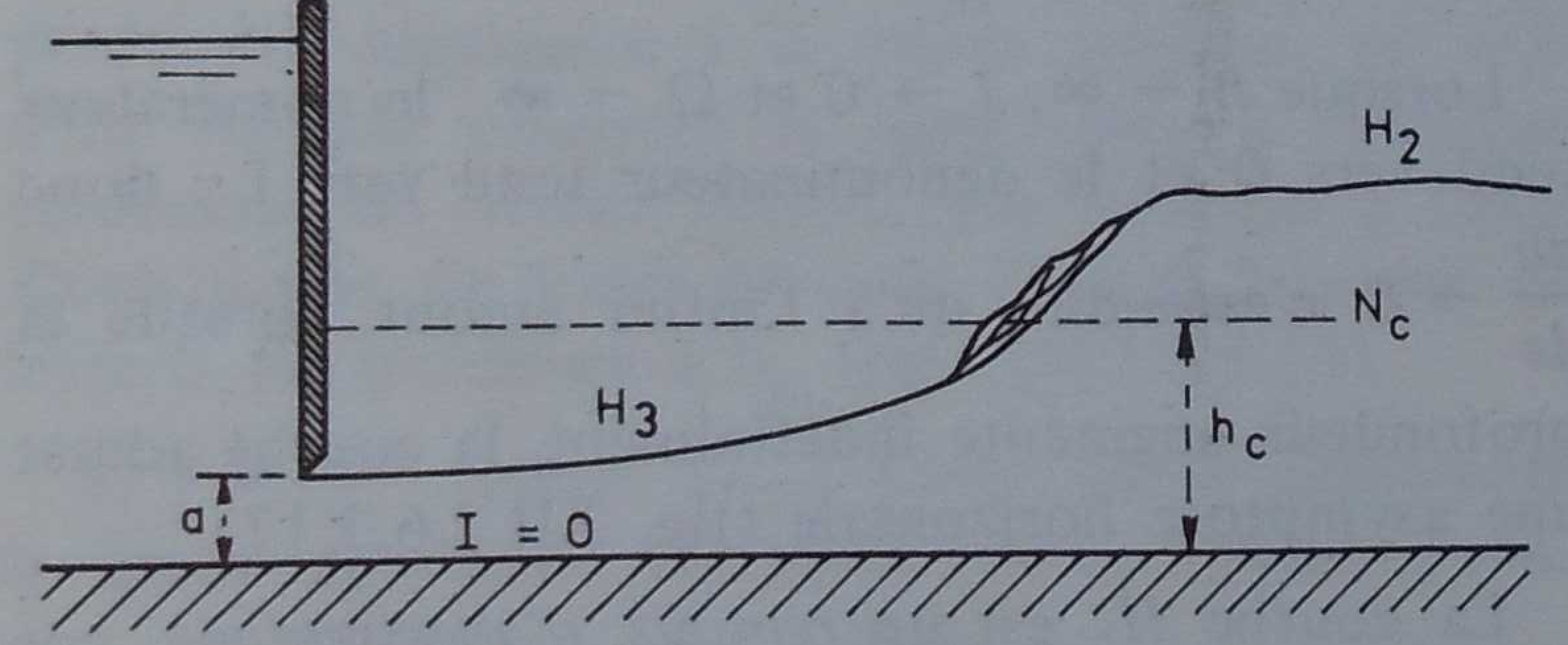


Fig. XII.2.6.3.19 – Exemple d'une courbe de remous H_3

Cette courbe de *remous d'exhaussement* correspondant à un *régime graduellement retardé* se rencontre sur un canal horizontal à l'aval d'une singularité obligeant la surface libre à s'abaisser en-dessous du niveau critique, par exemple à l'aval d'une vanne de fond dénoyée dont la hauteur de levée a est inférieure à h_c (fig. XII.2.6.3.19). Elle est souvent suivie d'un ressaut.

3ème Cas : Canal ascendant $I < 0$ (classe A)

Comme pour le canal horizontal, h_n n'existe plus mais h_c reste toujours définie par la relation fondamentale du régime critique :

$$\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1$$

La région 1 a disparu et il subsiste seulement les régions 2 et 3.

a) $h > h_c$ *(région 2)* – La courbe correspondante A_2 est une courbe de *remous d'abaissement* correspondant à un *régime graduellement accéléré* (fig. XII.2.6.3.20). Elle possède une asymptote horizontale à l'amont lorsque h augmente indéfiniment et elle coupe quasi verticalement le niveau critique à l'aval.

Cette courbe se rencontre sur un canal ascendant ($I < 0$) à l'amont d'une singularité obligeant la surface libre à s'abaisser jusqu'au voisinage du niveau critique, par exemple à l'amont d'un déversoir (fig. XII.2.6.3.21).

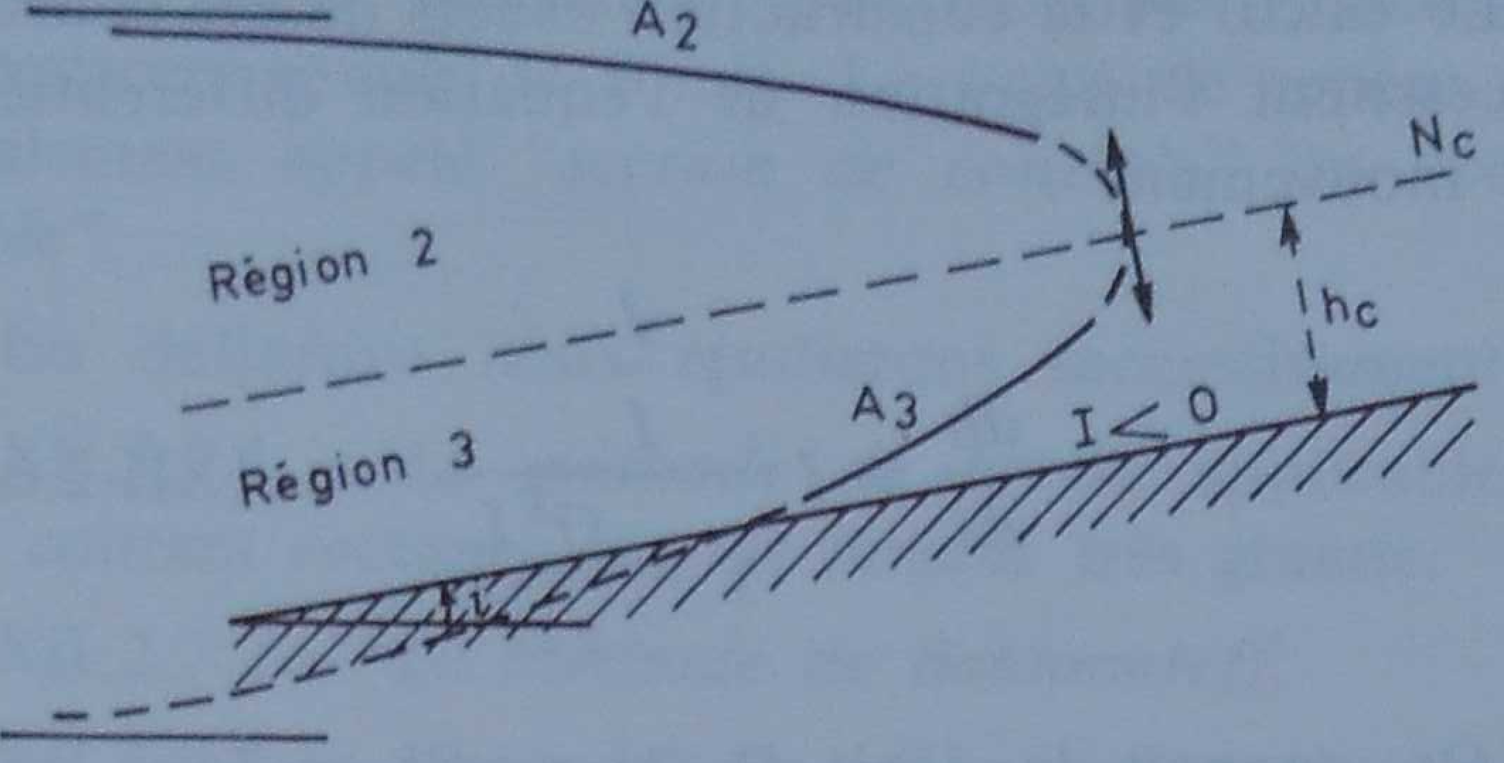


Fig. XII.2.6.3.20 – Courbes de remous de la classe A (canal ascendant)

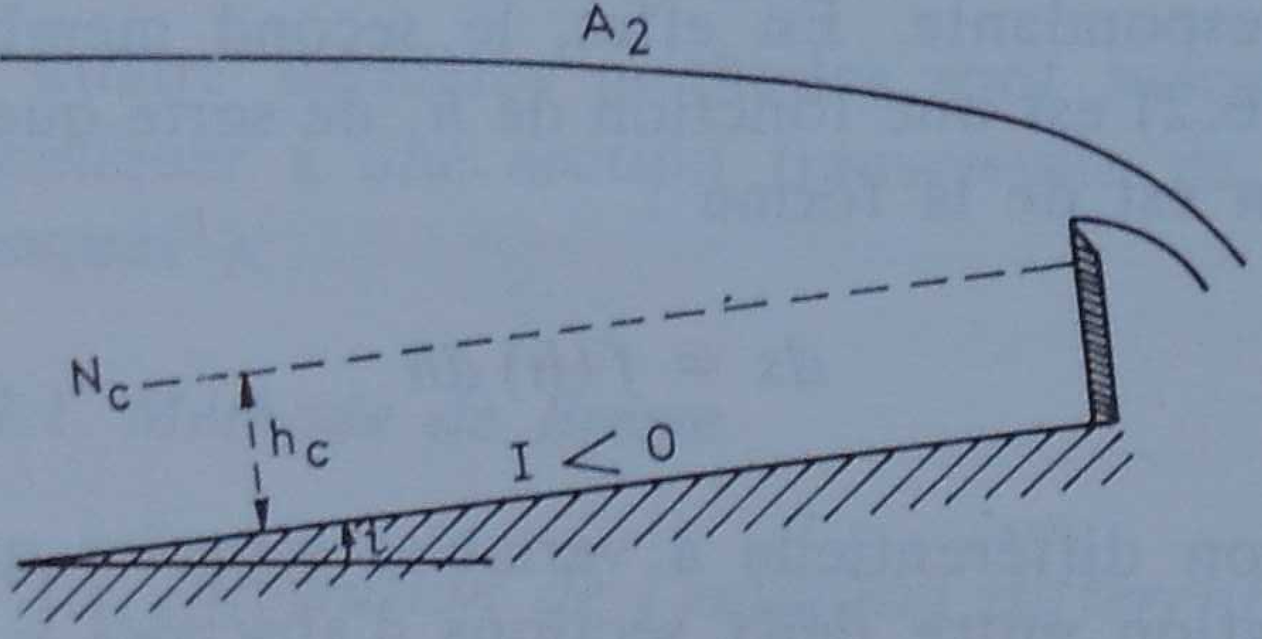


Fig. XII.2.6.3.21 – Exemple d'une courbe de remous A_2

b) $h < h_c$ *(région 3)* – La courbe correspondante A_3 (fig. XII.2.6.3.20) traduit un *remous d'exhaussement* et *un régime graduellement retardé.* Elle se rencontre dans un canal ascendant à l'aval d'une singularité obligeant la surface libre à s'abaisser au-dessous du niveau critique, par exemple à l'aval d'un coursier réalisant un écoulement torrentiel (fig. XII.2.6.3.22) ; elle est souvent suivie d'un ressaut permettant le franchissement du niveau critique.

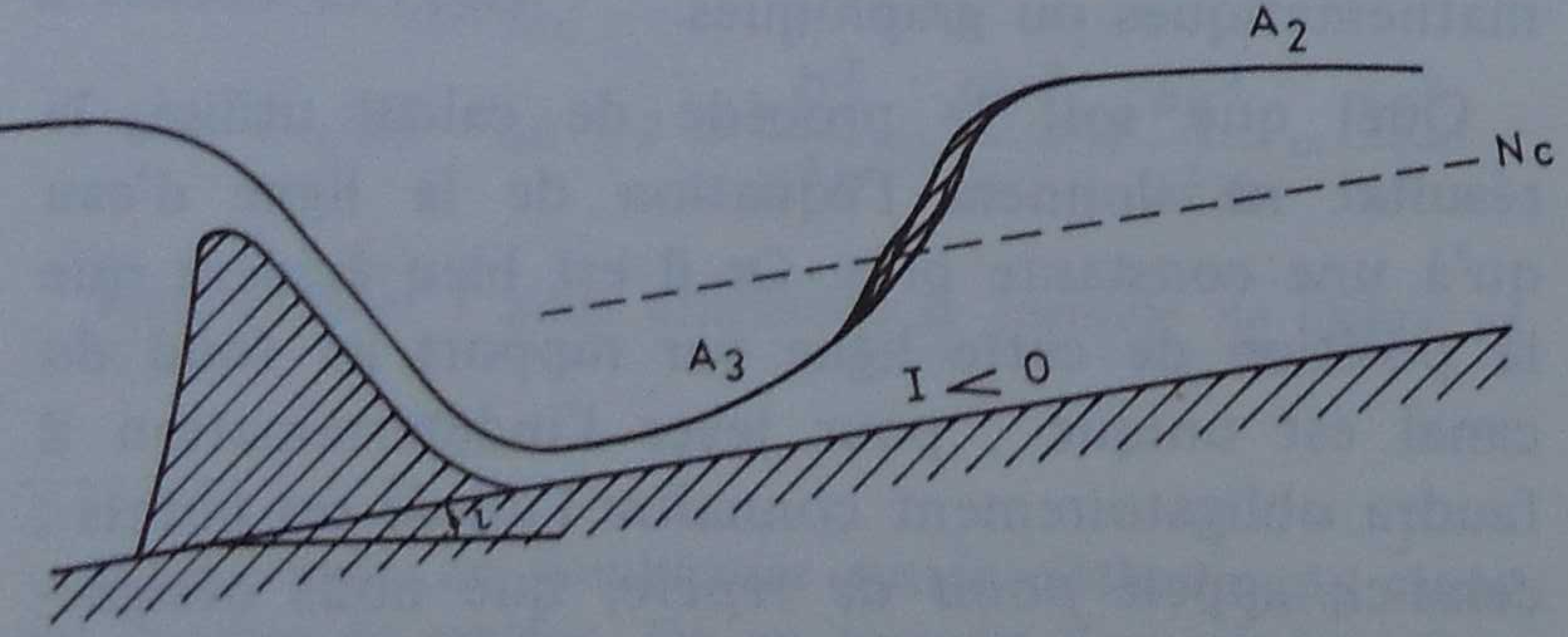


Fig. XII.2.6.3.22 – Exemple de courbes de remous A_2 et A_3

XII.2.6.4. *Propriétés communes des courbes de remous en régime graduellement varié*

De l'étude systématique à laquelle nous venons de procéder, il résulte que les 12 lignes d'eau examinées (F_1, F_2, F_3, T_1, T_2, T_3, C_1, C_3, H_2, H_3, A_2 et A_3) présentent les propriétés communes suivantes :

1 – Quelle que soit la pente du lit le régime est toujours *retardé dans les régions 1 et 3* $\left(\frac{dh}{ds} > 0\right.$, remous d'exhaussement : F_1, F_3, T_1, T_3, C_1, C_3, $\left.H_3 \text{ et } A_3\right)$ et toujours *accéléré dans la région 2* $\left(\frac{dh}{ds} < 0\right.$, remous d'abaissement : F_2, T_2, H_2 et $\left.A_2\right)$.

2 – Les courbes qui atteignent le niveau normal s'y raccordent asymptotiquement vers l'amont pour $I < I_c$ (courbes F_1 et F_2) et vers l'aval pour $I > I_c$ (courbes T_2 et T_3) sauf le cas particulier limite $I = I_c$. Or, lorsqu'une singularité rompt l'uniformité de l'écoulement, le régime qui s'établit au loin est nécessairement le régime uniforme ($h = h_n$). Ce régime uniforme s'établira donc loin à l'amont si le régime est fluvial et loin à l'aval si le régime est torrentiel. On peut dire encore *qu'une singularité fera sentir ses effets à l'amont en régime fluvial et à l'aval en régime torrentiel.* Dans le premier cas la ligne d'eau est sous la dépendance des conditions à l'aval, c'est un "axe d'aval", l'aval commande l'amont (lignes d'eau F_1, F_2, T_1, C_1, H_2 et A_2) ; dans le second cas la ligne d'eau est sous la dépendance des conditions à l'amont, c'est un "axe d'amont", l'amont commande l'aval (lignes d'eau F_3, T_2, T_3, C_3, H_3 et A_3).

3 – La ligne d'eau ne peut jamais traverser le niveau normal mais elle peut être confondue avec lui en régime uniforme.

4 – Lorsque la profondeur augmente et devient très grande la ligne d'eau tend vers l'horizontale

(courbes F_1, T_1, H_2, A_2), l'énergie cinétique se transformant progressivement en énergie potentielle ; simultanément $J \to 0$ et la ligne d'énergie tend à se confondre avec la surface libre horizontale.

5 – Sauf pour $I = I_c$, les courbes intégrales franchissent le niveau critique quasi-verticalement ; nous avons déjà signalé que cette conclusion n'était pas très exacte ; dans la réalité le franchissement du niveau critique, tout en étant moins voisin de la verticale que ne l'indiquent les courbes, comporte presque toujours une rapide variation du niveau de la surface libre parfois accompagnée d'ondulations qui traduisent l'instabilité du régime critique déjà signalée précédemment.

6 – Dans tous les cas si $h > h_n$, c'est-à-dire $I > J$, on a $\frac{\partial E}{\partial s} = I - J > 0$, la ligne d'énergie s'élève par rapport au fond et l'énergie spécifique croît dans le sens de l'écoulement ; si $h < h_n$, c'est-à-dire $I < J$, on a $\frac{\partial E}{\partial s} = I - J < 0$, la ligne d'énergie s'abaisse par rapport au fond et l'énergie spécifique diminue dans le sens de l'écoulement.

7 – Enfin, bien que traduisant une même fonction intégrale de l'équation différentielle de base (équation [XII.2.6.2]), les diverses branches de courbes étudiées ne représentent pas, dans leur ensemble, une ligne d'eau réelle mais une *réunion* de divers cas possibles. Généralement une ligne d'eau réelle utilisera une seule des courbes obtenues ou, si elle en utilise plusieurs, ces courbes appartiendront à des classes distinctes ; ce sera le cas lorsque la surface libre franchira le niveau critique (par exemple sur la figure XII.2.6.3.6 la ligne d'eau emprunte les courbes F_2 et T_2).

XII.2.7. Calcul du profil de la ligne d'eau en mouvement permanent graduellement varié (courbes de remous)

L'étude précédente a permis de préciser l'allure générale des différentes formes de lignes d'eau en mouvement graduellement varié ou *courbes de remous.*

Le calcul et la construction exacts de ces courbes nécessitent l'intégration de l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{dh}{ds} = I \frac{1 \frac{J}{I}}{1 - \frac{Q^2 L}{g\Omega^3}} \qquad \text{[XII.2.6.2]}$$

On connaît le débit Q, le profil en long ou la pente du lit I et sa rugosité et toute une série de profils en travers (toutefois on ne connaît pas la cote de la surface libre dans ces profils).

Les variables sont l'abscisse s et la profondeur h correspondante. En effet, le second membre de [XII.2.6.2] est une fonction de h, de sorte que cette relation est de la forme :

$$ds = f(h)\,dh$$

équation différentielle à variables séparées qui, par intégration entre deux sections d'abscisses s_0 et s_1, donnera :

$$s_1 - s_0 = \int_{h_0}^{h_1} f(h)\,dh$$

Il est en général difficile de résoudre l'intégrale du second membre car l'expression $f(h)\,dh$ est complexe.

Dans quelques cas simples on peut toutefois effectuer cette intégration, notamment Bresse a donné une solution analytique du problème pour le cas d'un canal de section rectangulaire et de largeur très grande.

Dans le cas général d'un cours d'eau de section transversale quelconque on utilise diverses méthodes mathématiques ou graphiques.

Quel que soit le procédé de calcul utilisé, le résultat ne donnera l'équation de la ligne d'eau qu'à une constante près. Or il est bien évident que la position de cette ligne par rapport au fond du canal est unique ; pour lever l'indétermination il faudra obligatoirement connaître l'un de ses points : celui-ci, appelé *point de repère,* que nous désignerons par P_0 (coordonnées s_0, h_0), sera généralement défini à partir des propriétés hydrauliques de la singularité qui est à l'origine du mouvement graduel-

lement varié considéré (par exemple : barrage-déversoir, vanne de fond). Le point de repère est également appelé "*section de contrôle*" ou "*contrôle*".

En définitive nous étudierons successivement :

XII.2.7.1 – *La méthode de Bresse* applicable à un courant rectangulaire de largeur très grande,

XII.2.7.2 – *La méthode de Bakhmeteff,*

XII.2.7.3 – *Une méthode par approximations successives,*

XII.2.7.4 – *La méthode graphique de Raytchine et Chatelain,*

XII.2.7.5 – *La méthode de Silber.*

Les quatre dernières méthodes sont susceptibles de s'appliquer à une section transversale de forme quelconque(1).

XII.2.7.1. *Méthode de Bresse*

XII.2.7.1.1. *Intégration de l'équation différentielle*

Pour un canal de section rectangulaire, en introduisant le débit par unité de largeur $q = \frac{Q}{L}$, il vient successivement :

$$q = Uh$$

$$h_c^3 = \frac{q^2}{g}$$

Si ce canal a, en outre, une largeur très grande par rapport à sa profondeur on sait qu'on a approximativement :

$$R = h$$

Pour calculer J, faisons l'hypothèse dèjà utilisée que cette perte de charge unitaire est celle que produirait dans la section considérée le courant uniforme de même profondeur h et de même débit Q, c'est-à-dire que J sera donnée par la formule de Chézy :

$$U = C\sqrt{RJ} \quad \text{ou} \quad J = \frac{U^2}{C^2R} = \frac{bU^2}{R} = \frac{bq^2}{h^2R} = \frac{bq^2}{h^3}$$

Pour calculer I nous utiliserons la formule de Chézy en supposant l'écoulement uniforme, donc de profondeur h_n, profondeur normale correspondant au débit considéré :

$$U = C_n\sqrt{R_nI}$$

$$I = \frac{U^2}{C_n^2R_n} = \frac{b_nq^2}{h_n^3}$$

b_n étant le coefficient correspondant à la hauteur normale h_n.

Si nous supposons que la profondeur réelle h le long de la courbe de remous diffère peu de la profondeur normale h_n, nous pouvons admettre que b est constant tout le long de cette courbe et il vient :

$$\frac{J}{I} = \frac{bq^2}{h^3}\cdot\frac{h_n^3}{bq^2} = \frac{h_n^3}{h^3}$$

Quant à $\frac{Q^2L}{g\Omega^3}$, il s'écrit, compte tenu des hypothèsese

$$\frac{Q^2L}{g\Omega^3} = \frac{q^2L^3}{g\Omega^3} = \frac{q^2}{gh^3} = \frac{h_c^3}{h^3}$$

En définitive l'équation [XII.2.6.2] s'écrit :

$$\frac{dh}{ds} = I\frac{1 - \frac{h_n^3}{h^3}}{1 - \frac{h_c^3}{h^3}}$$

ou

$$\frac{dh}{ds} = I\frac{h^3 - h_n^3}{h^3 - h_c^3} \qquad \text{[XII.2.7.1.1]}$$

C'est le résultat que nous avons déjà utilisé précédemment (§ XII.2.6.3). Pour intégrer cette équation, Bresse effectue l'analyse suivante :

$$I\,ds = \frac{h^3 - h_c^3}{h^3 - h_n^3}\,dh$$

$$I\,ds = \left[1 + \frac{h_n^3 - h_c^3}{h^3 - h_n^3}\right]dh$$

$$I\,ds = dh + \left[1 - \frac{h_c^3}{h_n^3}\right]\frac{dh}{\frac{h^3}{h_n^3} - 1}$$

Posons :

$$\frac{h}{h_n} = y$$

d'où :

$$dh = h_n\,dy$$

Donc :

$$I\,ds = h_n\,dy + h_n\left[1 - \frac{h_c^3}{h_n^3}\right]\frac{dy}{y^3 - 1} \qquad \text{[XII.2.7.1.2]}$$

---

(1) Il existe de nombreuses autres méthodes de calcul des courbes de remous. On en trouvera l'exposé dans l'ouvrage suivant : "Calcul des courbes de remous. Méthodes de calcul et applications numériques" (Laboratoire National d'Hydraulique, Chatou, Série B, Juillet 1955).

Posons :

$$\Phi(y) = -\int \frac{dy}{y^3 - 1}$$

Intégrons entre deux sections (S_0) et (S_1) d'abscisses s_0 et s_1 où les profondeurs sont h_0 et h_1, correspondant à y_0 et y_1. Il vient, après division des deux membres par h_n :

$$\boxed{I\,\frac{s_0 - s_1}{h_n} = \frac{h_0 - h_1}{h_n} + \left(1 - \frac{h_c^3}{h_n^3}\right)\left[\Phi\left(\frac{h_1}{h_n}\right) - \Phi\left(\frac{h_0}{h_n}\right)\right]}$$

[XII.2.7.1.3]

Telle est *l'équation finie du remous* dans l'hypothèse considérée. Pour utiliser cette équation il faut toutefois connaître les valeurs de $\Phi(h/h_n)$ ou $\Phi(y)$ appelée "*fonction de Bresse*".

L'intégrale de Bresse

$$\Phi(y) = -\int \frac{dy}{y^3 - 1}$$

se résout en décomposant la fraction $1/(y^3 - 1)$ en une somme de fractions simples et en intégrant par parties ; on obtient ainsi

$$\int \frac{dy}{y^3 - 1} = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}\,\frac{(y-1)^2}{y^2 + y + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + C$$

Pour résoudre le problème il paraît inutile de déterminer la valeur de la constante C puisque l'intégrale $\Phi(y)$ est une intégrale définie dans l'équation [XII.2.7.1.3].

La valeur de C est néanmoins utile pour justifier la manière dont est dressée la table de Bresse donnant les valeurs numériques de $\Phi(y)$ correspondant aux diverses valeurs de y.

Bresse a donc déterminé comme suit la valeur de la constante C pour définir complètement la fonction $\Phi(y)$.

L'équation différentielle [XII.2.7.1.2] peut se mettre sous la forme :

$$h_n \left(1 - \frac{h_c^3}{h_n^3}\right) \frac{dy}{y^3 - 1} = I\,ds - h_n\,dy = I\,ds - dh$$

Le deuxième membre représente l'abaissement de la surface sur une longueur ds (fig. XII.2.7.1.1).

Donc l'intégrale du premier membre représente cet abaissement pour une longueur finie. Pour le point de la courbe de remous situé dans le plan de comparaison horizontal à partir duquel on mesure les abaissements de la surface l'intégrale du premier membre doit donc être nulle.

Si on désigne par y_0 la valeur de y pour le point de la courbe de remous situé dans ce plan de comparaison horizontal on devra avoir :

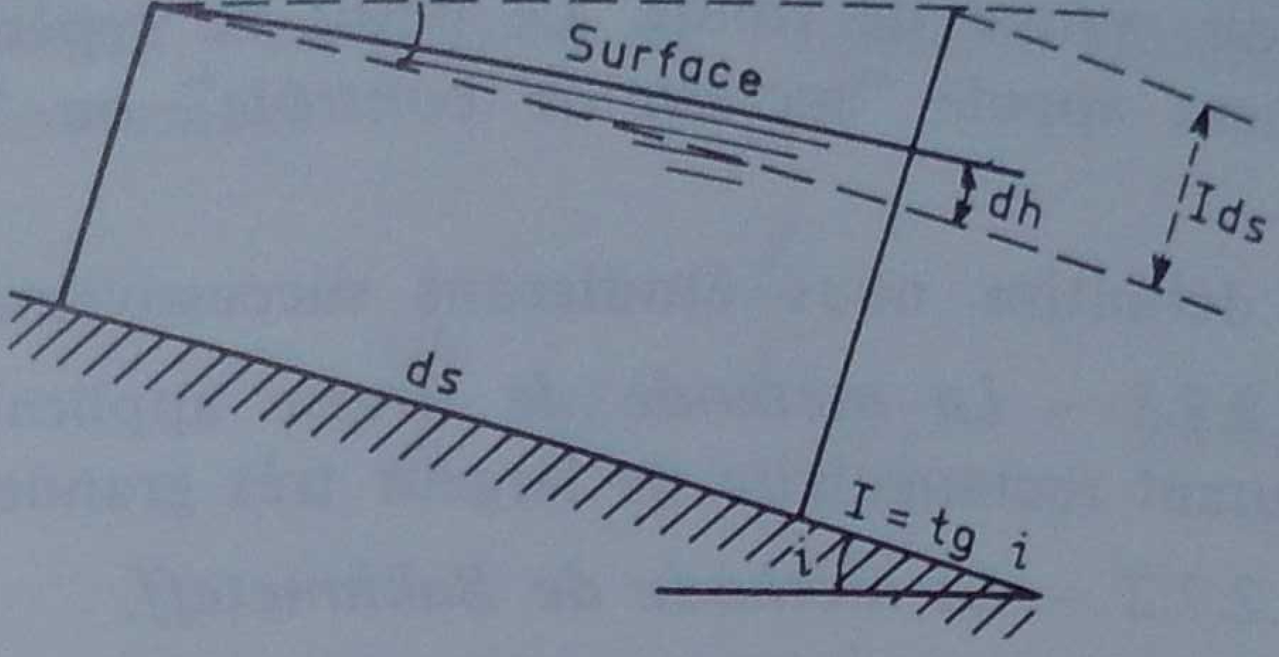


Fig. XII.2.7.1.1

$$\int \frac{dy}{y_0^3 - 1} = 0$$

avec $y_0 = \frac{h_0}{h_n}$ (h_0 = profondeur correspondant au point de la courbe de remous situé dans le plan de comparaison horizontal), c'est-à-dire :

$$\frac{1}{6}\,\mathcal{L}\,\frac{(y_0 - 1)^2}{y_0^2 + y_0 + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg } \frac{2y_0 + 1}{\sqrt{3}} + C = 0$$

Or l'étude qualitative systématique des différentes courbes de remous a montré que le point où cette courbe est horizontale est celui pour lequel la profondeur est infiniment grande, donc $h_0 = \infty$ c'est-à-dire

$$y_0 = \frac{h_0}{h_n} = \infty.$$

En faisant $y_0 = \infty$ dans l'équation précédente et en déterminant dans ces conditions la limite de chacun des termes du premier membre, on obtient $C = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et l'intégrale complète s'écrit

$$\int \frac{dy}{y^3 - 1} = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}\,\frac{(y-1)^2}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)$$

et par conséquent :

$$\Phi(y) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}\,\frac{y^2 + y + 1}{(y-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc cotg } \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$$

[XII.2.7.1.4]

Telle est l'expression complète de la fonction de Bresse $\Phi(y)$ dont les variations sont représentées sur la figure XII.2.7.1.2.

Bresse a d'ailleurs dressé une *table* reproduite sur l'annexe 7 qui donne la valeur de la fonction Φ pour les différentes valeurs de

$$y = \frac{h}{h_n}.$$

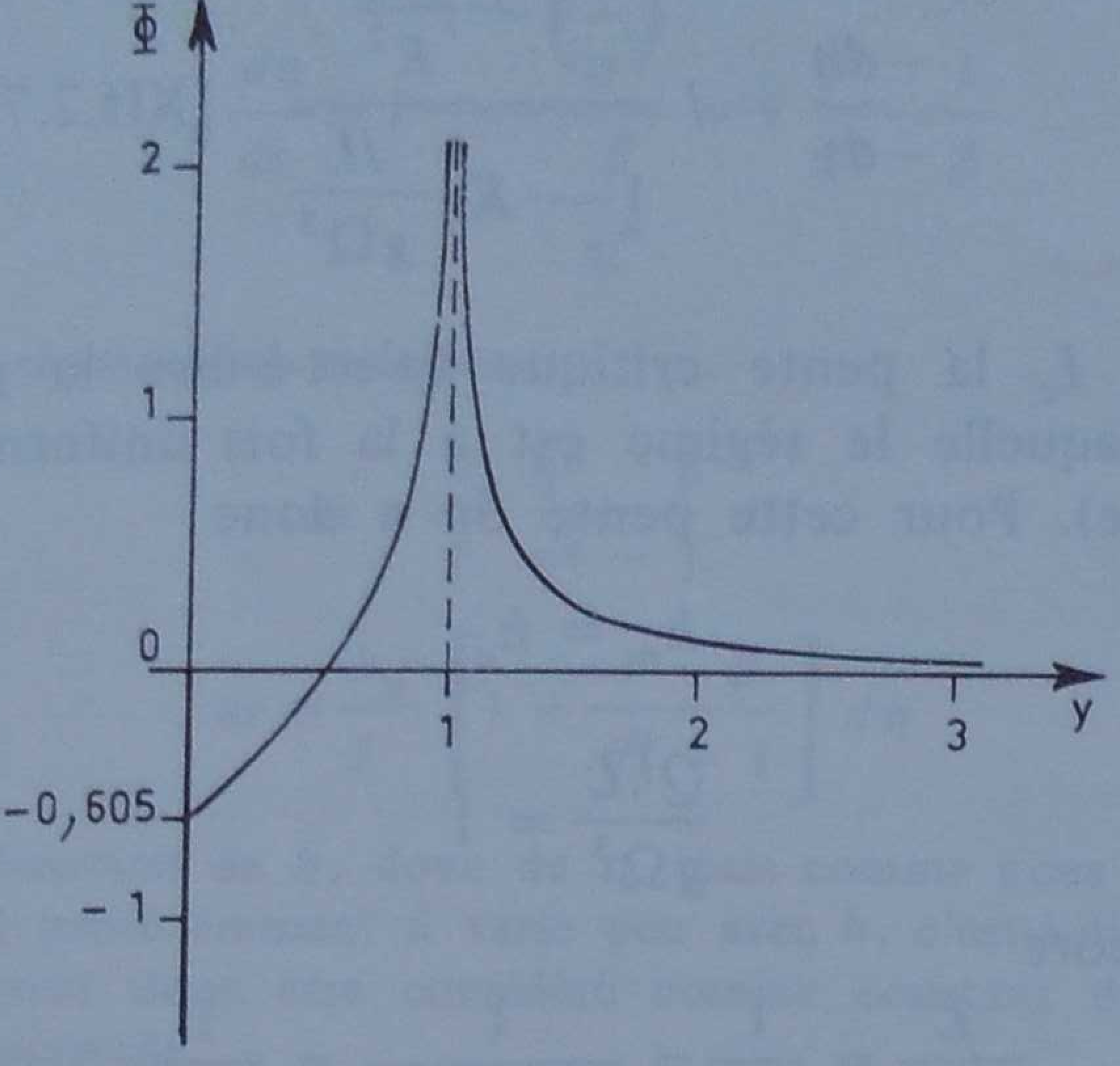


Fig. XII.2.7.1.2 – Fonction de Bresse

XII.2.7.1.2. *Calcul pratique d'une courbe de remous par la méthode de Bresse*

On connaît le débit Q $\left(\text{donc le débit unitaire } q = \frac{Q}{L}\right)$, la pente I du canal, sa rugosité, la nature et les caractéristiques hydrauliques de la singularité qui entraîne la formation du remous. On cherche le profil en long de la surface libre c'est-à-dire la profondeur h dans une section quelconque d'abscisse s.

On calcule d'abord h_c et h_n dont la comparaison précise le type de courbe de remous auquel on a affaire :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad \text{et} \quad h_n^3 = \frac{bq^2}{I}$$

Si on utilise la formule de Manning :

$$b = \frac{1}{C^2} = \frac{n^2}{R^{1/3}} = \frac{n^2}{h_n^{1/3}}$$

d'où :

$$h_n^{10/3} = \frac{n^2 q^2}{I}$$

Si on utilise la formule de Bazin :

$$b = \left[\frac{1}{87}\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{h_n}}\right)\right]^2$$

d'où :

$$h_n^3 I = \left[\frac{1}{87}\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{h_n}}\right)\right]^2 q^2$$

ou enfin :

$$7.569\,\frac{I}{q^2} = \frac{1}{h_n^3}\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{h_n}}\right)^2$$

Pour obtenir h_n on résout cette équation par approximations successives ce qui est assez long ; la formule de Manning est donc ici plus commode grâce à sa forme monôme.

Connaissant h_n et h_c on peut en déduire la *classe* de la courbe de remous. Pour préciser son *type*, c'est-à-dire le numéro d'ordre de la région dans laquelle elle est située, il faut comparer la profondeur h_0 du point de repère P_0 à h_n et h_c ; h_0 s'obtient à partir des formules classiques relatives à la singularité considérée (barrage-déversoir, vanne de fond, etc.).

Connaissant le type et la classe de la courbe de remous on procède à son calcul proprement dit. Dans la section de repère on a :

$$y_0 = \frac{h_0}{h_n}$$

La table de Bresse donne la valeur correspondante $\Phi(y_0)$. On se donne alors une valeur arbitraire h_1 de la profondeur (plus petite ou plus grande que h_0 selon la nature de la courbe de remous étudiée) ; la table de Bresse donne $\Phi(y_1)$ et en portant toutes ces valeurs dans l'équation [XII.2.7.1.3] on obtient $s_0 - s_1$ c'est-à-dire l'abscisse, comptée à partir de la section de repère, de la section de profondeur h_1.

On recommence les mêmes calculs à partir de s_1 et ainsi de suite jusqu'à ce que les profondeurs obtenues soient aussi voisines qu'on le désire de la profondeur normale h_n.

La précision obtenue est d'autant meilleure que les abscisses s_0 et s_1 sont plus rapprochées c'est-à-dire que la différence $|h_0 - h_1|$ est plus faible.

Bien entendu les calculs sont conduits en tenant compte des renseignements d'ordre qualitatif déduits de la connaissance du type de courbe de remous considéré ; rappelons notamment qu'une courbe de remous en régime fluvial se calcule de l'aval (section de contrôle) vers l'amont, alors qu'en régime

torrentiel le calcul est conduit de l'amont (section de contrôle) vers l'aval.

La méthode de Bresse a l'avantage d'être simple et rapide ; elle donne généralement de bons résultats si on limite son emploi aux cours d'eau pour lesquels les hypothèses sont vérifiées (lit de largeur très grande par rapport à la profondeur et courbe de remous s'éloignant peu du niveau normal, c'est-à-dire courbes du type F_1 ou F_2). Sur les cours d'eau naturels il est d'ailleurs préférable de faire intervenir la profondeur moyenne plutôt que la profondeur maximale.

XII.2.7.2. *Méthode de Bakhmeteff*

Cette méthode, proposée en 1912 par l'hydraulicien américain Bakhmeteff pour le calcul des courbes de remous, est une des plus usuelles pour les sections transversales de forme quelconque ; elle est assez longue à utiliser mais elle est précise à condition d'adopter des intervalles d'intégration suffisamment petits.

XII.2.7.2.1. *Principe de la méthode*

Bakhmeteff introduit la fonction "*débitance*" K définie par

$$K = K(h) = C\Omega\sqrt{R}$$

La débitance ne dépend donc que de la section du canal (forme et dimensions de la section mouillée, rugosité des parois).

Pour la profondeur normale h_n on a

$$K_n = K(h_n) = C_n\Omega_n\sqrt{R_n}$$

et comme

$$Q = C_n\Omega_n\sqrt{R_n I} \quad \text{(régime uniforme)}$$

on a

$$I = \frac{Q^2}{K_n^2}$$

De même pour la profondeur h :

$$Q = C\Omega\sqrt{RJ} = K\sqrt{J}$$

$$J = \frac{Q^2}{K^2}$$

L'équation [XII.2.6.2] s'écrit alors :

$$\frac{dh}{ds} = I\,\frac{1 - \dfrac{K_n^2}{K^2}}{1 - K_n^2\dfrac{IL}{g\Omega^3}} \qquad \text{[XII.2.7.2.1]}$$

Soit I_c la pente critique (c'est-à-dire la pente pour laquelle le régime est à la fois uniforme et critique). Pour cette pente on a donc

$$h_n = h_c$$

et

$$\frac{Q^2 L}{g\Omega^3} = 1$$

ou encore

$$\frac{L}{g\Omega^3} = \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{C^2\Omega^2 RI_c} = \frac{1}{K^2 I_c}$$

En remplaçant dans l'équation [XII.2.7.2.1] il vient :

$$\frac{dh}{ds} = I\,\frac{1 - \dfrac{K_n^2}{K^2}}{1 - \dfrac{K_n^2\,I}{K^2\,I_c}} \qquad \text{[XII.2.7.2.2]}$$

Ces transformations étant effectuées, la méthode de Bakhmeteff résulte des *deux remarques* suivantes :

1) Le rapport $\beta = I/I_c$ varie peu avec la profondeur h,

2) Dans la quasi-majorité des cas on peut poser

$$K^2 = Ah^n \qquad \text{[XII.2.7.2.3]}$$

A étant une constante et n étant appelé *l'exposant hydraulique* de la section considérée car il varie avec la forme de la section (valeurs comprises entre 2,8 et 5,4 pour les sections usuelles).

En remplaçant dans l'équation [XII.2.7.2.2] on obtient :

$$\frac{dh}{ds} = I\,\frac{1 - (h_n/h)^n}{1 - \beta(h_n/h)^n}$$

De manière analogue à la méthode de Bresse on pose

$$\eta = \frac{h}{h_n}$$

$$h = h_n\eta$$

$$dh = h_n d\eta$$

L'équation différentielle devient alors :

$$h_n \frac{d\eta}{ds} = I \frac{1 - \left(\frac{1}{\eta}\right)^n}{1 - \frac{\beta}{\eta^n}} = I \frac{\eta^n - 1}{\eta^n - \beta}$$

ou en séparant les variables :

$$ds = \frac{h_n}{I} \frac{\eta^n - \beta}{\eta^n - 1} d\eta$$

$$ds = \frac{h_n}{I} \left[1 + \frac{1 - \beta}{\eta^n - 1} \right] d\eta$$

β est fonction de h, donc de η, mais comme nous l'avons indiqué précédemment il varie peu avec h, c'est-à-dire avec η et peut donc être considéré comme constant dans un petit intervalle.

Introduisons enfin la fonction

$$\mathcal{B}(n, \eta) = - \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^n - 1}$$

dont on trouve les valeurs dans les tables de Bakhmeteff en fonction de η pour les diverses valeurs usuelles de n (voir annexe 8).

L'équation différentielle s'écrit alors en intégrant entre deux sections d'abscisses s_0 et s_1 où η prend les valeurs η_0 et η_1 et $\mathcal{B}$ prend les valeurs $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$, β étant supposé constant dans l'intervalle d'intégration suffisamment petit considéré :

$$s_1 - s_0 = \frac{h_n}{I} \left[\eta_1 - \eta_0 - (1 - \beta)(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0) \right]$$

[XII.2.7.2.4]

XII.2.7.2.2. *Utilisation pratique de la méthode*

Comme il a été indiqué pour l'application pratique de la méthode de Bresse on calcule d'abord h_n, h_c et h_0 (profondeur dans la section de contrôle S_0), ce qui permet de préciser le type et la classe de la courbe de remous considérée.

On trace ensuite par points les courbes donnant les grandeurs suivantes en fonction de h :

$$K(h) = C\Omega \sqrt{R}$$

$$I_c(h) = \frac{g\Omega^3}{K^2 L}$$

$$\beta(h) = \frac{I}{I_c}$$

Fig. XII.2.7.2.1 – Variation de la débitance en fonction de la profondeur

La courbe $K(h)$ dont l'allure générale est représentée figure XII.2.7.2.1 permet d'ailleurs d'obtenir immédiatement la profondeur normale h_n.

En effet pour cette profondeur on a :

$$Q = K_n \sqrt{I} \quad \text{ou} \quad \frac{Q}{\sqrt{I}} = K_n$$

Si donc on porte en ordonnée la valeur $Q/\sqrt{I}$, l'abscisse du point correspondant de la courbe $K(h)$ donnera h_n.

Pour calculer *l'exposant hydraulique n* reprenons la relation [XII.2.7.2.3] qui en a donné la définition ; elle peut s'écrire :

$$2 \log K = \log A + n \log h$$

$$\log K = \frac{1}{2} \log A + \frac{n}{2} \log h$$

On trace sur un papier bilogarithmique la courbe $\log K = f(\log h)$ (fig. XII.2.7.2.2) ; pratiquement cette courbe est assimilable à une droite dont le coefficient angulaire $\operatorname{tg} \alpha$ donne, en tenant compte des unités graphiques utilisées sur les deux axes :

$$\frac{n}{2} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$n = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

En possession de ces divers éléments on part, comme d'habitude, de la section de contrôle (S_0) d'abscisse s_0 dans laquelle on connaît la profondeur h_0, donc $\eta_0 = \frac{h_0}{h_n}$. Les courbes précédentes

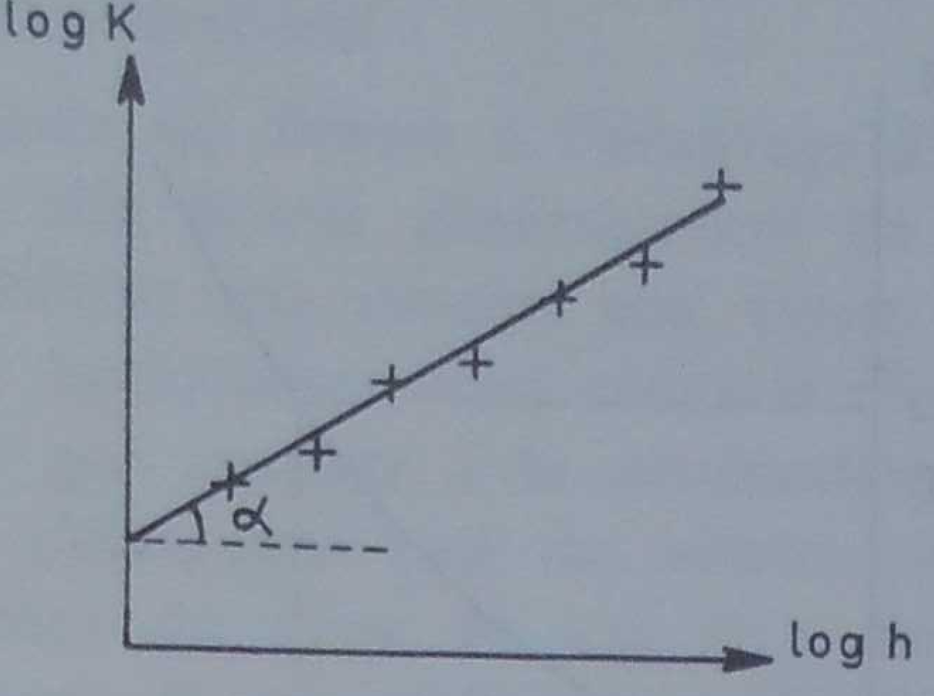


Fig. XII.2.7.2.2 – Calcul de l'exposant hydraulique

donnent β_0 et n et la table de Bakhmeteff donne $\mathcal{B}_0$. On se donne une profondeur h_1 voisine de h_0 et correspondant à une section (S_1) d'abscisse s_1 inconnue.

On connaît donc $\eta_1 = \frac{h_1}{h_n}$. Les courbes donnent β_1 et la table de Bakhmeteff permet de déterminer $\mathcal{B}_1$.

On porte alors les diverses valeurs h_n, I, η_0, η_1, $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ dans l'équation [XII.2.7.2.4] où on prend pour β la moyenne arithmétique des valeurs β_0 et β_1.

On en déduit $s_1 - s_0$, c'est-à-dire l'abscisse s_1 de la section (S_1).

A partir de (S_1) on détermine de la même manière l'abscisse s_2 de la section (S_2) de profondeur h_2 voisine de h_1 et on construit ainsi la courbe de remous par points.

Si β varie beaucoup en fonction de h, c'est-à-dire si les pertes de charge sont grandes, on devra réduire les intervalles d'intégration.

XII.2.7.2.3. *Méthode simplifiée dans le cas où on peut négliger la variation d'énergie cinétique*

Si on peut négliger la variation d'énergie cinétique c'est-à-dire le terme :

$$d\left(\frac{U^2}{2g}\right) = \frac{Q^2}{2g}\, d\left(\frac{1}{\Omega^2}\right) = -\frac{2Q^2}{2g}\frac{d\Omega}{\Omega^3} = -\frac{Q^2 L}{g\Omega^3}\, dh$$

l'équation [XII.2.6.2] se simplifie et se réduit au numérateur :

$$\frac{dh}{ds} = I\left(1 - \frac{J}{I}\right)$$

$$\frac{dh}{ds} = I\left(1 - \frac{K_n^2}{K^2}\right)$$

$$= I\left[1 - \left(\frac{h_n}{h}\right)^n\right]$$

ou en posant, comme précédemment, $\eta = h/h_n$ et en séparant les variables :

$$ds = \frac{1}{I}\left(1 + \frac{1}{\eta^n - 1}\right) h_n\, d\eta \qquad \text{[XII.2.7.2.5]}$$

Posons

$$\Phi(n, \eta) = \eta + \int_0^{\eta} \frac{d\eta}{\eta^n - 1} = \eta - \mathcal{B}(n, \eta)$$

et intégrons l'équation [XII.2.7.2.5] entre deux sections (S_0) et (S_1) d'abscisses s_0 et s_1 où la fonction Φ prend les valeurs Φ_0 et Φ_1 ; il vient :

$$\boxed{s_1 - s_0 = \frac{h_n}{I}\left[\Phi_1 - \Phi_0\right]} \qquad \text{[XII.2.7.2.6]}$$

L'application de la méthode est facilitée par l'utilisation des tables donnant les différentes valeurs de la fonction Φ en fonction de η pour les diverses valeurs usuelles de η (voir annexe 9).

XII.2.7.2.4. *Cas d'un canal horizontal*

Si le canal est horizontal ($I = 0$) on a $h_n = \infty$ et on ne peut plus employer la profondeur normale h_n pour définir la variable auxiliaire $\eta = h/h_n$. On rapporte alors la profondeur réelle h à la profondeur critique h_c et on procède comme suit :

1 – On calcule la profondeur critique h_c ;

2 – On détermine l'exposant hydraulique n suivant la méthode habituelle $\left(\log K = \frac{1}{2}\log A + \frac{n}{2}\log h\right)$;

3 – On définit les paramètres :

$$\delta = \frac{I'_c}{I_c} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{h}{h_c}$$

avec

I'_c = pente critique pour la profondeur h_c $\left(I'_c = \frac{bg\Omega_c}{R_c L_c}\right)$,

I_c = pente critique pour la profondeur h $\left(I_c = \frac{bg\Omega}{RL}\right)$;

4 – On calcule les valeurs :

$\delta_1 = \frac{I'_c}{I_{c_1}}$ et $\tau_1 = \frac{h_1}{h_c}$ correspondant à une profondeur h_1 .

$\delta_2 = \dfrac{I'_c}{I_{c_2}}$ et $\tau_2 = \dfrac{h_2}{h_c}$ correspondant à une profondeur h_2,

$\delta_{12} = \dfrac{\delta_1 + \delta_2}{2}$;

5 – La distance entre les sections (S_1) de profondeur h_1 et (S_2) de profondeur h_2 est alors donnée par l'expression :

$$s_2 - s_1 = \frac{h_c}{I'_c}\left[\delta_{12}(\tau_2 - \tau_1) - \frac{\tau_2^{n+1} - \tau_1^{n+1}}{n+1}\right]$$

XII.2.7.3. *Méthode par approximations successives*

Il existe plusieurs méthodes de calcul qui procèdent toutes par approximations successives. Nous en étudierons une à titre d'exemple.

Reprenons l'équation générale du courant rectiligne en régime permanent établie au § VII.4 :

$$\sin i - \frac{1}{\overline{\omega}}\frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{B}{\Omega}\varphi(U) + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) \quad [\text{VII.4.1}]$$

Dans cette équation, i est l'angle que fait la direction générale du courant avec le plan horizontal, c'est-à-dire l'angle de la surface libre avec l'horizontale ; comme il est toujours très faible on peut admettre $\sin i \simeq \operatorname{tg} i = I'$ *pente de la surface libre.*

Par ailleurs l'équation [VII.4.1] a été établie en prenant pour axe des s une perpendiculaire à une section droite. Comme les sections droites varient très progressivement, si nous n'envisageons qu'une longueur limitée du canal on peut admettre que si on trace l'axe des s perpendiculairement à une section droite par un point de la surface libre, cet axe se trouve dans la surface libre ce qui donne :

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$$

Dans cette hypothèse, l'équation devient :

$$I' = \frac{B}{\Omega}\varphi(U) + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

Les sections droites seront donc désormais perpendiculaires à la surface libre.

On peut poser $\varphi(U) = bU^2$ expression analogue à celle du régime uniforme compte-tenu des hypothèses. Il vient donc :

$$I' = \frac{B}{\Omega}bU^2 + \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$$

En faisant l'approximation $\alpha \simeq 1$, en remplaçant U par Q/Ω et en multipliant par ds, cette équation s'écrit :

$$I'\,ds = b\frac{Q^2}{\Omega^3}B\,ds + \frac{1}{2g}d\left(\frac{Q^2}{\Omega^2}\right)$$

ou, Q étant constant :

$$I'\,ds = bQ^2\frac{B}{\Omega^3}ds + \frac{Q^2}{2g}d\left(\frac{1}{\Omega^2}\right)$$

Intégrons entre deux profils d'abscisses s_0 et s_1 distants de L. Il vient, en admettant que b soit constant :

$$I'L = bQ^2\int_{s_0}^{s_1}\frac{B}{\Omega^3}ds + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right)$$

Si les sections considérées sont assez rapprochées, on peut admettre que sur ce tronçon l'expression B/Ω^3 a une valeur constante égale à :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B_0}{\Omega_0^3} + \frac{B_1}{\Omega_1^3}\right)$$

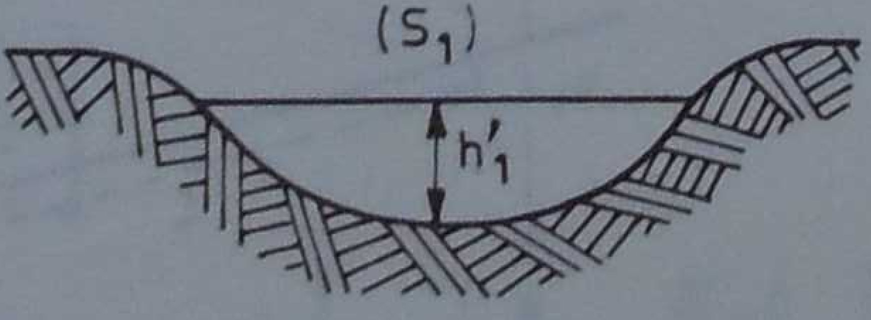
L'équation devient donc :

$$I'L = \frac{bQ^2L}{2}\left(\frac{B_0}{\Omega_0^3} + \frac{B_1}{\Omega_1^3}\right) + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_0^2}\right) \quad [\text{XII.2.7.3.1}]$$

On résoud cette équation par approximations successives de la manière suivante :

Soient (S_0) la section de contrôle et (S_1) un profil en travers peu éloigné distant de (S_0) d'une longueur L (fig. XII.2.7.3.1).

Bien entendu, comme on ne connaît pas la surface libre, pour situer chaque profil en travers sur le profil en long on mesure sur le terrain les longueurs suivant le fond du lit du cours d'eau. Cela revient à admettre égal à l'unité le cosinus de l'angle fait par la surface libre avec le fond ce qui est conforme aux hypothèses posées précédemment.



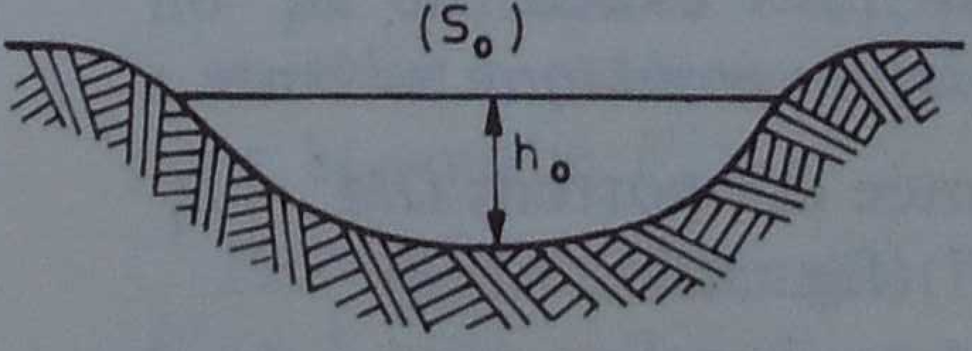


Fig. XII.2.7.3.1

Connaissant h_0 on peut calculer, dans la section de contrôle (S_0), le périmètre mouillé B_0 et la section mouillée Ω_0.

On se donne arbitrairement une valeur h'_1 de h_1. Comme on connaît le profil en travers (S_1), il est facile de calculer les valeurs correspondantes B'_1 et Ω'_1 de B_1 et Ω_1 dans ce profil (S_1).

Avec les valeurs Q, L, B_0, Ω_0, B'_1, Ω'_1 et b (moyenne arithmétique des valeurs de ce coefficient dans les sections (S_0) et (S_1)), on calcule le deuxième membre de l'équation [XII.2.7.3.1] ; soit m_2 sa valeur.

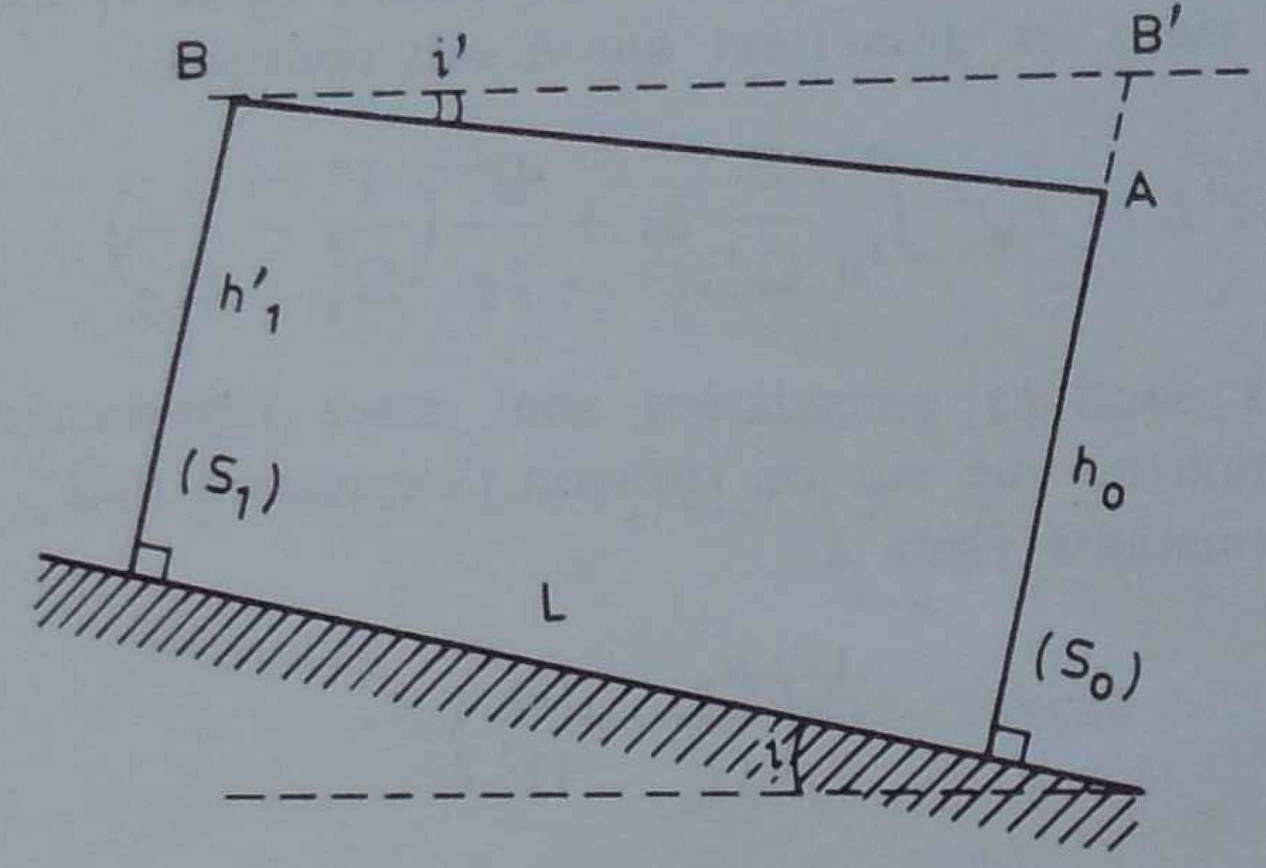


Fig. XII.2.7.3.2

Construisons alors sur le profil en long, h_0 en (S_0) et h'_1 en (S_1), perpendiculaires à ce profil et menons l'horizontale BB' (fig. XII.2.7.3.2). Compte-tenu des approximations faites on peut admettre que :

$$AB' = I'L$$

On peut donc mesurer sur l'épure la valeur $AB' = I'L = m_1$ du premier membre de l'équation [XII.2.7.3.1].

On a généralement :

$$m_1 \neq m_2$$

Posons :

$$m_1 - m_2 = \epsilon'.$$

Pour obtenir une valeur plus exacte de h'_1 on utilise la méthode d'*interpolation graphique* suivante :

Sur une demi-droite orientée OX portons $OM' = h'_1$ et normalement $M'N' = \epsilon'$ (fig. XII.2.7.3.3).

Puis recommençons les mêmes calculs avec une nouvelle valeur arbitraire h''_1 de h_1.

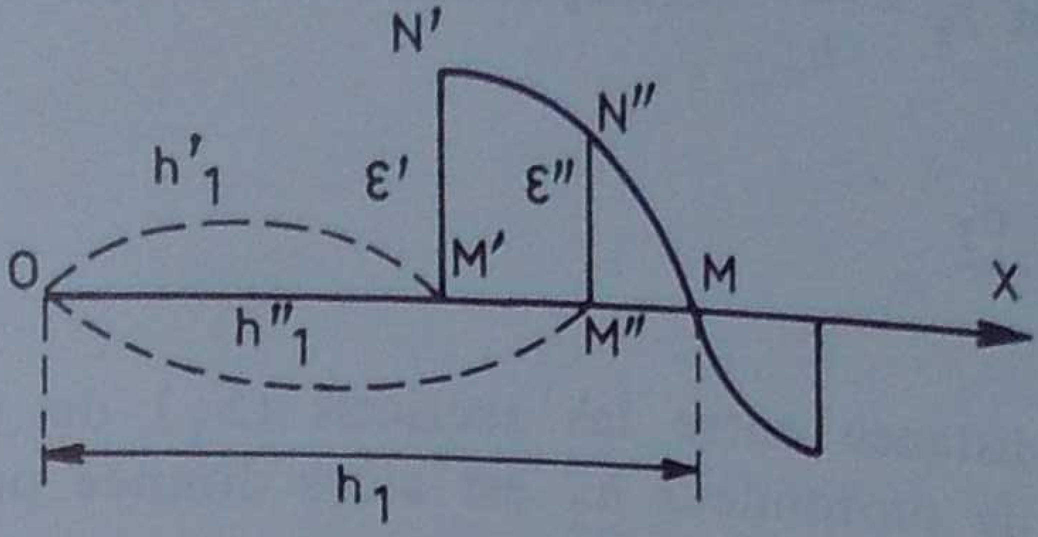


Fig. XII.2.7.3.3 – Interpolation graphique

On aura

$$m'_1 - m'_2 = \epsilon''$$

Portons

$$OM'' = h''_1$$

et

$$M''N'' = \epsilon'',$$

ainsi de suite, jusqu'à obtenir une valeur ϵ de signe contraire aux valeurs précédentes. L'intersection de la courbe des erreurs avec OX donnera en M l'extrémité du vecteur égal à la valeur cherchée de h_1.

A partir de la section (S_1) dans laquelle on connaît h_1 on détermine par la même méthode le point de la courbe de remous situé dans un profil en travers (S_2) voisin de (S_1). De profil en travers en profil en travers on pourra tracer ainsi le profil en long de la surface libre.

XII.2.7.4. *Méthode graphique de Raytchine et Chatelain*

Considérons deux sections transversales (S_1) et (S_2) distantes de L où les vitesses moyennes sont respectivement U_1 et U_2 et les cotes des surfaces libres z_1 et z_2 (fig. XII.2.7.4.1).

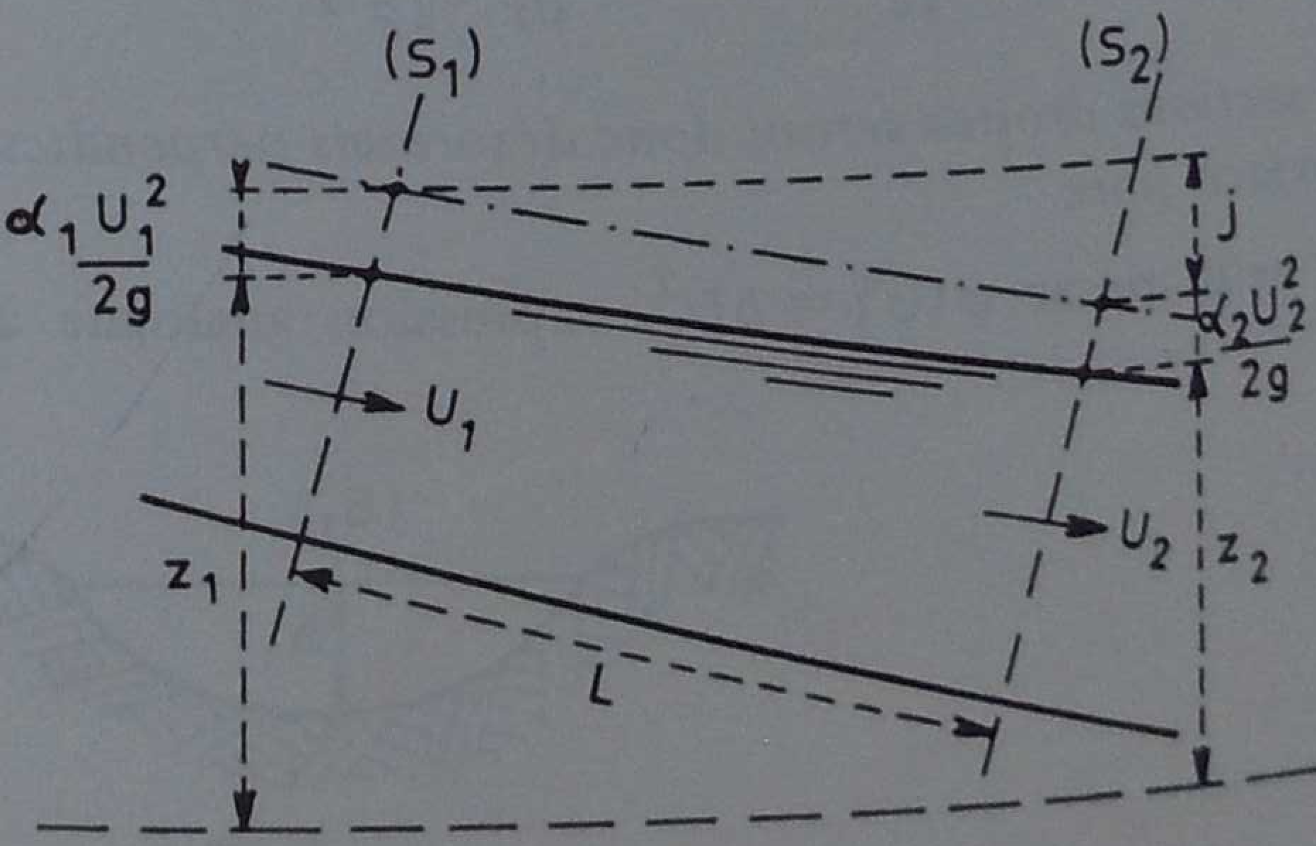


Fig. XII.2.7.4.1

Le théorème de Bernoulli appliqué entre ces deux sections s'écrit :

$$z_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + j$$

j représentant la perte de charge totale entre (S_1) et (S_2).

Faisons l'approximation $\alpha_1 \simeq \alpha_2 \simeq 1$.

Pour calculer la perte de charge totale $j = JL$ entre (S_1) et (S_2), nous admettrons que l'aire Ω_1 de la section mouillée (S_1) reste constante sur la moitié amont de la distance L et que l'aire Ω_2 de la section mouillée (S_2) reste constante sur la moitié aval de cette distance L. Cette approximation est d'autant meilleure que la distance L est plus courte et que la variation des sections transversales mouillées de (S_1) à (S_2) est plus progressive ; on peut alors écrire :

$$j = j_1 + j_2 = J_1 \frac{L}{2} + J_2 \frac{L}{2}$$

J_1 se déduit de la formule de Chézy :

$$J_1 = \frac{U_1^2}{C_1^2 R_1}$$

de même

$$J_2 = \frac{U_2^2}{C_2^2 R_2}$$

et

$$j = \frac{U_1^2}{C_1^2 R_1} \frac{L}{2} + \frac{U_2^2}{C_2^2 R_2} \frac{L}{2}$$

En reportant dans l'équation de Bernoulli :

$$z_1 + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_1^2 L}{2C_1^2 R_1} = z_2 + \frac{U_2^2}{2g} + \frac{U_2^2 L}{2C_2^2 R_2}$$

Posons

$$K_1 = \frac{1}{C_1^2 R_1} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{1}{C_2^2 R_2}$$

et introduisons le débit $Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2$ dans l'équation de Bernoulli qui s'écrit alors :

$$z_1 + Q^2 \left[\frac{1}{2g\Omega_1^2} - \frac{K_1 L}{2\Omega_1^2}\right] = z_2 + Q^2 \left[\frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{K_2 L}{2\Omega_2^2}\right]$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} F_1'' &= \frac{1}{2g\Omega_1^2} - \frac{K_1 L}{2\Omega_1^2} \\ F_2' &= \frac{1}{2g\Omega_2^2} + \frac{K_2 L}{2\Omega_2^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{[XII.2.7.4.1]}$$

F_1'' est appelée "*caractéristique aval*" de la section (S_1)

F_2' est appelée "*caractéristique amont*" de la section (S_2)

Remarquons que ces "caractéristiques" ne dépendent que de la forme et des dimensions de la section mouillée et de la rugosité du lit ; elles sont indépendantes du débit et de la pente du cours d'eau.

L'équation de Bernoulli devient ainsi :

$$z_1 - z_2 = Q^2 (F_2' - F_1'') \quad \text{[XII.2.7.4.2]}$$

Pour différentes cotes z du niveau de la surface libre on calcule successivement dans chacune des sections (S_1) et (S_2) :

– l'aire de la section mouillée Ω,

– le périmètre mouillé B,

– le rayon hydraulique $R = \Omega/B$,

– le coefficient de Chézy C déduit d'une des formules classiques,

– le coefficient $K = \dfrac{1}{C^2 R}$,

– la caractéristique amont

$$F' = \frac{1}{2g\Omega^2} + \frac{KL}{2\Omega^2},$$

– la caractéristique aval : $F'' = \dfrac{1}{2g\Omega^2} - \dfrac{KL}{2\Omega^2}$.

On trace ensuite par points, pour chaque couple de sections consécutives telles que (S_1) et (S_2), les courbes donnant

– en abscisses : les caractéristiques

F_1'' à l'aval de la section amont (S_1)

F_2' à l'amont de la section aval (S_2)

– en ordonnées : la cote de la surface libre dans la section considérée (z_1 pour la courbe F_1'' et z_2 pour la courbe F_2').

Les courbes obtenues (fig. XII.2.7.4.2) $F_1''(z_1)$ et $F_2'(z_2)$ sont celles dont les équations sont données en [XII.2.7.4.1].

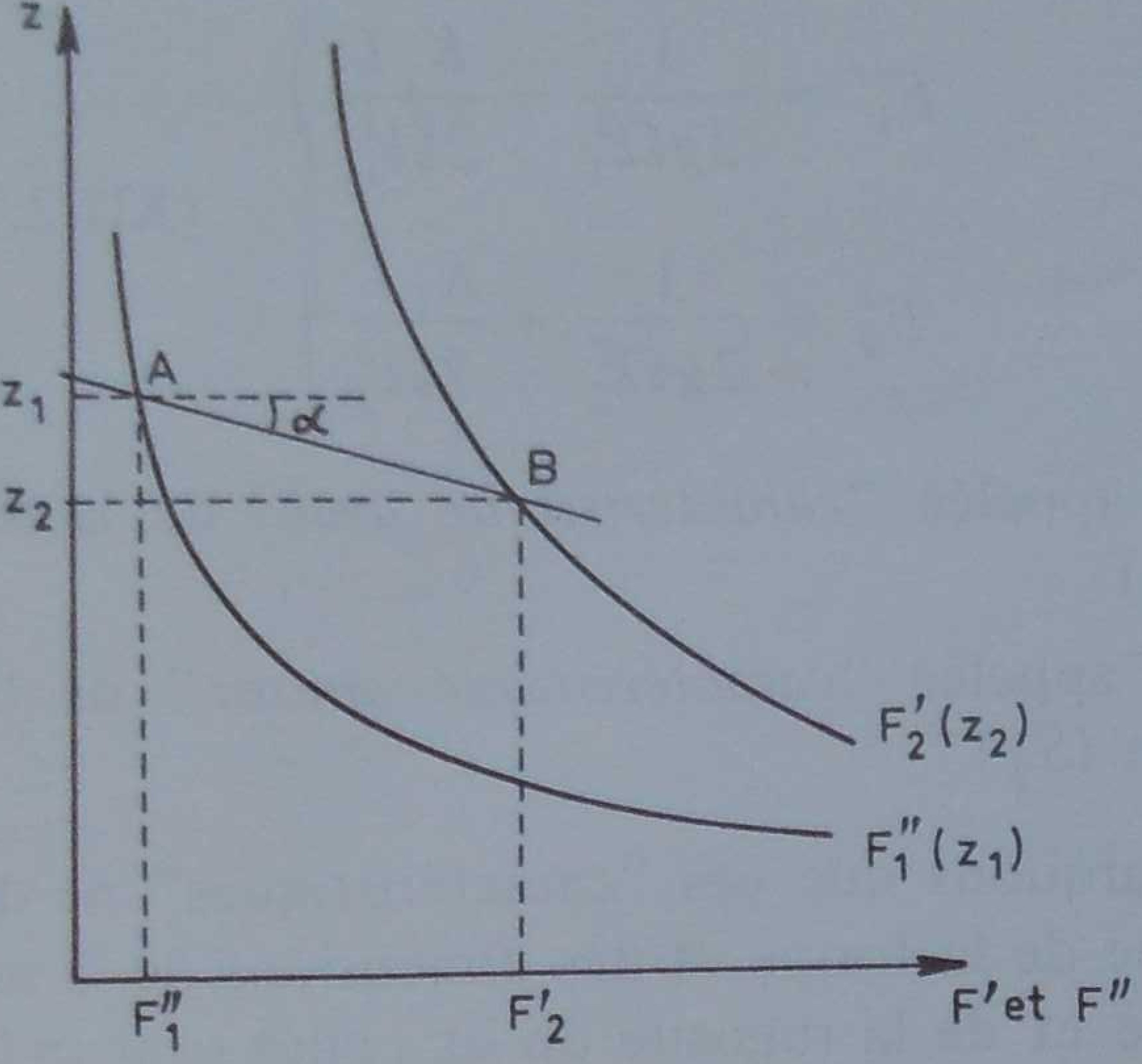


Fig. XII.2.7.4.2

Supposons que la courbe de remous soit une ligne d'eau en régime torrentiel. Nous savons qu'elle se calcule de l'amont vers l'aval à partir d'un point A de cote connue z_1 dans la section (S_1) qui est la section de contrôle.

On connaît donc le point A sur la caractéristique aval de la section (S_1).

Si on mène par A une droite (D) de pente négative $\operatorname{tg} \alpha = - Q^2$, cette droite coupe la caractéristique amont F'_2 en un point B de cote z_2 telle que $z_1 - z_2 = Q^2(F'_2 - F''_1)$.

Cette relation étant identique à l'équation [XII.2.7.4.2] il en résulte que z_2 est la cote de la surface libre dans la section (S_2).

Connaissant ainsi le point de la courbe de remous dans la section (S_2) les mêmes constructions permettront d'en déduire la cote z_3 de la surface libre dans la section suivante (S_3). On considèrera ainsi (fig. XII.2.7.4.3) les caractéristiques

$F''_2\ (z_2)$ à l'aval de la section amont (S_2)

$F'_3\ (z_3)$ à l'amont de la section aval (S_3)

Le point B d'ordonnée z_2 est donné par la construction précédente ; on mène par B la droite (D) de pente $- Q^2$ qui coupe la caractéristique $F'_3(z_3)$ en un point C dont l'ordonnée z_3 est la cote de la surface libre dans la section (S_3).

La construction se poursuit de la même manière pour obtenir les cotes de la courbe de remous dans les diverses sections transversales successives.

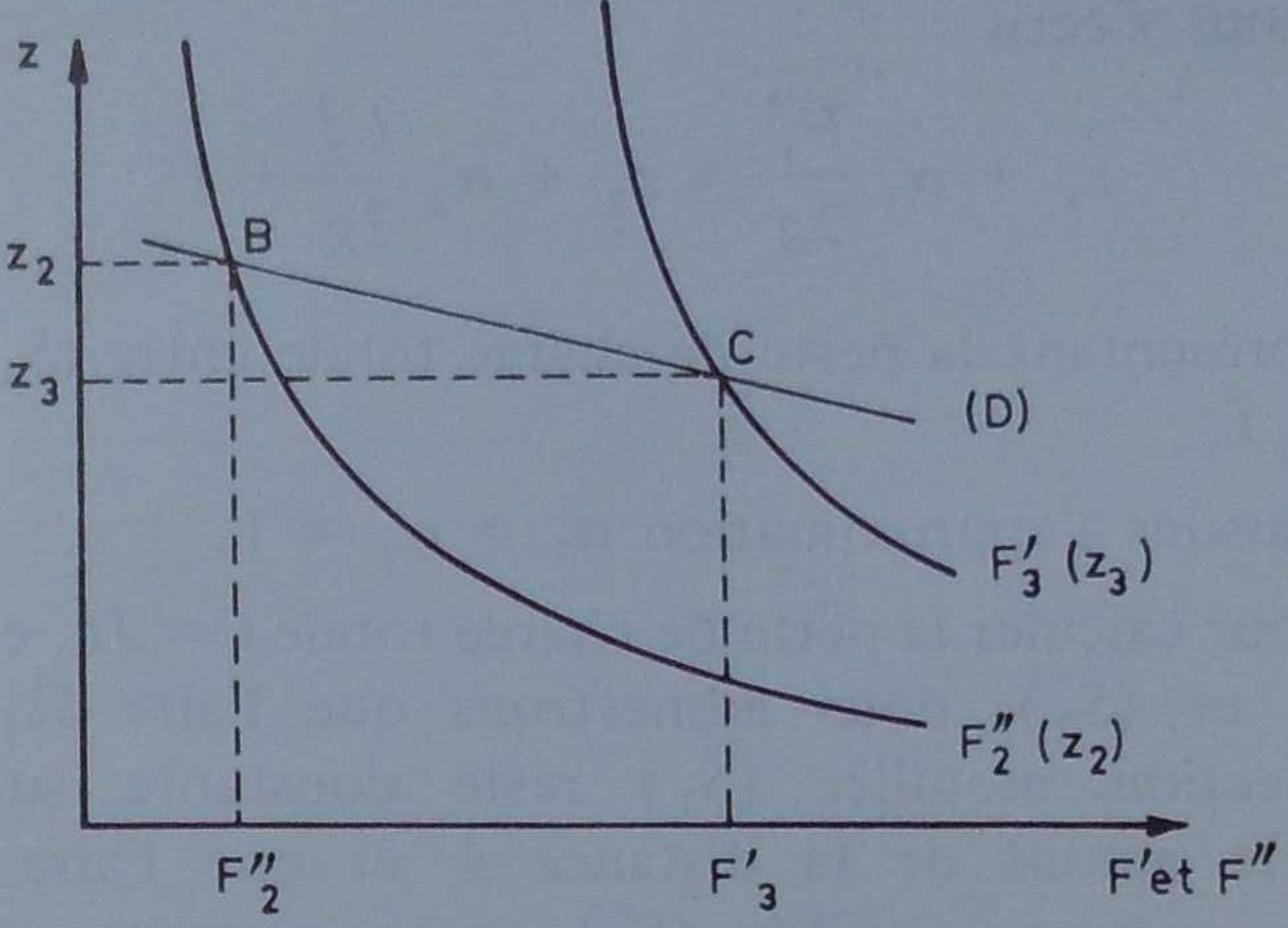


Fig. XII.2.7.4.3

Remarque : La méthode a été exposée dans le cas où la courbe de remous se calcule à partir du point de repère A supposé connu et situé à l'extrémité amont de la courbe qui est donc une ligne d'eau en régime torrentiel.

Dans le cas d'une ligne d'eau en régime fluvial on sait que la courbe se calcule de l'aval vers l'amont à partir du point de repère A de cote z_1 qui est donc situé sur la caractéristique *amont* de la section (S_1), soit $F'_1(z_1)$. Le point B est alors obtenu sur la caractéristique *aval* de la section (S_2), soit $F''_2(z_2)$; en reportant B sur la caractéristique *amont* de (S_2), soit $F'_2(z_2)$, on obtiendra C sur la caractéristique *aval* de (S_3) et ainsi de suite.

XII.2.7.5. *Méthode de Silber*

La méthode proposée par Silber pour l'étude des courbes de remous en régime permanent est largement développée dans son ouvrage[1] auquel nous renvoyons le lecteur, nous bornant à donner ici le *principe* de la méthode.

XII.2.7.5.1. *Caractéristique universelle des écoulements graduellement variés à surface libre.*

Nous avons défini précédemment les grandeurs suivants :

– *l'énergie spécifique* dans une section transversale de l'écoulement, soit

$$E = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \qquad \text{[XII.2.7.5.1.1]}$$

---

(1) R. Silber – Etude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières (2ème Edition – Dunod – 1968).

d'où on déduit

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E-h)} \qquad [XII.2.7.5.1.2]$$

– la *largeur moyenne* de la section mouillée pour la profondeur h, soit

$$l = \frac{\Omega}{h}$$

Introduisons les deux *variables adimensionnelles*

$$h^* = \frac{h}{E} \text{ profondeur réduite}$$

et

$$q^* = \frac{Q}{lE\sqrt{2gE}} \text{ débit unitaire réduit}$$

L'équation [XII.2.7.5.1.2] s'écrit alors

$$q^* lE \sqrt{2gE} = lh \sqrt{2g(E-h)}$$

ou

$$q^* = \frac{h}{E}\sqrt{\frac{E-h}{E}}$$

$$q^* = h^* \sqrt{1-h^*} \qquad [XII.2.7.5.1.3]$$

La courbe $q^* = f(h^*)$ correspondante constitue la *caractéristique universelle* des écoulements graduellement variés à surface libre. C'est, transformée en variables adimensionnelles, la courbe $h(Q)$ pour E constant qui a été définie au § XII.2.3.2 (fig. XII.2.3.2.2). Compte tenu de l'utilisation des variables adimensionnelles h^* et q^* cette courbe est valable pour un canal de forme, de dimensions et de débit quelconques (fig. XII.2.7.5.1).

En divisant par h les deux membres de [XII.2.7.5.1.1] il vient :

$$\frac{1}{h^*} = 1 + \frac{\mathcal{F}^2}{2}$$

avec $\mathcal{F} = \frac{U}{\sqrt{gh}}$ *nombre de Froude* caractéristique de l'écoulement, ou

$$h^* = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{F}^2}{2}} \qquad [XII.2.7.5.1.4]$$

En reportant cette valeur dans l'équation [XII.2.7.5.1.3] on obtient après simplification :

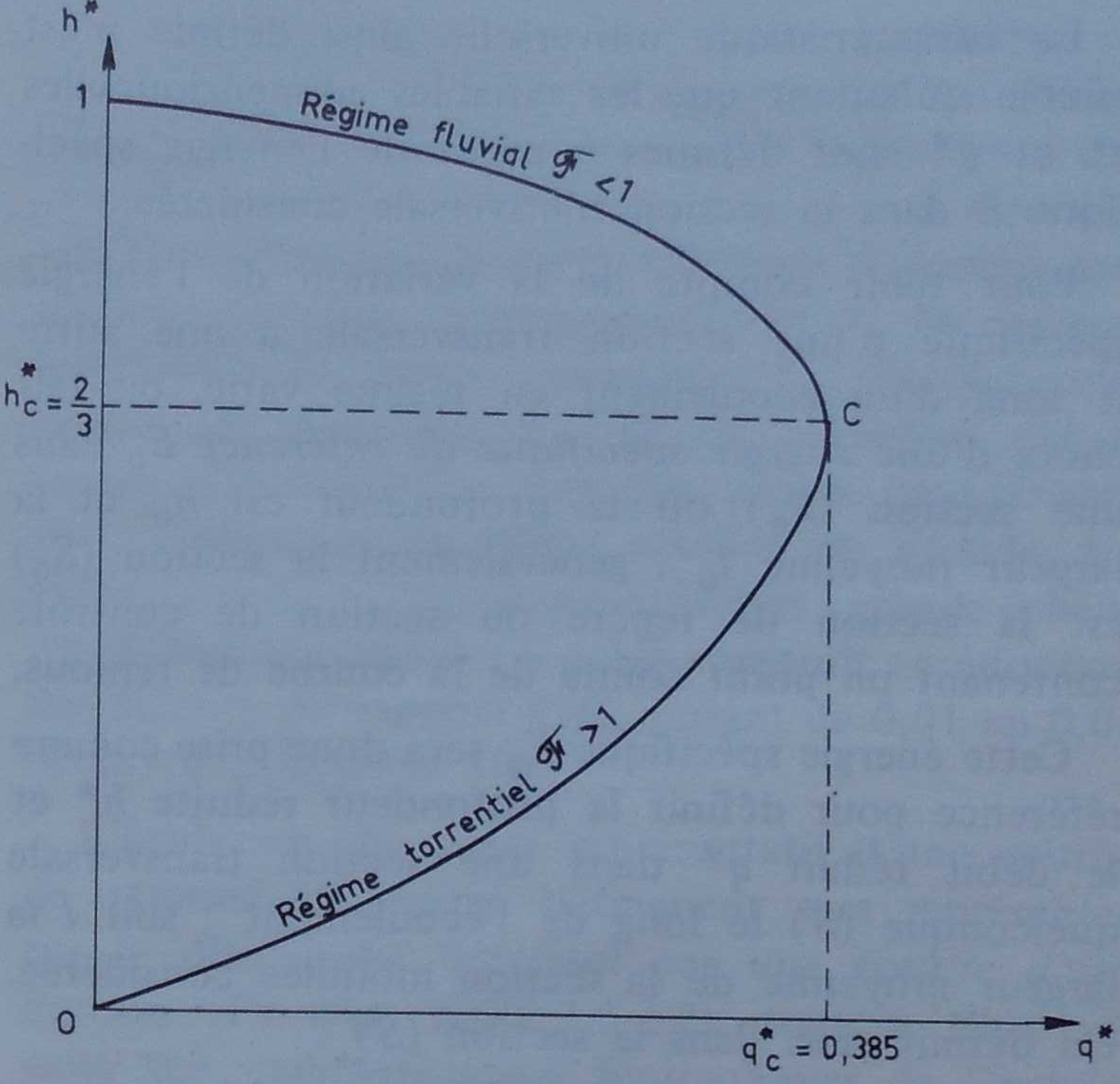


Fig. XII.2.7.5.1 – Caractéristique universelle

$$q^* = \frac{2\mathcal{F}}{(2+\mathcal{F}^2)^{3/2}} \qquad [XII.2.7.5.1.5]$$

Les équations [XII.2.7.5.1.4 et 5] sont les équations paramétriques de la caractéristique universelle et permettent de graduer les deux branches de cette caractéristique en *nombre de Froude local.* La branche supérieure de la caractéristique correspond à un écoulement fluvial ($\mathcal{F} < 1$), la branche inférieure à un écoulement torrentiel ($\mathcal{F} > 1$). Le sommet C de la caractéristique correspond à la valeur maximale de q^* obtenue en annulant la dérivée de [XII.2.7.5.1.5], soit $\mathcal{F} = 1$.

Les valeurs correspondantes de h^* et q^* sont données respectivement par les équations [XII.2.7.5.1.4 et 5] :

$$h_c^* = \frac{2}{3}$$

$$q^* = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}385$$

Le point C est donc représentatif du *régime critique*.

XII.2.7.5.2. *Diagramme universel*

La caractéristique universelle ainsi définie n'est valable qu'autant que les variables adimensionnelles h^* et q^* sont définies à partir de l'énergie spécifique E dans la section transversale considérée.

Pour tenir compte de la variation de l'énergie spécifique d'une section transversale à une autre le long d'un écoulement en régime varié, on fait choix d'une *énergie spécifique de référence* E_0 dans une section (S_0) où la profondeur est h_0 et la largeur moyenne l_0 ; généralement la section (S_0) est la section de repère ou section de contrôle contenant un point connu de la courbe de remous.

Cette énergie spécifique E_0 sera donc prise comme référence pour définir la profondeur réduite h^* et le débit réduit q^* dans une section transversale quelconque (S) le long de l'écoulement ; soit l la largeur moyenne de la section mouillée considérée. On définit ainsi dans la section (S) :

$$h^* = \frac{h}{E_0}$$

$$q^* = \frac{Q}{lE_0\sqrt{2gE_0}}$$

Dans la section de référence (S_0) on a :

$$A_0 \left\{ \begin{aligned} h_0^* &= \frac{h_0}{E_0} \\ q_0^* &= \frac{Q}{l_0E_0\sqrt{2gE_0}} \end{aligned} \right.$$

Ces coordonnées définissent le point A_0 situé sur la caractéristique principale (fig. XII.2.7.5.2.1).

Le point caractéristique de l'écoulement dans la section (S) serait en B_0 sur la même caractéristique principale que A_0 si nous avions choisi l'énergie spécifique E de cette section (S) pour définir ses coordonnées réduites qui s'écriraient ainsi :

$$B_0 \left\{ \begin{aligned} h_0'^* &= \frac{h}{E} \\ q_0'^* &= \frac{Q}{lE\sqrt{2gE}} \end{aligned} \right.$$

Mais puisque nous avons choisi E_0 comme énergie spécifique de référence pour toutes les sections transversales de l'écoulement, le point figuratif B de la section (S) sera défini par les coordonnées réduites :

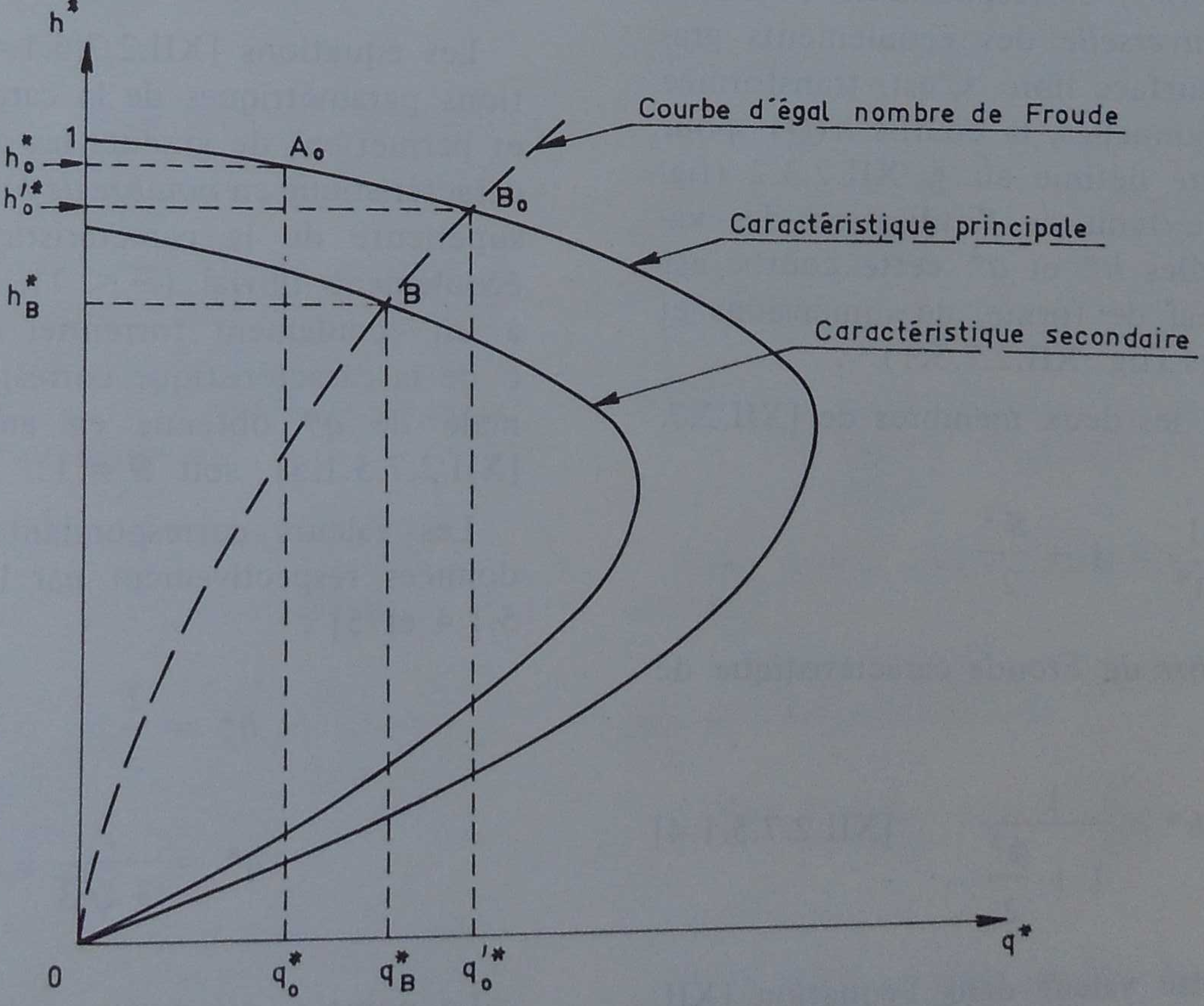


Fig. XII.2.7.5.2.1 – Diagramme universel

$$B \begin{cases} h_B^* = \dfrac{h}{E_0} = h_0'^* \dfrac{E}{E_0} \\ q_B^* = \dfrac{Q}{lE_0\sqrt{2gE_0}} = q_0'^* \left(\dfrac{E}{E_0}\right)^{3/2} \end{cases}$$

Le point B est situé sur une *caractéristique secondaire,* lieu des points de l'écoulement considéré dont l'énergie spécifique est égale à E. Cette caractéristique secondaire se déduit de la caractéristique principale par une affinité définie par

$$\frac{h^*}{h_0^*} = \frac{E}{E_0} \quad \text{et} \quad \frac{q^*}{q_0^*} = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{3/2}$$

Les points B et B_0 représentent le même écoulement et sont donc caractérisés par le même nombre de Froude ; d'une manière générale, le lieu des points de même nombre de Froude tels que B et B_0 est obtenu en éliminant E/E_0 entre les deux équations précédentes ce qui conduit à l'expression

$$\frac{h^*}{h_0^*} = \left(\frac{q^*}{q_0^*}\right)^{2/3}$$

parabole de puissance 2/3 dans le système d'axes (h^*, q^*).

En définitive, le *diagramme universel des écoulements graduellement variés* proposé par Silber est constitué dans le plan de la profondeur réduite h^* en fonction du débit réduit q^* rapportés à une énergie spécifique de référence E_0 ,par la représentation d'un réseau de caractéristiques à énergie spécifique constante, graduées en valeurs du rapport E/E_0 de cette énergie spécifique E à l'énergie spécifique de référence E_0. Il est complété par le réseau des paraboles lieu des points caractérisant les écoulements de même nombre de Froude. Un exemplaire de ce diagramme universel à grande échelle est donné en annexe ; il a été construit en adoptant des valeurs du rapport E/E_0 variant de 0,01 en 0,01 de 0,5 à 2 (annexe 10).

L'évolution du point représentatif d'une courbe de remous en régime permanent sera représentée sur le diagramme universel par une *courbe d'utilisation* (Γ) (fig. XII.2.7.5.2.2) dont le tracé résulte des caractéristiques hydrauliques de l'écoulement considéré comme il sera précisé plus loin.

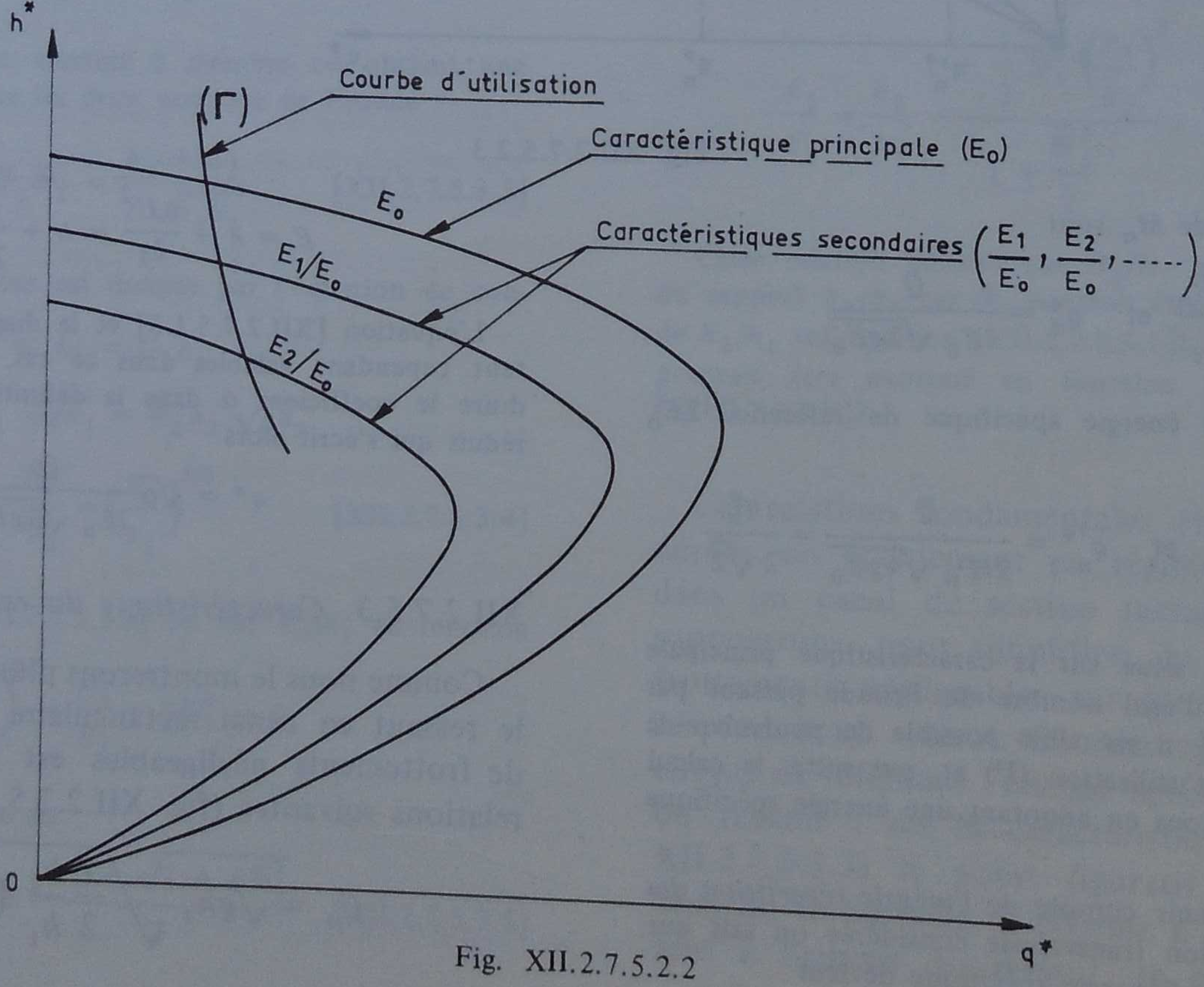


Fig. XII.2.7.5.2.2

Remarques sur l'utilisation du diagramme universel

1 – Comme nous l'avons indiqué, l'énergie spécifique de référence E_0 est généralement celle du point initial (point de repère) de la courbe de remous cherchée.

Il peut alors arriver que l'énergie spécifique variant beaucoup le long de l'écoulement, prenne des valeurs extérieures à l'intervalle $\left(\frac{E_0}{2},\ 2E_0\right)$ et que par conséquent le point figuratif sorte des limites du diagramme universel. Dans ce cas, on adopte une nouvelle valeur E'_0 de l'énergie spécifique de référence, double ou moitié de E_0.

Par exemple dans le cas de la figure XII.2.7.5.2.3 si le point figuratif de l'écoulement M_n se situe sur la caractéristique secondaire correspondant à une énergie spécifique $E_n = 2E_0$, c'est-à-dire à la limite du diagramme universel, on choisit une nouvelle énergie spécifique de référence $E'_0 = 2E_0$.

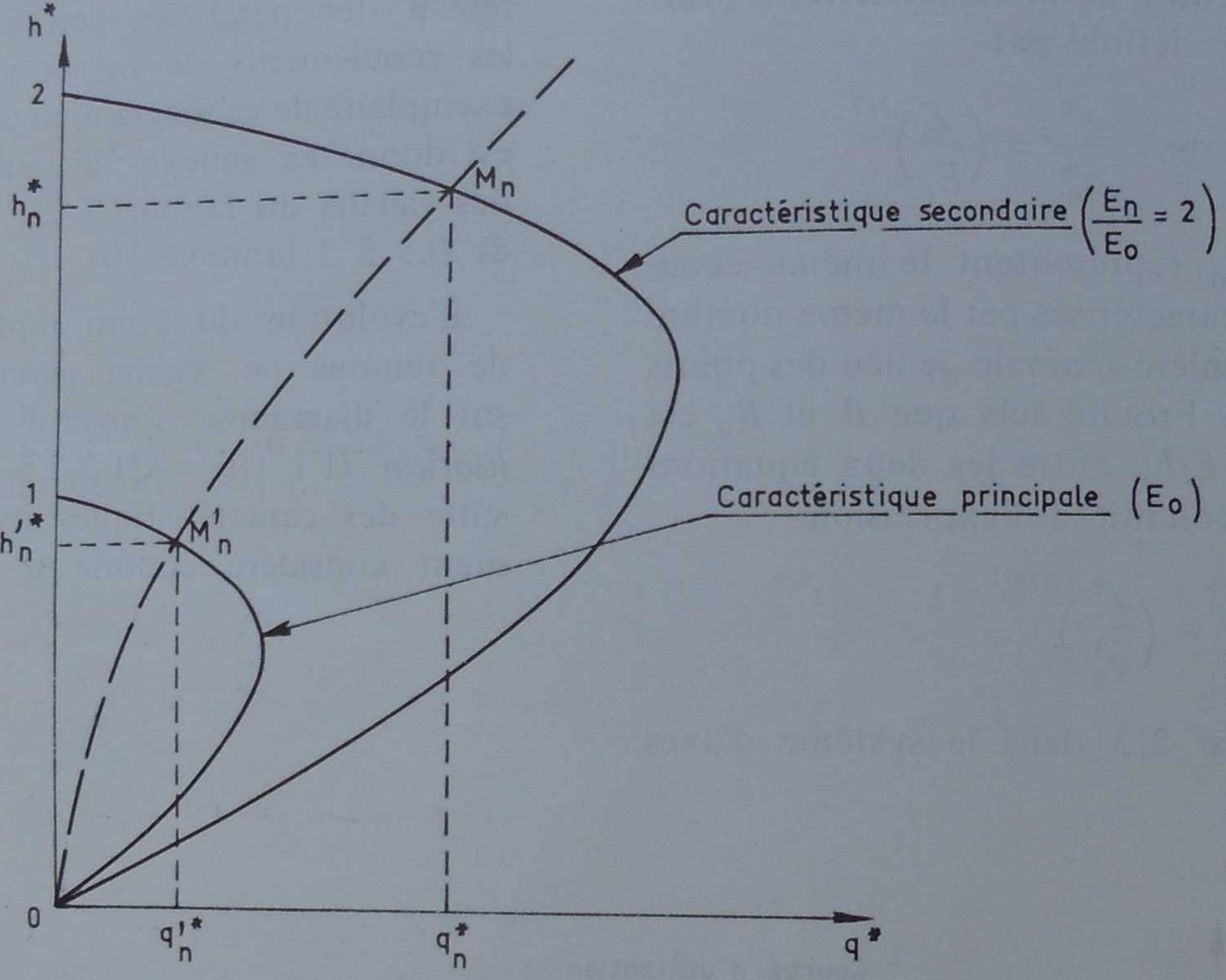


Fig. XII.2.7.5.2.3

Les coordonnées de M_n sont

$$h_n^* = \frac{h_n}{E_0} \quad \text{et} \quad q_n^* = \frac{Q}{lE_0\sqrt{2gE_0}}$$

Avec la nouvelle énergie spécifique de référence $2E_0$ elles deviennent :

$$h_n'^* = \frac{h_n}{2E_0} = \frac{h_n^*}{2} \quad \text{et} \quad q_n'^* = \frac{Q}{2lE_0\sqrt{4gE_0}} = \frac{q_n^*}{2\sqrt{2}}$$

Le point M'_n est situé sur la caractéristique principale et sur la parabole d'égal nombre de Froude passant par M_n. A partir de M'_n il est alors possible de poursuivre le tracé de la courbe d'utilisation (Γ) et, par suite, le calcul de la courbe de remous en adoptant une énergie spécifique égale à $2E_0$.

2 – Si on veut tenir compte de l'*inégale répartition des vitesses* dans la section transversale considérée on sait que l'expression exacte de l'énergie spécifique devient

$$E = h + \frac{\alpha U^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\Omega^2}$$

L'équation [XII.2.7.5.1.3] et le diagramme universel restent cependant valables dans ce cas, à condition d'introduire le coefficient α dans la définition du débit unitaire réduit qui s'écrit alors

$$q^* = \sqrt{\alpha}\,\frac{Q}{lE_0\sqrt{2gE_0}}$$

XII.2.7.5.3. *Caractéristique du ressaut*

Comme nous le montrerons plus loin (§ XII.2.9.2.2) le ressaut en canal rectangulaire de pente nulle et de frottements négligeables est caractérisé par les relations suivantes (fig. XII.2.7.5.3.1) :

$$U_1 = \sqrt{gh_1}\ \sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}$$

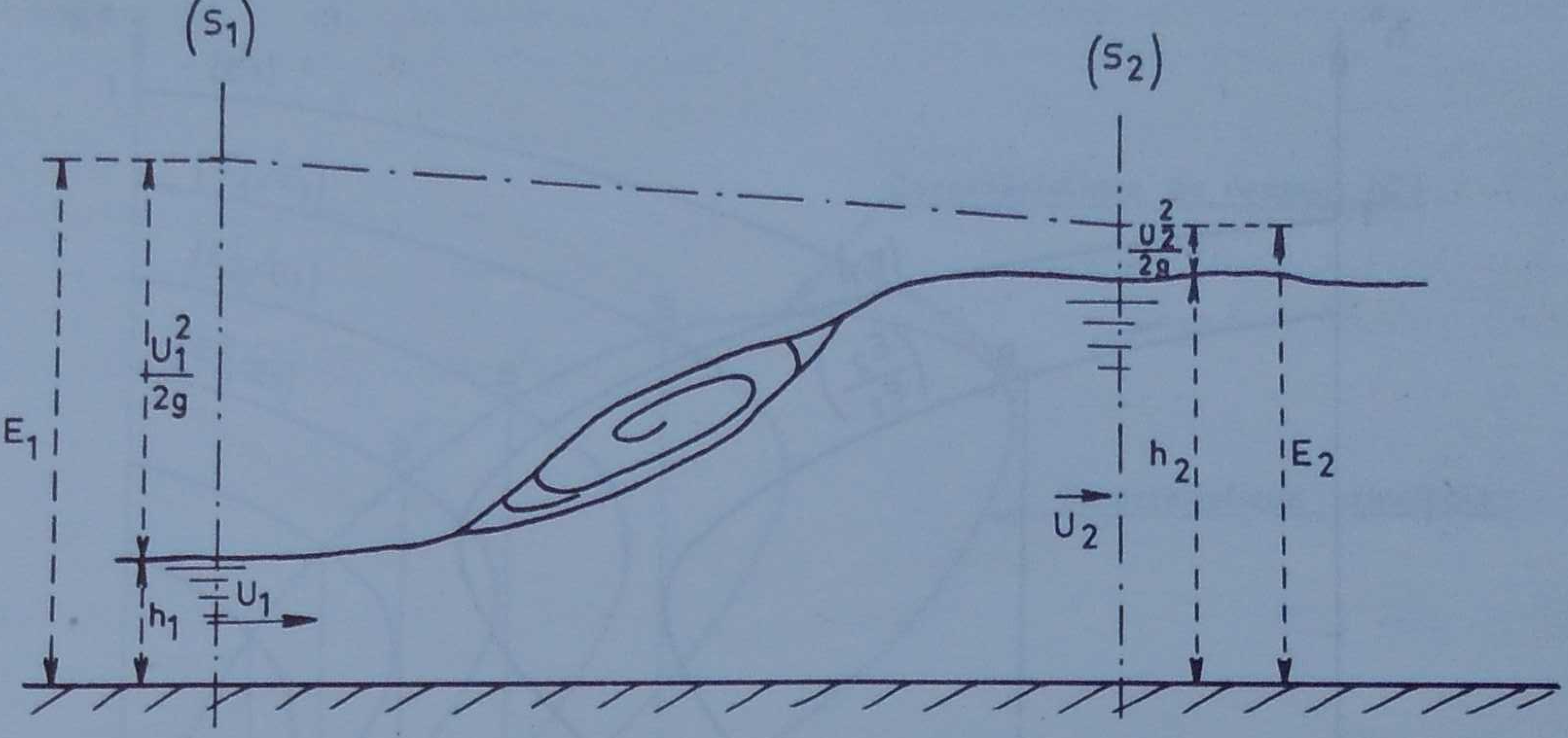


Fig. XII.2.7.5.3.1

$$U_2 = \sqrt{gh_2}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_1}{h_2}\left(1+\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

Explicitons les nombres de Froude à l'amont et à l'aval du ressaut ; les deux équations précédentes s'écrivent alors :

$$\mathcal{F}_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gh_1}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1}\left(1+\frac{h_2}{h_1}\right)} \qquad \text{[XII.2.7.5.3.1]}$$

$$\mathcal{F}_2 = \frac{U_2}{\sqrt{gh_2}}\sqrt{\frac{1}{2}\frac{h_1}{h_2}\left(1+\frac{h_1}{h_2}\right)} \qquad \text{[XII.2.7.5.3.2]}$$

En les multipliant membre à membre on obtient une première relation entre les deux nombres de Froude :

$$\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 = \frac{h_1+h_2}{2\sqrt{h_1h_2}} \qquad \text{[XII.2.7.5.3.3]}$$

Une seconde relation est donnée par l'équation de continuité :

$$U_1h_1 = U_2h_2$$

ou

$$\mathcal{F}_1h_1\sqrt{gh_1} = \mathcal{F}_2h_2\sqrt{gh_2}$$

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{3/2} \qquad \text{[XII.2.7.5.3.4]}$$

De la relation [XII.2.7.5.3.1] on tire h_2/h_1 en fonction $\mathcal{F}_1$:

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2\mathcal{F}_1^2 = 0$$

dont la racine positive est

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{-1+\sqrt{1+8\mathcal{F}_1^2}}{2} \qquad \text{[XII.2.7.5.3.5]}$$

Quant à la perte de charge résultant du ressaut, elle se mettra mieux en évidence en explicitant le rapport des énergies spécifiques à l'aval et à l'amont du ressaut soit :

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{h_2+\dfrac{U_2^2}{2g}}{h_1+\dfrac{U_1^2}{2g}} = \frac{h_2}{h_1}\,\frac{1+\dfrac{\mathcal{F}_2^2}{2}}{1+\dfrac{\mathcal{F}_1^2}{2}}$$

ou en tenant compte de [XII.2.7.5.3.4] :

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{h_2}{h_1}\,\frac{1+\dfrac{1}{2}\mathcal{F}_1^2\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^3}{1+\dfrac{\mathcal{F}_1^2}{2}} \qquad \text{[XII.2.7.5.3.6]}$$

Cette relation montre que E_2/E_1 est une fonction, soit du rapport h_2/h_1 car $\mathcal{F}_1$ pourrait être exprimé en fonction de h_2/h_1 (cf. relation [XII.2.7.5.3.1]), soit de $\mathcal{F}_1$ car h_2/h_1 pourrait être exprimé en fonction de $\mathcal{F}_1$ (cf. relation [XII.2.7.5.3.5]).

Ces relations fondamentales étant établies, considérons un écoulement en régime permanent varié dans un canal de section rectangulaire que nous supposerons, pour simplifier, de pente nulle et de frottements négligeables sur la courte distance où se produit un ressaut. Choisissons pour énergie spécifique de référence l'énergie spécifique E_1 à l'amont du ressaut ; sur la caractéristique principale (fig. XII.2.7.5.3.2) le point figuratif est en A sur la branche torrentielle et comme E_1 est supposé constant à l'amont du ressaut, le point A se déplace

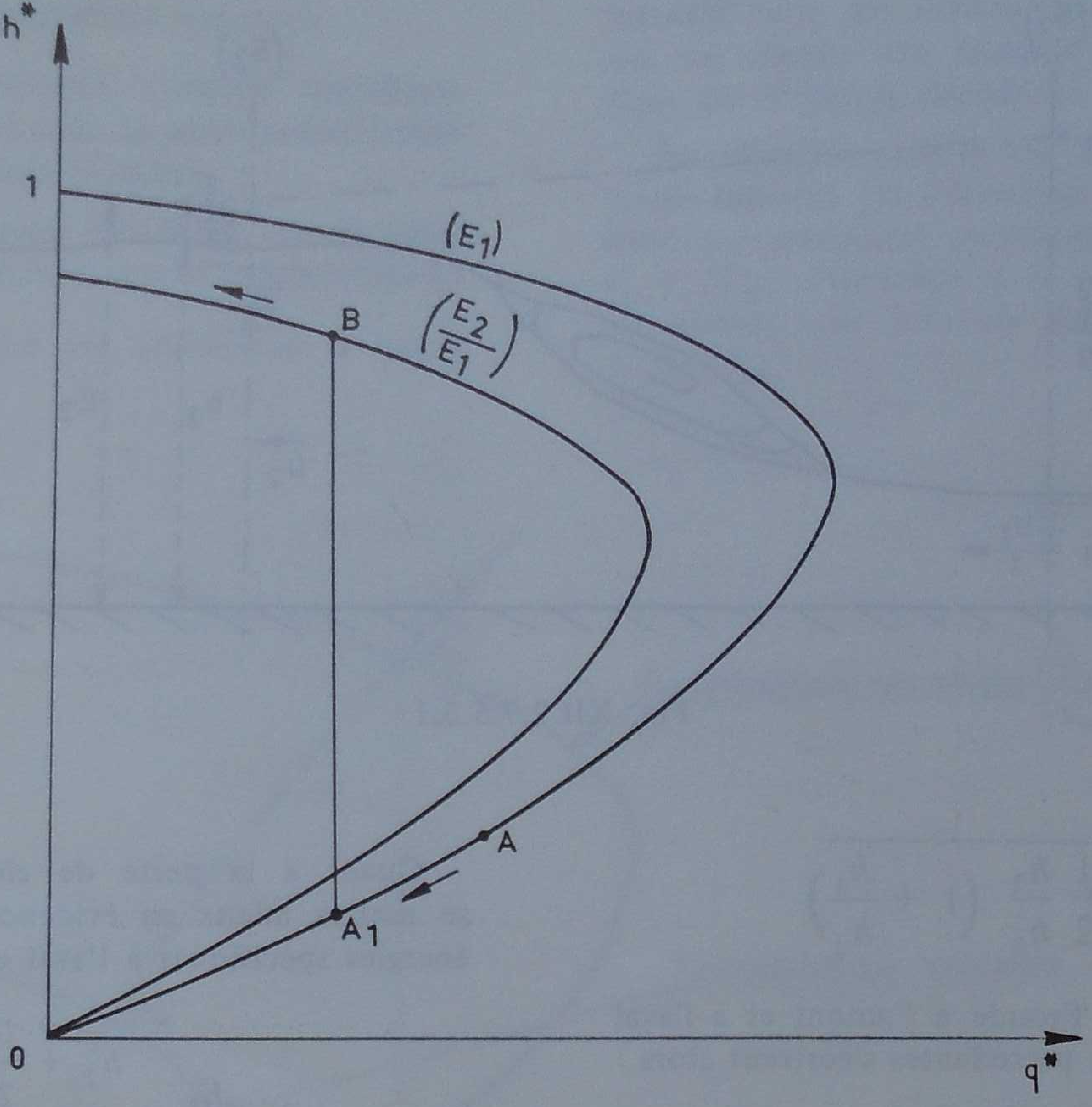


Fig. XII.2.7.5.3.2

sur la branche de courbe correspondante par exemple dans le sens de la flèche. Au droit du ressaut (point A_1) la profondeur augmente brusquement et comme le ressaut est dissipateur d'énergie le point figuratif de la section aval du ressaut est en B sur la branche fluviale d'une caractéristique secondaire correspondant à une énergie spécifique E_2 c'est-à-dire à un paramètre E_2/E_1, il évoluera ensuite sur cette caractéristique secondaire dans la mesure où E_2 reste constant à l'aval du ressaut.

La formation du ressaut et ses caractéristiques (hauteurs conjuguées et perte de charge) sont déterminées par le rapport E_2/E_1 définissant la caractéristique secondaire où se trouve le point B et par le nombre de Froude $\mathcal{F}_1$ au point A_1. Ces deux éléments sont liés par les relations [XII.2.7.5.3.5 et 6].

Sur le diagramme universel (fig. XII.2.7.5.3.3), l'écoulement avec ressaut est représenté par une famille de caractéristiques secondaires et une série de verticales analogues au segment A_1B de la figure XII.2.7.5.3.2 qui ne dépendent que du critère du ressaut E_2/E_1. Le lieu du point B de rencontre de chaque verticale avec la caractéristique secondaire correspondante est une courbe (C) appelée "*caractéristique du ressaut*" ; elle représente l'état de l'écoulement dans la section aval du ressaut et constitue également le lieu des profondeurs réduites conjuguées de la branche torrentielle de la caractéristique principale.

La caractéristique du ressaut est représentée sur le diagramme universel à grande échelle (annexe n° 10) ; elle permet de calculer facilement la courbe conjuguée de la courbe de remous torrentielle d'un écoulement varié quelconque et, par suite, de localiser le ressaut suivant la méthode qui sera indiquée ultérieurement (§ XII.2.9.5).

Dans le cas d'un canal de section transversale non rectangulaire la même méthode permet de tracer par points une caractéristique du ressaut dans le plan du diagramme universel ; sa forme est évidemment fonction de la forme et des dimensions de la section considérée.

Le *diagramme universel* et la *caractéristique du ressaut* étant ainsi entièrement définis, il convient maintenant de tracer dans le plan (h^*, q^*) la courbe

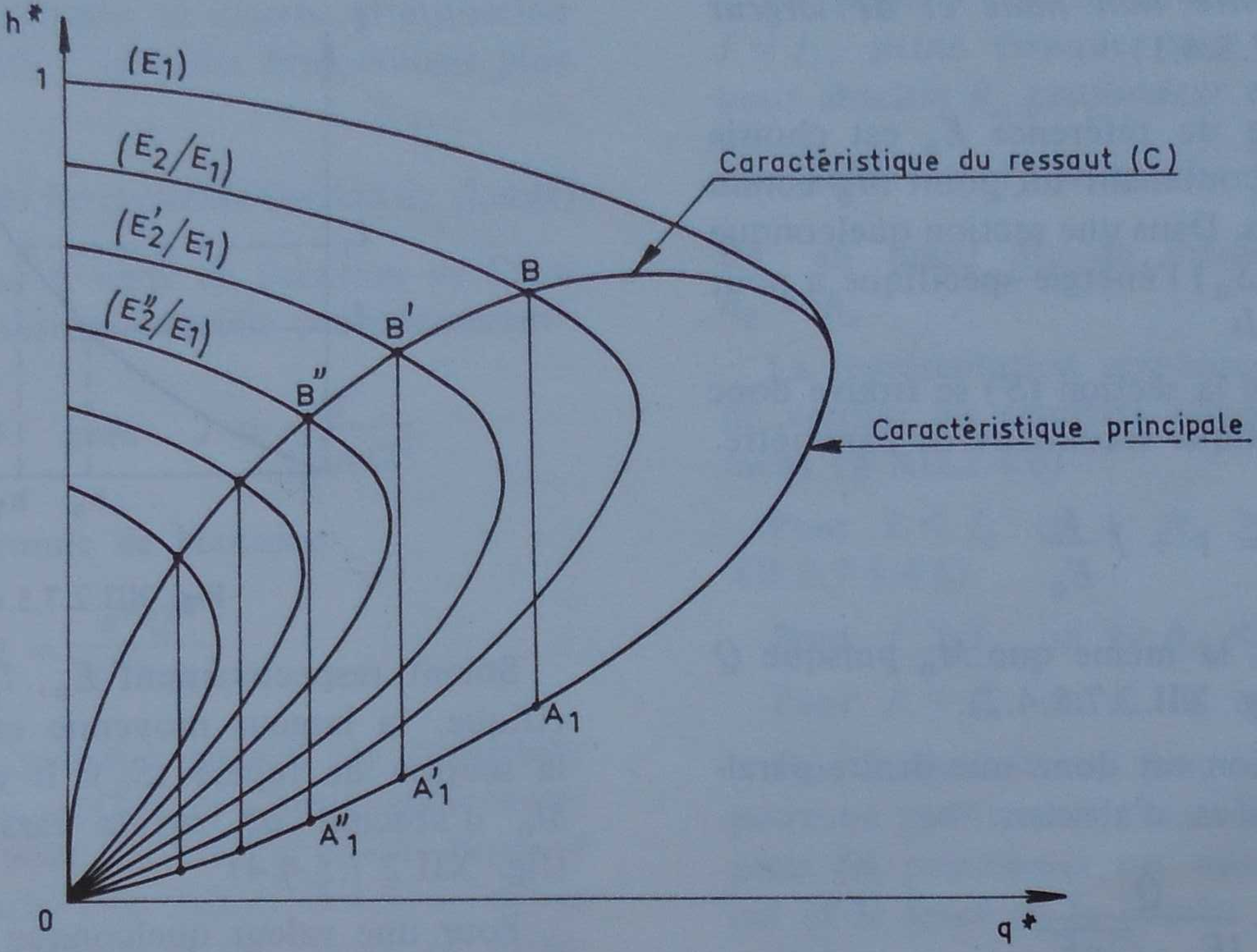


Fig. XII.2.7.5.3.3 – Diagramme universel et caractéristique du ressaut

d'utilisation, lieu des points représentatifs d'un écoulement en régime permanent varié quelconque et d'en déduire le calcul et le tracé de la courbe de remous correspondante.

XII.2.7.5.4 *Courbe d'utilisation d'un écoulement, calcul et tracé des courbes de remous*

Nous effectuerons l'étude correspondante dans divers cas des plus simples aux plus complexes.

A) *Frottements négligeables* – La ligne d'énergie est horizontale

a) *Section rectangulaire*

a1) *Canal horizontal de largeur variable*

L'énergie spécifique E constante tout le long du canal est choisie comme énergie spécifique de référence ; le point figuratif de l'écoulement évolue donc sur la caractéristique principale qui, ici, se confond avec la courbe d'utilisation de l'écoulement.

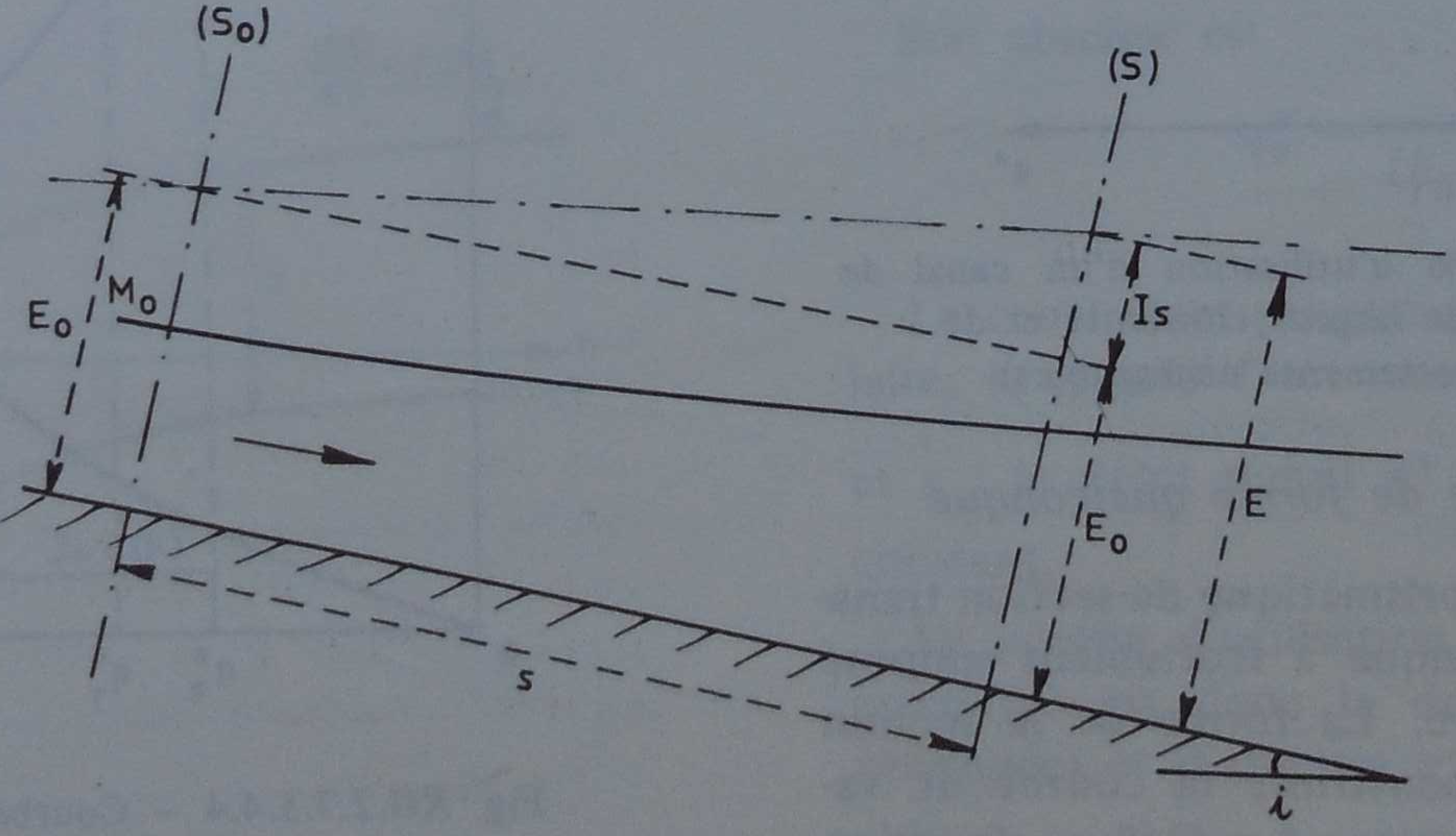


Fig. XII.2.7.5.4.1

a2) *Canal de pente non nulle et de largeur constante* (fig. XII.2.7.5.4.1)

L'énergie spécifique de référence E_0 est choisie dans la section (S_0) contenant un point M_0 connu de la courbe de remous. Dans une section quelconque (S) distante de s de (S_0) l'énergie spécifique a pour expression $E = E_0 + Is$.

Le point figuratif de la section (S) se trouve donc en M sur la caractéristique secondaire de paramètre.

$$\frac{E}{E_0} = 1 + I\,\frac{s}{E_0}$$

Son abscisse q^* est la même que M_0 puisque Q et l sont constants (fig. XII.2.7.5.4.2).

La courbe d'utilisation est donc une droite parallèle à l'axe des ordonnées, d'abscisse

$$q^* = \frac{Q}{lE_0\sqrt{2gE_0}}$$

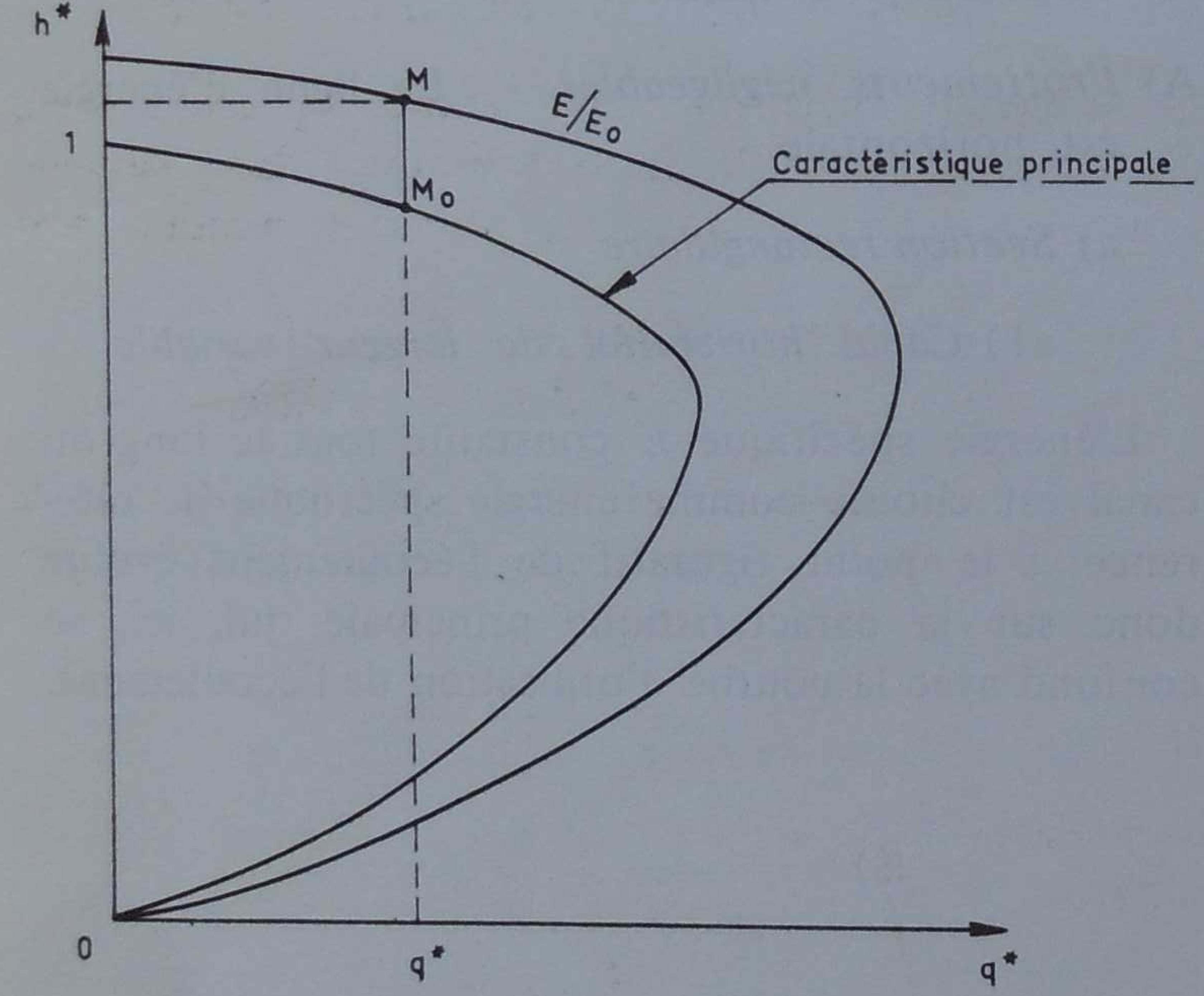


Fig. XII.2.7.5.4.2 – Courbe d'utilisation d'un canal de section rectangulaire, de largeur constante et de pente non nulle (frottements négligeables)

b) *Section transversale de forme quelconque*

Considérons un canal prismatique de section transversale de forme quelconque à frottement supposé nul et de pente positive. La forme de la section étant connue on peut construire la courbe de variation de la largeur moyenne $l = \Omega/h$ en fonction de la profondeur h (fig. XII.2.7.5.4.3).

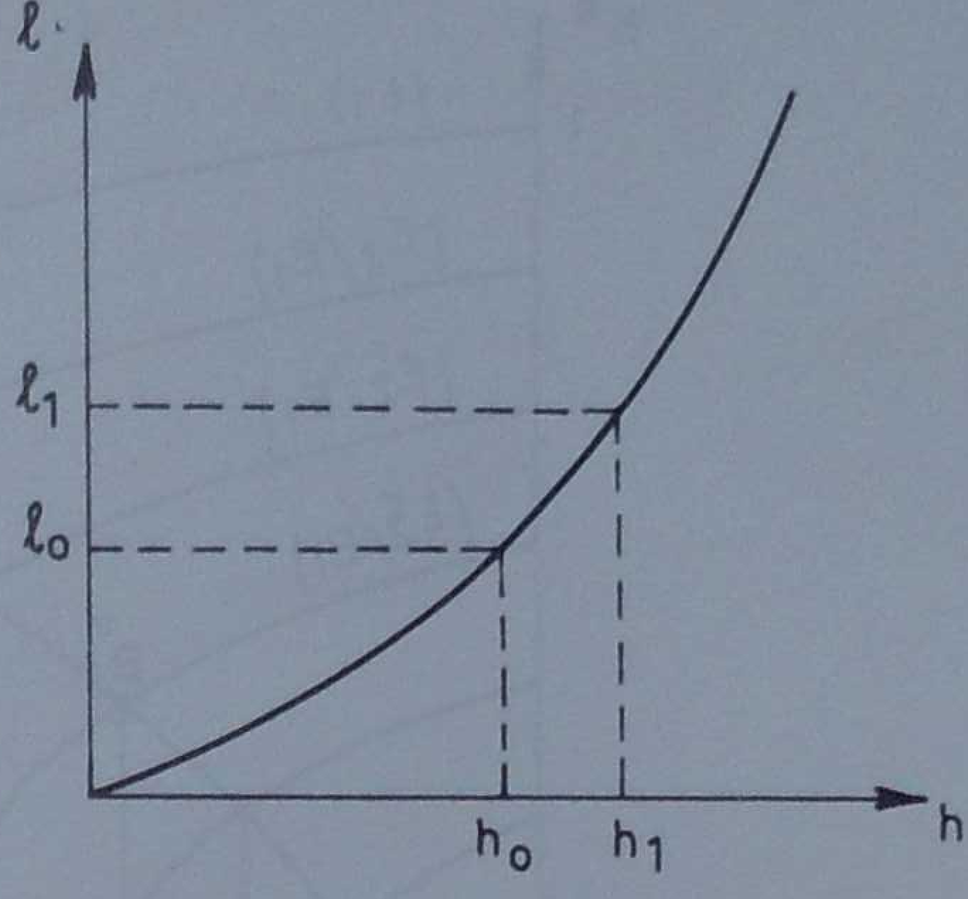


Fig. XII.2.7.5.4.3

Soient respectivement E_0, l_0 et h_0 l'énergie spécifique, la largeur moyenne et la profondeur dans la section de repère (S_0). Il y correspond le point M_0 d'abscisse q_0^* sur la caractéristique principale (fig. XII.2.7.5.4.4).

Pour une valeur quelconque h_1 de la profondeur, différente de h_0, on lit sur la courbe $l(h)$ la valeur de l_1 ; le point figuratif M_1 sur le diagramme universel (fig. XII.2.7.5.4.4) sera défini par son abscisse $q_1^* = q_0^*\,\frac{l_0}{l_1}$ et son ordonnée $h_1^* = \frac{h_1}{E_0}$.

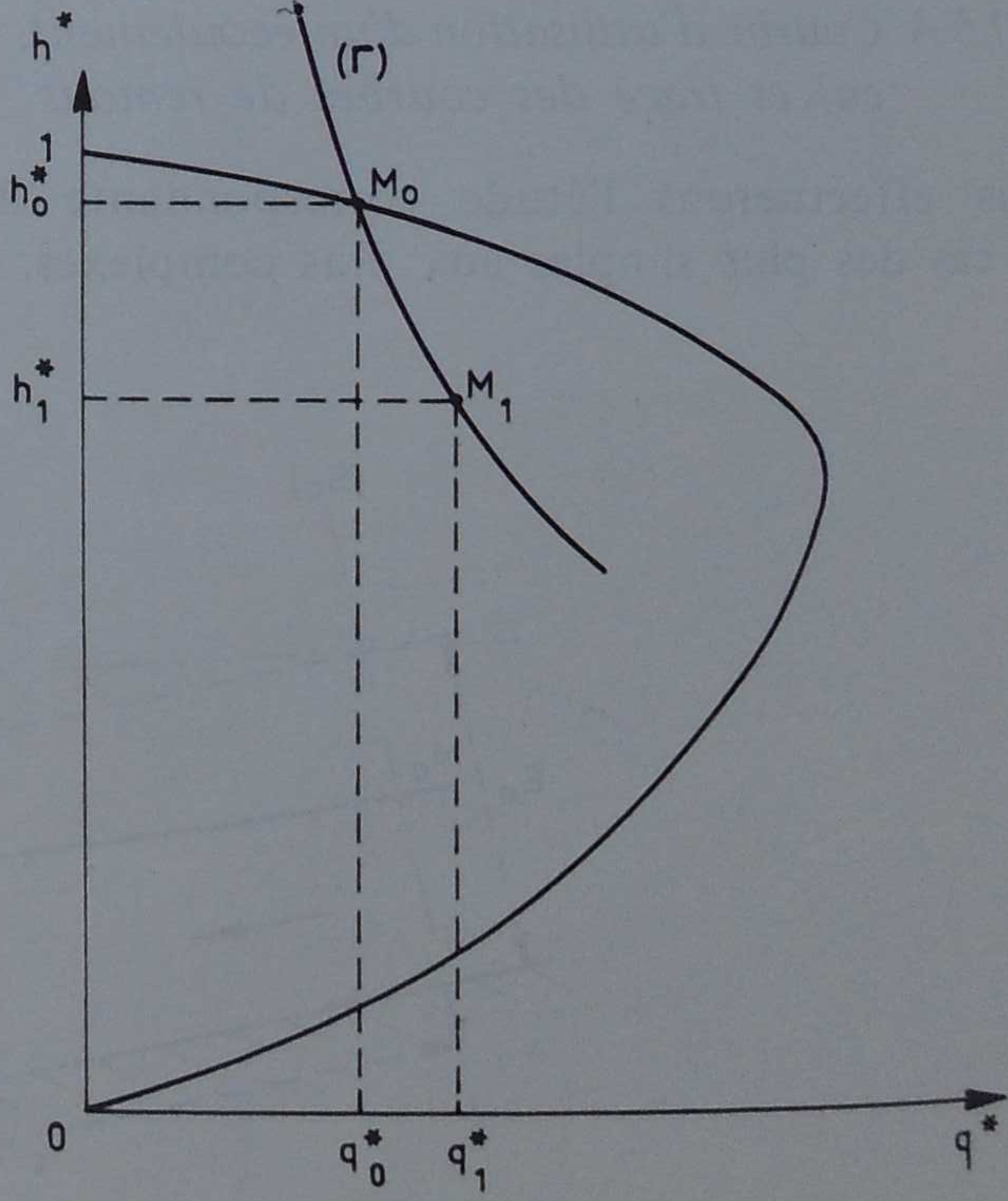


Fig. XII.2.7.5.4.4 – Courbe d'utilisation d'un canal prismatique de section de forme quelconque et de pente non nulle (frottements négligeables)

On peut ainsi construire la courbe d'utilisation (Γ) du canal considéré ; ce n'est évidemment plus une droite.

B) *Prise en compte des frottements* (pertes de charge)

L'énergie spécifique E varie en fonction de l'abscisse s suivant la loi suivante établie précédemment :

$$\frac{dE}{ds} = I - J \quad \text{avec} \quad J = \frac{Q^2}{C^2 R \Omega^2}$$

En utilisant la formule de Manning

$$J = \frac{n^2 Q^2}{R^{4/3}\,\Omega^2}$$

Cette dernière expression permet de construire par points pour une section de forme quelconque la courbe $J = f(h)$ pour un débit Q et une rugosité n donnés. Cette courbe (fig. XII.2.7.5.4.5) a l'allure d'une branche d'hyperbole et est tracée en orientant l'axe J positivement vers le bas. En opérant sur cette courbe une translation d'amplitude I dans le sens négatif de l'axe des J, on obtient la courbe $\frac{dE}{ds} = f(h)$. Cette dernière courbe coupe l'axe $0h$ en un point M_0 dont l'abscisse h_0 est la profondeur telle que

$$\frac{dE}{ds} = I - J = 0$$

$$I = J$$

h_0 est donc la *profondeur normale.*

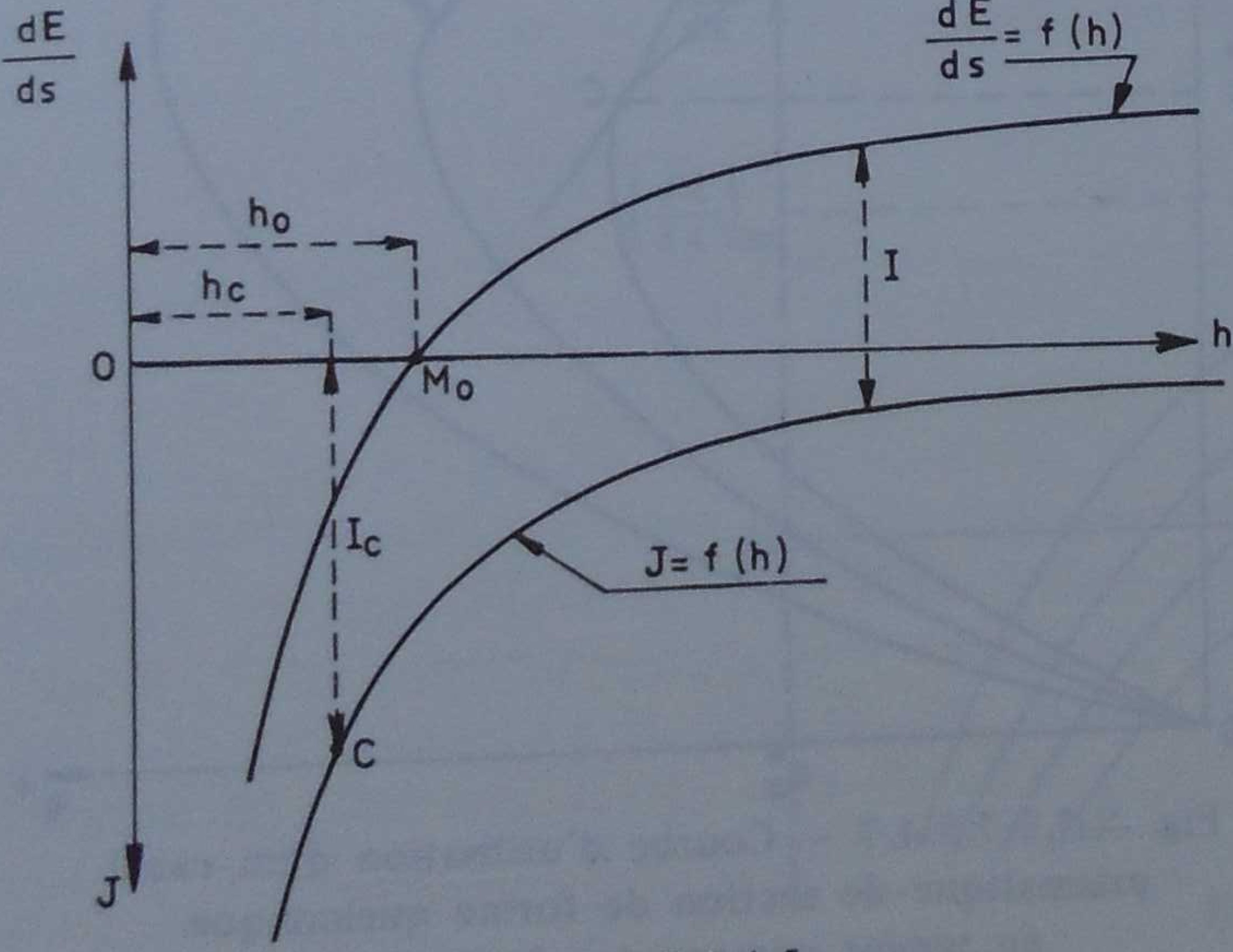


Fig. XII.2.7.5.4.5

Le point C de la courbe $J = f(h)$ d'ordonnée $J = I_c$, pente critique pour le débit considéré, a pour abscisse h_c *profondeur critique* ; en effet pour une pente $I = I_c$ la courbe $\frac{dE}{ds} = f(h)$ coupe l'axe $0h$ au point M_0 de même abscisse que C, soit $h_0 = h_c$.

La représentation graphique ainsi obtenue permet de vérifier les résultats suivants obtenus précédemment (§ XII.2.4.6) :

Pour $I < I_c$ on a $h_0 > h_c$ (cas de la figure XII.2.7.5.4.5).

Pour $I > I_c$ on a $h_0 < h_c$

Pour $I = I_c$ on a $h_0 = h_c$

Ces définitions et propriétés étant posées, nous pouvons maintenant tracer les courbes d'utilisation pour les principaux cas usuels et en déduire le calcul et le tracé de la courbe de remous.

a) *Canal prismatique de section rectangulaire*

L'énergie spécifique de référence E_0 est, comme d'habitude, celle de la section (S_0) dans laquelle on connaît un point de la courbe de remous, soit

$$E_0 = h_0 + \frac{Q^2}{2g\Omega_0^2} = h_0 + \frac{q^2}{2gh_0^2}$$

Le point représentatif est porté en M_0 sur la caractéristique principale (fig. XII.2.7.5.4.6) à l'ordonnée

$$h_0^* = \frac{h_0}{E_0}$$

Son abscisse est

$$q_0^* = \frac{Q}{lE_0\sqrt{2gE_0}}$$

Le canal étant prismatique et de section rectangulaire, la largeur l est constante quels que soient h et s ; le débit réduit $q^* = \frac{Q}{lE\sqrt{2gE}}$ est également constant.

La courbe d'utilisation du canal pour le débit Q considéré est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées et d'abscisse q_0^* passant par le point M_0.

Nous pouvons en déduire la *méthode de calcul de la courbe de remous.*

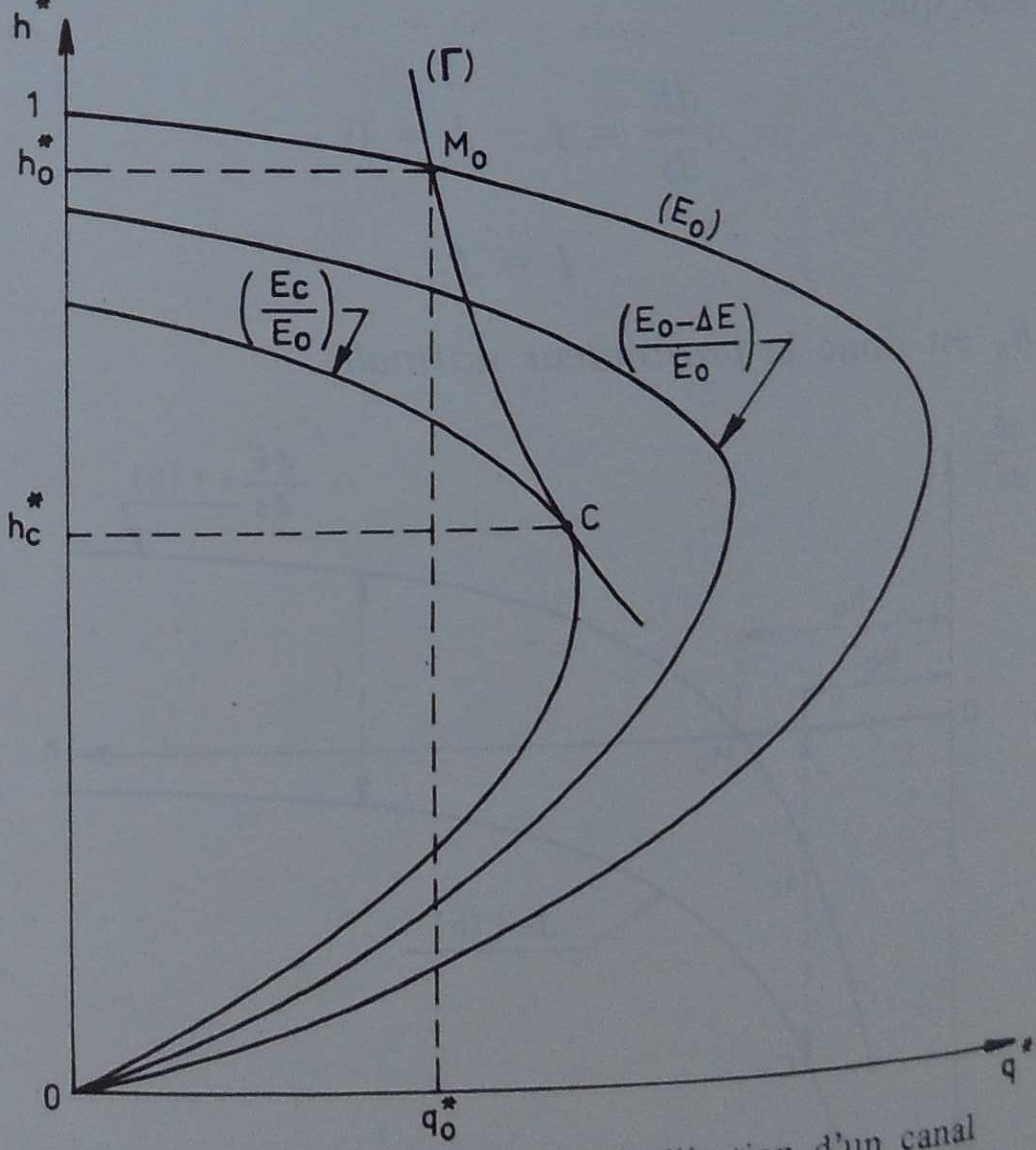


Fig. XII.2.7.5.4.6 – Courbe d'utilisation d'un canal prismatique de section rectangulaire en tenant compte des frottements

Comme pour toutes les méthodes, on précise en premier lieu les caractéristiques de la *section de repère* (S_0) : profondeur h_0, section mouillée Ω_0, débit unitaire q_0, énergie spécifique E_0. On détermine ensuite le *type de courbe de remous* par comparaison de la hauteur h_0, des hauteurs normale h_n et critique h_c et des pentes I et I_c. On peut ainsi préciser le sens de variation de la profondeur h et de l'énergie spécifique E le long de la courbe de remous cherchée qui, comme d'habitude, sera calculée à partir du point de repère M_0 de la section (S_0).

Ces considérations préalables sont toujours nécessaires et ne seront pas reprises par la suite.

On fait ensuite choix d'une variation ΔE de l'énergie spécifique, par exemple $\frac{\Delta E}{E_0} = 0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}05$. Le signe de ΔE est fonction du sens de l'évolution de l'énergie spécifique le long de la courbe de remous considérée ; dans l'exemple choisi (fig. XII.2.7.5.4.6) ΔE est négatif.

Le diagramme universel fournit les ordonnées correspondantes, par exemple h_1^* pour $\frac{\Delta E}{E_0} = 0{,}02$ (point M_1). On en déduit la profondeur h_1 dans la section (S_1), soit $h_1 = h_1^* E_0$.

Quant à l'abscisse $s_1 = s_0 + \Delta s$ de la section (S_1) elle sera donnée par

$$\Delta s = \frac{\Delta E}{(dE/ds)_m}$$

La valeur de $(dE/ds)_m$ est lue sur la courbe $\frac{dE}{ds} = f(h)$ (fig. XII.2.7.5.4.5) au droit de l'abscisse $(h_0 + h_1)/2$.

Le point M_1 de la courbe de remous est donc défini par son abscisse s_1 et sa profondeur h_1.

Le point suivant M_2 sera obtenu suivant le même processus à partir du point M_1, en conservant la même valeur ΔE de la variation d'énergie spécifique ce qui simplifie les calculs qui peuvent être effectués rapidement à la règle.

b) *Canal prismatique de section quelconque*

La courbe d'utilisation (Γ) est tracée suivant la méthode exposée au § Ab ci-dessus.

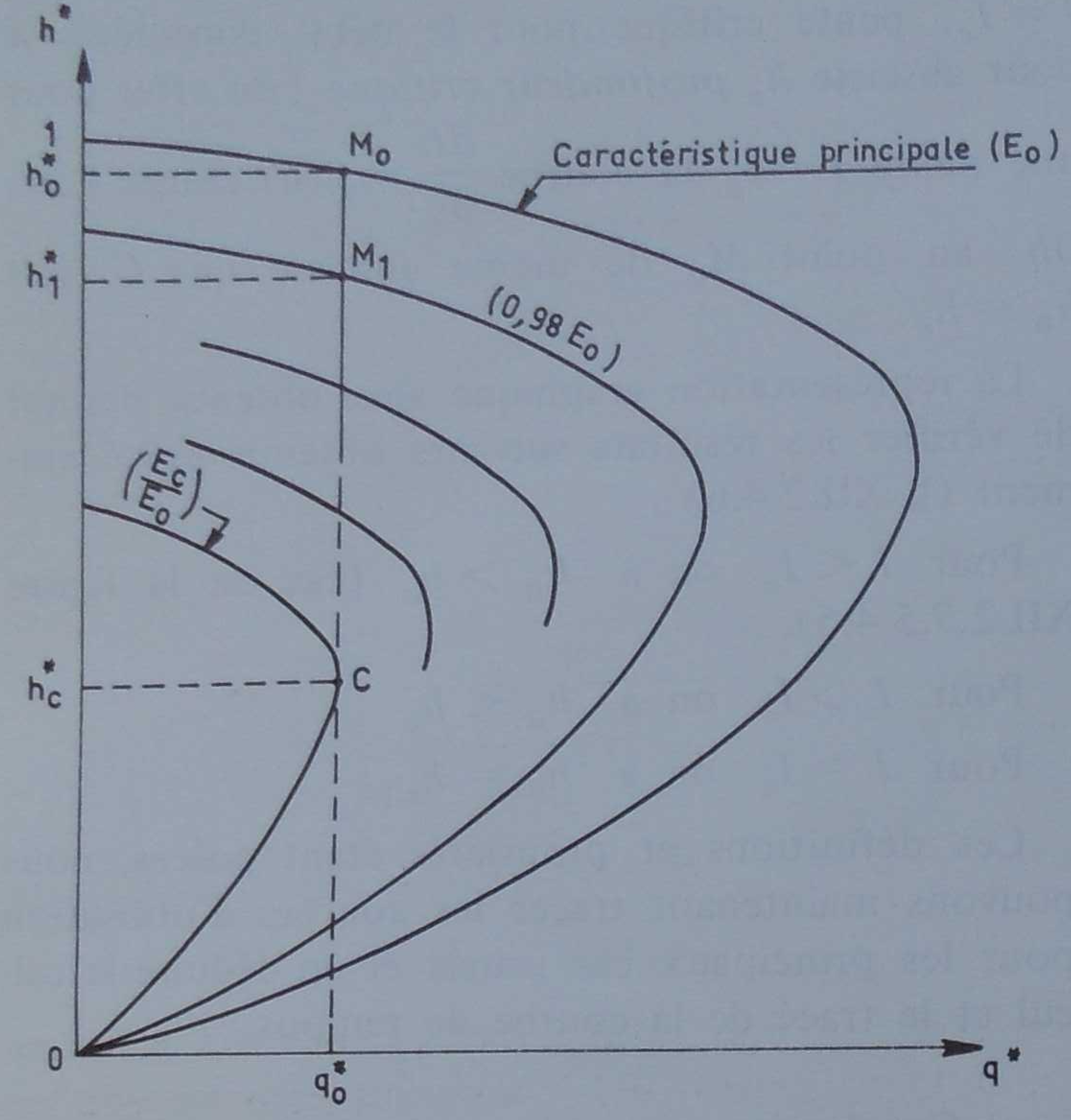


Fig. XII.2.7.5.4.7 – Courbe d'utilisation d'un canal prismatique de section de forme quelconque en tenant compte des frottements

En utilisant le point M_0 de la section de repère (S_0) on définit la caractéristique principale (fig. XII.2.7.5.4.7).

La méthode de *calcul de la courbe de remous* est la même que celle exposée précédemment pour le canal prismatique de section rectangulaire, en faisant choix d'une variation ΔE de l'énergie spécifique et en considérant les points d'intersection de la courbe d'utilisation (Γ) avec les diverses caractéristiques secondaires de paramètres $\dfrac{E_0 - \Delta E}{E_0}$, $\dfrac{E_0 - 2\Delta E}{E_0}$ etc.

Remarque sur l'existence éventuelle d'une section critique

Dans l'un ou l'autre des deux écoulements précédents la courbe d'utilisation (droite $M_0\,M_1$ ou courbe Γ) est tangente à une des caractéristiques secondaires en un point C d'ordonnée $h_c^* = \dfrac{h_c}{E_0}$; la caractéristique secondaire passant par C correspond au paramètre E_c/E_0 du réseau des caractéristiques. E_c est l'énergie spécifique critique c'est-à-dire la valeur minimale que peut atteindre l'énergie spécifique pour le débit considéré.

La profondeur critique h_c n'est réellement atteinte que si le canal est suffisamment long pour que, par suite des frottements, l'énergie spécifique puisse atteindre la valeur E_c ; la section correspondante (section critique) joue alors le rôle de section de contrôle comme nous l'avons montré.

c) *Canal non prismatique de section rectangulaire*

La largeur l est indépendante de la profondeur h mais varie avec l'abscisse s. La variation $l(s)$

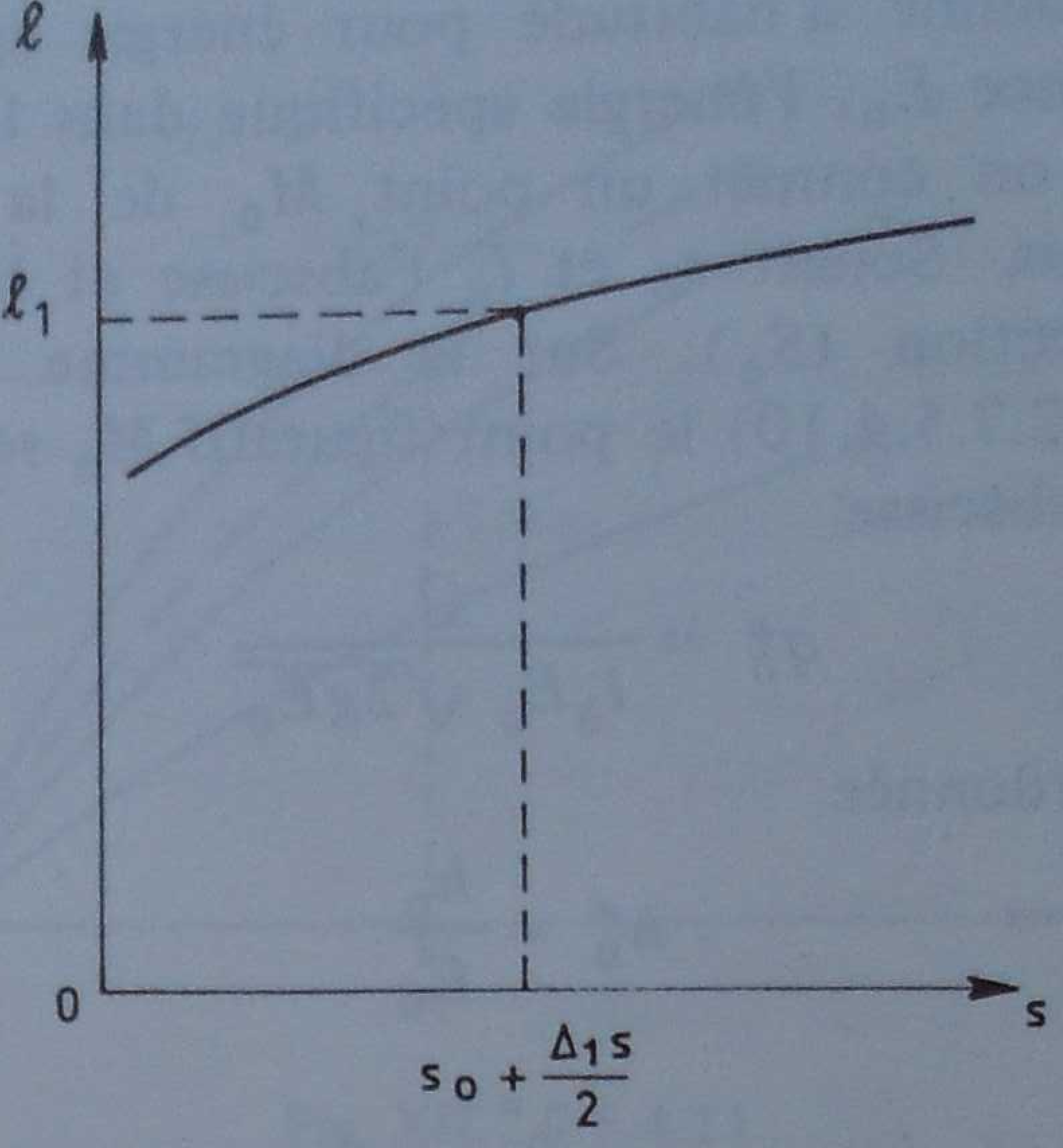


Fig. XII.2.7.5.4.8

est connue (fig. XII.2.7.5.4.8) ; elle est suffisamment lente pour que l'écoulement conserve son caractère graduellement varié.

On peut écrire comme précédemment la formule générale

$$\frac{dE}{ds} = I - J = I - \frac{n^2\,Q^2}{\Omega^2\,R^{4/3}}$$

Comme R et Ω varient non seulement avec h mais avec s, on tracera la courbe $\dfrac{dE}{ds} = I - \dfrac{n^2\,Q^2}{\Omega^2 R^{4/3}}$ en fonction de h pour diverses sections transversales d'abscisses s_1, s_2, $s_3 \ldots$ (fig. XII.2.7.5.4.9).

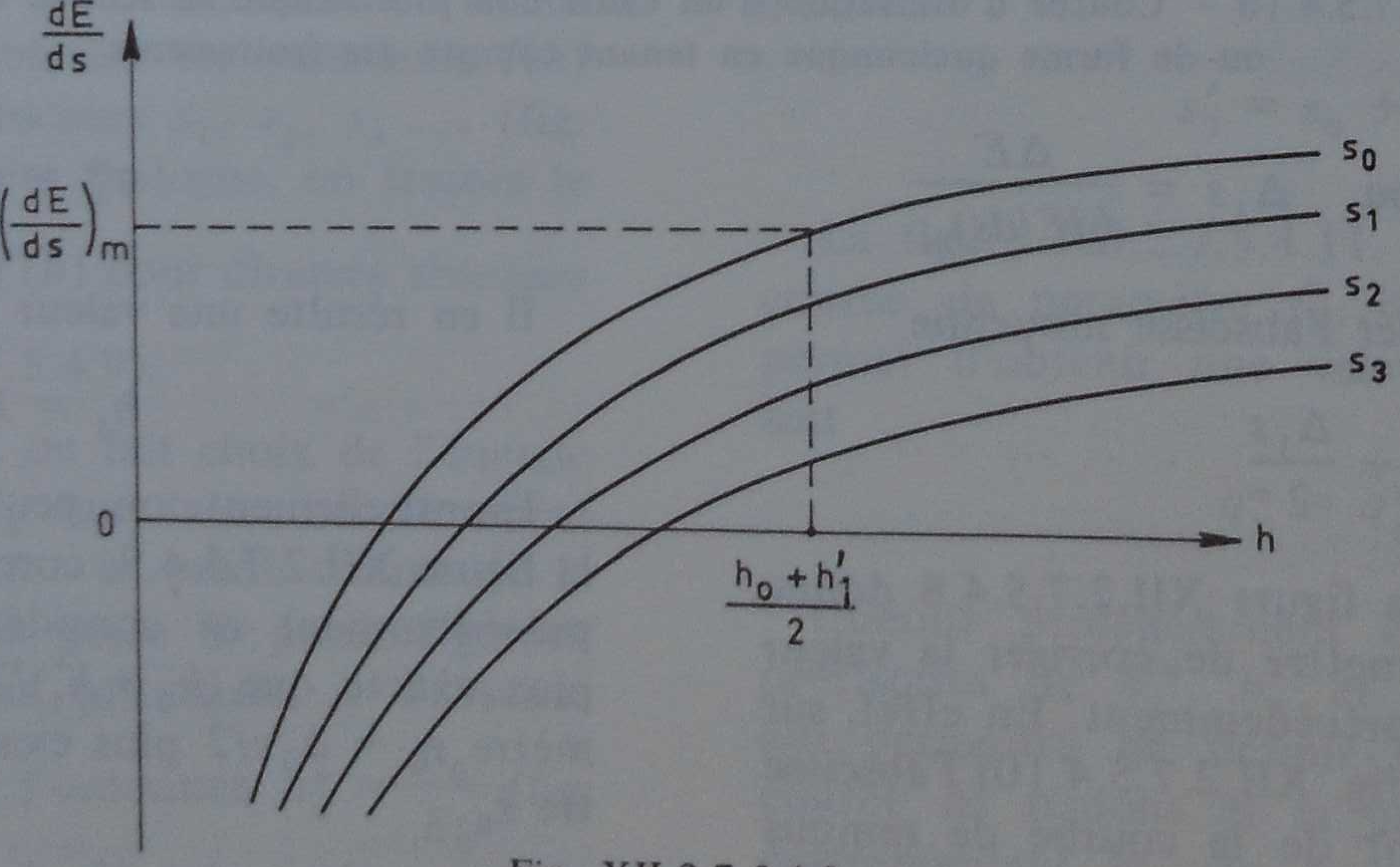


Fig. XII.2.7.5.4.9

Ces constructions préalables étant effectuées, choisissons comme d'habitude pour énergie spécifique de référence E_0, l'énergie spécifique dans la section (S_0) où on connaît un point M_0 de la courbe de remous. Soient s_0 et l_0 l'abscisse et la largeur de la section (S_0). Sur le diagramme universel (fig. XII.2.7.5.4.10) le point figuratif M_0 sera défini par son abscisse

$$q_0^* = \frac{Q}{l_0 E_0 \sqrt{2gE_0}}$$

et son ordonnée

$$h_0^* = \frac{h_0}{E_0}$$

Ce point M_0 est situé sur la caractéristique principale.

Faisons choix d'une variation ΔE (1 % ou 2 % de E_0). On lit une valeur provisoire de h_1^* soit $h_1'^*$ sur la caractéristique secondaire de paramètre $(E_0 + \Delta E)/E_0$ et sur la verticale d'abscisse q_0^* (point M_1') ; il en résulte la valeur provisoire de la profondeur h_1, soit $h_1' = h_1'^* E_0$.

On lit sur la figure XII.2.7.5.4.9 la valeur $(dE/ds)_m$ pour l'abscisse $(h_0 + h_1')/2$ et sur la courbe de paramètre s_0 ; cette valeur $(dE/ds)_m$ est portée dans l'expression

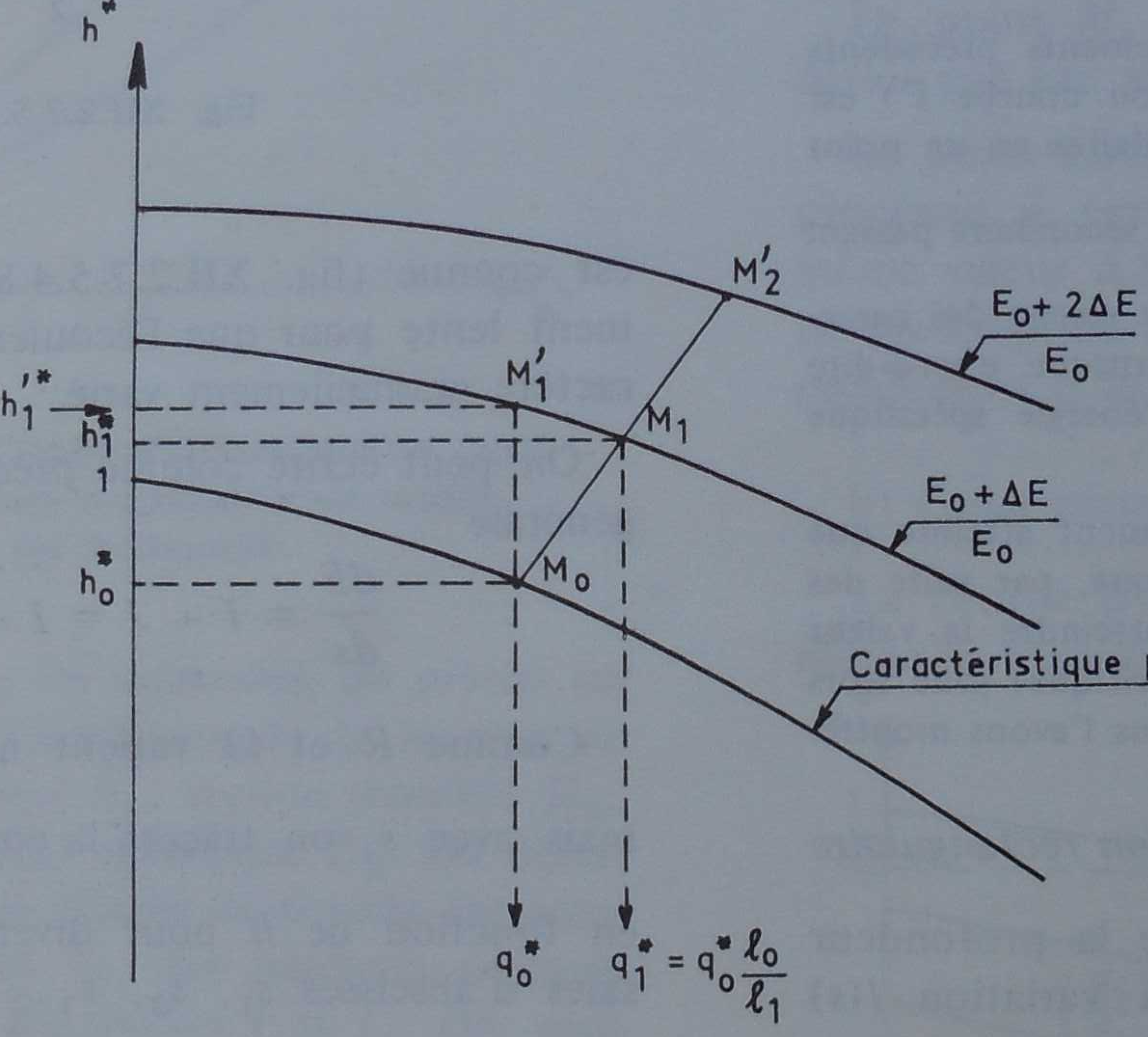


Fig. XII.2.7.5.4.10 – Courbe d'utilisation d'un canal non prismatique de section rectangulaire ou de forme quelconque en tenant compte des frottements

$$\frac{\Delta s}{\Delta E} = \left(\frac{ds}{dE}\right)_m \quad \text{ou} \quad \Delta_1 s = \frac{\Delta E}{(dE/ds)_m}$$

ce qui permet de calculer l'abscisse moyenne

$$s_0 + \frac{\Delta_1 s}{2}$$

Pour cette abscisse, la figure XII.2.7.5.4.8 donne la valeur l_1 qui va permettre de corriger la valeur provisoire $h_1'^*$ obtenue précédemment. En effet, sur le diagramme universel (fig. XII.2.7.5.4.10) l'abscisse exacte du premier point de la courbe de remous n'est plus q_0^* mais

$$q_1^* = q_0^* \frac{l_0}{l_1}$$

Il en résulte une valeur plus exacte de h_1^* d'où

$$h_1 = h_1^* E_0$$

Eventuellement on peut également, à l'aide de la figure XII.2.7.5.4.9, corriger la valeur $\Delta_1 s$ obtenue précédemment en considérant l'abscisse $(h_0 + h_1)/2$ plus exacte que $(h_0 + h_1')/2$ et la courbe de paramètre $s_0 + \Delta_1 s/2$ plus exacte que celle de paramètre s_0.

Le premier point M_1 de la courbe de remous est

alors défini par son abscisse $s_1 = s_0 + \Delta_1 s$ et sa profondeur h_1.

Il y correspond le point M_1 de la courbe d'utilisation $M_0 M_1$ (fig. XII.2.7.5.4.10).

Le point suivant sera relevé provisoirement en M'_2 à l'intersection de la droite $M_0 M_1$ prolongée et de la caractéristique secondaire de paramètre $(E_0 + 2\Delta E)/E_0$ (fig. XII.2.7.5.4.10). On effectuera les corrections nécessaires suivant la même méthode que celle exposée précédemment de manière à déterminer la position exacte du point M_2 sur la courbe d'utilisation et par conséquent les coordonnées (abscisse et profondeur) du point correspondant de la courbe de remous.

Pratiquement, à partir du deuxième ou troisième point, le placement provisoire du point M'_n sur la caractéristique secondaire de paramètre $(E_0 + n\Delta E)/E_0$ sera effectué plus facilement et avec une assez bonne approximation compte tenu de l'allure de la courbe d'utilisation résultant de la position exacte des deux ou trois premiers points ; le calcul de l'abscisse exacte de ce point M'_n, soit $q^*_n = q^*_0 \dfrac{l_0}{l_n}$, introduira une correction très faible modifiant de façon insignifiante la valeur provisoire de h_n et n'exigera généralement aucune retouche de la valeur primitive de $\Delta_n s$.

d) *Canal non prismatique de section quelconque*

La largeur moyenne $l = \Omega/h$ est ici fonction de la profondeur h et de l'abscisse s de la section transversale considérée ; il est donc nécessaire de tracer le réseau des courbes donnant les variations $l(h)$ pour chaque section d'abscisses $s_1, s_2, s_3 \ldots$ (fig. XII.2.7.5.4.11). De manière analogue, on tracera le réseau des courbes $\dfrac{dE}{ds} = f(h)$ pour diverses abscisses $s_1, s_2, s_3 \ldots$ (fig. XII.2.7.5.4.9).

Comme précédemment on fait choix de l'énergie spécifique de référence E_0 dans la section de repère $(\Omega_0, l_0, h_0, s_0)$ contenant le point connu de la courbe de remous et on place le point figuratif M_0 sur la caractéristique principale à l'abscisse $q^*_0 = \dfrac{Q}{l_0 E_0 \sqrt{2gE_0}}$ et à l'ordonnée $h^*_0 = \dfrac{h_0}{E_0}$ (fig. XII.2.7.5.4.10).

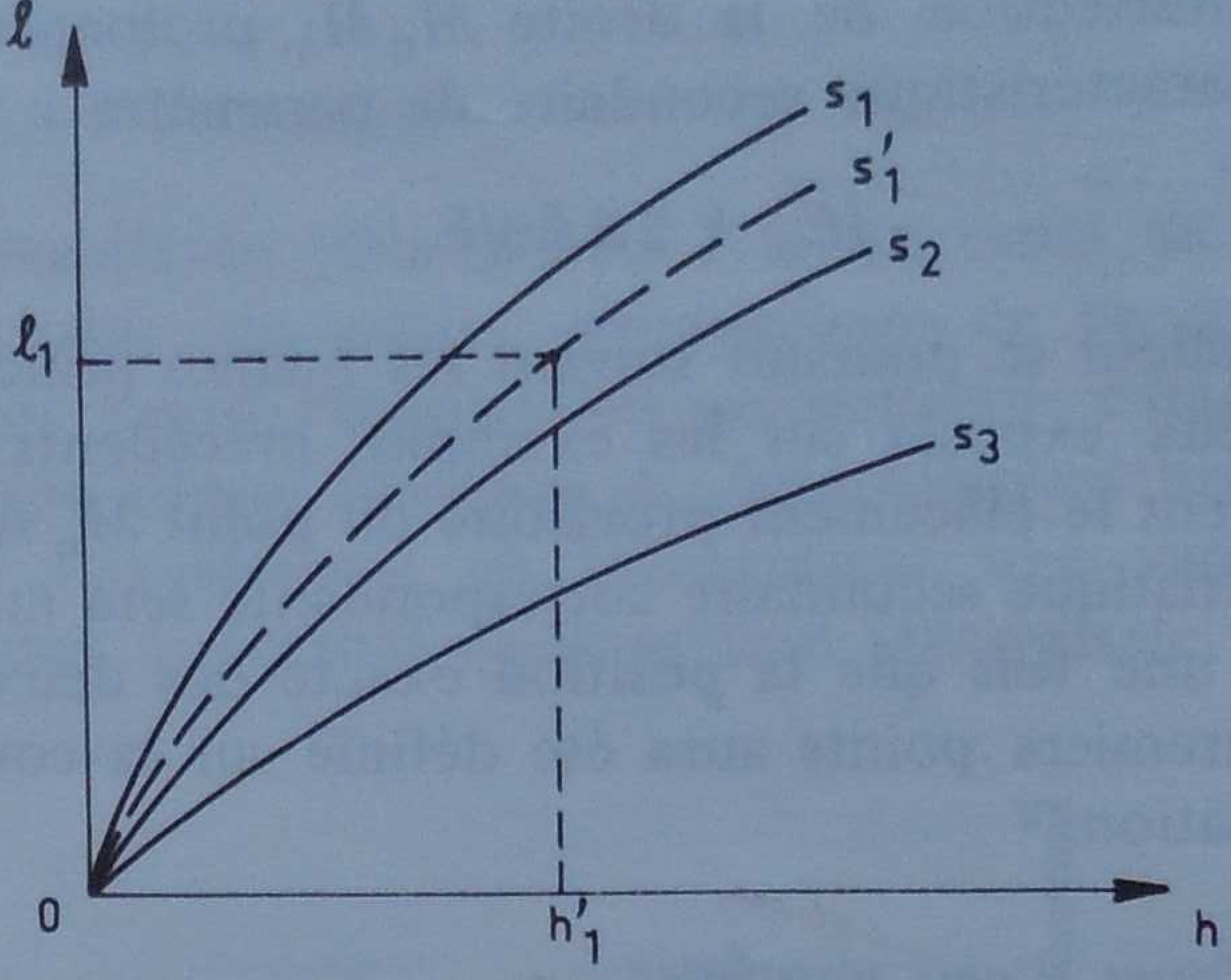


Fig. XII.2.7.5.4.11

On fait choix d'une variation ΔE (1 ou 2 % de E_0) et on lit une valeur provisoire de h^*_1, soit h'^*_1, sur la caractéristique secondaire correspondante de paramètre $(E_0 + \Delta E)/E_0$ dans une direction un peu arbitraire pour ce premier point, soit simplement sur la verticale de M_0, soit en le décalant légèrement sur la caractéristique secondaire correspondante compte tenu de la variation prévisible de l (cf. fig. XII.2.7.5.4.11) et par conséquent de q^*. On en déduit une valeur provisoire de la profondeur réelle, soit $h'_1 = h'^*_1 E_0$.

Sur la figure XII.2.7.5.4.9, à l'abscisse $(h_0 + h'_1)/2$ et sur la courbe de paramètre s_0, on relèvera $(dE/ds)_m$ qui sera portée dans l'expression

$$\Delta_1 s = \frac{\Delta E}{(dE/ds)_m}$$

d'où

$$s'_1 = s_0 + \frac{\Delta_1 s}{2}$$

La figure XII.2.7.5.4.11, pour l'abscisse h'_1 et la courbe de paramètre s'_1, donne la largeur l_1 qui permet d'obtenir une valeur plus exacte de q'^*_1, soit

$$q^*_1 = q^*_0 \frac{l_0}{l_1}$$

Comme précédemment on corrigera les valeurs provisoires de h'^*_1, h'_1 et éventuellement $\Delta_1 s$ ce qui permettra de définir le premier point de la courbe de remous et la position exacte du point correspondant M_1 sur la courbe d'utilisation (fig. XII.2.7.5.4.10).

Le point suivant M'_2 sera défini provisoirement par l'intersection de la droite M_0M_1 prolongée et de la caractéristique secondaire de paramètre

$$(E_0 + 2\Delta E)/E_0 .$$

Le calcul se poursuit suivant les mêmes principes que ceux exposés sur les exemples précédents. Ici également le placement provisoire du point M'_n sur la caractéristique secondaire correspondante sera mieux assuré une fois que la position exacte des deux ou trois premiers points aura été définie sur la courbe d'utilisation.

e) *Cours d'eau naturels*

En raison des variations continuelles du fond du lit et des formes et dimensions des sections transversales, l'évolution des caractéristiques est très irrégulière. D'autre part la loi de variation des pertes de charge et la valeur du coefficient de Chézy sont difficiles à déterminer.

On élimine les difficultés résultant de l'irrégularité du profil en long du lit en remplaçant systématiquement dans les graphiques et les calculs la profondeur h par la *cote z de la surface libre* par rapport à un plan horizontal de référence voisin du radier moyen du cours d'eau.

On remplace alors l'énergie spécifique $E = h + \frac{U^2}{2g}$ par la charge totale $H = z + \frac{U^2}{2g}$ (fig. XII.2.7.5.4.12) ou

$$H = z + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$$

d'où

$$Q = \Omega\sqrt{2g(H - z)}$$

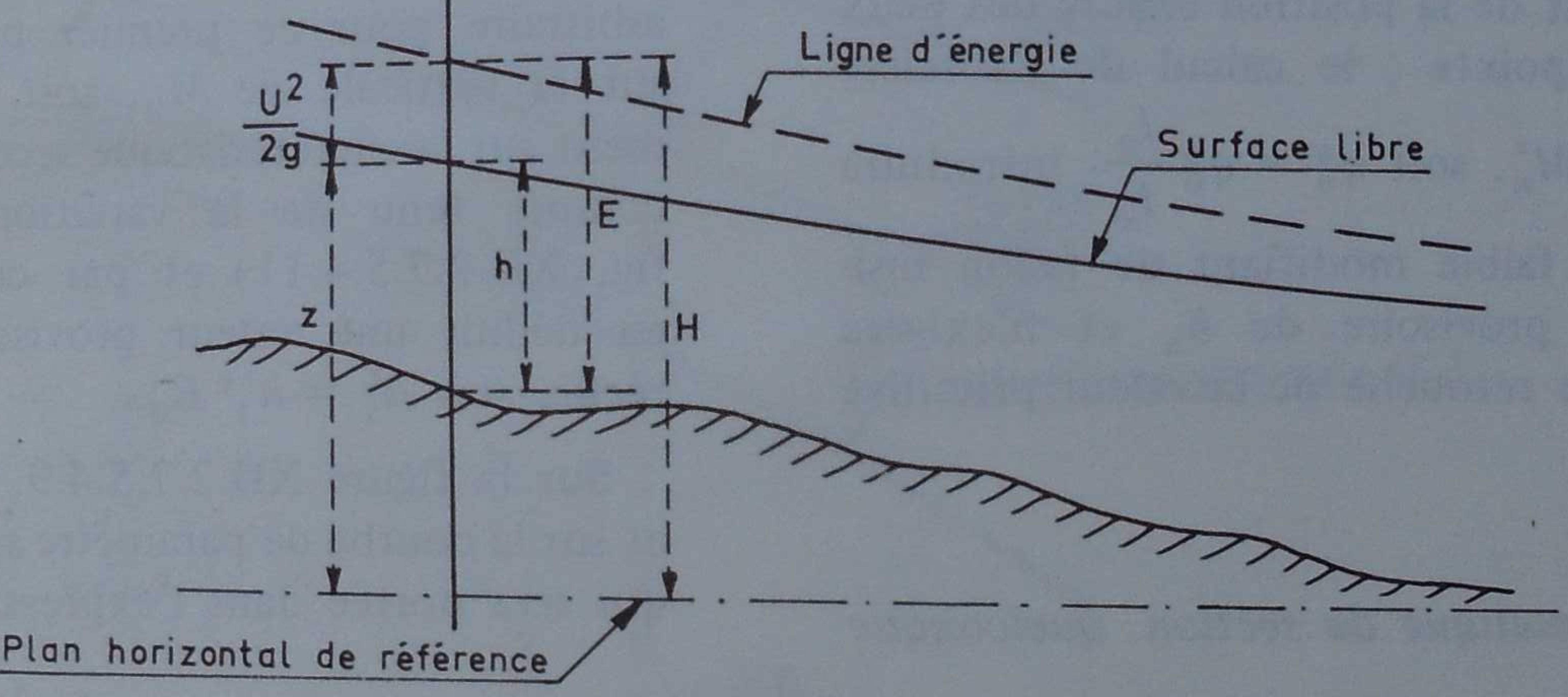


Fig. XII.2.7.5.4.12

Les variables adimensionnelles à utiliser deviennent alors :

$$z^* = \frac{z}{H} \quad \text{et} \quad q^* = \frac{Q}{lH\sqrt{2gH}}$$

avec

$$l = \frac{\Omega}{z} \text{ (largeur moyenne fictive)}$$

Il en résulte l'équation universelle

$$q^* = z^*\sqrt{1 - z^*}$$

identique à l'équation [XII.2.7.5.1.3], la cote réduite z^* remplaçant simplement la profondeur réduite h^* et la charge totale H remplaçant l'énergie spécifique E.

Le diagramme universel reste donc valable compte tenu de ces modifications des grandeurs prises en considération.

Par ailleurs l'équation $\frac{dE}{ds} = I - J = I - \frac{n^2Q^2}{\Omega^2R^{4/3}}$ sera remplacée par $\frac{dH}{ds} = -J = -\frac{n^2Q^2}{\Omega^2R^{4/3}}$, la variable z se substituant à h (fig. XII.2.7.5.4.13).

La méthode de calcul de la courbe de remous des cours d'eau naturels et le tracé correspondant de la courbe d'utilisation sur le diagramme universel seront alors conduits de la même manière que celle exposée au § d, compte tenu des modifications suivantes :

Fig. XII.2.7.5.4.13

– le réseau des courbes $l(h)$ (fig. XII.2.7.5.4.11) sera remplacé par le réseau des courbes $l(z)$ donnant, pour diverses abscisses, les variations de la largeur moyenne fictive $l = \Omega/z$ en fonction de la cote z de la surface libre ;

– le réseau des courbes $dE/ds = f(h)$ (fig. XII.2.7.5.4.9) sera remplacé par le réseau des courbes $dH/ds = \varphi(z)$ (fig. XII.2.7.5.4.13).

– le diagramme universel restera valable, l'abscisse q^* ayant pour expression $q^* = \dfrac{Q}{lH\sqrt{2gH}}$ et l'ordonnée $z^* = z/H$, le paramètre E étant remplacé par H.

Remarque : La méthode ainsi définie, comme d'ailleurs toutes les méthodes de calcul des courbes de remous sur les cours d'eau naturels, est soumise à de nombreux aléas résultant de la grande imprécision de détermination des coefficients de Chézy ou de Manning et de l'influence des irrégularités du lit qui provoquent des tourbillons ou zones d'eau morte dont l'effet est pratiquement impossible à expliciter quantitativement d'une manière correcte.

Aussi y a-t-il intérêt à utiliser, chaque fois que cela est possible, la *connaissance des diverses lignes d'eau* en l'absence de remous relevées sur des échelles limnimétriques pour différentes crues naturelles connues. Ces données remplaceront avantageusement l'évaluation de la rugosité et permettront une meilleure détermination de la courbe de remous cherchée.

Nous renvoyons à l'ouvrage de Silber pour l'exposé de la méthode utilisable dans ce cas.

XII.2.8. Intumescences infinitésimales

XII.2.8.1 *Définition*

Considérons (fig. XII.2.8.1.1) un canal de pente négligeable, de section rectangulaire de profondeur h dans lequel l'écoulement est uniforme caractérisé par une vitesse moyenne U. Interrompons brusquement l'écoulement en introduisant une vanne V obturant la totalité de la section transversale.

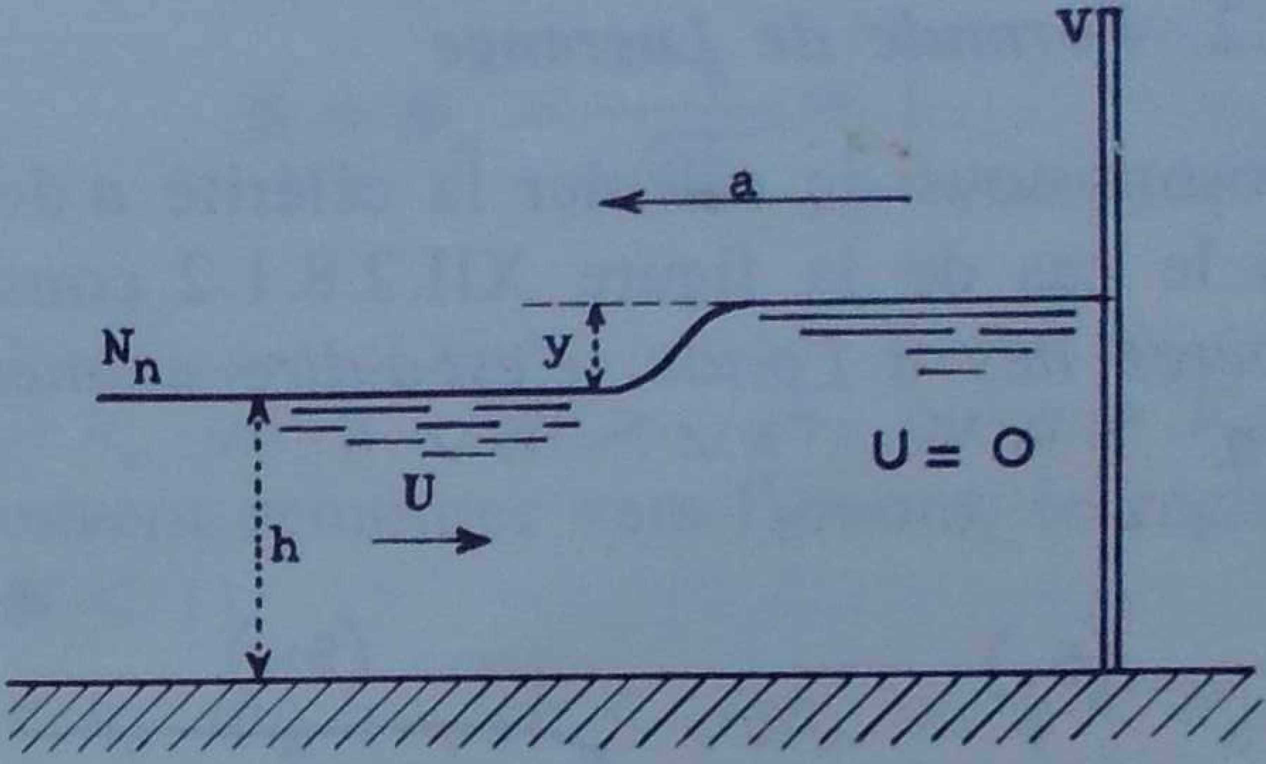


Fig. XII.2.8.1.1

Les conditions sont les mêmes que celles concernant la production d'un coup de bélier de fermeture brusque dans une canalisation en charge avec toutefois la différence résultant du fait qu'ici l'eau n'est pas emprisonnée dans une conduite et qu'en raison de l'existence d'une surface libre la partie du liquide immobilisée par la fermeture de la vanne va s'élever au-dessus du niveau normal N_n. Il apparaît une *intumescence* de hauteur y qui se propage vers l'amont avec une *célérité a*.

Le front raide de l'onde divise l'écoulement en deux parties :

– à l'amont, la vitesse est encore U et la profondeur h ;

– à l'aval, l'eau est immobile et il apparaît une surélévation y.

On a provoqué la production d'une onde de changement de régime ; le régime d'écoulement est permanent avant et après le passage de l'onde.

On observe un phénomène analogue en considérant un canal au repos de profondeur h et en injectant brusquement à une extrémité un débit constant correspondant à une vitesse U (fig. XII.2.8.1.2) (onde de crue dans une rivière).

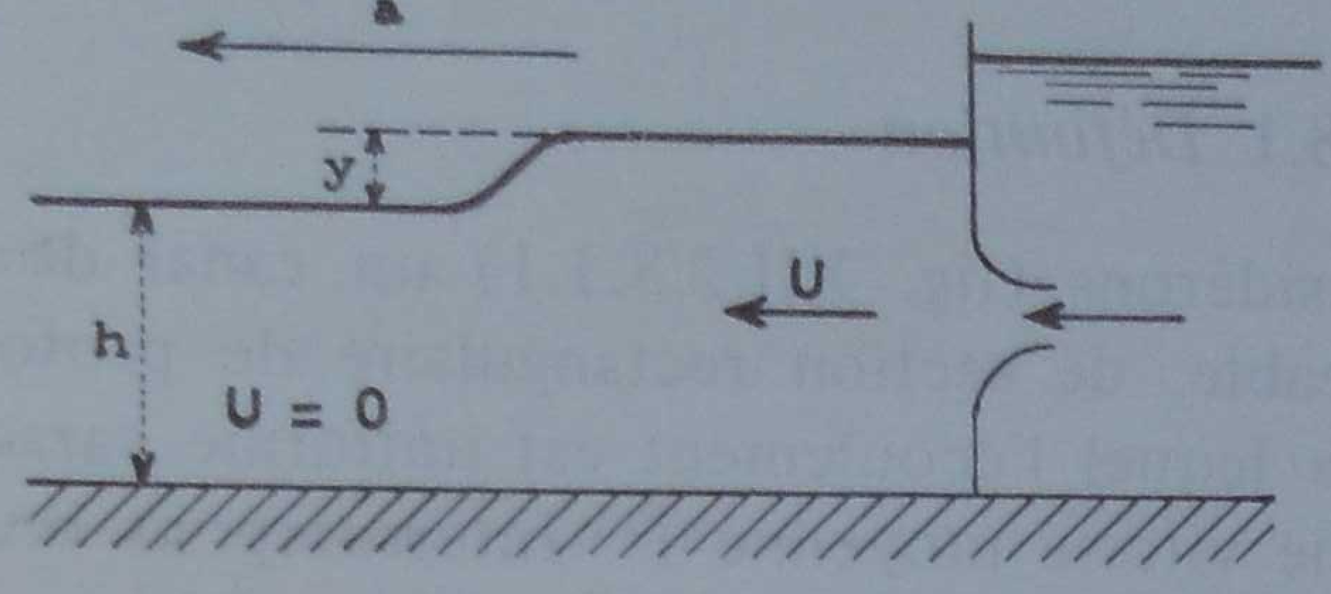


Fig. XII.2.8.1.2

XII.2.8.2. *Formule de Lagrange*

Proposons-nous de calculer la célérité a de l'onde et dans le cas de la figure XII.2.8.1.2 considérons des *repères liés à l'onde, c'est-à-dire animés de la vitesse a.*

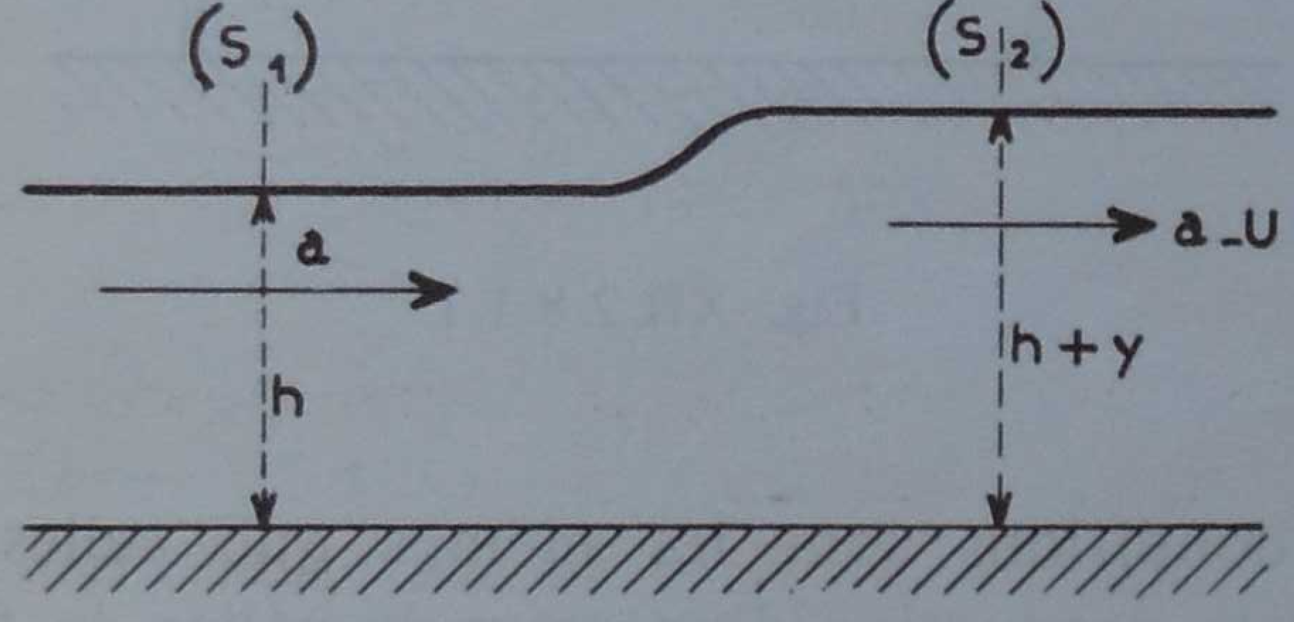


Fig. XII.2.8.2

Par rapport à ces repères l'onde est immobile et l'ensemble de l'écoulement est permanent et caractérisé par des vitesses a à gauche et $a - U$ à droite (fig. XII.2.8.2).

Appliquons à cet écoulement permanent l'équation de continuité et le théorème d'Euler en raisonnant sur une largeur unitaire du canal.

Equation de continuité : Elle exprime l'égalité des débits par unité de largeur dans les sections (S_1) et (S_2), soit :

$$ah = (a - U)(h + y)$$
$$ay = U(y + h)$$

Divisons par ah :

$$\frac{y}{h} = \frac{U}{a}\left(\frac{y}{h} + 1\right)$$

Supposons y très petit par rapport à h, soit y/h négligeable devant l'unité. On a affaire à ce qu'on appelle une *onde infinitésimale.*

Il vient alors :

$$\frac{y}{h} = \frac{U}{a} \qquad \text{[XII.2.8.1]}$$

et on aura donc également $\frac{U}{a} + 1 \simeq 1$.

Théorème d'Euler : En projection sur le fond du canal supposé de pente négligeable ce théorème s'écrit, par unité de largeur du canal :

$$\frac{\bar{\omega}}{g}\, q\,(a - U) - \frac{\bar{\omega}}{g}\, qa = \bar{\omega}\,\frac{h^2}{2} - \bar{\omega}\,\frac{(h + y)^2}{2}$$

avec $q = ah$ à gauche du front d'onde

et $\quad q = (a - U)(h + y)$ à droite du front d'onde

ces deux valeurs étant égales (équation de continuité).

En remplaçant q par sa valeur ah et en simplifiant, il vient :

$$\frac{ahU}{g} = y\,\frac{h}{2}\left(\frac{y}{h} + 2\right)$$

Compte tenu de l'approximation indiquée précédemment :

$$\frac{y}{h} + 2 \simeq 2$$

d'où

$$y = \frac{aU}{g} \qquad \text{[XII.2.8.2]}$$

Cette formule qui donne la hauteur de l'onde infinitésimale est analogue à celle de Joukowski-Allievi qui donne la surpression du coup de bélier de fermeture rapide : $\xi = aU_0/g$.

En éliminant y entre les relations [XII.2.8.1 et 2], il vient :

$$\boxed{a = \sqrt{gh}} \qquad \text{[XII.2.8.3]}$$

C'est la formule établie par *Lagrange* et qui donne la célérité d'une onde infiniment petite dans une eau au repos de profondeur h.

XII.2.8.3. *Célérité de l'onde et vitesse critique*

Par rapport aux axes mobiles, l'énergie spécifique et l'impulsion totale par unité de largeur du canal s'écrivent respectivement :

$$E = h + \frac{a^2}{2g}$$

$$f = \frac{a^2 h}{g} + \frac{h^2}{2}$$

Au régime critique ces deux fonctions passent en même temps par leur valeur minimale et la vitesse a prend la valeur $a = \sqrt{gh}$.

La célérité a de l'onde infinitésimale est donc égale à la vitesse critique du courant liquide de profondeur h.

Nous vérifions ici cette propriété annoncée plus haut (§ XII.2.4.3).

XII.2.8.4. *Analogie avec le coup de bélier*

Nous avons déjà souligné l'analogie de l'onde infinitésimale dans un écoulement à surface libre avec l'onde de surpression due au coup de bélier dans une canalisation en charge.

La hauteur y de l'onde superficielle joue le même rôle que la surpression ξ du coup de bélier. Du point de vue mathématique l'équation qui régit les deux phénomènes est la même, c'est l'équation des cordes vibrantes. Comme pour les ondes de pression du coup de bélier les ondes superficielles se réfléchissent aux extrémités avec changement de signe.

Du point de vue physique les phénomènes sont toutefois différents : dans le coup de bélier la surpression ξ peut être importante alors qu'ici nous avons supposé y infiniment petit.

Dans une canalisation en charge la compressibilité du liquide et la déformation des parois du tuyau interviennent alors qu'ici l'eau reste incompressible par suite de l'existence d'une surface libre déformable qui donne naissance à une intumescence qui est une onde de gravité régie par la pesanteur.

De cette différence de nature physique des deux phénomènes résulte une différence dans les ordres de grandeur de la célérité a. Pour l'onde élastique du coup de bélier, a est de l'ordre de 1.000 m/s ; pour l'onde de gravité que constitue l'intumescence, a est beaucoup plus faible : pour $h = 1$ m, $a = \sqrt{gh} = \sqrt{9{,}81} = 3{,}13$ m/s..

Enfin la célérité a de l'onde du coup de bélier est donnée par la formule d'Allievi et est fonction du module d'élasticité E des parois de la canalisation et de la compressibilité K du liquide ; a est donc indépendant de la pression : les ondes d'élasticité se propagent sans se déformer. Ici au contraire a est fonction de la profondeur h et l'intumescence de hauteur finie pourra se déformer.

XII.2.8.5. *Intumescence et onde stationnaire ou "ressaut"*

Si au lieu d'être initialement au repos l'eau du canal était animée d'un mouvement uniforme de vitesse V_0, la célérité relative des ondes par rapport aux parois du canal serait évidemment $V_0 \pm \sqrt{gh}$. Elle serait nulle pour $V_0 = \sqrt{gh}$ ce qui correspond au *régime critique* ; la profondeur h prend la valeur remarquable $h_c = V_0^2/g$ (profondeur critique) et le nombre de Froude est alors égal à

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_c = \frac{V_0}{\sqrt{gh_c}} = 1 .$$

Si $h > h_c$ on a $\sqrt{gh} > \sqrt{gh_c}$ ou $a > V_0$: les ondes peuvent remonter vers l'amont, le régime est fluvial ($\mathcal{F} < 1$).

Si $h < h_c$ on a $\sqrt{gh} < \sqrt{gh_c}$ ou $a < V_0$: les ondes ne peuvent remonter vers l'amont, le régime est torrentiel ($\mathcal{F} > 1$).

Si l'onde remonte avec la même vitesse que le courant, elle est stationnaire : c'est le *ressaut* qui se produit quand on passe brusquement du régime torrentiel au régime fluvial, la surface libre franchissant le niveau critique de bas en haut sur une courte distance.

En raison de l'importance pratique de ce phénomène nous lui consacrerons un chapitre spécial.

XII.2.9. Le ressaut hydraulique stationnaire

XII.2.9.1. *Définition ; description ; profondeurs conjuguées*

Comme nous venons de le montrer le ressaut hydraulique stationnaire, plus simplement appelé "ressaut", est une brusque surélévation de la surface libre d'un courant permanent occupant une position fixe dans un lit uniforme. Ce phénomène se produit lorsqu'un régime torrentiel devient fluvial sur une courte distance, les surfaces libres se situant nécessairement de part et d'autre du niveau critique.

La figure XII.2.9.1.1 montre un ressaut classique en canal horizontal ou quasi tel.

Si l'exhaussement de la ligne d'eau est suffisamment important on observe un ou plusieurs *rouleaux*

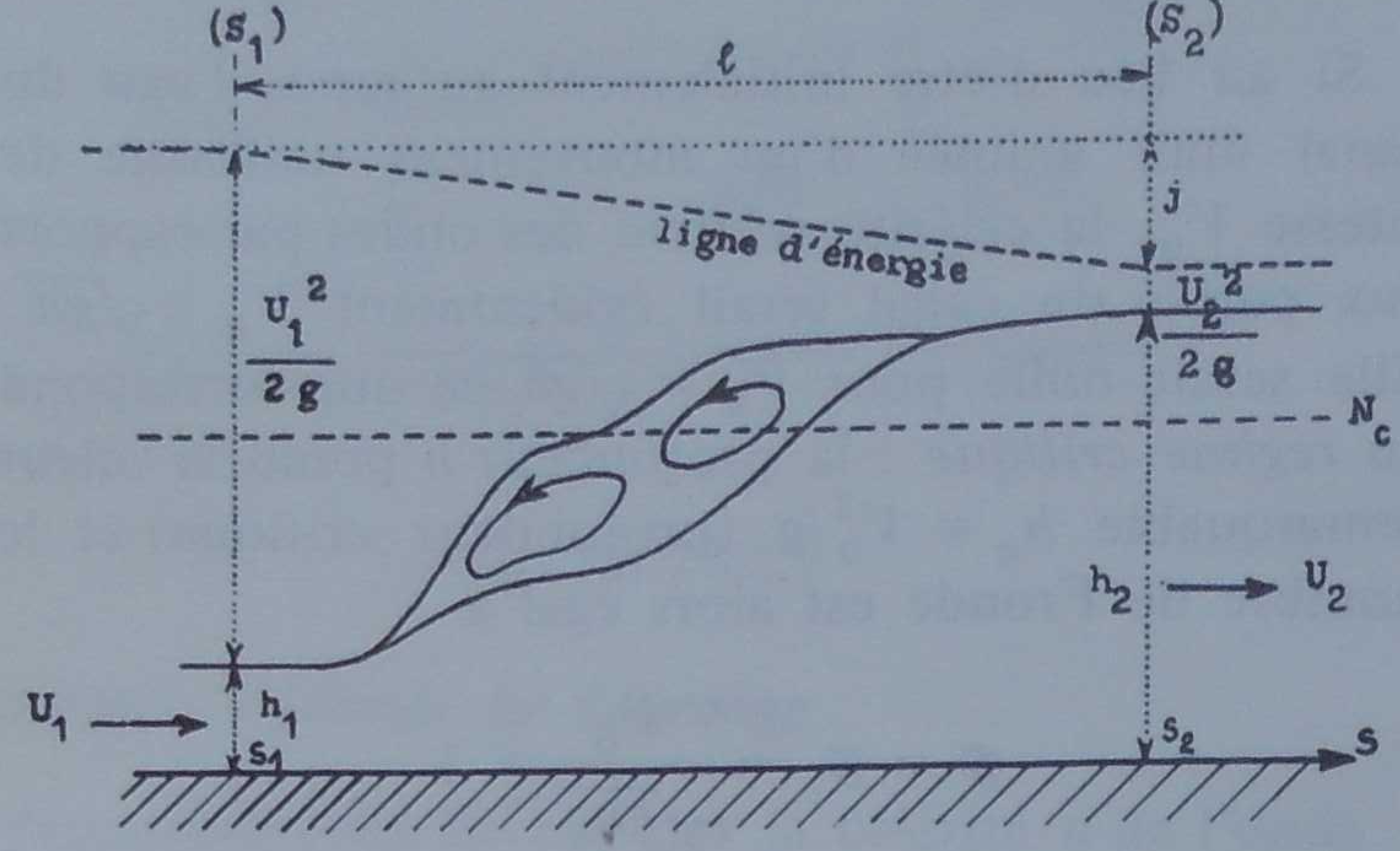


Fig. XII.2.9.1.1 – Ressaut en canal horizontal

plus ou moins instables avec déferlement et turbulence importante qui entraîne une dissipation d'énergie non négligeable.

Choisissons deux sections (S_1) et (S_2) situées respectivement :

(S_1) à l'amont du ressaut (régime torrentiel),

(S_2) à l'aval du ressaut (régime fluvial).

Nous supposerons que dans chacune de ces sections les filets liquides sont parallèles.

On désignera par :

– *Profondeurs conjuguées* : les profondeurs h_1 et h_2 dans ces deux sections (S_1) et (S_2).

– *Hauteur du ressaut* : la différence $h_2 - h_1$.

– *Longueur du ressaut* : la distance $l = s_2 - s_1$ des sections (S_1) et (S_2).

Plusieurs formules empiriques donnent la valeur de l en fonction des autres éléments hydrauliques du ressaut. En canal de section rectangulaire, voici quelques-unes des relations proposées :

$$l = 5\,h_2$$

$$l = 9\,h_1\left(\frac{U_1}{\sqrt{g h_1}} - 1{,}57\right) \quad \text{(en } m \text{ et } s\text{)}$$

$$l = 6\,(h_2 - h_1) \quad \text{(formule proposée par Smetana)}$$

En canal de section trapézique, Hsing et Posey ont proposé la formule suivante (1938) :

$$l = 5\,h_2\left(1 + \frac{4\sqrt{l_2 - l_1}}{l_1}\right)$$

l_1 = largeur superficielle à l'amont

l_2 = largeur superficielle à l'aval.

Cette formule est valable pour des pentes de talus comprises entre 0,5 et 2.

– *Perte de charge due au ressaut* : l'abaissement j de la ligne d'énergie entre (S_1) et (S_2).

Ressaut ondulé : C'est une forme dégénérée du ressaut que l'on observe fréquemment sur les cours d'eau et qui se produit lorsque les profondeurs conjuguées sont voisines de la profondeur critique h_c (fig. XII.2.9.1.2).

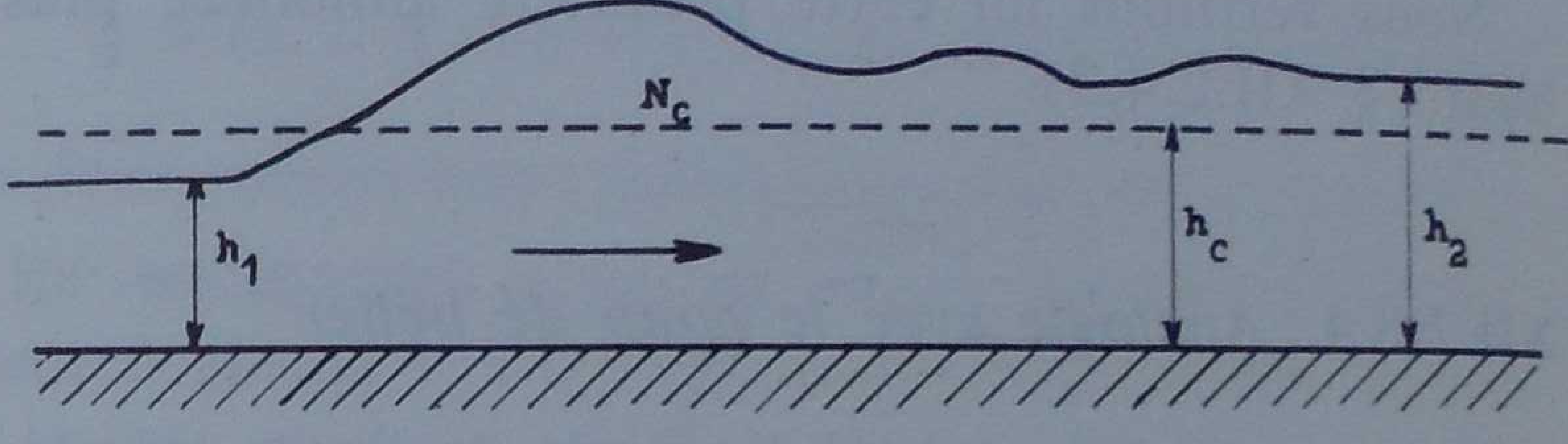


Fig. XII.2.9.1.2 – Ressaut ondulé

Les rouleaux superficiels de déferlement font place à des ondulations de surface qui s'amortissent progressivement à l'aval ; ces ondulations résultent de l'instabilité du régime critique déjà signalée précédemment (§ XII.2.4.1).

XII.2.9.2. *Relation fondamentale entre les profondeurs conjuguées*

Le problème classique posé par le ressaut est de calculer l'une des profondeurs conjuguées en fonction de l'autre pour un débit et un canal donnés.

Ici le théorème de Bernoulli ne serait pas d'un grand secours pour établir cette relation, en raison de l'existence d'une perte de charge importante entre les deux sections (S_1) et (S_2), perte de charge qu'on ne connaît pas. Par contre le *théorème d'Euler* qui ne fait intervenir que les forces extérieures et qui ne met pas en cause les pertes de charge dues à la turbulence et aux remous intérieurs à la masse liquide, sera ici particulièrement précieux. En somme, de ce point de vue, le ressaut hydraulique est analogue à un élargissement brusque et, comme lui, est justiciable du théorème d'Euler.

Effectivement le résultat classique dû à Bélanger s'obtiendra en appliquant le *théorème d'Euler* à la

masse de liquide contenue entre les sections (S_1) et (S_2) et en supposant :

– que le fond du canal est horizontal ou très faiblement incliné de sorte que la projection du poids sur un axe parallèle au fond est nulle ou négligeable.

– que les frottements sur les parois et le fond du canal le long de la faible distance séparant (S_1) et (S_2) sont négligeables par rapport à la perte de charge due à la turbulence créée par le ressaut (cette dernière perte de charge j est en effet relativement considérable comme nous le montrerons plus loin),

– que les vitesses des différents filets liquides dans chacune des sections (S_1) et (S_2) sont parallèles et égales à la vitesse moyenne U dans la section considérée (ce qui revient à supposer que le coefficient de quantité de mouvement β est égal à l'unité).

Nous étudierons successivement les deux cas suivants :

– Section de forme quelconque,
– Section de forme rectangulaire.

XII.2.9.2.1. *Section de forme quelconque*

Compte tenu des hypothèses simplificatrices précisées ci-dessus, le théorème d'Euler conduit à la relation suivante, déjà établie au § XII.2.2.2 :

$$\frac{Q^2}{g\Omega_1} + a_1\Omega_1 = \frac{Q^2}{g\Omega_2} + a_2\Omega_2 \qquad [XII.2.2.2.5]$$

ce qui revient à dire que la fonction F (impulsion totale)

$$F = \frac{Q^2}{g\Omega} + a\Omega \qquad [XII.2.2.3]$$

conserve la même valeur de part et d'autre du ressaut (rappelons que a représente la profondeur du centre de gravité de la section).

Si on se reporte à la courbe (F) tracée pour le débit considéré (fig. XII.2.9.2), cette propriété se traduit par le fait qu'une sécante parallèle à l'axe des profondeurs coupe la courbe en deux points dont les abscisses mesurent les *profondeurs conjuguées* h_1 et h_2.

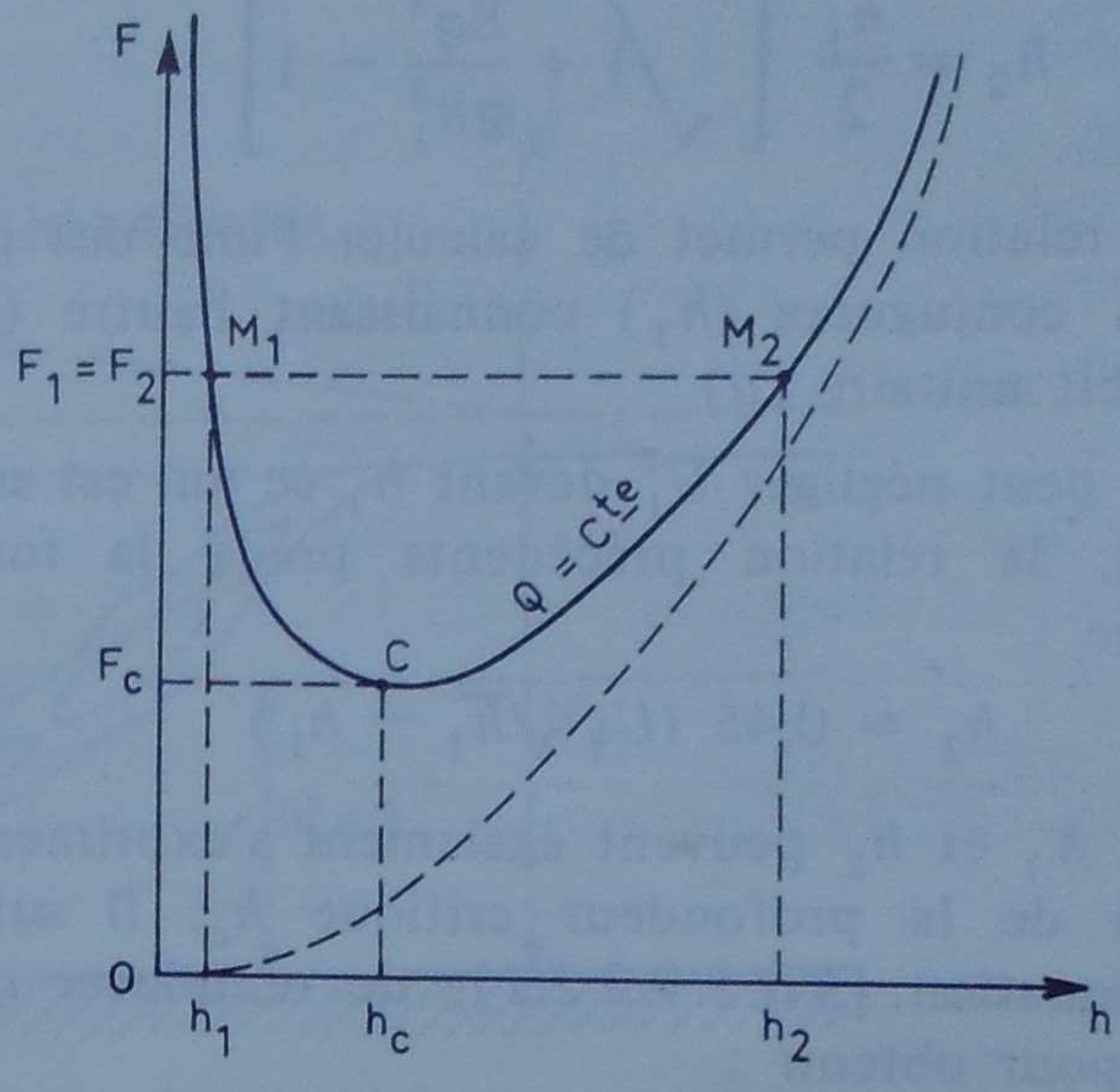


Fig. XII.2.9.2 – Courbe (F) et profondeurs conjuguées

On peut ainsi déterminer graphiquement l'une des deux profondeurs conjuguées connaissant l'autre. On constate en particulier que deux profondeurs conjuguées varient toujours en sens inverse l'une de l'autre.

Cette méthode graphique de détermination des profondeurs conjuguées est surtout intéressante lorsqu'on recherche plusieurs couples de profondeurs conjuguées pour un même débit (par exemple quand on recherche la position du ressaut comme nous le ferons plus loin). Si on ne désire calculer qu'une seule paire de ces profondeurs ou plusieurs paires avec des débits différents il est souvent plus simple de résoudre l'équation [*XII.2.2.2.5*] par approximations successives.

XII.2.9.2.2. *Section rectangulaire*

Comme nous l'avons démontré précédemment (§ XII.2.2.2) dans le cas d'un canal de section rectangulaire de débit unitaire q, l'équation [*XII.2.2.2.5*] prend la forme suivante :

$$\frac{q^2}{gh_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{q^2}{gh_2} + \frac{h_2^2}{2} \qquad [XII.2.2.2.6]$$

ou, après réduction et simplification par $h_1 - h_2$:

$$h_2^2 + h_1 h_2 - \frac{2q^2}{gh_1} = 0 \qquad [XII.2.9.2.2.1]$$

Seule la racine positive a un sens physique, soit :

$$h_2 = \frac{h_1}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{8q^2}{gh_1^3}} - 1\right]$$

Cette relation permet de calculer l'une des profondeurs conjuguées (h_2) connaissant l'autre (h_1) et le débit unitaire (q).

Si on peut négliger U_1^2 devant h_1 ce qui est assez fréquent, la relation précédente prend la forme simplifiée :

$$h_2 \simeq 0{,}45\ (U_1 \sqrt{h_1} - h_1)$$

Enfin h_1 et h_2 peuvent également s'exprimer en fonction de la profondeur critique h_c. Il suffit, dans l'équation [*XII.2.9.2.2.1*], de remplacer q^2/g par h_c^3 pour obtenir :

$$h_1 h_2 \frac{h_2 + h_1}{2} = h_c^3 \qquad [XII.2.9.2.2.2]$$

Cette relation, symétrique en h_1 et h_2, confirme les propriétés énoncées précédemment pour une section quelconque : h_1 et h_2 sont toujours situées de part et d'autre de h_c c'est-à-dire que le ressaut est situé de part et d'autre de la profondeur critique. En réalité seule la solution $h_1 < h_c < h_2$ a une signification physique car il n'existe pas de ressaut stationnaire d'abaissement, tout au moins dans l'hypothèse d'un lit uniforme.

XII.2.9.3. *Perte de charge due au ressaut*

Suivant la définition générale donnée au § XII.2.2.1, la perte de charge j sera mesurée par l'abaissement de la ligne d'énergie entre les sections (S_1) et (S_2), soit (avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) :

$$j = H_1 - H_2 = \left(z_1 + \frac{U_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{U_2^2}{2g}\right)$$

z_1 et z_2 étant les cotes des surfaces libres en (S_1) et (S_2)

U_1 et U_2 étant les vitesses moyennes dans (S_1) et (S_2).

Pour un canal supposé horizontal entre (S_1) et (S_2) la perte de charge j peut encore s'écrire :

$$j = E_1 - E_2,$$

ce qui montre que, dans le cas général d'un canal quasi horizontal et de section quelconque, la perte de charge due au ressaut sera mesurée sur la courbe (E) par la différence des ordonnées des points d'abscisses h_1 et h_2 (fig. XII.2.9.3).

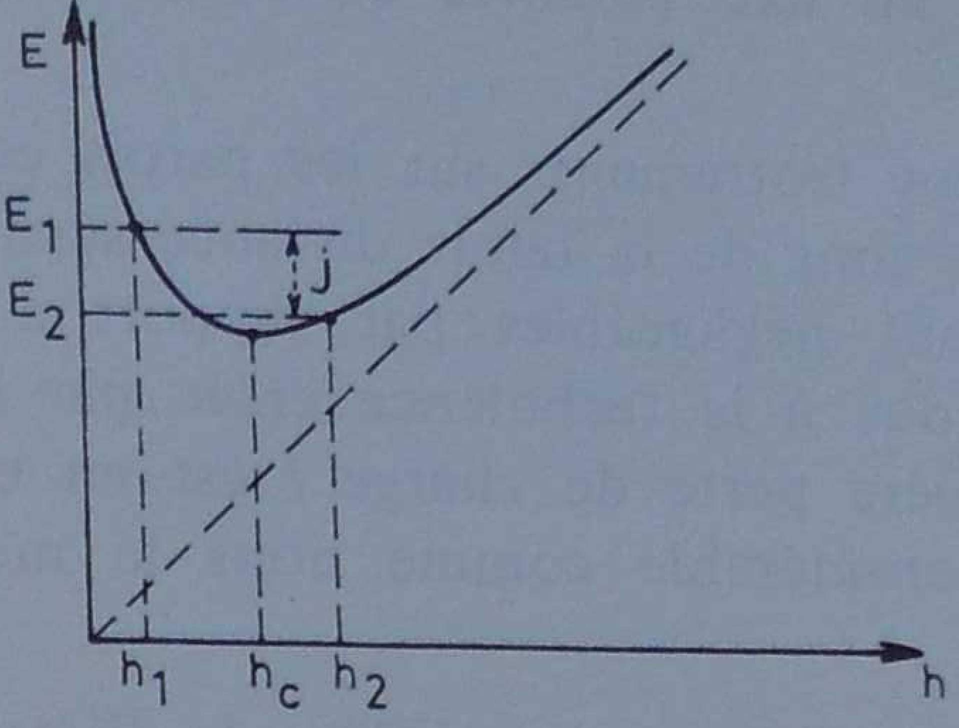


Fig. XII.2.9.3 – Courbe (E) et perte de charge due au ressaut

Pour un canal horizontal de section rectangulaire l'expression de j devient :

$$j = \left(h_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2}\right) - \left(h_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2}\right)$$

En remplaçant $q^2/2g$ par sa valeur tirée de [*XII.2.9.2.2.1*] on obtient, tous calculs faits, l'expression classique de la *perte de charge due au ressaut en canal rectangulaire de pente négligeable* :

$$j = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \qquad [XII.2.9.3]$$

XII.2.9.4. *Utilisation des courbes (E') et (f') en coordonnées réduites (cas d'une section rectangulaire)*

L'étude du ressaut en canal uniforme de section rectangulaire et de pente négligeable fournit un bon exemple d'utilisation des courbes (E') et (f') en coordonnées réduites que nous avons définies précédemment (§ XII.2.4.5).

A partir de la valeur réduite de la profondeur amont, soit $h_1' = h_1/h_c$, on obtient les points E_1' et f_1' (fig. XII.2.9.4).

On trace l'horizontale $f_1' f_2'$ et la verticale $f_2' E_2'$ et on lit sur la figure les résultats suivants :

– hauteur réduite conjuguée : h_2'

(d'où la hauteur réelle : $h_2 = h_2' h_c$) ;

– perte de charge "réduite" : $j' = E_1' - E_2'$

(d'où la perte de charge réelle : $j = j' h_c$).

On voit clairement sur la figure XII.2.9.4 que j' (c'est-à-dire j) décroît vite avec la hauteur du ressaut $h_2 - h_1$

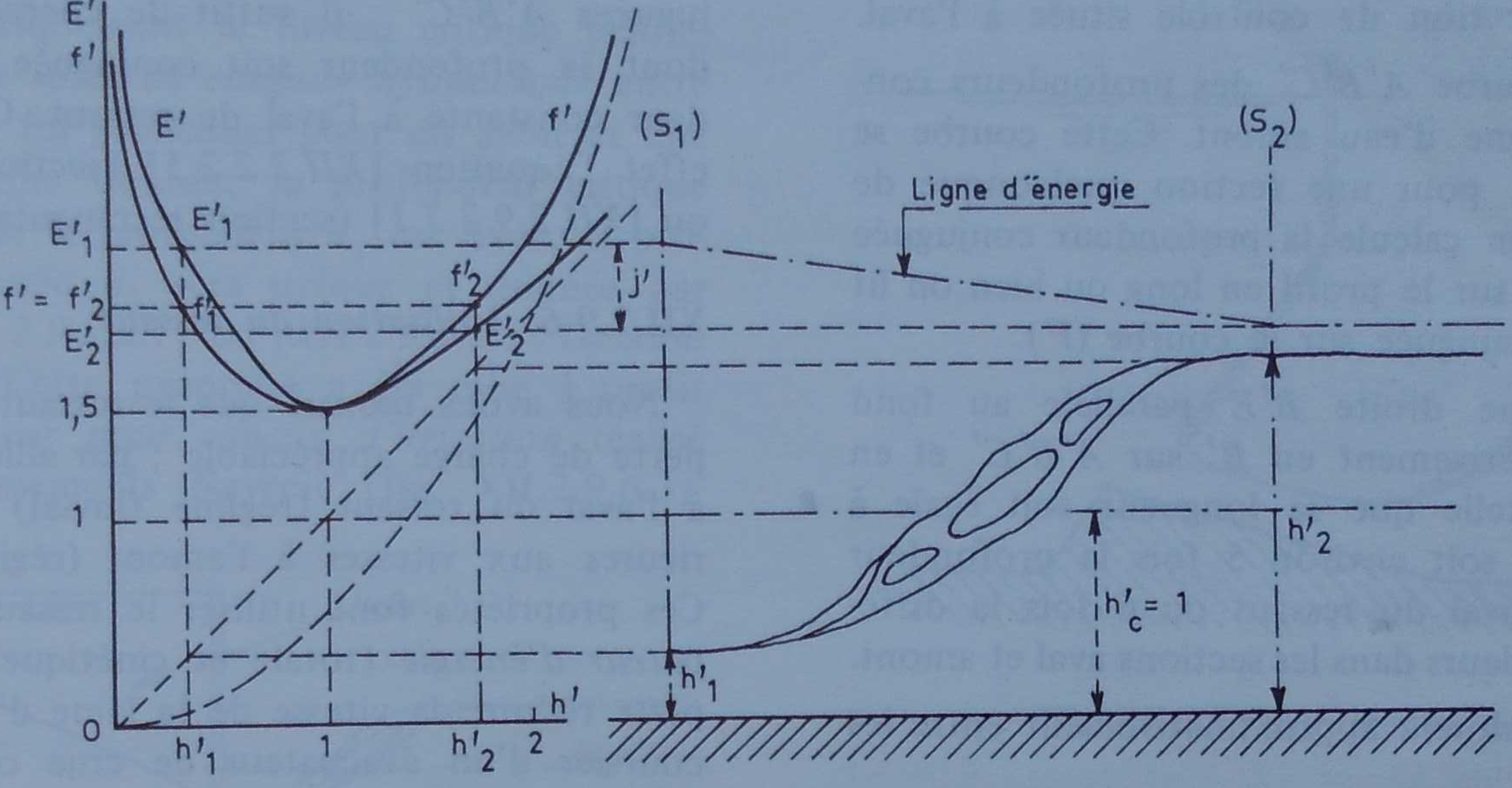


Fig. XII.2.9.4 – Utilisation des courbes (E') et (f') pour l'étude du ressaut dans un canal de section rectangulaire – Nota : les dimensions cotées sur la figure de droite sont des dimensions réduites ; pour obtenir les dimensions réelles, il faut multiplier les dimensions réduites par la profondeur critique h_c

et tend à devenir inappréciable pour le ressaut ondulé dont les profondeurs extrêmes diffèrent peu de la profondeur critique.

XII.2.9.5. *Recherche de la position du ressaut*

Le ressaut ne peut exister que si un écoulement torrentiel est obligé de devenir fluvial ; pour déterminer sa position il faut donc connaître tout d'abord les lignes d'eau à l'amont et à l'aval ; la première (régime torrentiel) sera en-dessous du niveau critique N_c, la seconde (régime fluvial) sera au-dessus.

Le ressaut se placera de telle façon que ses sections terminales aient des profondeurs conjuguées (c'est-à-dire dont les valeurs vérifient les relations classiques des profondeurs conjuguées) et soient distantes de la longueur présumée du ressaut, soit approximativement $5\,h_2$ ou $6\,(h_2 - h_1)$.

Supposons par exemple (fig. XII.2.9.5) un barrage-déversoir prolongé, à l'aval du seuil déversant, par un canal dont la pente, d'abord faible, s'accentue brusquement plus loin. Il va donc se produire un ressaut dans le bief situé à l'aval du barrage. Pour en déterminer la position approximative on procèdera comme suit :

– tracer la ligne d'eau amont (régime torrentiel) ; cette ligne est du type F_3 si $I < I_c$ ou H_3 si $I = 0$; elle se construit de l'amont vers l'aval à partir de la section de contrôle située au voisinage de A.

– tracer la ligne d'eau aval (régime fluvial) ; cette ligne est du type F_1 ou F_2 si $I < I_c$ ou

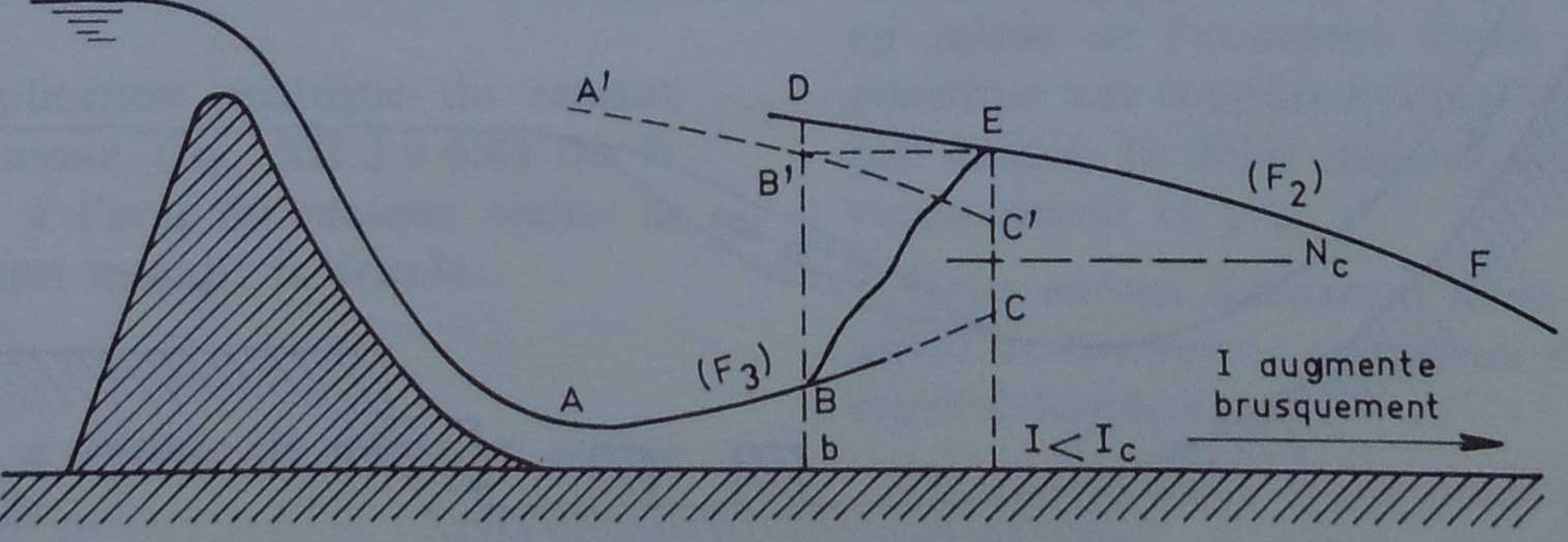


Fig. XII.2.9.5 – Recherche de la position du ressaut

H_2 si $I = 0$; elle se construit de l'aval vers l'amont à partir de la section de contrôle située à l'aval.

– tracer la courbe $A'B'C'$ des profondeurs conjuguées de la ligne d'eau amont. Cette courbe se trace par points, pour une section quelconque de profondeur Bb on calcule la profondeur conjuguée bB' qu'on porte sur le profil en long ou bien on lit la profondeur conjuguée sur la courbe (F).

– chercher une droite $B'E$ parallèle au fond s'appuyant respectivement en B' sur $A'B'C'$ et en E sur DEF et telle que sa longueur soit égale à celle du ressaut, soit environ 5 fois la profondeur dans la section aval du ressaut ou 6 fois la différence des profondeurs dans les sections aval et amont.

Le ressaut se situera approximativement entre les points B et E.

La longueur du ressaut étant faible on peut souvent la négliger par rapport aux courbes de remous amont et aval, ce qui revient à schématiser le ressaut par une ligne verticale.

Si le régime après le ressaut est uniforme, c'est-à-dire si la ligne d'eau est parallèle au fond, il est inutile de tracer la courbe des profondeurs conjuguées $A'B'C'$; il suffit de chercher le point B dont la profondeur soit conjuguée de la profondeur constante à l'aval du ressaut. On utilise à cet effet l'équation [*XII.2.2.2.5*] (section quelconque) ou [*XII.2.9.2.2.1*] (section rectangulaire).

XII.2.9.6. *Utilisation du ressaut*

Nous avons montré que le ressaut entraînait une perte de charge appréciable ; par ailleurs les vitesses à l'aval du ressaut (régime fluvial) sont très inférieures aux vitesses à l'amont (régime torrentiel). Ces propriétés font utiliser le ressaut comme *dissipateur d'énergie* (totale et cinétique), par exemple pour réduire la vitesse de la lame d'eau à l'aval du coursier d'un évacuateur de crue ou d'une vanne de fond. Pour stabiliser le ressaut au voisinage du pied de l'ouvrage pour les différents débits possibles Rehbock a préconisé un dispositif en forme de seuil denté (fig. XII.2.9.6.1). On peut aussi approfondir le radier du canal en réalisant une fosse de stabilisation du ressaut (fig. XII.2.9.6.2).

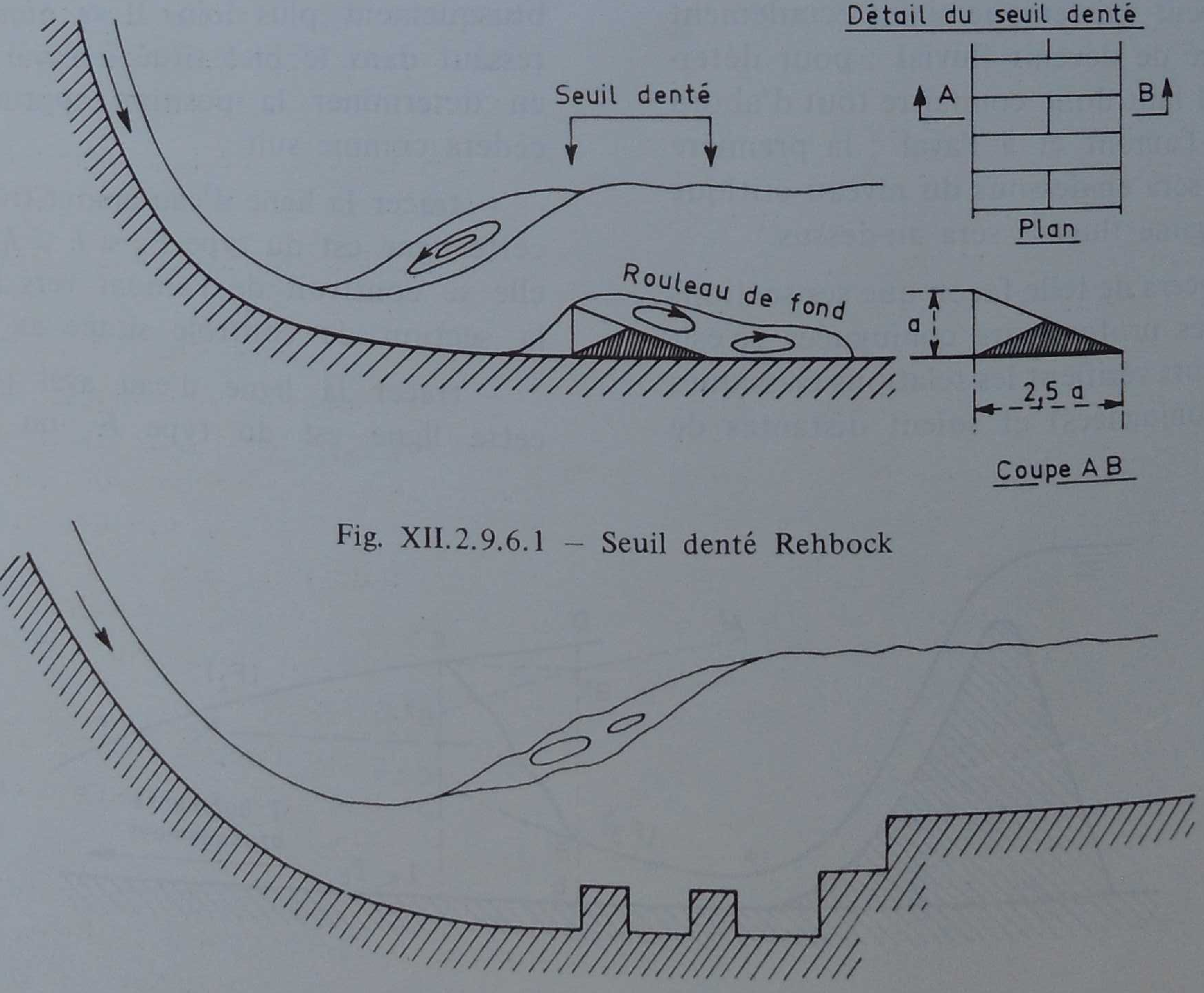


Fig. XII.2.9.6.1 – Seuil denté Rehbock

Fig. XII.2.9.6.2 – Fosse de stabilisation du ressaut

Par ailleurs le ressaut obligeant la surface libre à traverser brusquement le niveau critique réalise, de ce fait, une sorte de *coupure hydraulique* entre les deux biefs. En particulier pour un débit et une section de forme donnée, la profondeur critique est imposée ; si la profondeur h_1 est fixée, la profondeur conjuguée h_2 sera unique et donnée par l'équation [*XII.2.9.2.2.1*] ou [*XII.2.9.2.2.2*] (section rectangulaire). Cette propriété a été mise à profit dans un *partiteur pour canaux d'irrigation* réalisé par les Etablissements Neyrpic (fig. XII.2.9.6.3).

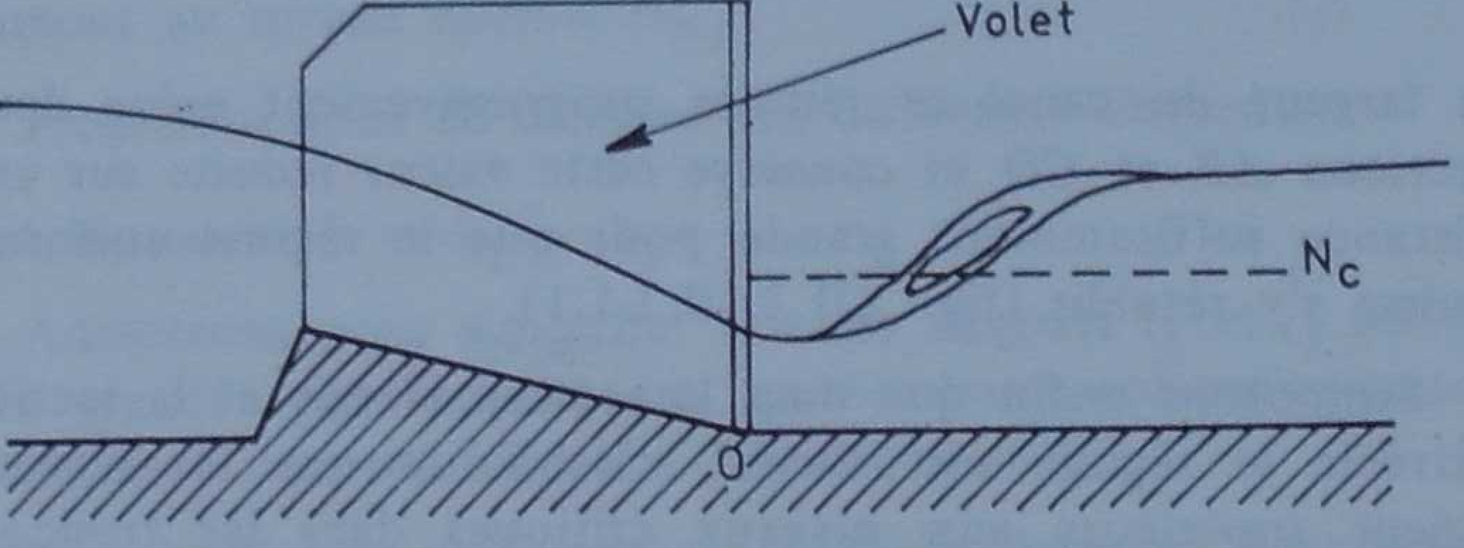


Fig. XII.2.9.6.3 – Partiteur à ressaut

Les débits dérivés à l'aval du partiteur sont indépendants de la pente ou du niveau dans le bief aval ce qui évite la fraude des usagers qui tenteraient d'augmenter artificiellement la pente du bief aval pour accroître le débit dérivé dans leur rigole.

En effet la ligne d'eau à l'amont du ressaut (régime torrentiel) est sous la dépendance de l'amont et la ligne d'eau à l'aval du ressaut (régime fluvial) est sous la dépendance de l'aval. Dans ces conditions toute perturbation apportée à l'aval, par exemple en modifiant la pente de la rigole, provoque une modification de la ligne d'eau aval et un léger déplacement du ressaut mais ne se propage pas à l'amont du ressaut, au droit du volet où se produit la répartition des débits ; les débits dérivés ne sont donc pas modifiés.

On trouve une application analogue du ressaut dans le *module à masque* (fig. XII.2.9.6.4) où la présence d'un ressaut à l'aval du masque réalise la coupure hydraulique qui interdit la fraude.

XII.2.10. *Application à l'étude de quelques autres régimes variés*

Pour illustrer et compléter les indications données précédemment nous étudierons, pour terminer, quelques exemples classiques de régimes permanents variés dans les canaux.

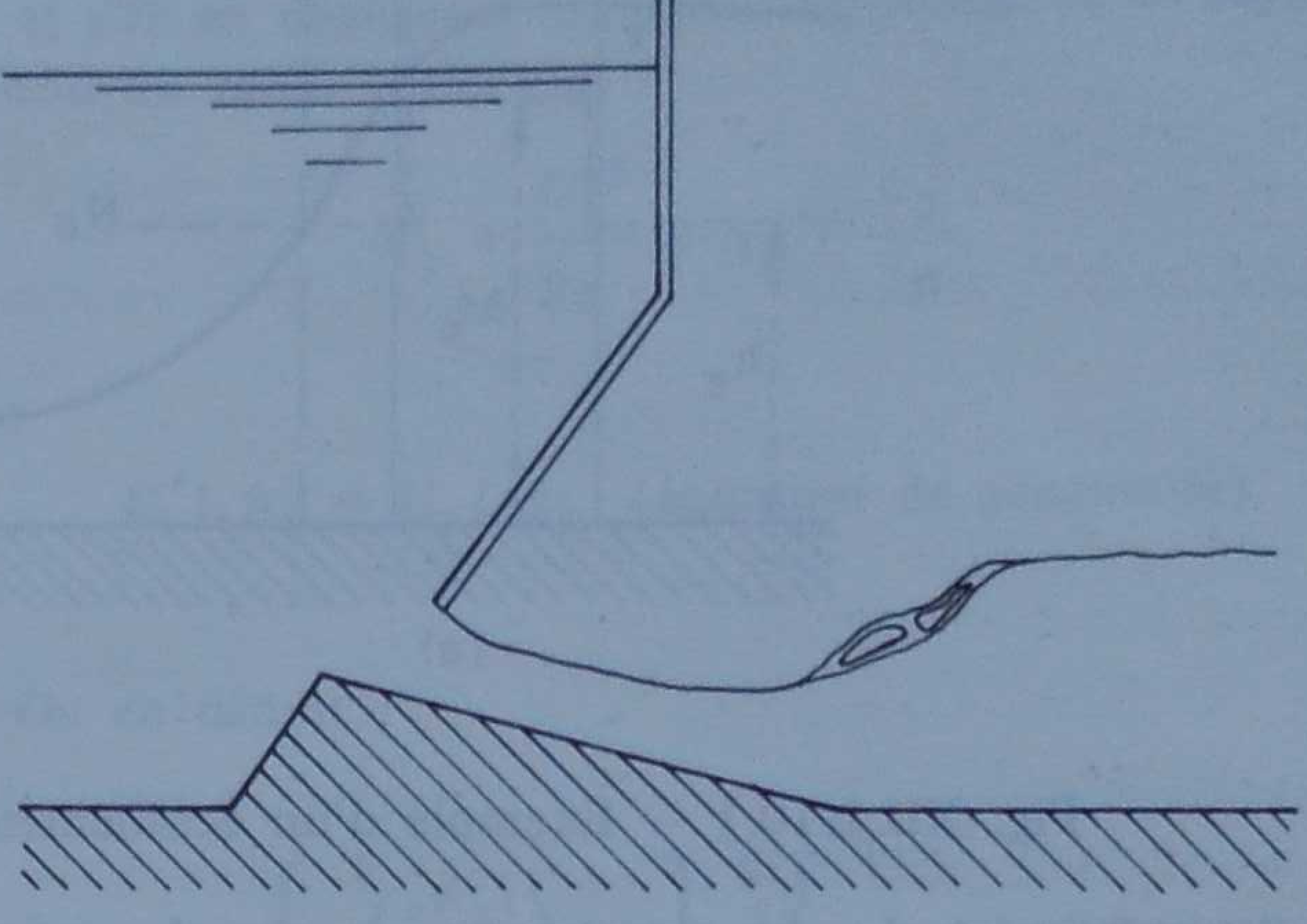


Fig. XII.2.9.6.4 – Module à masque

XII.2.10.1 *Ecoulements noyés et dénoyés*

Une singularité précédée d'un courant en régime fluvial provoque souvent à son aval immédiat la formation d'un courant de profondeur inférieure à la profondeur critique, c'est-à-dire d'une lame torrentielle avec apparition d'une section critique.

Nous dirons d'une telle lame (et, par extension, de la singularité) qu'elle est *dénoyée* (fig. XII.2.10.1a).

Lorsque la profondeur à l'aval de la singularité reste partout supérieure à la profondeur critique, le courant est *noyé* (fig. XII.2.10.1b).

Les propriétés hydrauliques des écoulements dénoyés et noyés sont tout à fait différentes ; pour les premiers ces propriétés sont relativement simples, le débit ne dépendant que des conditions à l'amont en raison de l'existence d'une section critique qui constitue une coupure hydraulique ; pour les seconds, par contre, le débit dépend simultanément des niveaux amont et aval.

Nous aurons l'occasion dans les études qui vont suivre de trouver de nombreux exemples de ces deux types d'écoulement.

Un régime varié ayant pour cause une singularité disposée dans un canal uniforme, on peut classer ces régimes en considérant la nature de la singularité qui leur a donné naissance et distinguer ainsi :

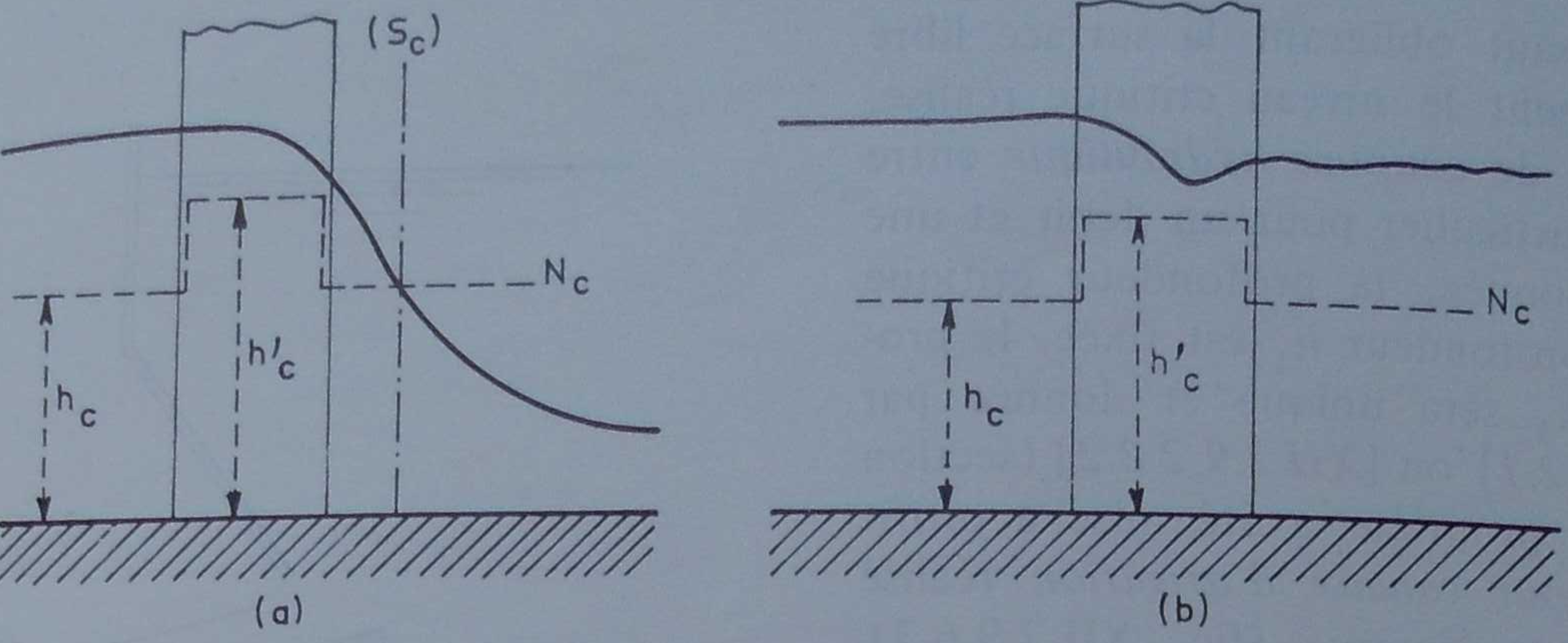


Fig. XII.2.10.1 – Exemple d'un écoulement dénoyé (*a*) et noyé (*b*) provoqué par une pile de pont

– *Singularités de la section transversale* (rétrécissement, élargissement, piles de pont, canal Venturi).

– *Singularités du profil en long* (canal à fond horizontal, seuil, changement de pente, etc.).

XII.2.10.2. *Singularités de la section transversale*

XII.2.10.2.1. *Rétrécissement de grande longueur*

Raisonnons pour simplifier sur un canal de section rectangulaire. Supposons que, le régime uniforme étant établi, la largeur du canal se réduise progressivement entre deux sections *AB* et *CD* et conserve cette valeur réduite sur une distance suffisamment grande pour que le régime uniforme puisse s'y rétablir (fig. XII.2.10.2.1.1).

Supposons enfin que dans la section élargie et la section rétrécie le régime soit fluvial, c'est-à-dire que les niveaux soient supérieurs aux niveaux critiques dans les tronçons correspondants.

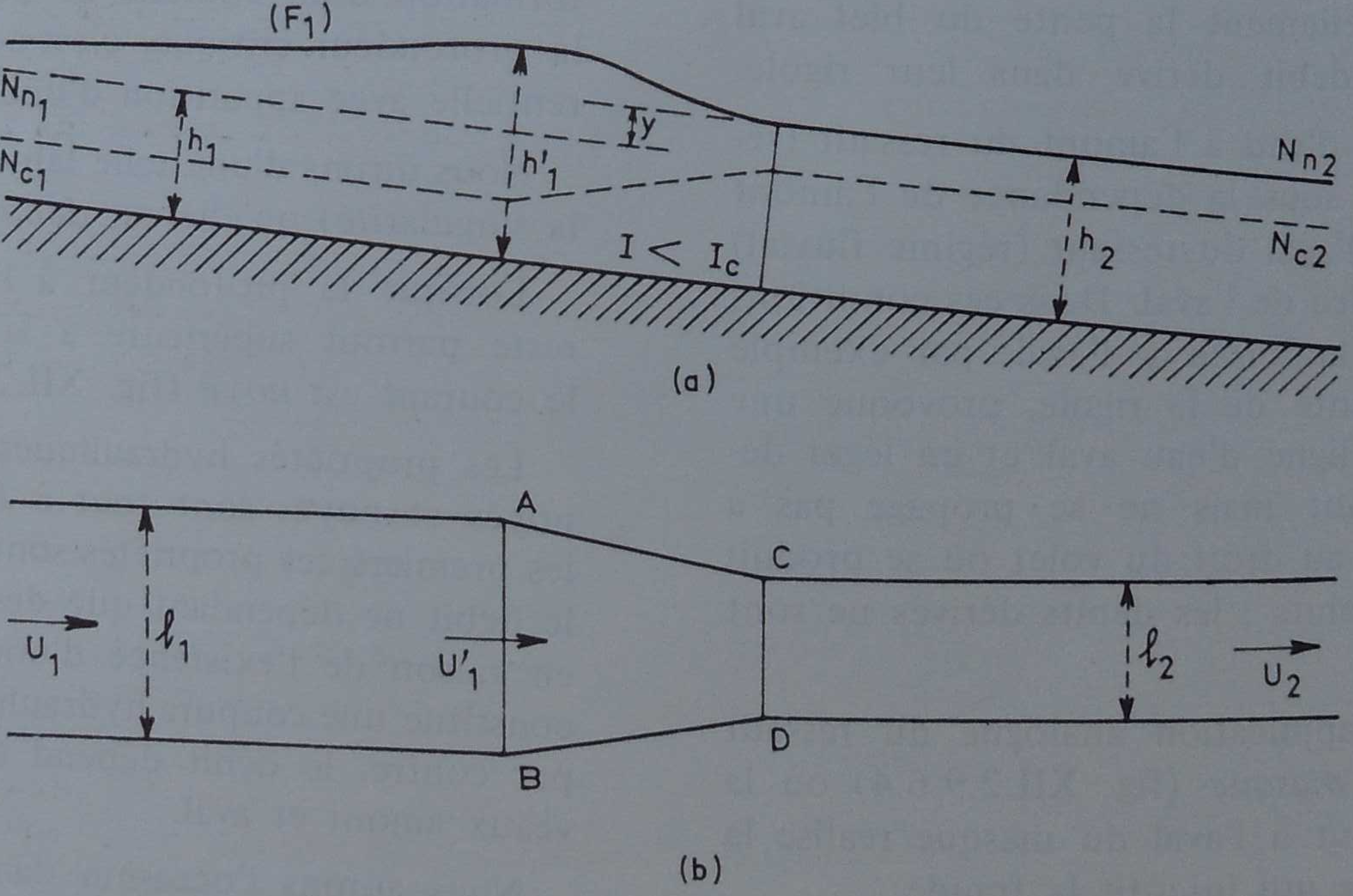


Fig. XII.2.10.2.1.1 – Rétrécissement de grande longueur. (*a*) : Profil en long ; (*b*) : Vue en plan

Désignons par

I = la pente constante du fond du canal (supposée inférieure aux pentes critiques dans les divers tronçons),

l_1 = la largeur amont (zone élargie),

l_2 = la largeur aval (zone rétrécie) ($l_2 < l_1$),

h_1 = la profondeur amont en régime uniforme,

h_2 = la profondeur aval en régime uniforme,

U_1 = la vitesse moyenne amont en régime uniforme,

U_2 = la vitesse moyenne aval en régime uniforme,

q_1 = le débit unitaire à l'amont = Q/l_1,

q_2 = le débit unitaire à l'aval = Q/l_2 ($q_2 > q_1$).

La ligne d'eau a l'allure indiquée sur la figure XII.2.10.2.1.1.

Le rétrécissement a donc pour résultats :

– un exhaussement du niveau dans la partie rétrécie ; cet exhaussement a pour valeur $y = h_2 - h_1$,

– un exhaussement supplémentaire du niveau à l'entrée du rétrécissement dans la section *AB* où la profondeur h'_1 est supérieure à h_2 donc à h_1,

– une courbe de remous d'exhaussement à l'amont du rétrécissement ; cette courbe du type (F_1) se raccorde à l'amont au niveau normal N_{n_1}.

Proposons-nous de calculer ces différents éléments.

Exhaussement $y = h_2 - h_1$

Admettons pour simplifier que les largeurs l_1 et l_2 soient très grandes par rapport aux profondeurs correspondantes de façon à pouvoir admettre l'égalité $R = h$.

Pour le régime uniforme qui s'établit dans les deux tronçons on peut écrire l'équation générale :

$$RI = bU^2$$

soit à l'amont :

$$h_1 I = bU_1^2 \quad \text{tronçon normal}$$

à l'aval :

$$h_2 I = bU_2^2 \quad \text{tronçon rétréci}$$

ou, en supposant b constant :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2}$$

Par ailleurs l'équation de continuité s'écrit :

$$Q = l_1 h_1 U_1 = l_2 h_2 U_2$$

En associant les deux relations précédentes on obtient :

$$h_2 = h_1 \sqrt[3]{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2}$$

et finalement :

$$y = h_2 - h_1$$

$$y = h_1 \left[\sqrt[3]{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2} - 1 \right] \qquad [XII.2.10.2.1]$$

Cette formule montre que *l'exhaussement y est proportionnel à* h_1. Il y a là un enseignement à tirer concernant les *endiguements* : si on réduit la largeur d'un cours d'eau, en période de crue le niveau peut être considérablement surélevé entre les digues.

Profil du remous dans le convergent ABCD

Appliquons le théorème de Bernoulli entre les sections *AB* et *CD* en négligeant les pertes de charge et en supposant le fond du canal horizontal :

$$h'_1 + \frac{U_1'^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

avec

$$U'_1 l_1 h'_1 = U_2 l_2 h_2 \quad \text{(équation de continuité)}$$

On en déduit :

$$h'_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{2g}\left[1 - \left(\frac{l_2 h_2}{l_1 h'_1}\right)^2\right]$$

On tire h'_1 de cette équation par approximations successives ; on peut utiliser comme première valeur approchée de h'_1 celle obtenue en faisant $U'_1 = U_1$, soit :

$$h'_1 = h_2 + \frac{1}{2g}(U_2^2 - U_1^2).$$

Profil du remous à l'amont de AB

C'est un remous d'exhaussement classique du type (F_1). Le profil de la surface libre se calcule par les méthodes usuelles en utilisant la section *AB* comme section de repère.

Remarque : Si on construit les courbes (E) correspondant aux debits unitaires q_1 et $q_2 > q_1$ (fig. XII.2.10.2.1.2) on voit immédiatement qu'en négligeant les pertes de charge entre *AB* et *CD* la hauteur h'_1 s'obtiendra en traçant la droite parallèle à l'axe des h passant par le point M_2 situé sur la courbe E correspondant au débit q_2 et ayant pour abscisse h_2.

On peut constater également que pour une profondeur h'_1 dans la section amont *AB*, on peut avoir pour le même débit deux profondeurs dans la section aval *CD* : soit h_2 correspondant au point M_2 (régime fluvial) l'écoulement est noyé (ligne d'eau (1)), soit h'_2 correspondant au point M'_2 (régime torrentiel) l'écoulement est dénoyé (ligne d'eau (2)).

Réciproquement (fig. XII.2.10.2.1.3) pour une profondeur donnée h_2 dans la section aval *CD*, on peut avoir dans la section amont *AB* pour le même débit, soit la profondeur h'_1 correspondant au point M'_1 (régime fluvial) l'écoulement est noyé (ligne d'eau (1)), soit la profondeur h''_1 correspondant au point M''_1 (régime torrentiel) l'écoulement est dénoyé (ligne d'eau (3)) ; le point M''_1 est déduit du point M_2 à l'aide de la courbe (F) (non tracée sur la figure), l'impulsion F étant la même dans les deux sections *AB* et *CD* ; la différence d'ordonnée de ces deux points correspond à la perte de charge due au ressaut soit $j = E_1 - E_2$.

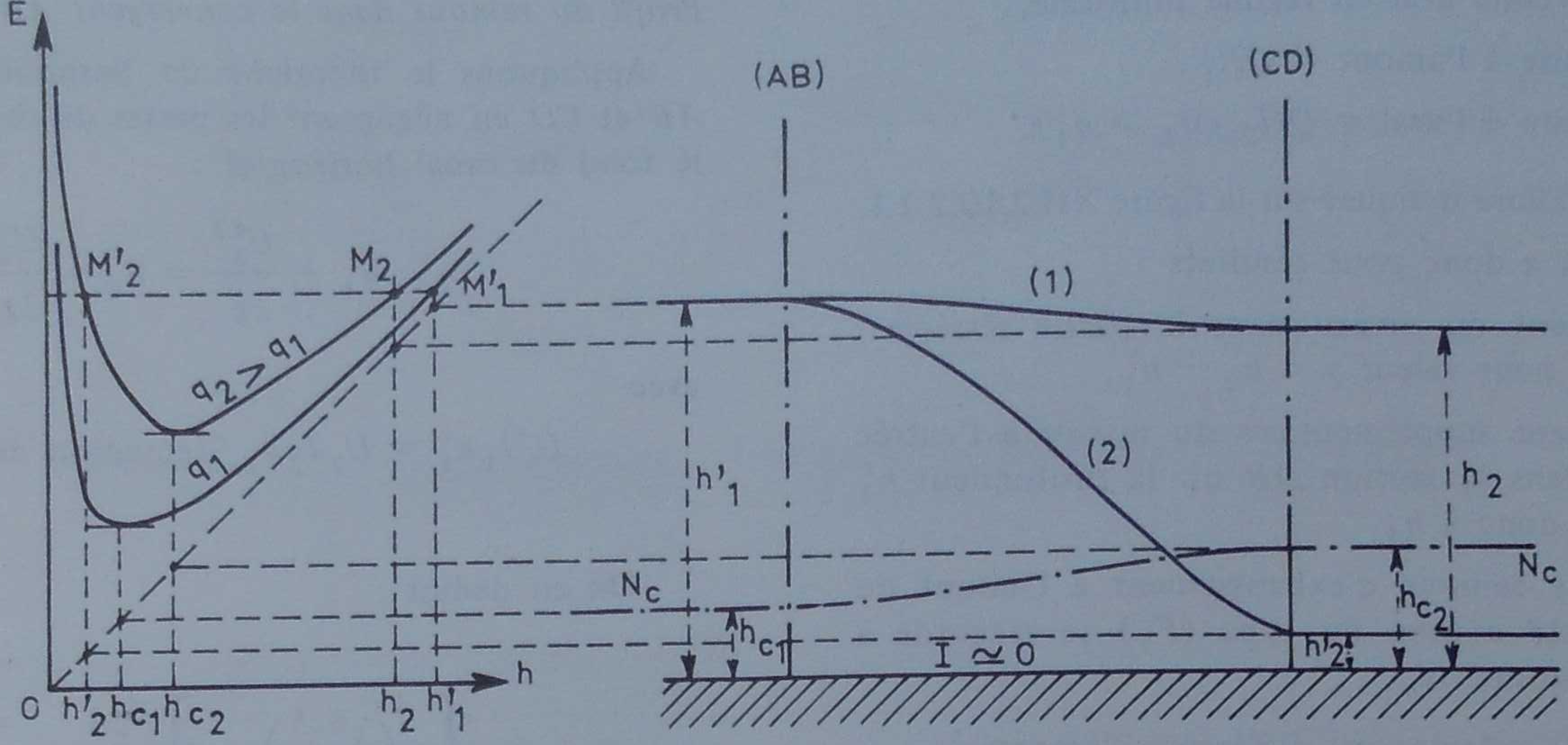


Fig. XII.2.10.2.1.2

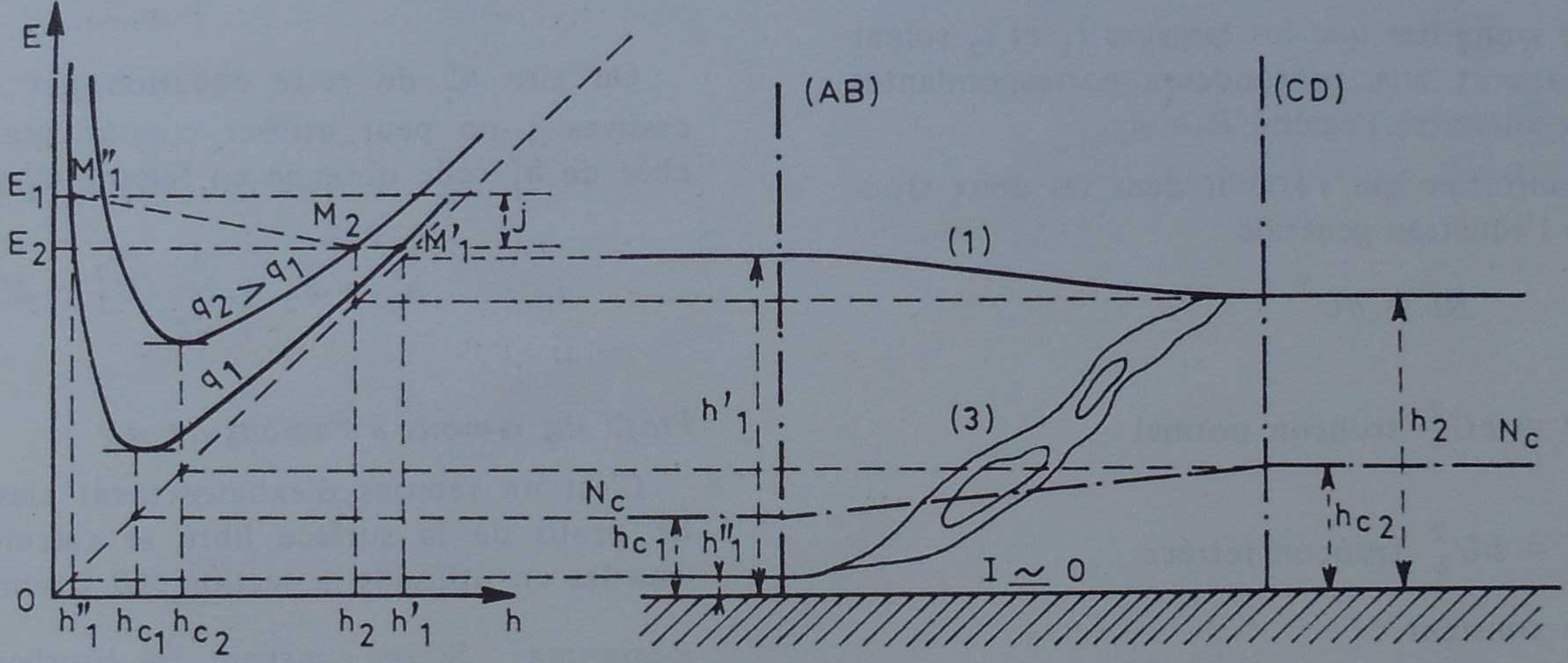


Fig. XII.2.10.2.1.3

Dans les écoulements noyés (1) toute perturbation apportée à l'aval réagit à l'amont ; au contraire dans les écoulements dénoyés (2) et (3) toute perturbation apportée à l'aval ne se fait pas sentir à l'amont et se traduit simplement par un déplacement du ressaut dans le convergent.

Enfin la *perte de charge* dans le convergent *ABCD* (que nous avons négligée dans l'étude précédente) est donnée par la formule :

$$j = 0{,}05 \text{ à } 0{,}10 \; \frac{U_2^2 - U_1'^2}{2g}$$

XII.2.10.2.2. *Elargissement de grande longueur (fig. XII.2.10.2.2)*

L'étude est analogue à celle faite pour un rétrécissement.

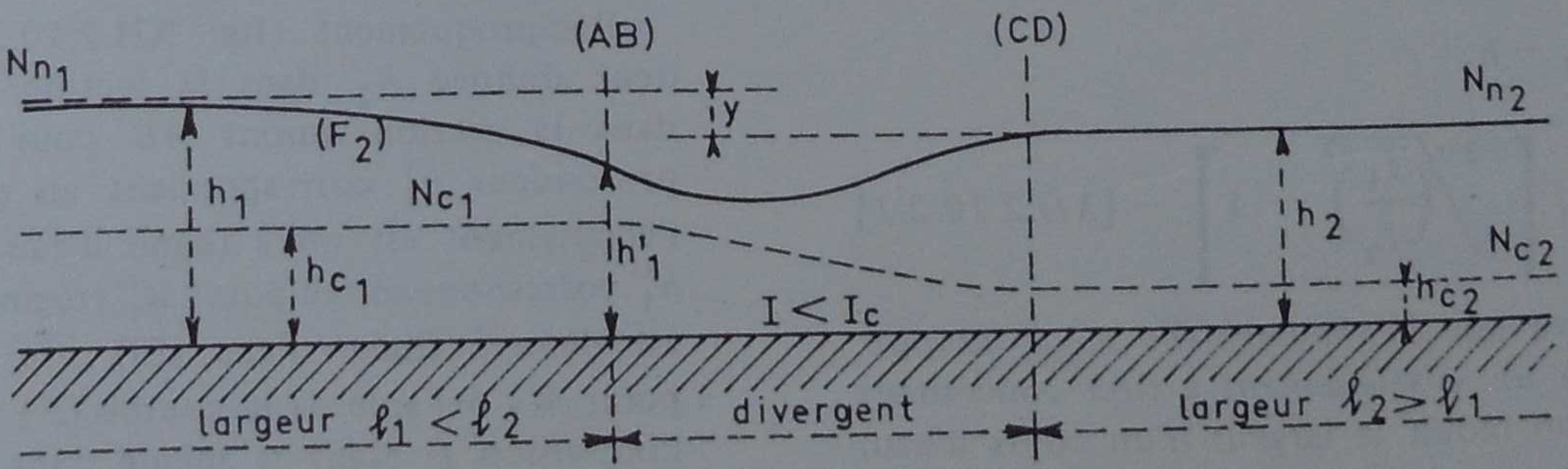


Fig. XII.2.10.2.2 – Elargissement de grande longueur

Notamment en régime fluvial on observe de l'amont à l'aval :

– une courbe de remous d'abaissement du type (F_2),

– un remous d'exhaussement dans le divergent,

– un régime uniforme dans la portion élargie si elle est suffisamment longue pour que ce régime puisse s'y établir.

Comme dans le cas du rétrécissement de grande longueur nous vérifions ici la règle générale concernant l'incidence d'une singularité sur la ligne d'eau ; en régime fluvial (ce qui est le cas considéré) l'effet du rétrécissement ou de l'élargissement se fait sentir à l'amont (courbe de remous F_1 ou F_2), alors qu'à l'aval le régime uniforme s'établit assez près de la singularité.

Dans le cas considéré de l'élargissement de grande longueur, l'abaissement $y = h_1 - h_2$ entre les niveaux normaux à l'amont et à l'aval est donné par la formule [*XII.2.10.2.1*] qui s'écrit ici :

$$y = h_1 \left[1 - \sqrt[3]{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2} \right] \qquad [XII.2.10.2.2]$$

Toutefois la *perte de charge dans le divergent* est beaucoup plus grande que celle due au convergent ; même pour un élargissement très progressif et un divergent assez long avec des parois bien galbées pour éviter les décollements on admet :

$$j = 0{,}10 \text{ à } 0{,}20 \ \frac{U_1'^2 - U_2^2}{2g}$$

U_1' = vitesse moyenne dans la section d'entrée

U_2 = vitesse moyenne dans la section de sortie.

Pour un divergent court avec des angles vifs j peut atteindre :

$$\frac{U_1'^2 - U_2^2}{2g}.$$

XII.2.10.2.3. *Canal-Venturi ou Parshall*

Le principe de la mesure du débit d'un canal par rétrécissement de sa section transversale fut appliqué par l'américain W.M. Cone en 1916 sous le nom de *Canal-Venturi.* Il fut amélioré et vulgarisé par l'Ingénieur américain *Parshall* à partir de 1929.

Le Canal-Venturi ou "Parshall" est constitué par une réduction progressive de la section transversale d'un canal jusqu'à une section rétrécie qu'on appelle le *col* qui est suivi d'un élargissement progressif (divergent) permettant de retrouver la section initiale du canal (fig. XII.2.10.2.3.1).

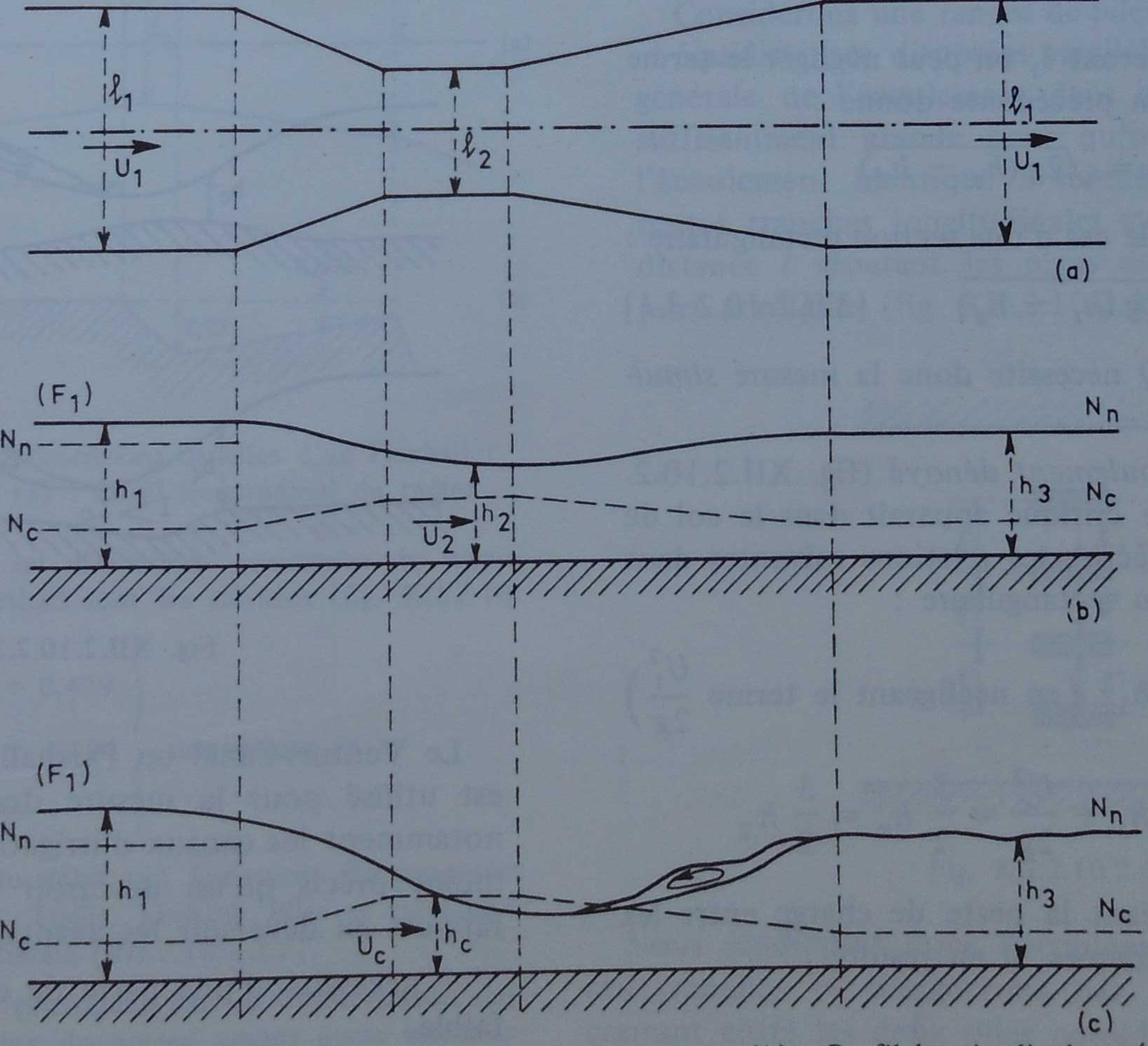


Fig. XII.2.10.2.3.1 – Canal-Venturi ou Parshall ; (*a*) : Vue en plan ; (*b*) : Profil longitudinal en écoulement noyé ; (*c*) : Profil longitudinal en écoulement dénoyé.

En première analyse nous supposerons le radier horizontal sur la faible longueur du dispositif.

Dans ces conditions l'écoulement peut présenter deux aspects très différents :

2 – *Ecoulement dénoyé* (fig. XII.2.10.2.3.1c). Le régime torrentiel apparaît dans le col où la profondeur passe par sa valeur critique h_c.

1 – *Cas de l'écoulement noyé* (fig. XII.2.10.2.3.1b). Négligeons les pertes de charge entre l'entrée (largeur l_1, profondeur h_1, vitesse moyenne U_1) et le col (largeur l_2, profondeur h_2, vitesse moyenne U_2).

L'équation de Bernoulli appliquée entre ces deux sections permet d'écrire :

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} \quad (\text{avec } \alpha_1 = \alpha_2 = 1)$$

Si l_2 est petit devant l_1 on peut négliger le terme $U_1^2/2g$ et l'équation précédente donne :

$$U_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

d'où le débit dans le cas d'une section rectangulaire :

$$Q = l_2 h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \qquad [XII.2.10.2.3.1]$$

La mesure de Q nécessite donc la mesure *simultanée* de h_1 et h_2.

2 – *Cas de l'écoulement dénoyé* (fig. XII.2.10.2.3.1c). Si le régime critique apparaît dans le col de l'appareil on peut écrire les relations suivantes dans le cas d'une section rectangulaire :

$$E_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_1 \quad \left(\text{en négligeant le terme } \frac{U_1^2}{2g}\right)$$

$$E_2 = E_c = h_c + \frac{U_c^2}{2g} = \frac{3}{2} h_c = \frac{3}{2} h_2$$

$E_1 = E_2$ en négligeant la perte de charge entre les deux sections considérées, il en résulte :

$$E_1 = h_1 = E_2 = \frac{3}{2} h_2$$

et

$$h_2 = \frac{2}{3} h_1$$

En portant cette valeur dans l'équation [*XII.2.10 2.3.1*] il vient, tous calculs faits :

$$Q = 0{,}385\ l_2 \sqrt{2g}\ h_1^{3/2}$$

On affecte ce résultat d'un coefficient correctif K légèrement inférieur à 1 tenant compte des approximations faites précédemment et on a donc en définitive :

$$Q = 0{,}385\ Kl_2 \sqrt{2g}\ h_1^{3/2} \qquad [XII.2.10.2.3.2]$$

expression dans laquelle, pour un Venturi donné, le débit ne dépend que de la profondeur amont h_1 ce qui confirme les propriétés des écoulements dénoyés.

Pour éviter qu'un Venturi donné soit dénoyé aux forts débits et noyé aux débits fractionnaires, on réalise parfois un radier surélevé ou abaissé au niveau du col ce qui maintient un régime dénoyé pour une plus large gamme de débits (fig. XII.2.10.2.3.2).

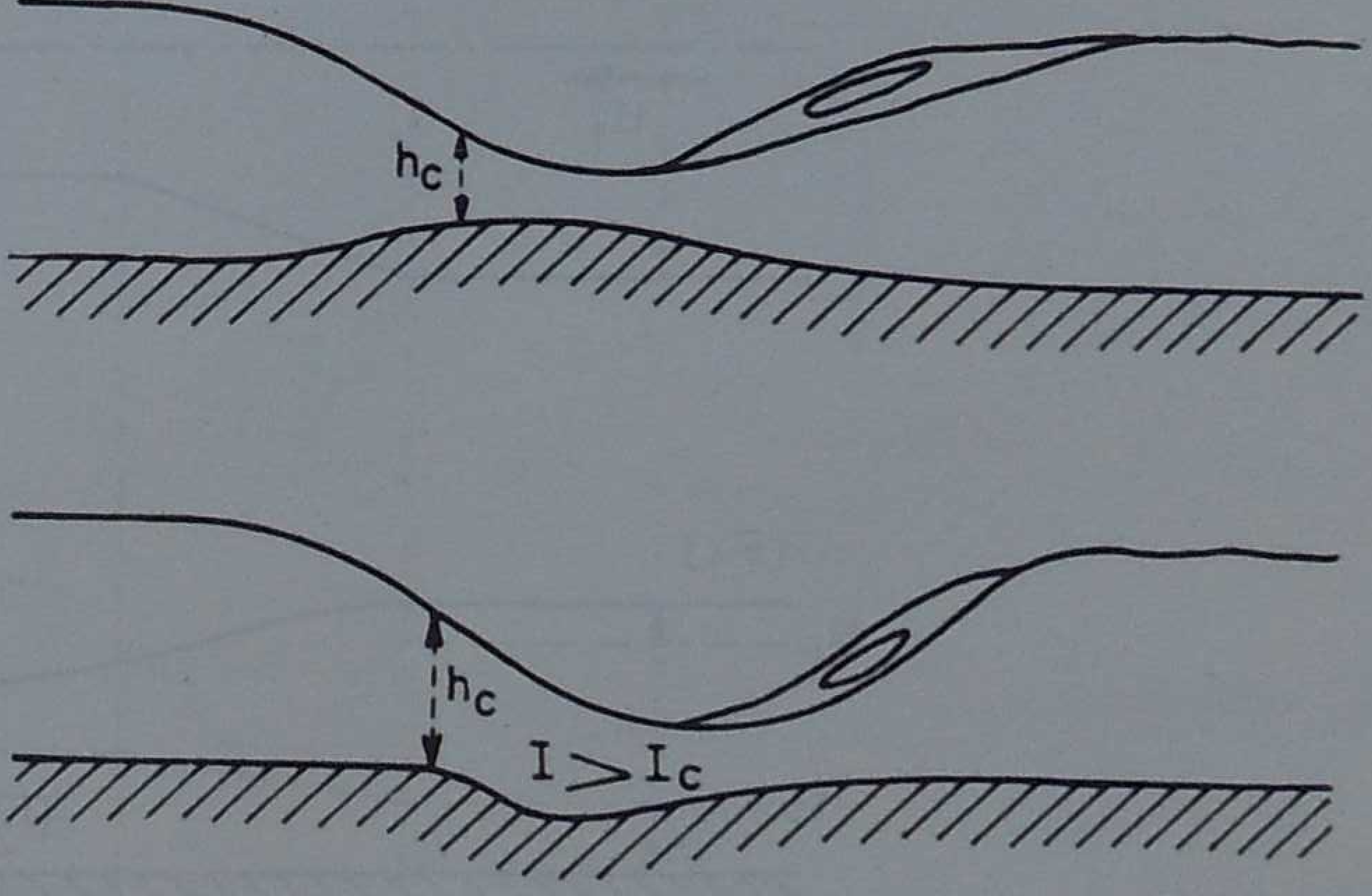


Fig. XII.2.10.2.3.2

Le Venturi-Canal ou Parshall ou *jaugeur à ressaut* est utilisé pour la mesure des débits des canaux, notamment les canaux d'irrigation ; il est sans doute moins précis qu'un déversoir mais il présente par rapport au déversoir les avantages suivants :

– nécessité d'une perte de charge beaucoup plus faible,

– éviter les atterrissements à l'amont.

Dispositions pratiques – Formules usuelles

La formule du débit proposée par *Parshall* est la suivante (traduite en unités métriques) :

$$Q = 372\ l_2 h_1^x\ 3{,}28^x \qquad [XII.2.10.2.3.3]$$

dans laquelle

Q est le débit (en l/s),

l_2 est la largeur au col (en m),

h_1 est la profondeur à l'amont (en m),

x est un exposant fonction de l_2 et donné par le tableau suivant :

pour l_2 (en m) =	0,2	0,6	0,8	1	2	2,6
x =	1,506	1,548	1,560	1,569	1,598	1,609

La largeur au col l_2 est généralement comprise entre $l_1/3$ et $l_1/2$; la hauteur h_1 est mesurée aux 2/3 de la distance entre le seuil d'entrée du convergent et l'entrée du col ; la prise de pression doit être placée au niveau du radier (fig. XII.2.10.2.3.3).

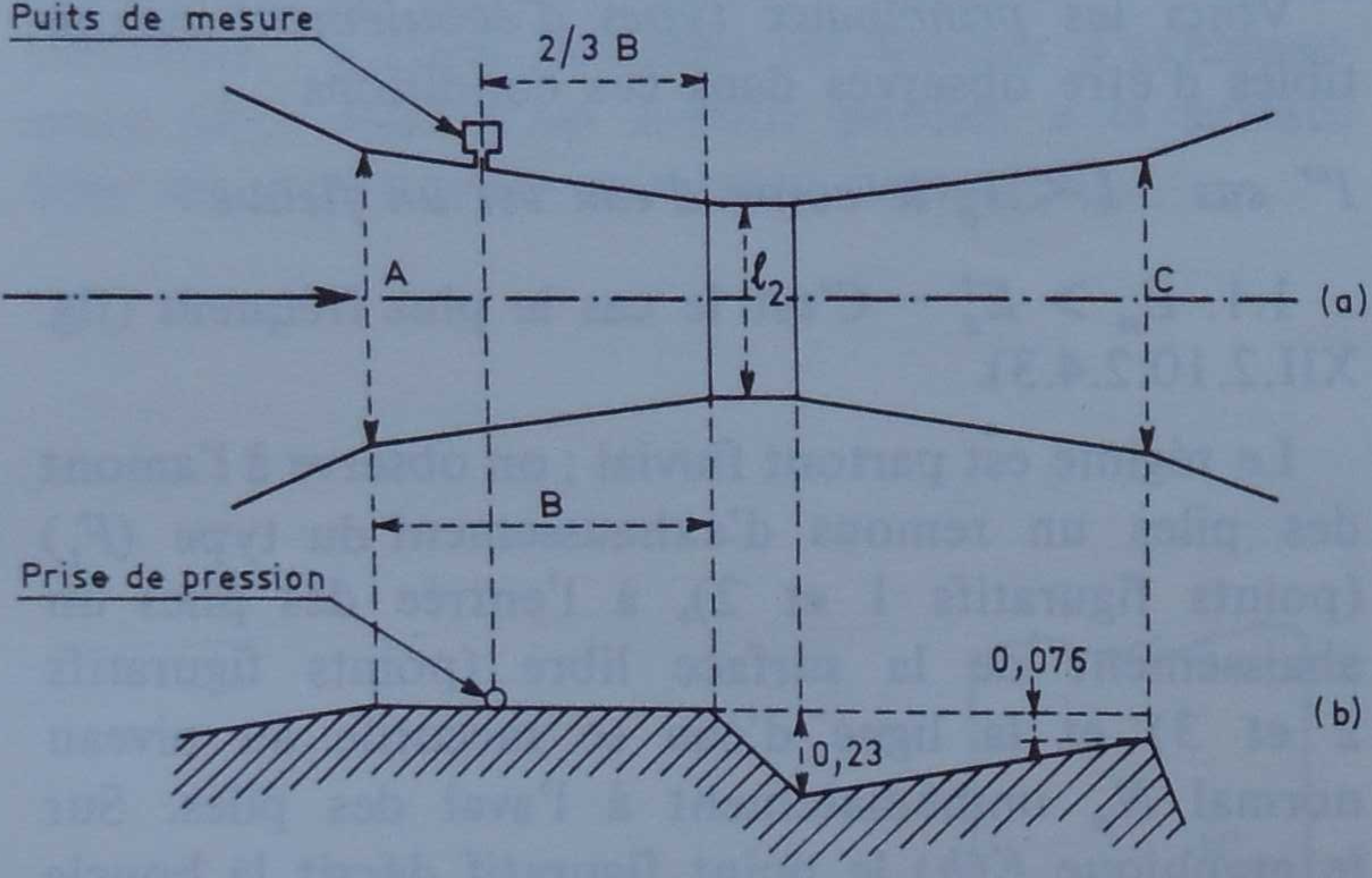


Fig. XII.2.10.2.3.3 – Dimensions usuelles d'un Parshall ; (*a*) : Vue en plan ; (*b*) : Profil longitudinal du radier

Les rapports entre les dimensions principales du dispositif préconisé par Parshall sont les suivants (fig. XII.2.10.2.3.3) :

$$\left.\begin{aligned} A &= 1{,}196\ l_2 + 0{,}479 \\ B &= 0{,}49\ \ l_2 + 1{,}194 \\ C &= l_2 + 0{,}305 \end{aligned}\right\} \text{dimensions en } m$$

D'autres formules du débit ont également été proposées par Engel, De Marchi, Tuglis, Linford. Elles se rattachent toutes à la formule générale [*XII.2.10.2.3.2*].

La *perte de charge* provoquée par un Canal-Venturi correspond à la surélévation du niveau amont après introduction de l'appareil dans le canal ; elle est de l'ordre de $0{,}08\ h_1$ quand le ressaut est ondulé, c'est-à-dire quand la profondeur au col h_2 atteint la profondeur critique h_c ; si le ressaut est franc c'est-à-dire si $h_2 < h_c$ la perte de charge peut atteindre $0{,}25\ h_1$ et même plus.

Bien que le ressaut ondulé présente l'avantage d'entraîner une perte de charge plus faible il a l'inconvénient de nécessiter une grande longueur du col, d'entraîner une instabilité de l'écoulement rendant les mesures imprécises et de former des tourbillons sur le radier avec risques d'érosion.

D'après le Professeur De Marchi, la hauteur limite aval h_{3l} au-delà de laquelle l'écoulement cesse d'être dénoyé serait donnée par

$$h_{3l} = 1{,}16\ h_c$$

et comme $h_c = \dfrac{2}{3}\ h_1$,

$$h_{3l} = 0{,}77\ h_1$$

la perte de charge serait alors $j = h_1 - h_{3l} = 0{,}23\ h_1$.

En choisissant convenablement les dimensions des Canaux-Venturi, on peut réduire j à moins de $0{,}20\ h_1$.

XII.2.10.2.4. *Action des piles de pont*

XII.2.10.2.4.1. Etude descriptive – Divers types d'écoulement

Considérons une rangée de piles de pont identiques et équidistantes, disposées parallèlement à la direction générale de l'écoulement dans un canal de largeur suffisamment grande pour qu'on puisse considérer l'écoulement identique à lui-même dans les différentes tranches longitudinales ayant pour largeur la distance l séparant les plans de symétrie de deux piles contiguës (fig. XII.2.10.2.4.1).

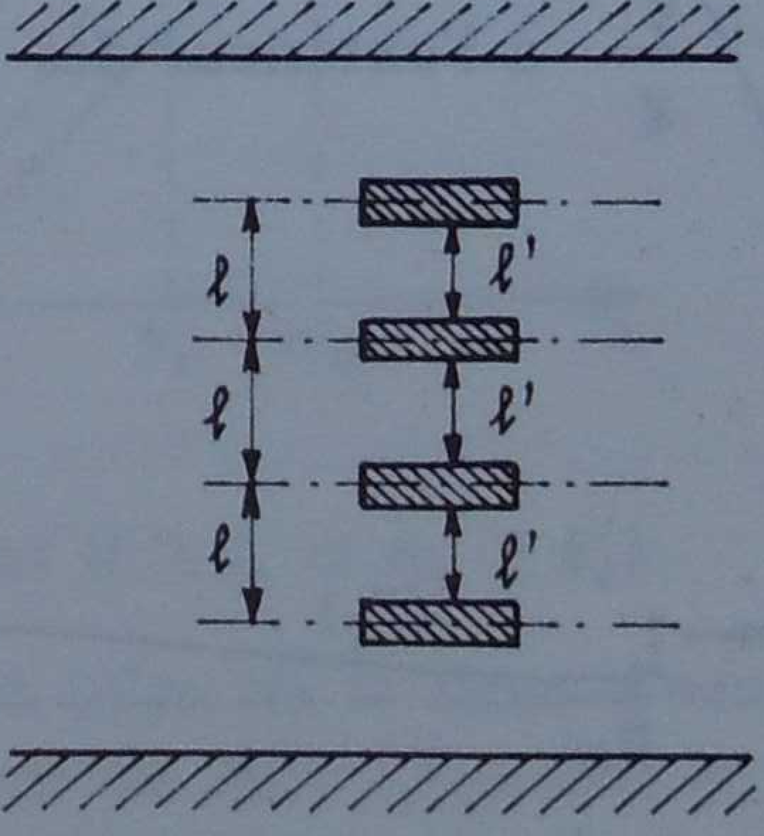


Fig. XII.2.10.2.4.1

Nous étudierons donc l'écoulement dans une de ces tranches et désignerons par l' la largeur du courant entre les deux piles considérées.

L'étude qualitative des lignes d'eau peut être effectuée aisément en considérant les *courbes d'énergie spécifique* $E(h)$ pour les sections transversales situées à l'amont des piles et entre les piles.

A l'amont des piles le débit unitaire est $q = Uh$ et

$$E = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{q^2}{2gh^2}$$

(courbe 1, fig. XII.2.10.2.4.2).

Entre les piles le débit unitaire est q' tel que $q'l' = ql$, donc $q' > q$ et

$$E = h + \frac{U'^2}{2g} = h + \frac{q'^2}{2gh^2}$$

(courbe 2, fig. XII.2.10.2.4.2).

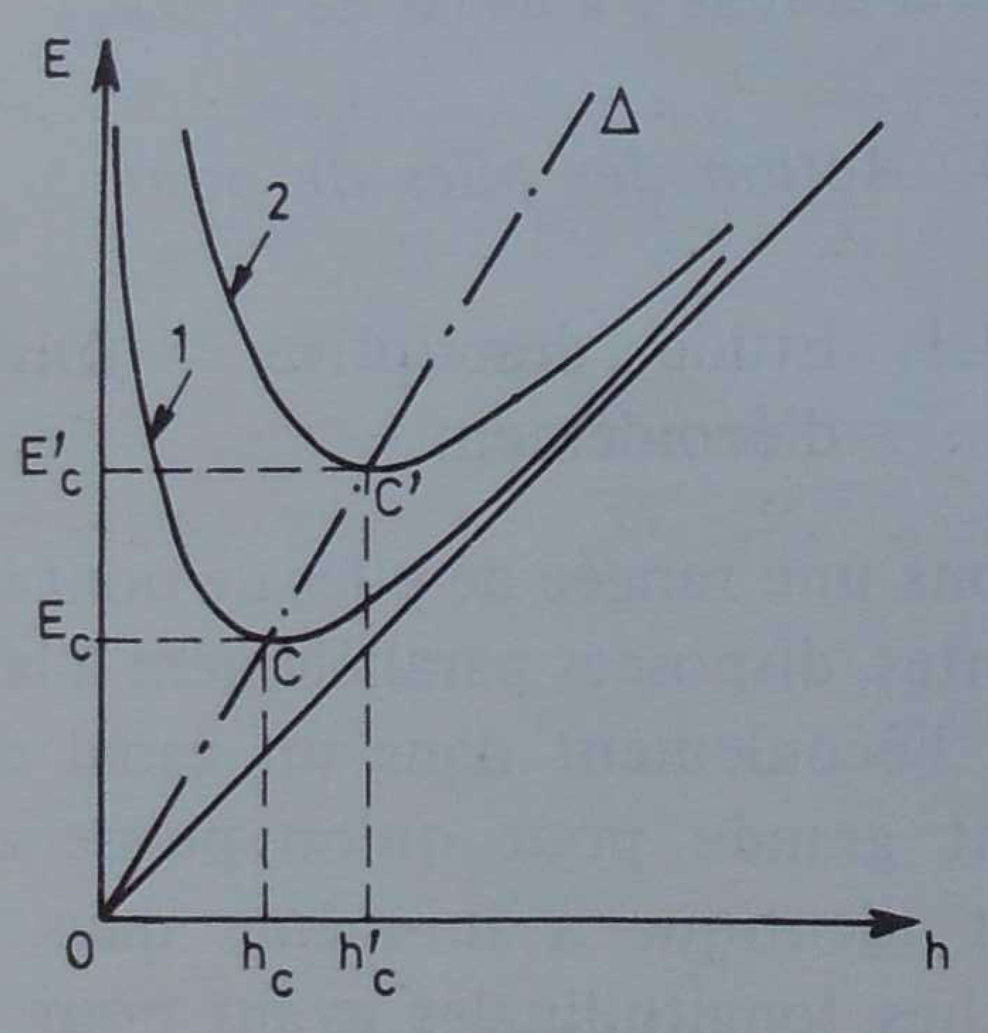


Fig. XII.2.10.2.4.2

Les *profondeurs critiques* sont respectivement :

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \text{ à l'extérieur des piles,}$$

$$h'_c = \sqrt[3]{\frac{q'^2}{g}} \text{ entre les piles.}$$

Comme $q' > q$ on a $h'_c > h_c$.

Les énergies spécifiques critiques sont respectivement :

$$E_c = \frac{3}{2}\,h_c \quad \text{et} \quad E'_c = \frac{3}{2}\,h'_c\,.$$

Les points correspondants C et C' sont donc sur la droite Δ de pente 3/2 passant par l'origine.

Ces propriétés étant rappelées, la forme de la ligne d'eau et l'évolution concomitante du point représentatif dans le système d'axes $E(h)$ dépendront essentiellement :

– de la pente du fond du canal I par rapport à la pente critique I_c,

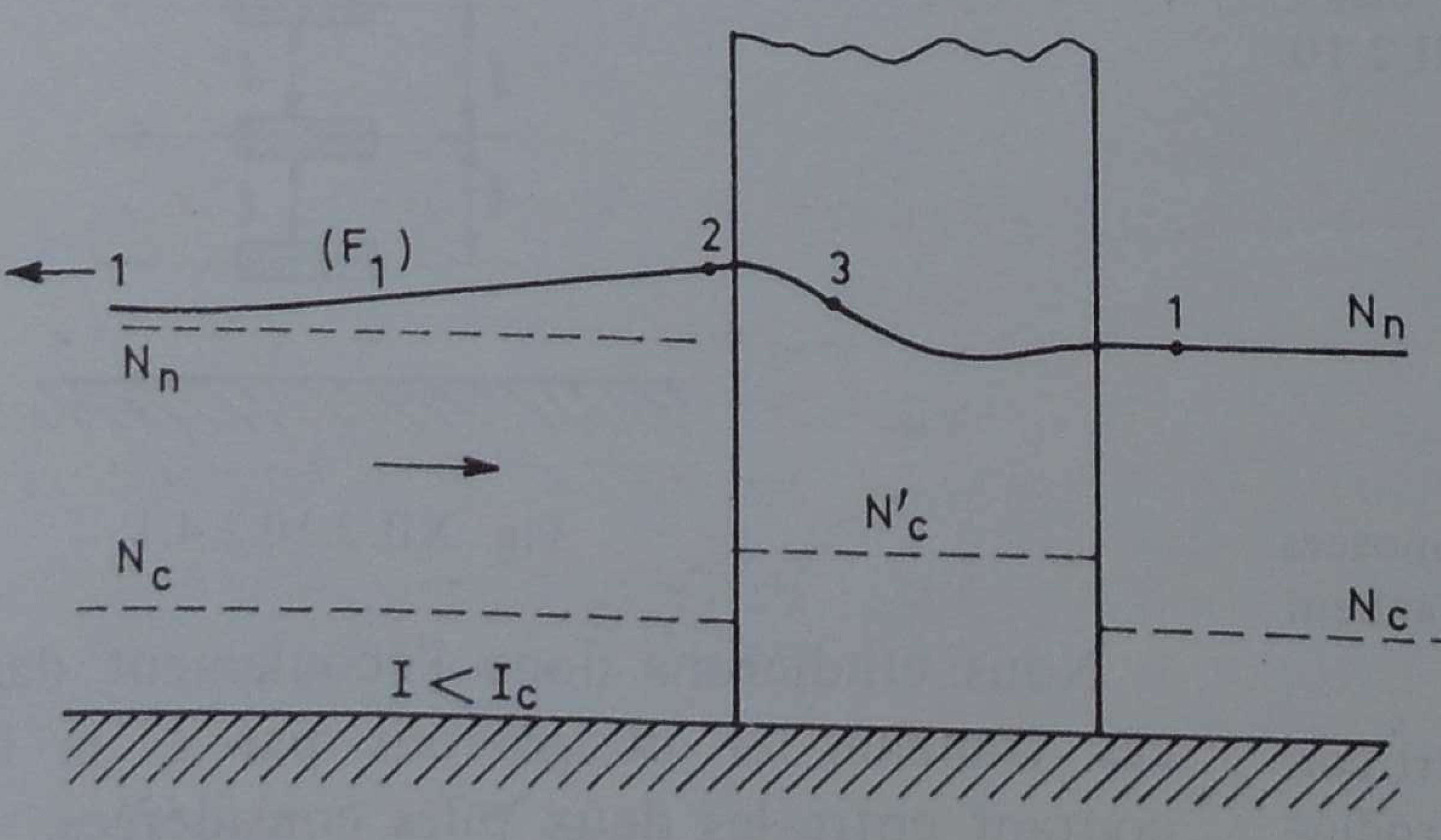
– de l'énergie spécifique E_n en régime uniforme par rapport à l'énergie spécifique E'_c entre les piles.

Voici les *principaux types d'écoulement* susceptibles d'être observés dans ces conditions :

1er cas : $I < I_c$ le cours d'eau est un fleuve

1.1. $E_n > E'_c$ – C'est le cas le plus fréquent (fig. XII.2.10.2.4.3).

Le régime est partout fluvial ; on observe à l'amont des piles un remous d'exhaussement du type (F_1) (points figuratifs 1 et 2), à l'entrée des piles un abaissement de la surface libre (points figuratifs 2 et 3) et la ligne d'eau se raccorde au niveau normal N_n immédiatement à l'aval des piles. Sur le graphique $E(h)$ le point figuratif décrit la boucle fermée 1.2.3.1.



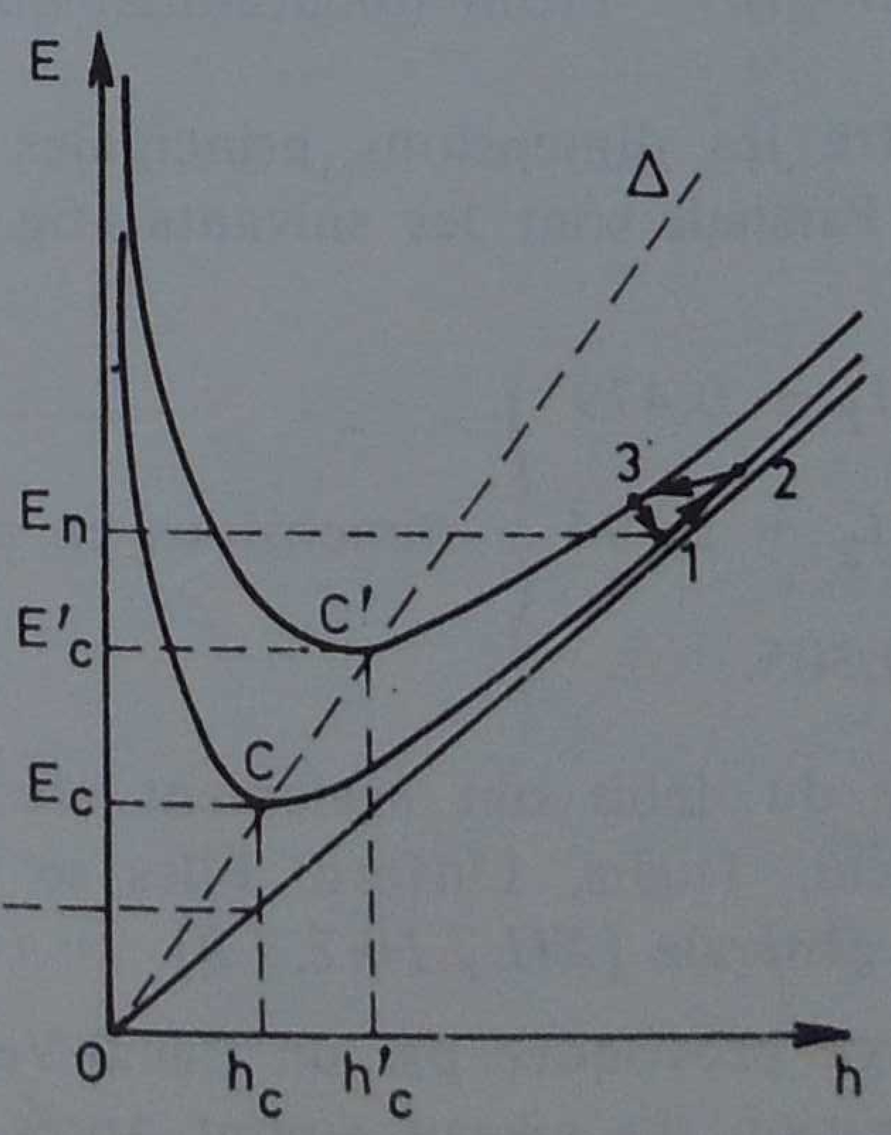


Fig. XII.2.10.2.4.3 – Ecoulement au passage d'une pile de pont ($I < I_c$ et $E_n > E'_c$)

1.2. $E_n < E'_c$ (fig. XII.2.10.2.4.4).

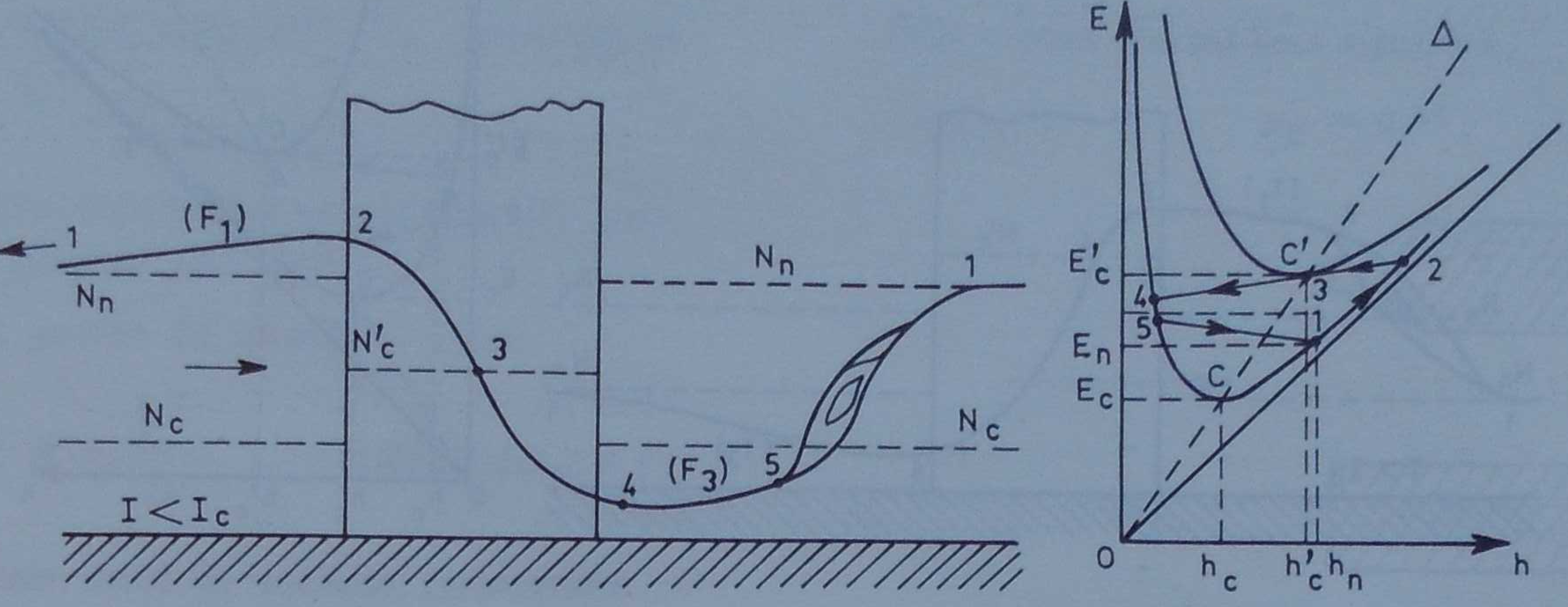


Fig. XII.2.10.2.4.4 – Ecoulement au passage d'une pile de pont ($I < I_c$ et $E_n < E'_c$)

Le régime est fluvial à l'amont des piles et torrentiel à l'aval ; on observe de l'amont à l'aval : un remous d'exhaussement (F_1), un brusque abaissement de la surface libre entre les piles avec franchissement du niveau critique et passage au régime torrentiel ; à l'aval des piles un remous d'exhaussement (F_3) suivi d'un ressaut permet à la surface libre de se raccorder au niveau normal N_n.

Sur le graphique $E(h)$ le point figuratif décrit la boucle fermée 1.2.3.4.5.1.

$2^{ème}$ cas : $I > I_c$ le cours d'eau est un torrent

2.1. $E_n > E'_c$ (fig. XII.2.10.2.4.5).

Le régime est torrentiel et la singularité considérée fait donc sentir ses effets à l'aval où on observe une courbe de remous d'abaissement (T_2).

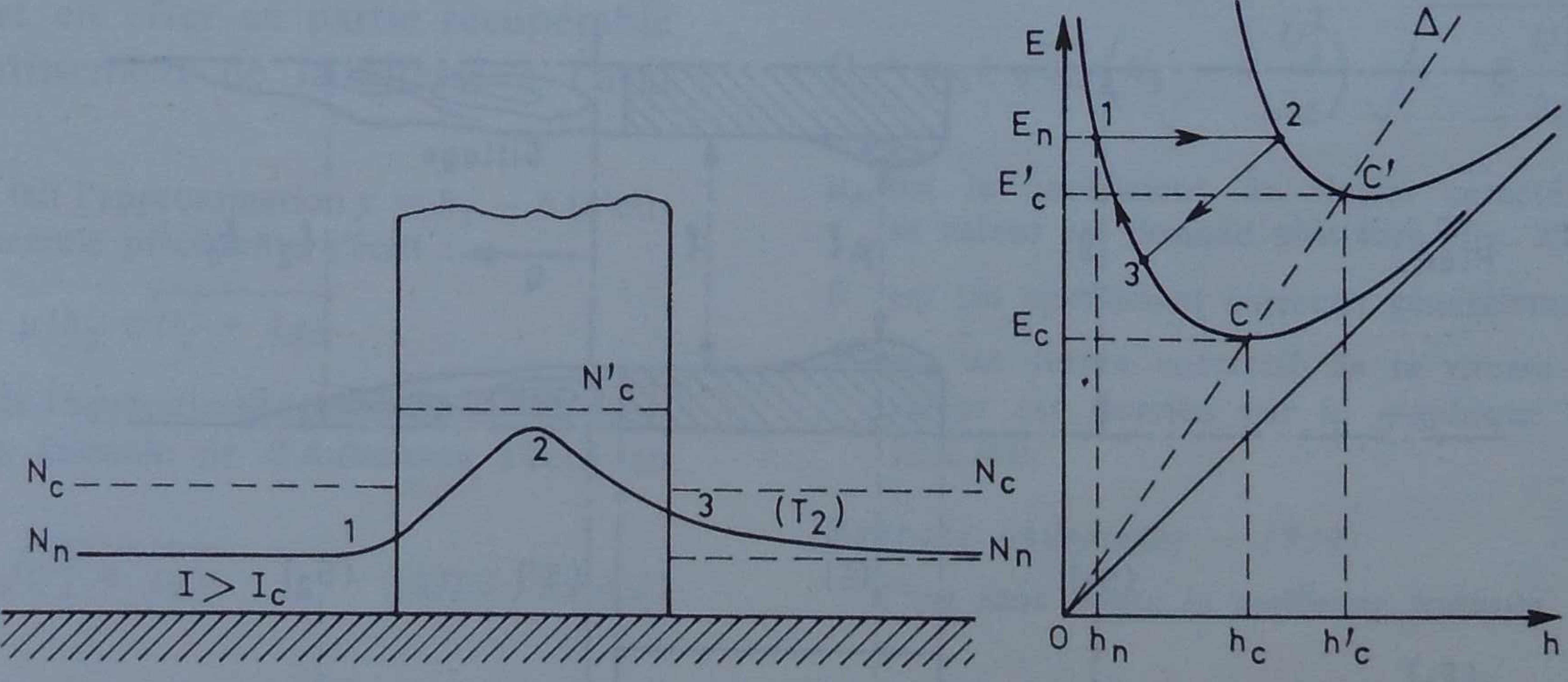


Fig. XII.2.10.2.4.5 – Ecoulement au passage d'une pile de pont ($I > I_c$ et $E_n > E'_c$)

Sur le graphique $E(h)$ le point figuratif décrit la boucle fermée 1.2.3.1.

2.2. $E_n < E'_c$ (fig. XII.2.10.2.4.6).

Un ressaut à l'amont des piles permet le franchissement du niveau critique ; il est prolongé par une ligne d'eau fluviale provoquant un remous d'exhaussement (T_1). Le régime redevient torrentiel entre et à l'aval des piles où la ligne d'eau est un remous d'exhaussement du type (T_3). Sur le graphique $E(h)$ le point figuratif décrit la boucle fermée 1.2.3.4.5.1.

Nous étudierons de manière plus détaillée le cas de la figure XII.2.10.2.4.3 qui est le plus fréquent : le régime est fluvial à l'amont et à l'aval des piles qui provoquent donc un exhaussement du niveau à l'amont ; cet exhaussement s'appelle le *remous*.

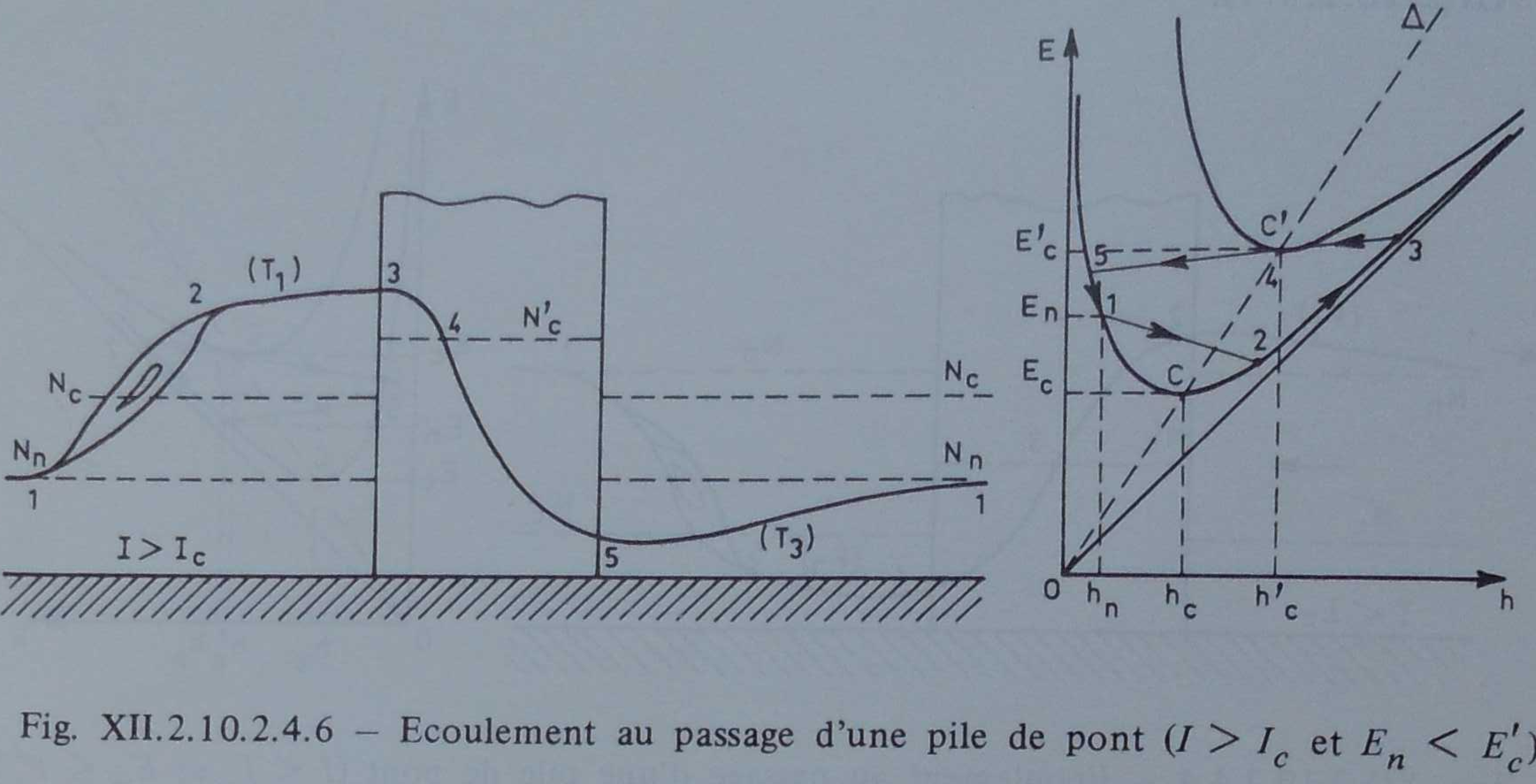


Fig. XII.2.10.2.4.6 – Ecoulement au passage d'une pile de pont ($I > I_c$ et $E_n < E'_c$)

XII.2.10.2.4.2. *Calcul du remous* (fig. XII.2.10.2.4.7)

Considérons une tranche longitudinale du courant limitée par les plans verticaux de symétrie de deux piles consécutives et désignons par

l_1 la largeur de la tranche de courant considérée,

l la largeur intérieure entre piles,

μl la largeur de la section contractée (S) du courant entre les piles,

h_1 la profondeur à l'amont (section S_1)),

h la profondeur dans la section contractée (S),

h_2 la profondeur à l'aval ou profondeur normale,

$y = h_1 - h_2$ le remous dû aux piles.

Nous supposerons enfin le lit horizontal au passage des piles.

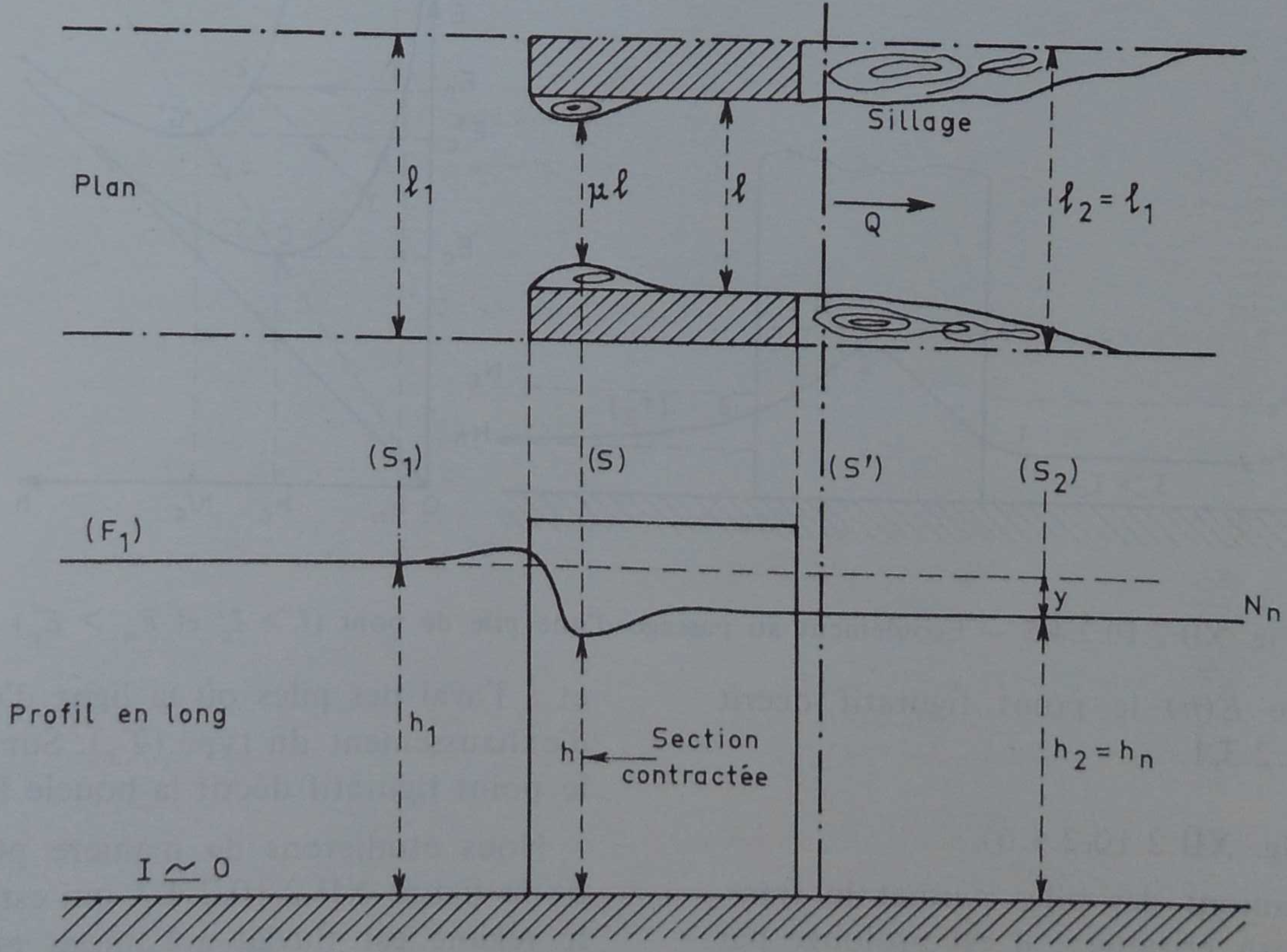


Fig. XII.2.10.2.4.7 – Remous dû aux piles de pont

Appliquons le *théorème de Bernoulli* entre les sections

(S_1) à l'amont (vitesse moyenne U_1, profondeur h_1, largeur l_1)

et

(S) section contractée (vitesse moyenne U, profondeur h, largeur μl).

En négligeant les pertes de charge il vient :

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h + \frac{U^2}{2g} \qquad [XII.2.10.2.4.1]$$

Exprimons le débit dans la section contractée :

$$Q = U\mu lh$$

ou :

$$U = \frac{Q}{\mu lh}$$

et en remplaçant dans l'équation [*XII.2.10.2.4.1*] :

$$Q = \mu lh\sqrt{U_1^2 + 2g(h_1 - h)}$$

Mais $h_1 - h$ n'est pas la véritable valeur du remous y qui vaut $h_1 - h_2$. On a longtemps confondu ces deux valeurs. En fait, dans la section contractée le creux $h_1 - h$ est supérieur au remous réel y ; ce creux $h_1 - h$ est en effet en partie récupérable par suite du ralentissement de la vitesse à l'aval de (S).

D'Aubuisson (1834) fait l'approximation $y = h_1 - h$ (c'est-à-dire $h = h_2$) et la formule précédente s'écrit :

$$Q = \mu lh_2\sqrt{U_1^2 + 2gy}$$

Pour tenir compte de l'approximation précédente on remplace μ par μ_A et la formule de d'Aubuisson s'écrit en définitive :

$$Q = \mu_A lh_2\sqrt{U_1^2 + 2gy} \qquad [XII.2.10.2.4.2]$$

d'où on peut tirer y.

Le coefficient de d'Aubuisson μ_A n'a pas la même signification physique que le coefficient de contraction μ puisqu'il fait implicitement intervenir, en plus de la forme et de l'écartement des piles, les pertes d'énergie dans la masse liquide. Les valeurs de μ_A seront données plus loin (fig. XII.2.10.2.4.10).

Signalons également les formules suivantes :

Formule d'Eytelwein

$$y = \frac{U_2^2}{g\mu_E^2}\left(\frac{l_1}{l} - \mu_E\right) \qquad [XII.2.10.2.4.3]$$

le coefficient μ_E ayant les valeurs suivantes (fig. XII.2.10.2.4.8) :

Piles munies d'avant-becs aigus (a) :

$$\mu_E = 0{,}95$$

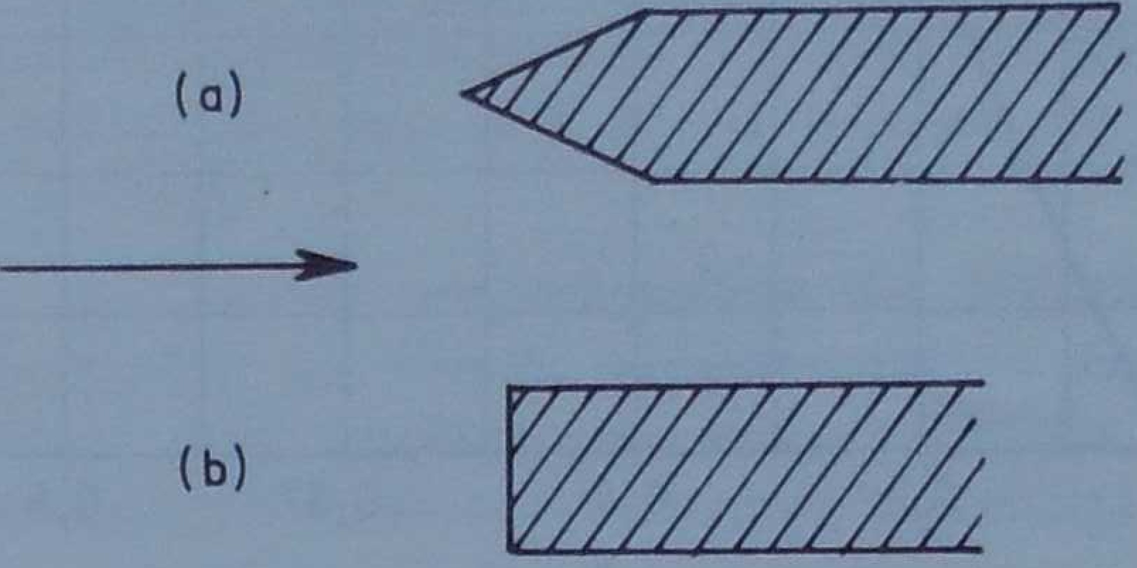


Fig. XII.2.10.2.4.8

Piles sans avant-bec (b) :

$$\mu_E = 0{,}85$$

Formule de Lang

$$y = \frac{U_2^2}{2g\mu^2}\left(\frac{l_1}{l} - \mu\right)^2 \qquad [XII.2.10.2.4.4]$$

Plus récemment, les auteurs suivants ont donné des résultats déduits de très nombreuses expériences ; nous nous bornerons à indiquer ci-après les formules qu'ils proposent :

Nagler (U.S.A. – 1918)

$$Q = \mu_N l\sqrt{2g}\left(h_2 - \theta\frac{U_2^2}{2g}\right)\sqrt{y + \beta\frac{U_1^2}{2g}} \qquad [XII.2.10.2.4.5]$$

μ_N est le coefficient de Nagler caractéristique des piles ; sa valeur est donnée plus loin (fig. XII.2.10.2.4.10),

θ est un coefficient correctif généralement pris égal à 0,3,

β est un terme correctif de la vitesse d'approche U_1, sa valeur est donnée par le graphique de la figure XII.2.10.2.4.9.

Rehbock (Allemagne – 1919)

C'est sans doute la meilleure formule :

$$y = [\mu_R - \sigma(\mu_R - 1)]\,(0{,}4\,\sigma + \sigma^2 + 9\,\sigma^4)\left(1 + \frac{U_2^2}{gh_2}\right)\frac{U_2^2}{2g} \qquad [XII.2.10.2.4.6]$$

avec

μ_R coefficient de Rehbock caractéristique des piles ; sa valeur est donnée plus loin (fig. XII.2.10.2.4.10),

σ taux de réduction de section,

soit

$\sigma = \dfrac{l_1 - l}{l_1}$ dans le cas d'une section rectangulaire,

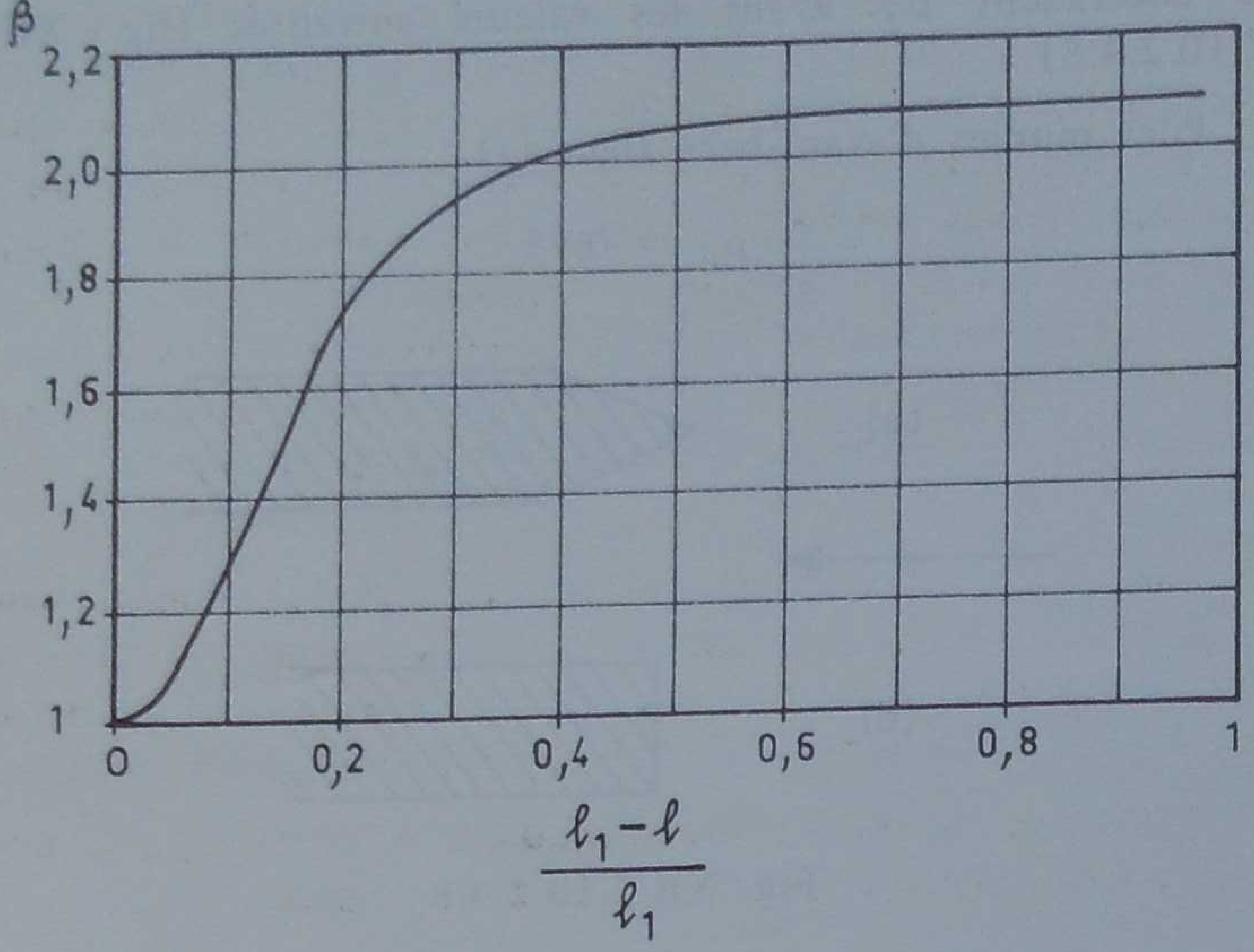


Fig. XII.2.10.2.4.9

ou

$\sigma = \frac{S - s}{S}$ dans le cas d'une section de forme quelconque,

avec

S section mouillée totale

s section mouillée rétrécie (entre les piles).

S et s sont calculées sans tenir compte du remous.

Valeurs des coefficients des diverses formules

Le graphique de la figure XII.2.10.2.4.10 donne la valeur des coefficients suivants :

μ_A = coefficient de d'Aubuisson (formule [*XII.2.10.2.4.2*])

μ_N = coefficient de Nagler (formule [*XII.2.10.2.4.5*])

μ_R = coefficient de Rehbock (formule [*XII.2.10.2.4.6*])

en fonction du taux de réduction de section $\sigma = (l_1 - l)/l_1$ et de la forme des piles.

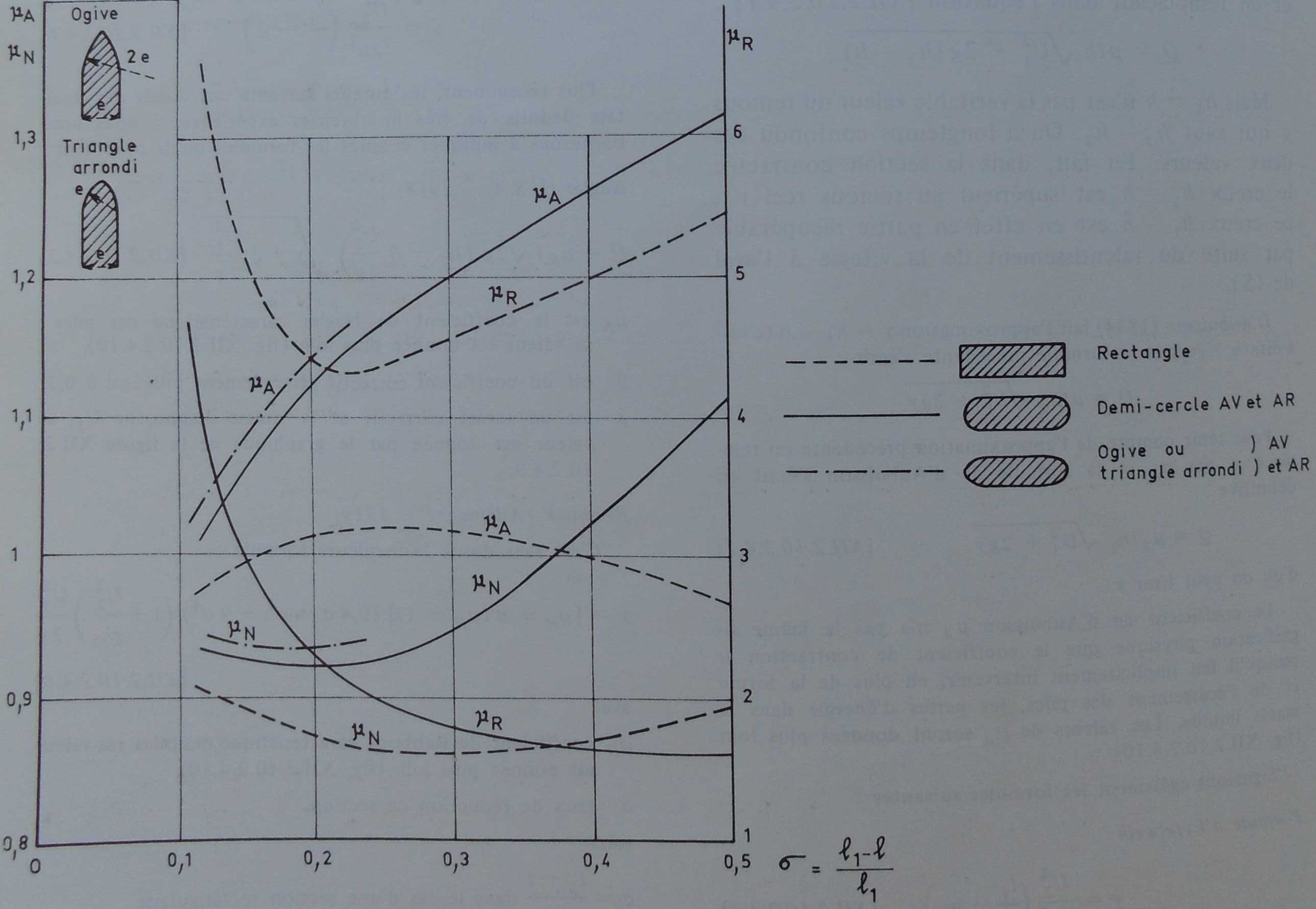


Fig. XII.2.10.2.4.10 – Coefficients des diverses formules de calcul du remous des piles de pont

Ce graphique résulte de très nombreuses expériences effectuées par *Yarnell* (U.S.A. 1934) ; il ne vaut que pour les conditions suivantes qui sont d'ailleurs les plus fréquentes :

– écoulement de la classe n° 1 définie sur le graphique XII.2.10.2.4.11,

– allongement des piles (rapport de leur longueur mesurée dans le sens du courant à leur largeur mesurée transversalement) voisin de 4 (en fait μ_A et μ_N varient peu avec l'allongement des piles),

– piles disposées parallèlement au courant.

$$\sigma = \frac{\ell_1 - \ell}{\ell_1}$$

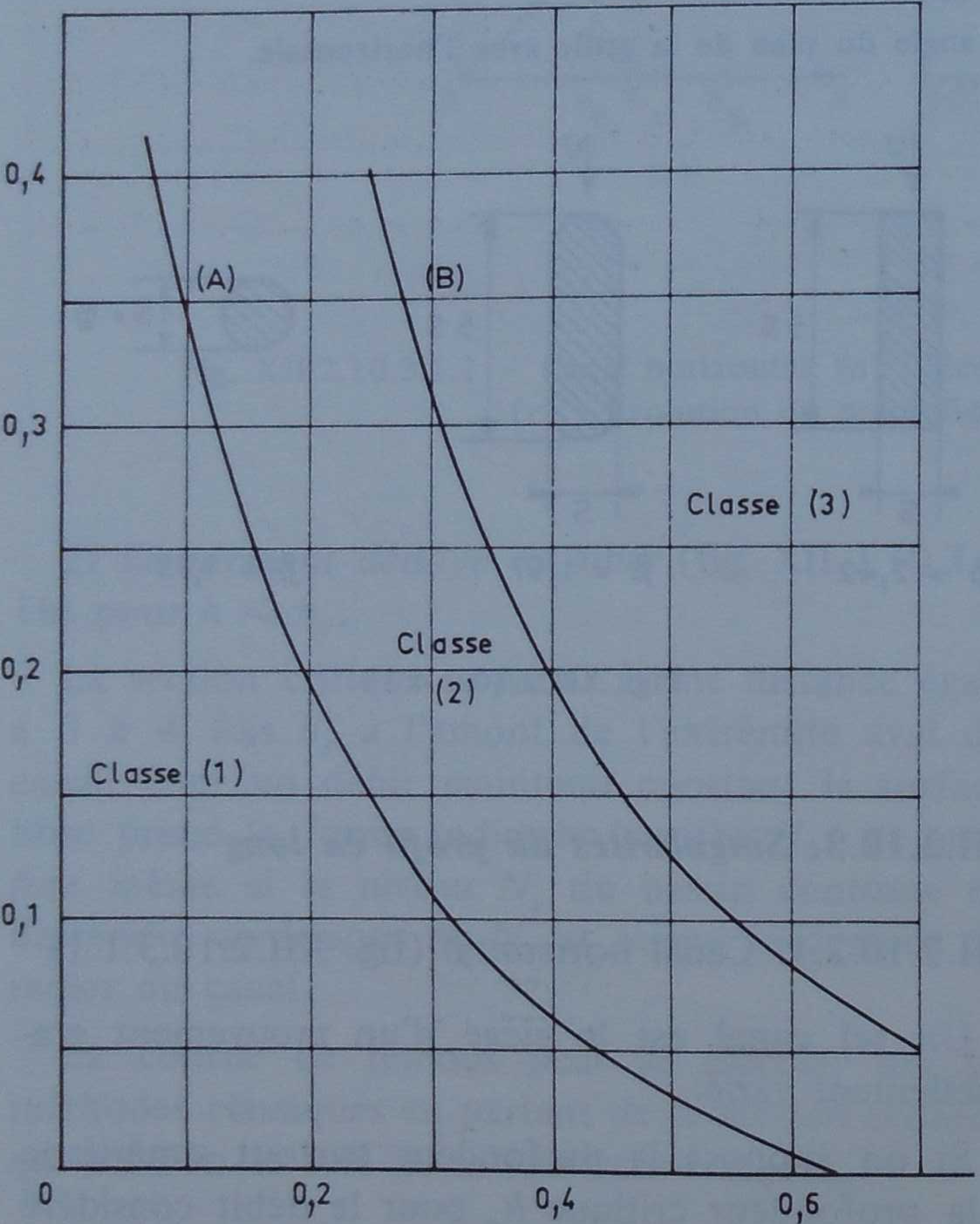


Fig. XII.2.10.2.4.11

Equation de la courbe A : $\sigma = (0{,}97 + 21\,\omega)^{-1} - 0{,}13$

Equation de la courbe B : $\sigma = (0{,}9 - 2{,}5\,\omega)^2 + 0{,}05$

avec $\omega = \dfrac{U_2^2}{2gh_2}$

XII.2.10.2.4.3. Affouillements et phénomènes alternés dûs aux piles

Des phénomènes d'*érosion* du lit se produisent autour des piles (cratère de profondeur accentuée à l'amont et décroissante vers l'aval).

Par ailleurs les piles peuvent donner naissance à des *tourbillons alternés* qui se détachent périodiquement des piles à l'aval en imprimant un balancement au sillage. Des études sur modèle réduit effectuées par M. Crausse (1945) sur des piles arrondies en demi-cercle à l'amont et à l'aval ont montré que la période T des tourbillons alternés était liée à l'épaisseur e des piles et à la vitesse moyenne U du courant par la relation $e = 0{,}27\ UT$ pour un allongement des piles au moins égal à 2 et un nombre de Reynolds supérieur à 7.500.

Parfois on observe un phénomène de *résonance* avec la période propre du liquide circulant autour des piles ce qui provoque, dans certains cas, des oscillations en masse du liquide susceptibles de compromettre la stabilité des piles.

On peut supprimer les tourbillons alternés en adoptant des piles à profil allongé en pointe vers l'aval.

XII.2.10.2.4.4. Calcul du remous pour les petits ouvrages

Pour des ponceaux ou petits ouvrages transversaux d'une seule travée et comportant simplement deux piédroits on peut utiliser la formule approchée suivante :

$$y = (C_1 + C_2 + C_3)\,\frac{U^2}{2g}$$

ou

$$U = \mu\,\sqrt{2gy} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{C_1 + C_2 + C_3}}$$

dans laquelle :

y remous dû au passage du pont (m) ;

U vitesse moyenne sous le pont (m/s) ;

C_1 coefficient de perte de charge à l'entrée ;

C_2 coefficient de perte de charge sous le pont ;

C_3 coefficient de perte de charge à la sortie.

Valeurs de C_1

Pour des piédroits rectangulaires : $C_1 = 0{,}5$

Pour des piédroits arrondis : $C_1 = 0{,}2$

Valeurs de C_2

Elles se déduisent de la formule

$$C_2 = \frac{2gL}{C^2 R}$$

L longueur du pont (dans le sens du courant) (m) ;

C coefficient de Chézy à la traversée de l'ouvrage ;

R rayon hydraulique moyen de la section mouillée sous le pont.

Valeurs de C_3

$$C_3 = 1 - \left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2$$

avec

Ω section mouillée sous le pont ;

Ω' section mouillée à l'aval du pont.

Pour les *ouvrages ordinaires* on peut prendre pour valeurs du coefficient $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{C_1 + C_2 + C_3}}$ les chiffres suivants :

– pour de très petits ponceaux : $\mu = 0{,}8$.

– pour des ponceaux dont la longueur mesurée dans la direction du courant excède 20 à 30 m : $\mu = 0{,}7$.

Lorsque la perte de charge due au frottement (coefficient C_2) peut être négligée (cas des petits ouvrages) on peut prendre pour μ les valeurs suivantes :

– Si le radier de l'ouvrage est à la même cote que le fond du canal :

– piédroits rectangulaires : $\mu = 0{,}80$

– piédroits arrondis : $\mu = 0{,}90$

– Si le radier de l'ouvrage est plus élevé que le fond du canal :

– seuil et piédroits rectangulaires : $\mu = 0{,}72$

– seuil arrondi et piédroits rectangulaires : $\mu = 0{,}76$

– seuil et piédroits arrondis : $\mu = 0{,}85$

XII.2.10.2.4.5 Remous à la traversée des grilles

Une grille constituée d'une rangée de barreaux parallèles provoque un remous analogue à celui dû aux piles de pont.

Les formules suivantes permettent de calculer le remous y correspondant à la perte de charge provoquée par les grilles (fig. XII.2.10.2.4.12) :

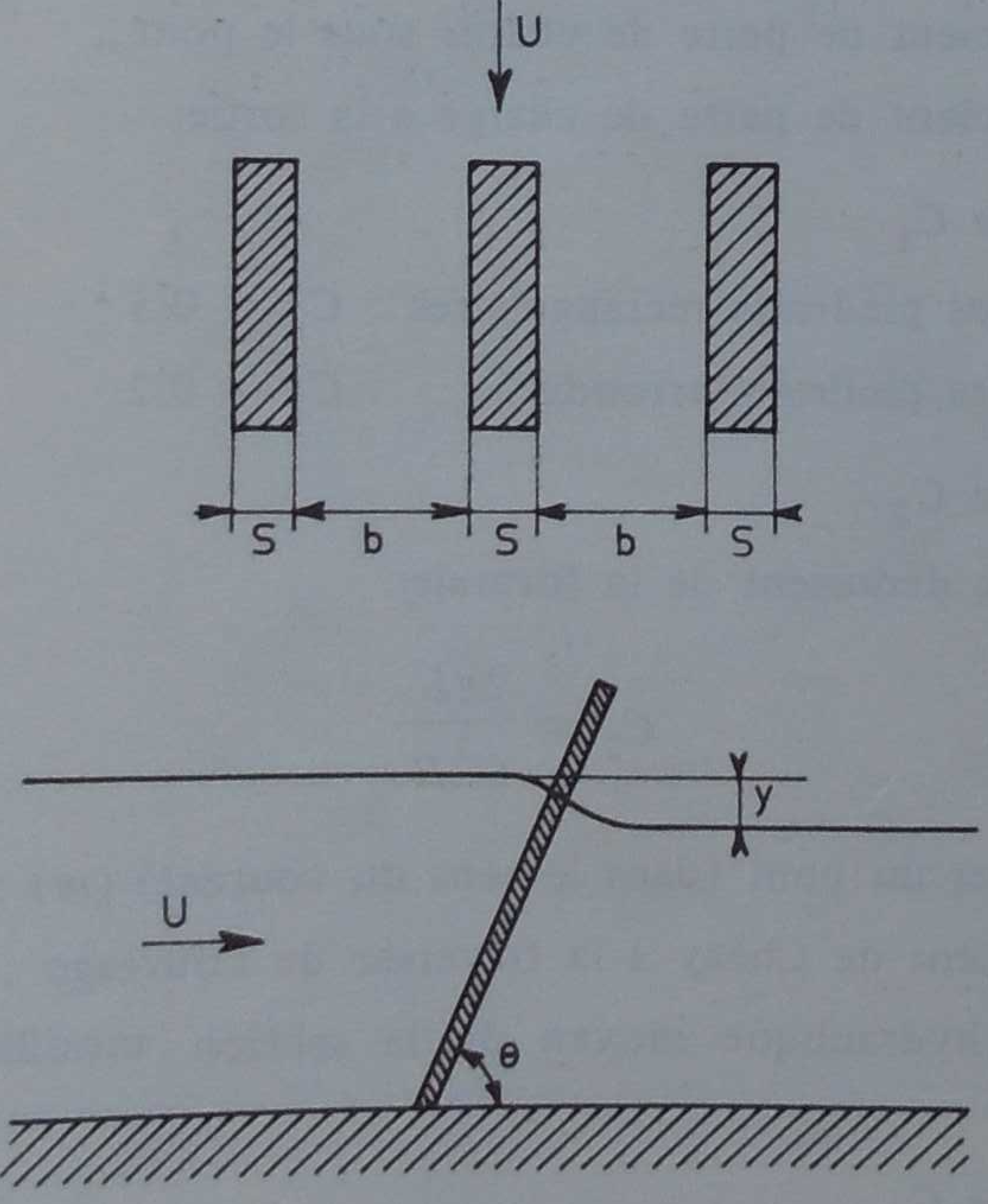


Fig. XII.2.10.2.4.12 – Remous au passage des grilles

$$y = C\,\frac{U^2}{2g}$$

avec

$$C = \beta\left(\frac{S}{b}\right)^{4/3} \sin\theta$$

y remous ou perte de charge (m) ;

U vitesse moyenne du courant (m/s) ;

S épaisseur des barreaux dans le sens transversal (m) ;

b largeur libre entre deux barreaux consécutifs (m) ;

β coefficient fonction de la forme de la section transversale des barreaux ; quelques valeurs sont données par la figure XII.2.10.2.4.13 ;

θ angle du plan de la grille avec l'horizontale.

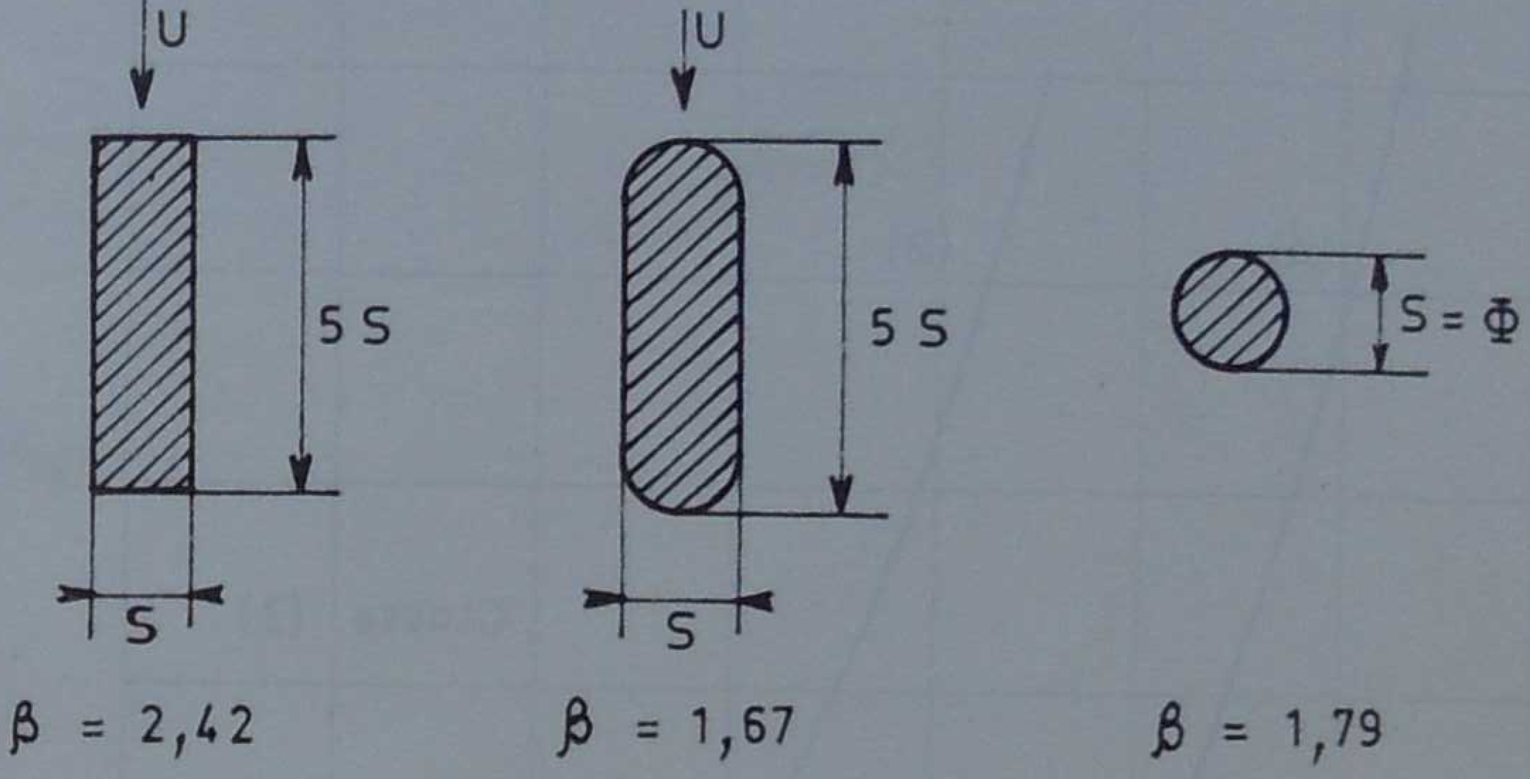


Fig. XII.2.10.2.4.13

XII.2.10.3. *Singularités du profil en long*

XII.2.10.3.1. Canal horizontal (fig. XII.2.10.3.1.1)

Un tel canal est le siège d'un mouvement graduellement varié.

Si on suppose la profondeur partout supérieure à la profondeur critique h_c pour le débit considéré la surface libre est une courbe de remous d'abaissement du type (H_2).

Suivant la profondeur h à l'extrémité aval du canal deux types d'écoulement peuvent se produire :

1) *Ecoulement noyé ou gêné* (fig. XII.2.10.3.1.1a) pour $h > h_c$.

C'est le cas, par exemple, d'un canal horizontal débouchant dans un bassin à niveau maintenu constant et plus élevé que le niveau critique du canal. La courbe de remous (H_2) peut se calculer par les méthodes classiques en partant de la section de repère qui est ici la section aval.

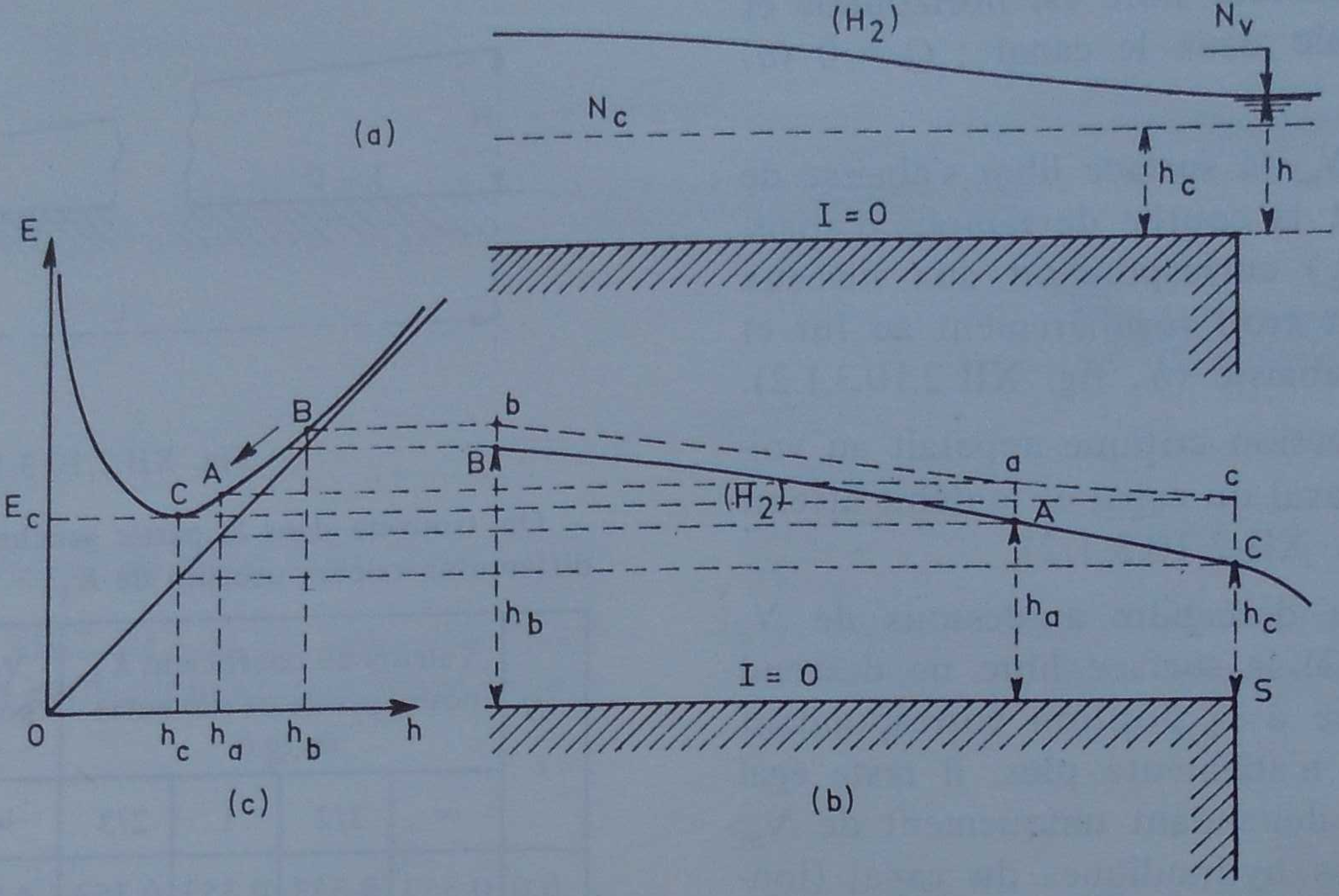


Fig. XII.2.10.3.1.1 – Canal horizontal. (*a*) : Ecoulement noyé ou gêné ; (*b*) : Ecoulement dénoyé ou libre ; (*c*) : Evolution du point figuratif de l'écoulement sur la courbe (E)

2) *Ecoulement dénoyé ou libre* (fig. XII.2.10.3.1.1b) pour $h \leqslant h_c$.

La section critique apparaît à une distance égale à 3 à 4 fois h_c à l'amont de l'extrémité aval du canal. Pour un débit maintenu constant la surface libre prend la forme indiquée (courbe H_2) et *reste fixe* même si le niveau N_v du bassin continue de descendre au-dessous de N_c et même au-dessous du radier du canal.

La courbe de remous peut se calculer par les méthodes classiques en partant de la section critique qui joue ici le rôle de la section de repère.

A titre d'exemple on a indiqué sur la figure XII.2.10.3.1.1 (*b* et *c*) le procédé graphique de *tracé de la ligne d'énergie* le long du canal (supposé de section constante) en utilisant la courbe (E) ; on vérifie que l'énergie spécifique est bien minimale dans la section critique et a pour valeur $E_c = \dfrac{3}{2} h_c$.

Pour synthétiser tous les types d'écoulement possibles, supposons que par un dispositif approprié on maintienne constant le niveau N_m à l'origine amont du canal et qu'on puisse faire varier le niveau aval N_v du bassin ainsi que le débit du canal (fig. XII.2.10.3.1.2).

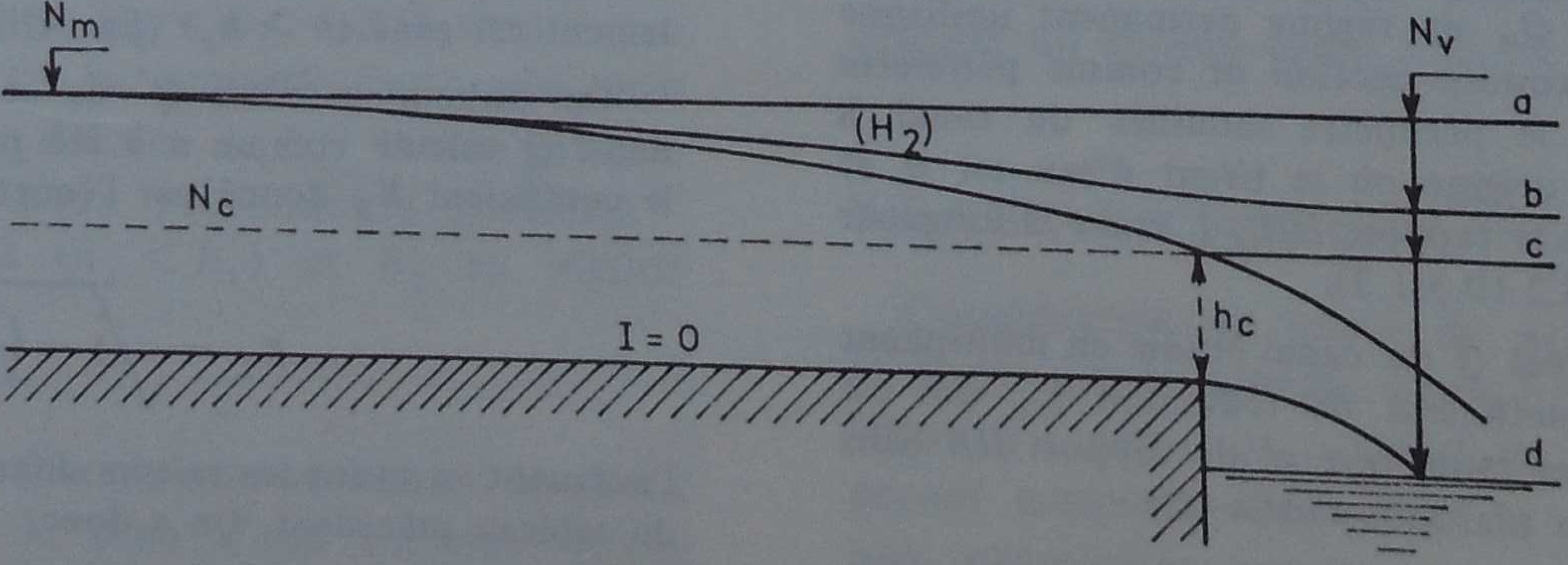


Fig. XII.2.10.3.1.2

Pour $N_v = N_m$ la surface libre est horizontale et aucun débit ne circule dans le canal ; $Q = 0$ (a, fig. XII.2.10.3.1.2).

Pour $N_c < N_v < N_m$ la surface libre s'abaisse de N_m à N_v en réalisant la courbe de remous d'abaissement du type (H_2) correspondant aux niveaux N_m et N_v et le débit croît régulièrement au fur et à mesure que N_v s'abaisse (b, fig. XII.2.10.3.1.2).

Pour $N_v = N_c$ la section critique apparaît au voisinage de l'extrémité aval du canal et le débit atteint la valeur Q_m (c, fig. XII.2.10.3.1.2).

Si N_v continue de descendre au-dessous de N_c (d, fig. XII.2.10.3.1.2) la surface libre ne descend plus ; elle reste fixée à la position correspondant au cas c et le débit n'augmente plus, il reste égal à Q_m débit maximal dépendant uniquement de N_m et des caractéristiques hydrauliques du canal (longueur, section, rugosité des parois). Il apparaît une chute à l'aval de la section critique qui réalise ainsi une coupure hydraulique entre le bassin et le canal.

Nous retrouverons un phénomène analogue à l'occasion de l'étude du déversoir à crête épaisse (principe du débit maximal) (§ XII.2.10.3.4).

Calcul du débit des petits canaux en terre de section transversale trapézique et à fond horizontal par la méthode simplifiée de Porchet.

Pour calculer le débit des petits canaux en terre de section transversale trapézique et à fond horizontal, Porchet a proposé une méthode approchée qui est exposée dans le fascicule 61 des Annales du Ministère de l'Agriculture (année 1932).

Nous en extrayons simplement ici le mode de calcul du débit.

Deux cas sont à considérer suivant que l'écoulement est *libre* ou *gêné* (c'est-à-dire *dénoyé* ou *noyé*).

1) *Ecoulement libre ou dénoyé*

On calcule le débit Q_0 en régime permanent uniforme d'un canal qui aurait comme section et comme périmètre mouillés la section et le périmètre mouillés du canal à fond horizontal à son origine où le tirant d'eau est H et qui aurait comme pente le rapport H/L, L étant la longueur totale du canal (fig. XII.2.10.3.1.3).

On obtient le débit réel Q du canal étudié en multipliant le débit Q_0 par un coefficient de réduction K_1 qui est fonction de la pente des talus $\operatorname{tg}\alpha$ et du rapport H/l dans lequel l est la largeur du plafond, c'est-à-dire :

$$Q = K_1 Q_0 \quad \text{avec} \quad K_1 = f\left(\operatorname{tg}\alpha, \frac{H}{l}\right).$$

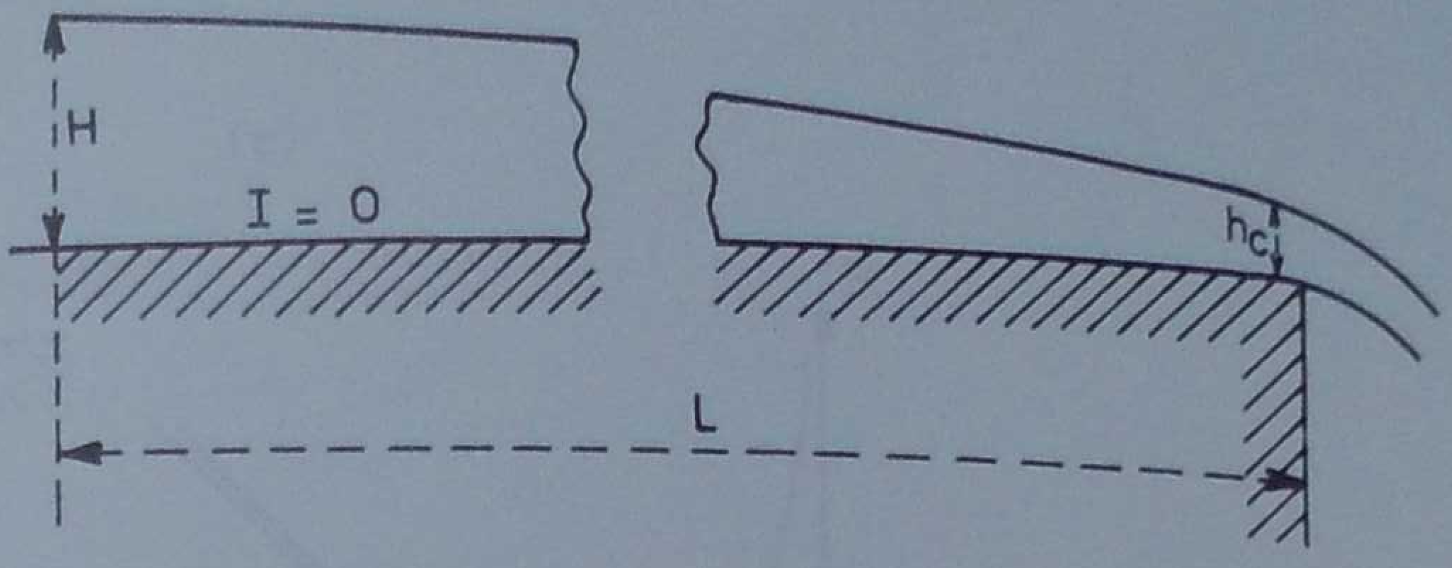


Fig. XII.2.10.3.1.3

On trouvera dans la partie gauche du tableau suivant les différentes valeurs usuelles de K_1.

$\frac{H}{l}$	Valeurs du coefficient K_1 pour les valeurs suivantes de $\operatorname{tg}\alpha$				Valeurs de l'exposant m pour les valeurs suivantes de $\operatorname{tg}\alpha$			
	∞	3/2	1	2/3	∞	3/2	1	2/3
0,0	0,353	0,353	0,353	0,353	4,00	4,00	4,00	4,00
0,1	0,360	0,359	0,360	0,360	3,83	4,03	4,10	4,19
0,2	0,367	0,363	0,361	0,360	3,71	4,08	4,21	4,38
0,3	0,372	0,364	0,362	0,359	3,62	4,15	4,31	4,56
0,4	0,375	0,365	0,363	0,357	3,55	4,22	4,41	4,71
0,5	0,377	0,365	0,362	0,355	3,50	4,29	4,50	4,84
0,6	0,380	0,365	0,362	0,354	3,45	4,35	4,58	4,96
0,7	0,382	0,365	0,361	0,352	3,42	4,41	4,65	5,06
0,8	0,384	0,365	0,360	0,350	3,38	4,47	4,71	5,15
0,9	0,385	0,365	0,360	0,349	3,36	4,52	4,77	5,22
1,0	0,387	0,365	0,359	0,348	3,33	4,57	4,83	5,29
1,5	0,392	0,362	0,356	0,343	3,25	4,78	5,04	5,52
2,0	0,395	0,358	0,354	0,340	3,20	4,94	5,19	5,65
3,0	0,399	0,354	0,349	0,338	3,14	5,16	5,38	5,79
4,0	0,400	0,351	0,346	0,337	3,11	5,30	5,50	5,86
5,0	0,402	0,348	0,345	0,336	3,09	5,40	5,58	5,89
6,0	0,402	0,347	0,343	0,335	3,08	5,48	5,64	5,92
7,0	0,403	0,345	0,342	0,335	3,07	5,54	5,68	5,93
8,0	0,403	0,344	0,342	0,334	3,06	5,58	5,71	5,94
9,0	0,404	0,343	0,340	0,334	3,05	5,62	5,74	5,95
10,0	0,404	0,343	0,340	0,334	3,05	5,65	5,77	5,96
∞	0,418	0,333	0,333	0,333	3,00	6,00	6,00	6,00

2) *Ecoulement gêné ou noyé*

Appelons h le tirant d'eau à l'aval dans le cas où l'écoulement est gêné ($h > h_c$) (fig. XII.2.10.3.1.4).

On obtient le débit Q' de ce canal en multipliant le débit Q calculé comme il a été précédemment indiqué par le coefficient K_2 donné par l'équation

$$K_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^m}$$

l'exposant m ayant les valeurs données dans la partie droite du tableau précédent. On a donc

$$Q' = K_2 Q = K_1 K_2 Q_0$$

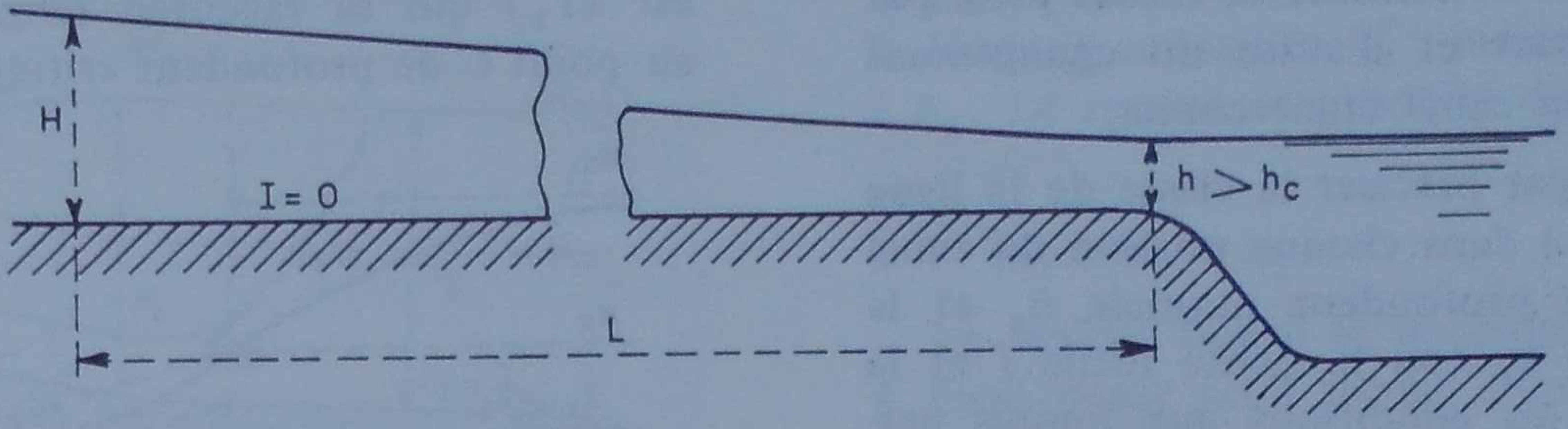


Fig. XII.2.10.3.1.4

XII.2.10.3.2. *Relèvement du fond d'un canal* (seuil)

Supposons (fig. XII.2.10.3.2) le fond du canal horizontal et le seuil suffisamment progressif et convenablement profilé pour n'introduire aucune perte de charge ; la ligne d'énergie est donc horizontale.

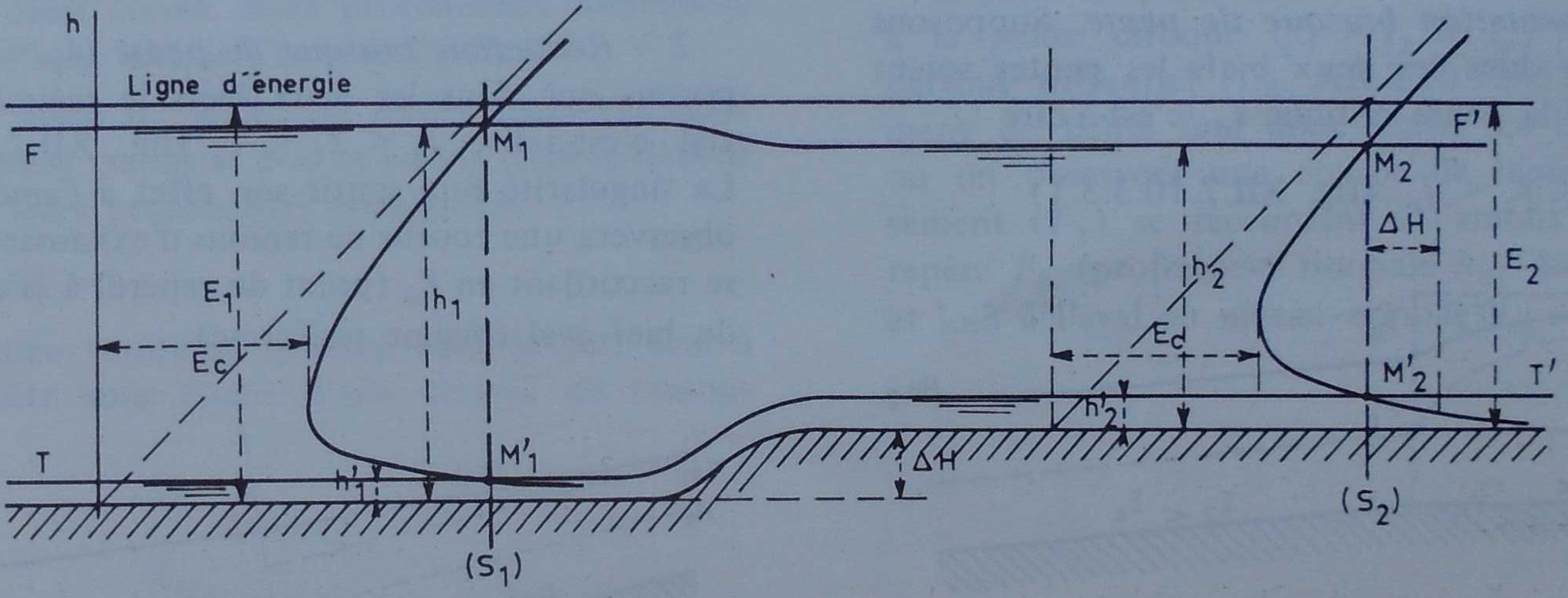


Fig. XII.2.10.3.2 – Ecoulement au passage d'un seuil

Dans une section (S_1) à l'amont du seuil l'énergie spécifique est E_1 à laquelle correspondent deux profondeurs possibles : h_1 en régime fluvial et h'_1 en régime torrentiel.

Après le passage du seuil, dans une section (S_2), la ligne d'énergie n'a pas changé mais l'énergie spécifique a diminué de la hauteur du seuil ΔH ; elle a donc pour valeur $E_2 = E_1 - \Delta H$ c'est-à-dire que sur la courbe (E) la nouvelle ordonnée correspond à une abscisse décalée de ΔH vers la gauche. Il y correspond les deux profondeurs possibles : h_2 en régime fluvial $(h_2 < h_1)$ et h'_2 en régime torrentiel $(h'_2 > h'_1)$.

En conséquence :

– si le régime est fluvial, non seulement le tirant d'eau diminue mais le plan d'eau s'abaisse (ligne d'eau FF'),

– si le régime est torrentiel, le plan d'eau s'élève et le tirant d'eau augmente (ligne d'eau TT')

L'écoulement n'est évidemment possible que si la hauteur du seuil ΔH n'abaisse pas l'énergie spécifique au-dessous de l'énergie spécifique critique E_c. Pour franchir un seuil de hauteur donnée ΔH, l'écoulement doit donc posséder une énergie spécifique au moins égale à $E_c + \Delta H$.

XII.2.10.3.3. *Changement brusque de pente*

Considérons un canal de section constante dont la pente longitudinale varie brusquement. Les biefs situés à l'amont et à l'aval du changement de pente seront supposés uniformes et de grande longueur ; aux extrémités amont et aval du canal le régime est donc uniforme.

Proposons-nous de déterminer la forme prise par la ligne d'eau de part et d'autre du changement de pente, le débit du canal étant connu.

On commencera par préciser la classe de la ligne d'eau (F, T, C, etc.) dans chaque portion du canal en y comparant la profondeur normale h_n et la profondeur critique h_c (ou la pente réelle I et la pente critique I_c), les conditions aux limites permettront de préciser le type de courbe correspondant (F_1, F_2, T_1, T_2, . . .). Rappelons que la profondeur critique qui ne dépend que du débit reste donc la même de part et d'autre du changement de pente. Par contre la profondeur normale varie en sens inverse de la pente du fond.

Prenons quelques exemples :

1 – *Augmentation brusque de pente.* Supposons d'abord que dans les deux biefs les pentes soient inférieures à la pente critique I_c, c'est-à-dire :

$$I_1 < I_2 < I_c \quad \text{(fig. XII.2.10.3.3.1)}$$

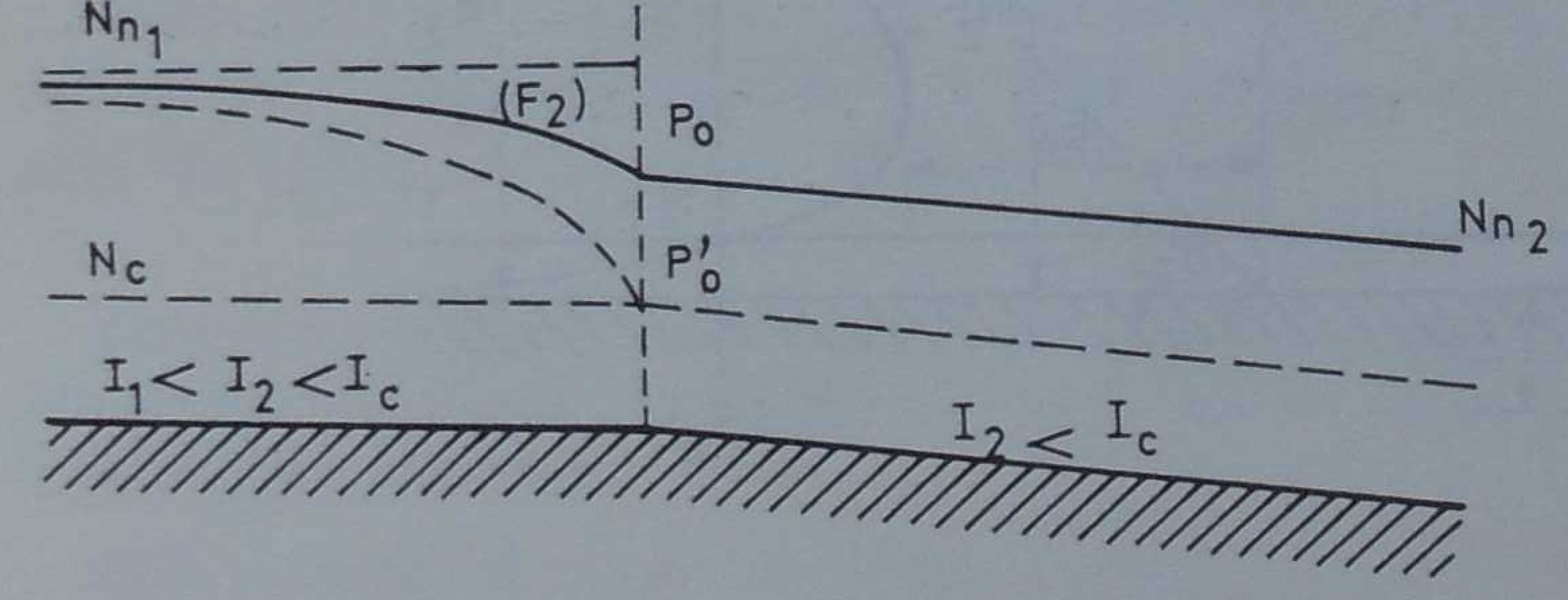


Fig. XII.2.10.3.3.1

Le régime est fluvial dans les deux biefs et l'action de la singularité se fera sentir *à l'amont* du changement de pente.

Le niveau normal N_n est partout supérieur au niveau critique N_c, donc la ligne d'eau sera de la classe (F). Comme la profondeur normale h_{n_2} dans le tronçon de forte pente est inférieure à h_{n_1} (tronçon amont de faible pente) la surface libre descend obligatoirement et la courbe de remous est donc (F_2) asymptote à N_{n_1} à l'amont et se raccordant en P_0 (point de repère) à la droite N_{n_2} du bief aval (régime uniforme).

Si $I_2 = I_c$, N_{n_2} se confond avec N_c dans le bief aval et P_0 vient en P'_0, la section critique apparaît en P'_0.

Si enfin $I_2 > I_c$ (fig. XII.2.10.3.3.2) le régime est torrentiel dans le bief aval où la ligne d'eau est (T_2) qui se raccorde tangentiellement à (F_2) au point C de profondeur critique (point de repère).

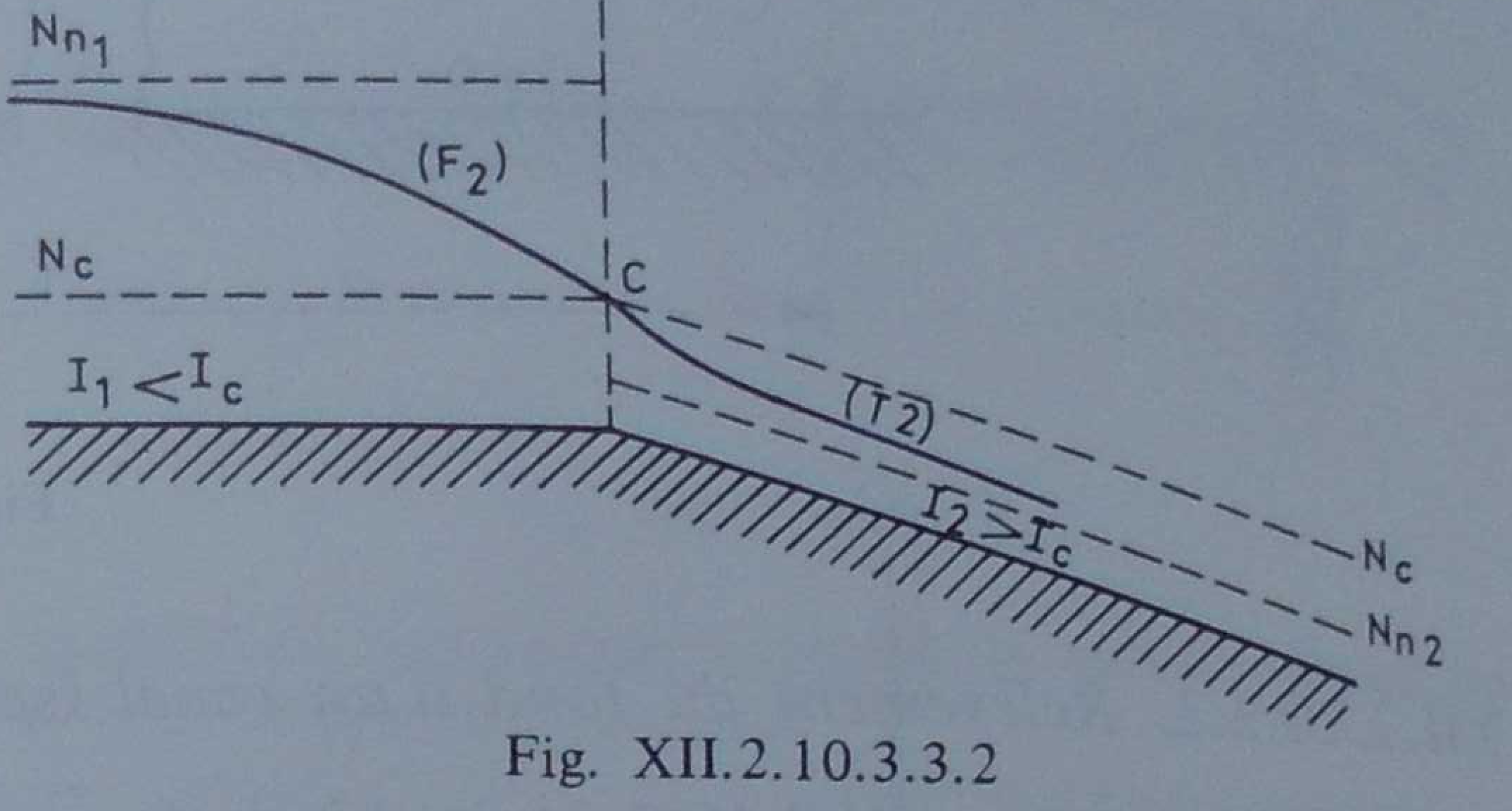


Fig. XII.2.10.3.3.2

Dans ce cas la singularité fait sentir son effet sur la ligne d'eau *à l'amont* (régime fluvial) *et à l'aval* (régime torrentiel).

2 – *Réduction brusque de pente* ($I_2 < I_1$). Supposons que dans les deux biefs le régime soit fluvial c'est-à-dire $I_2 < I_1 < I_c$ (fig. XII.2.10.3.3.3). La singularité fera sentir son effet *à l'amont* où on observera une courbe de remous d'exhaussement (F_1) se raccordant en P_0 (point de repère) à la droite N_{n_2} du bief aval (régime uniforme).

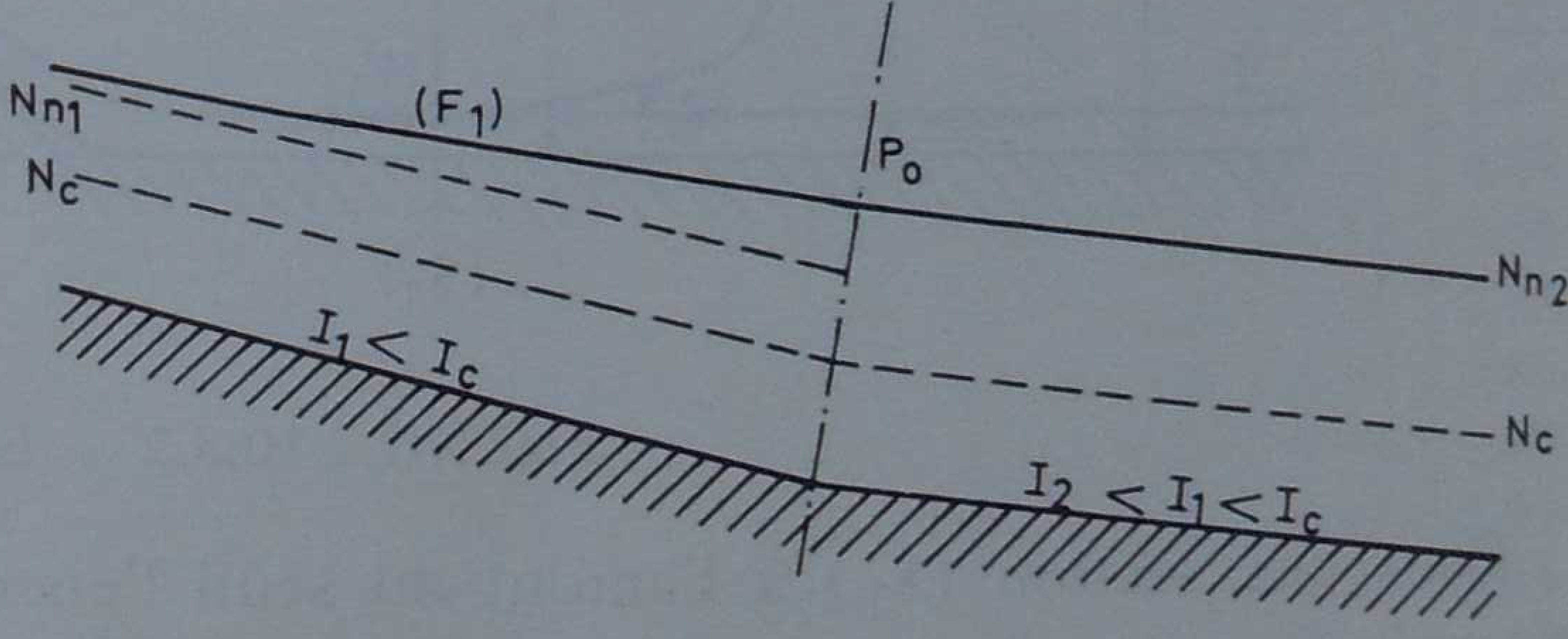


Fig. XII.2.10.3.3.3

Supposons maintenant que la pente amont I_1 soit supérieure à la pente critique I_c et que la pente aval I_2 soit inférieure à I_c (fig. XII.2.10.3.3.4) c'est-à-dire :

$$I_2 < I_c < I_1$$

Les niveaux normaux s'en déduisent facilement. La surface libre doit obligatoirement franchir le niveau critique en croissant, il y aura donc nécessairement un *ressaut*.

Autrement dit la singularité fera sentir ses effets à une très faible distance à l'amont où le régime est torrentiel et à l'aval où il est fluvial ; le régime ne sera plus graduellement varié mais brusquement varié ce que traduit le *ressaut*.

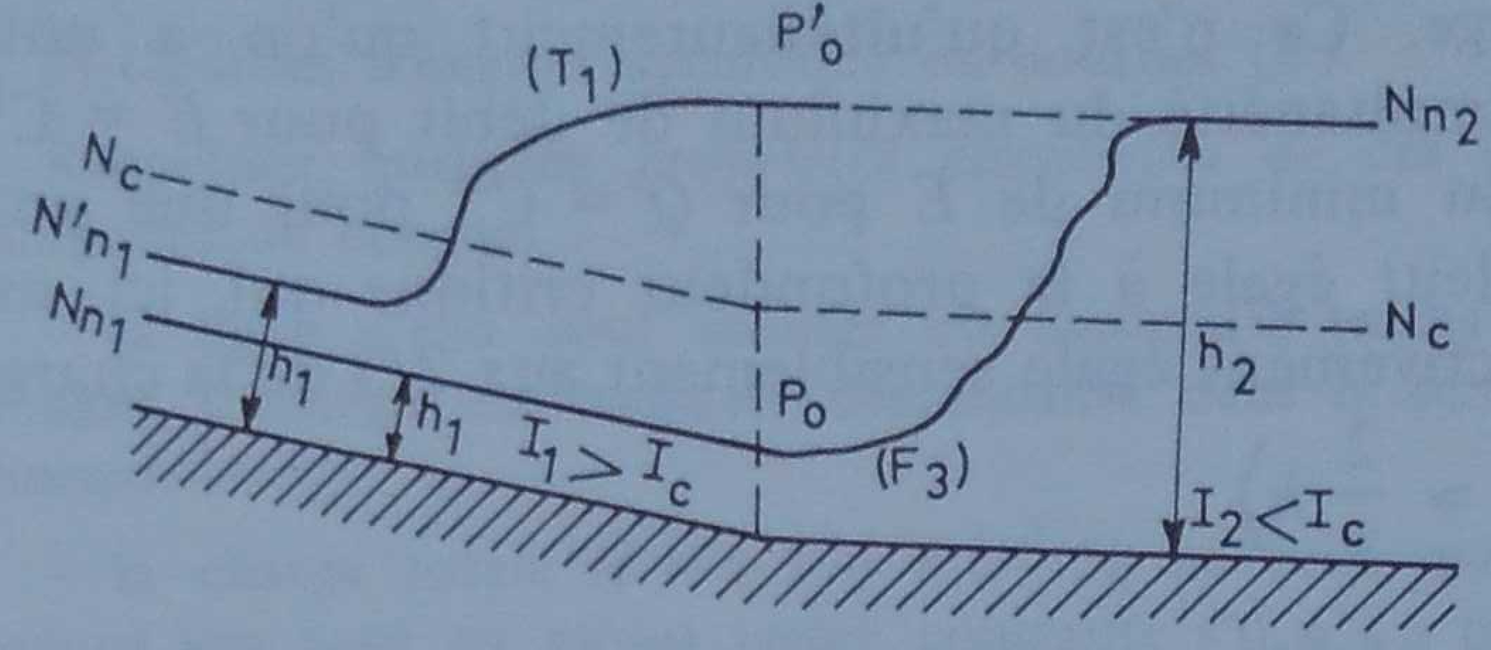


Fig. XII.2.10.3.3.4

Sa *position* dépendra des grandeurs relatives des profondeurs normales et conjuguées dans les deux biefs ; nous savons en effet que le ressaut nécessite l'existence de deux profondeurs conjuguées et que, pour un débit donné, deux profondeurs conjuguées varient en sens inverse l'une de l'autre.

Soient donc h_1 et h_2 les profondeurs normales dans les biefs amont et aval et soient respectivement h'_1 et h'_2 leurs profondeurs conjuguées.

1er cas : $h'_1 > h_2$

Le régime torrentiel arrivera dans le bief aval à faible pente sous forme d'une courbe de remous (F_3) de manière à augmenter h_1, donc à diminuer la hauteur conjuguée h'_1, jusqu'à ce que h'_1 soit égale à h_2. Le ressaut se produira donc dans le bief aval.

2ème cas : $h'_1 < h_2$

Le régime fluvial se produira dans le bief amont à forte pente sous forme d'une courbe de remous (T_1) de manière à diminuer h_2 pour qu'elle devienne égale à h'_1. Le ressaut se produira donc dans le bief amont.

Dans les deux cas il est possible de situer exactement le ressaut en calculant les courbes de remous (F_3) ou (T_1) à partir du point de repère P_0 ou P'_0 situé au changement de pente.

Si enfin les pentes des deux biefs sont supérieures à la pente critique $(I_1 > I_2 > I_c)$ le régime est partout torrentiel (fig. XII.2.10.3.3.5). Le changement de pente fera donc sentir ses effets *à l'aval* où on observera une courbe de remous d'exhaussement (T_3) se raccordant à l'amont au point de repère P_0 (profondeur normale h_{n_1} du bief amont) et loin à l'aval au niveau normal N_{n_2}.

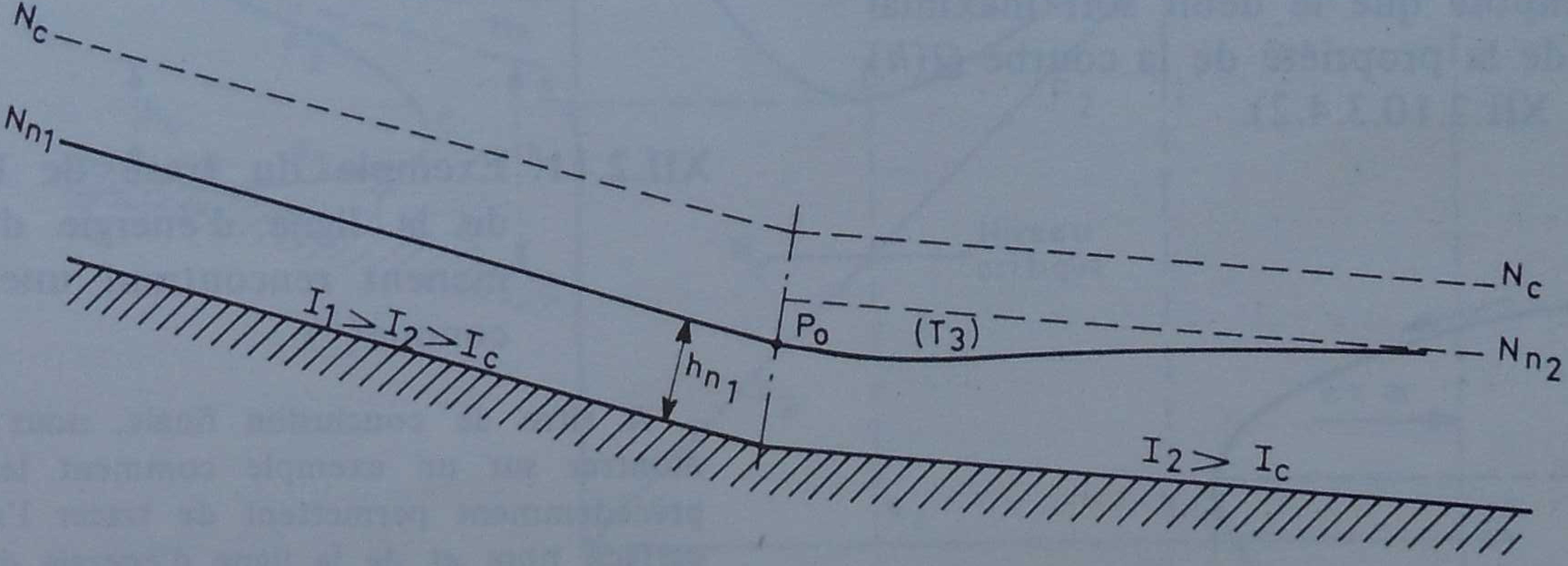


Fig. XII.2.10.3.3.5

XII.2.10.3.4. *Déversoir à crête épaisse horizontale*

Un tel déversoir (fig. XII.2.10.3.4.1) fonctionne comme un canal de faible longueur et de pente quasi nulle et en tous cas inférieure à I_c.

Si l'écoulement est dénoyé la section critique apparaît au voisinage de l'arête aval C ce qui permet d'écrire les relations classiques du régime critique, en raisonnant sur une tranche longitudinale du courant de largeur unité et de débit unitaire q :

$$h_c^3 = \frac{q^2}{g}$$

$$E_c = \frac{3}{2} h_c$$

d'où on déduit :

$$q = 0{,}385 \; E_c \sqrt{2gE_c}$$

Si on néglige les pertes de charge au passage sur le déversoir la ligne d'énergie est horizontale, l'énergie amont H égale E_c et il vient :

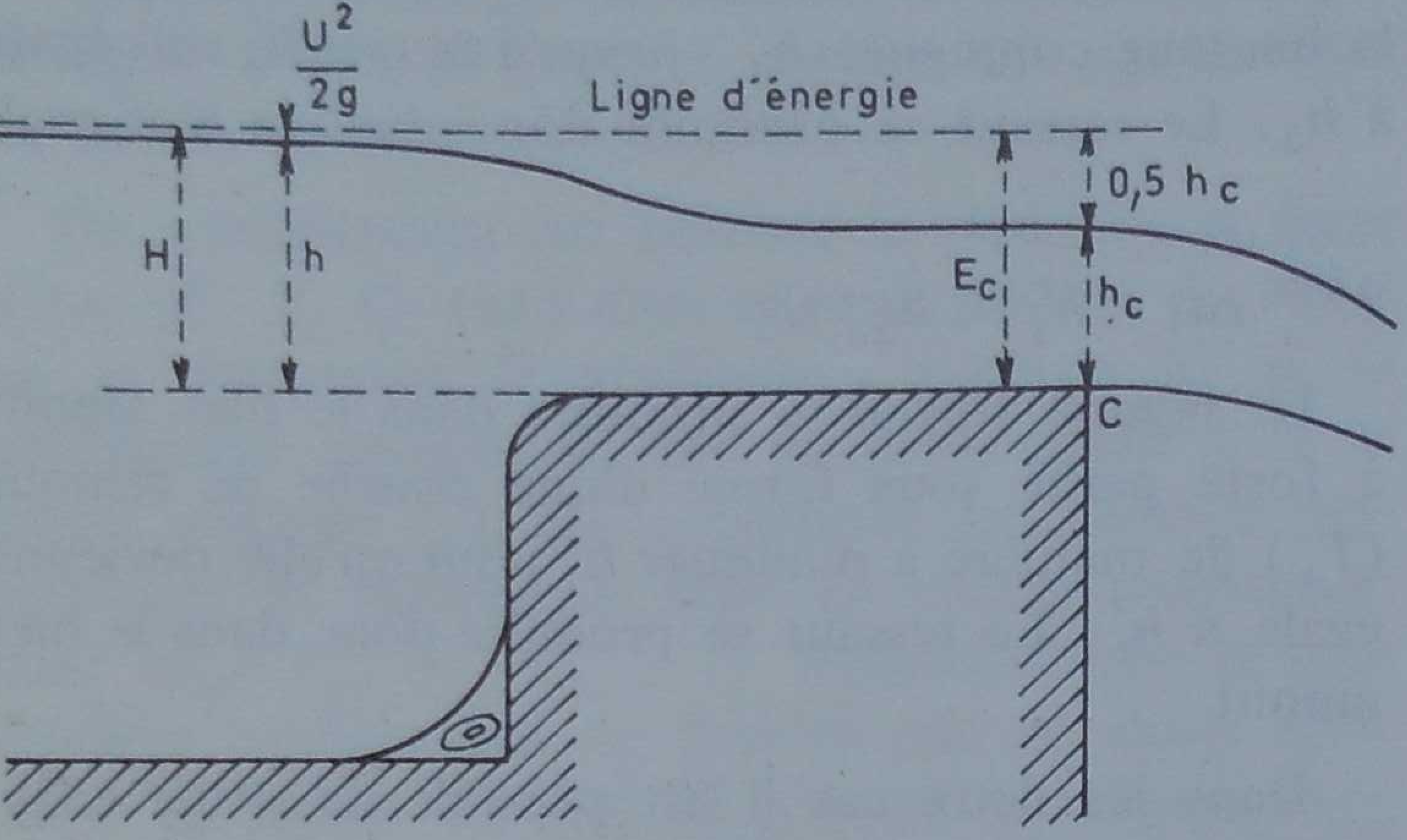


Fig. XII.2.10.3.4.1 – Déversoir à crête épaisse horizontale

$$q = 0{,}385\ H \sqrt{2gH}$$

Enfin, en négligeant la hauteur représentative de la vitesse d'approche soit $U^2/2g$, on a $h = H$ et, en définitive :

$$q = 0{,}385\ h \sqrt{2gh} \qquad [XII.2.10.3.4]$$

Cette formule a été établie lors de l'étude de ce type de déversoir (§ X.2.2) en exprimant que le débit était maximal pour la charge considérée. On retrouve ici ce résultat parce que l'existence de la section critique impose que le débit soit maximal ainsi qu'il résulte de la propriété de la courbe $Q(h)$ à E constant (fig. XII.2.10.3.4.2).

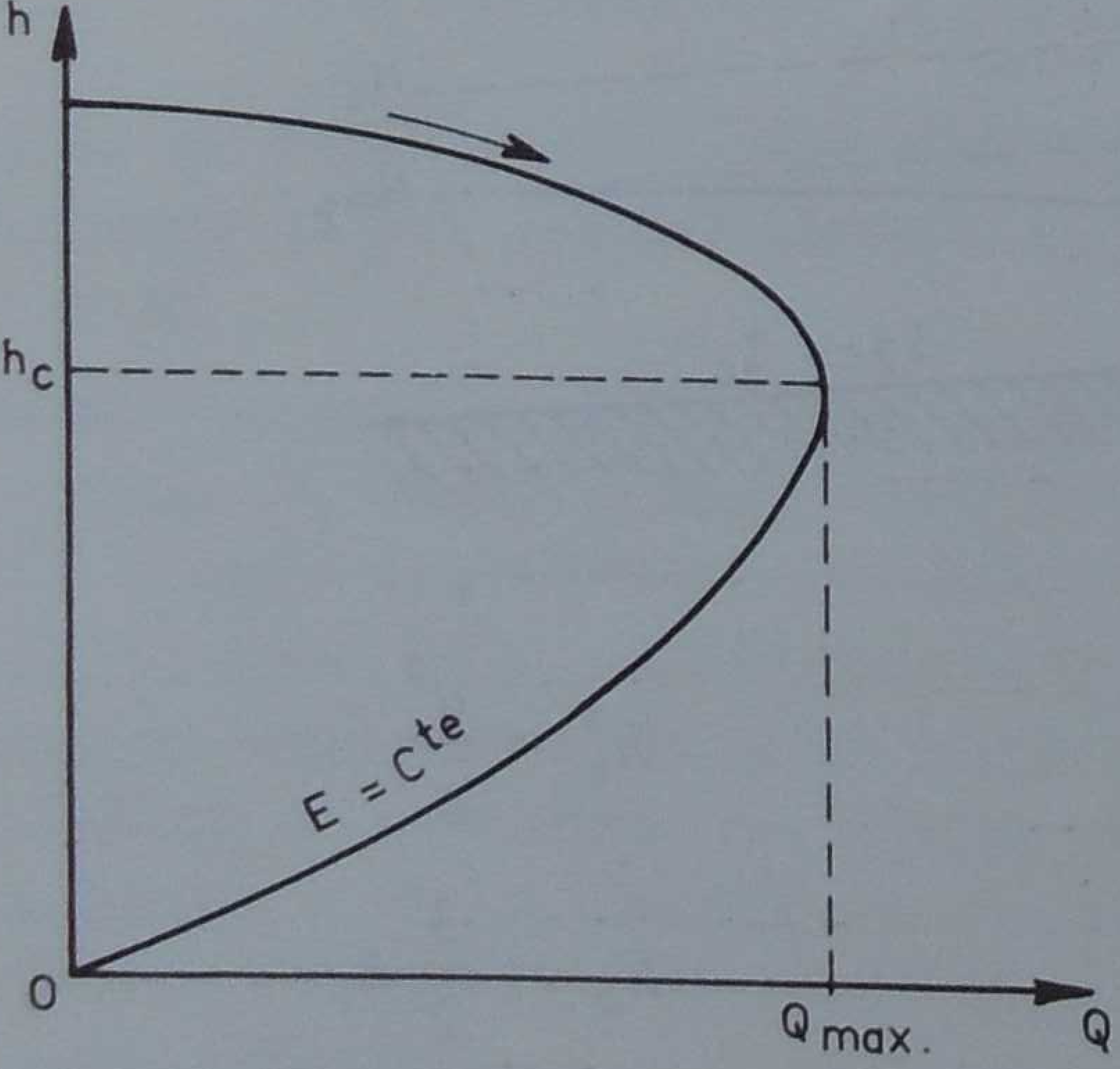


Fig. XII.2.10.3.4.2

En fait, historiquement, ce *principe du débit maximal* a son origine dans une remarque de Bélanger (1850) qui constata sur le déversoir à crête épaisse que le débit était maximal lorsque l'épaisseur de la lame d'eau sur le seuil était égale aux 2/3 de la charge. Ce n'est qu'ultérieurement qu'on a noté la simultanéité du maximum de débit pour $E = C^{te}$ et du minimum de E pour $Q = C^{te}$ pour une profondeur égale à la profondeur critique qui, ici, est effectivement égale sensiblement aux 2/3 de la charge $\left(h_c \simeq \frac{2}{3} h\right)$.

En réalité, en raison des approximations faites la formule exacte du débit est un peu différente de la formule théorique [XII.2.10.3.4] ; nous savons qu'on l'écrit généralement :

$$q = mh \sqrt{2gh}$$

m étant un coefficient fonction de h et des caractéristiques du déversoir et dont quelques valeurs ont été données lors de l'étude de ce type de déversoir (§ X.2.2).

Bien entendu si le niveau aval s'élève au-dessus du niveau critique au droit du seuil, la section critique disparaît, il n'y a plus de "coupure hydraulique" entre les deux biefs et l'aval réagit sur l'amont, c'est-à-dire que le débit du déversoir dépend à la fois des cotes des niveaux amont et aval ; le déversoir et l'écoulement sont noyés.

XII.2.11. Exemple du tracé de la ligne d'eau et de la ligne d'énergie d'un courant permanent rencontrant une singularité quelconque(1)

A titre de conclusion finale, nous nous proposons de montrer sur un exemple comment les notions exposées précédemment permettent de tracer l'allure générale de la surface libre et de la ligne d'énergie d'un courant rencontrant une ou plusieurs singularités.

La méthode a un caractère essentiellement qualitatif, elle permet d'avoir une vue d'ensemble sur l'évolution de ces deux lignes ; elle oriente ensuite la conduite des calculs si cette seconde étape vers la solution complète du problème est jugée nécessaire.

Ce tracé de la ligne d'eau et de la ligne d'énergie se fera commodément à partir des deux groupes de courbes suivantes :

---

(1) Cet exemple est tiré d'une étude de M. Blanchet "Sur le problème des remous et des pertes de charge produits par les singularités dans les canaux et rivières" – *La Houille Blanche* – 1945 – N° 1.

1) Courbes de remous du mouvement graduellement varié,

2) Courbes d'énergie spécifique ou courbes (E).

Rappelons quelques *propriétés essentielles* de ces deux catégories de courbes :

– la ligne d'eau peut monter ou descendre tandis que la ligne d'énergie est toujours descendante dans le sens du courant,

– la charge totale $H = z + h + U^2/2g$ ne peut que diminuer (ou tout au moins rester constante s'il n'y a pas de perte d'énergie), l'énergie spécifique $E = h + U^2/2g$ peut varier d'une manière quelconque,

– la courbe (E) ne vaut que pour une section ou pour un groupe de sections de caractéristiques uniformes. Si la ligne d'eau dans ces sections n'est pas parallèle au fond le point figuratif se déplace sur la courbe (E).

Pour faciliter l'étude il sera commode d'indiquer sur la courbe (E) :

1) Le sens de déplacement du point figuratif lorsqu'on suit le courant, comme nous l'avons fait lors de l'étude qualitative et systématique des courbes de remous (§ XII.2.6.3) ;

2) Les pentes I' de la surface libre,
J de la ligne d'énergie,
I du fond du canal.

La figure XII.2.11.1 donne précisément un exemple de ce genre pour $I < I_c$.

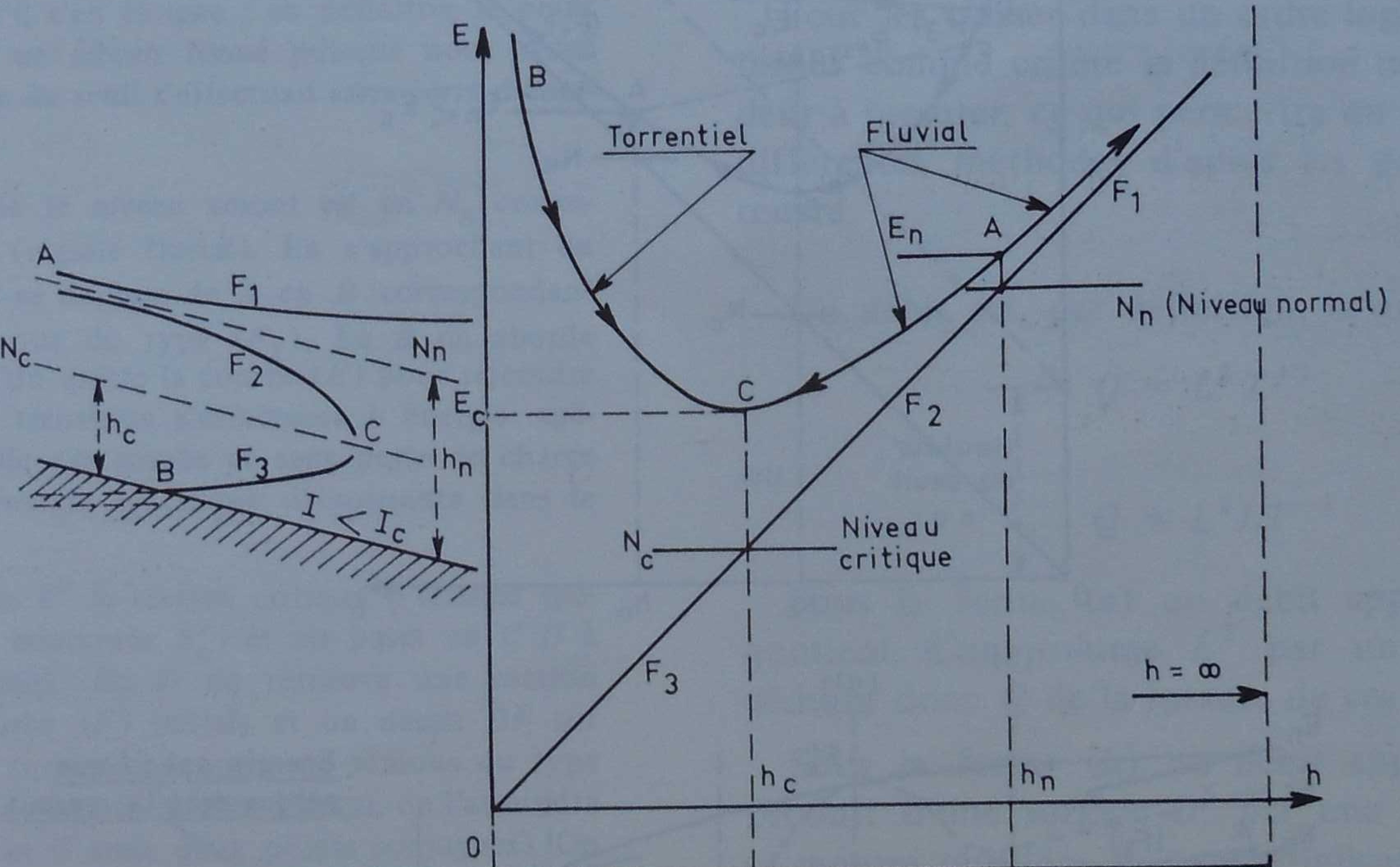
Supposons par exemple qu'on parte du point A représentatif du régime uniforme :

$$h = h_n \quad ; \quad \frac{dh}{ds} = 0 \quad ; \quad I' = I = J \quad ; \quad E = E_n .$$

Si on se déplace à droite de A sur la courbe (E) on sait qu'on se trouve sur la branche de courbe correspondant au remous d'exhaussement de type (F_1) et on en déduit immédiatement :

$$\frac{dh}{ds} > 0 \; ; \; I' < I \; ; \; \frac{dE}{dh} > 0 \; ; \; \frac{dE}{ds} > 0 \; ; \; h > h_n \; ; \; I > J.$$

$$\text{Lorsque } h \to \infty \; ; \; \frac{dh}{ds} \to I \; ; \; I' \to 0 \; ; \; E \to \infty \text{ et } J \to 0 .$$



En se déplaçant dans le sens de l'écoulement								
Ligne d'eau	h	0	croît	h_c	décroît	h_n	croît	∞
	$\frac{dh}{ds}$		> 0	+∞ / −∞	< 0	0	> 0	I
	I'		décroît	−∞ / +∞	croît	I	décroît	0
Déplacement sur (E)			F_3 →		← F_2		F_1 →	
Ligne d'énergie	E	∞	décroît	E_c	décroît	E_n	croît	∞
	$\frac{dE}{ds}$		< 0		< 0		> 0	
	J		> I		> I	I	< I	0

Fig. XII.2.11.1

Si on se déplace à gauche de A sur la courbe (E) on sait qu'on se trouve sur la branche de courbe correspondant au remous d'abaissement de type (F_2) et on en déduit immédiatement :

$$\frac{dh}{ds} < 0 \; ; \; I' > I \; ; \; \frac{dE}{dh} > 0 \; ; \; \frac{dE}{ds} < 0 \; ; \; h < h_n \; ; \; I < J.$$

Lorsque $h \to h_c$; $\frac{dh}{ds} \to -\infty$; $I' \to \infty$; $E \to E_c$ (valeur minimale).

Si enfin on part du point B représentatif du régime torrentiel on se déplace vers C sur la courbe (E) et on sait qu'on se trouve sur la branche de courbe correspondant au remous d'exhaussement du type (F_3) ; on en déduit immédiatement :

$$\frac{dh}{ds} > 0 \; ; \; I' < I \; ; \; \frac{dE}{dh} < 0 \; ; \; \frac{dE}{ds} < 0 \; ; \; h < h_n \; ; \; I < J.$$

Ceci étant posé, les résultats de l'étude dépendront essentiellement des valeurs relatives de la pente du fond I et de la pente critique I_c ainsi que du rapport de l'énergie spécifique normale E_n à l'énergie spécifique critique E'_c au point le plus haut ou le plus étroit de la singularité, mais le principe du tracé des lignes d'eau et d'énergie reste indépendant des valeurs adoptées.

Considérons à titre d'exemple un canal de section rectangulaire uniforme de pente I inférieure à la pente critique I_c et comportant un seuil de hauteur a au-dessus du fond du canal (fig. XII.2.11.2).

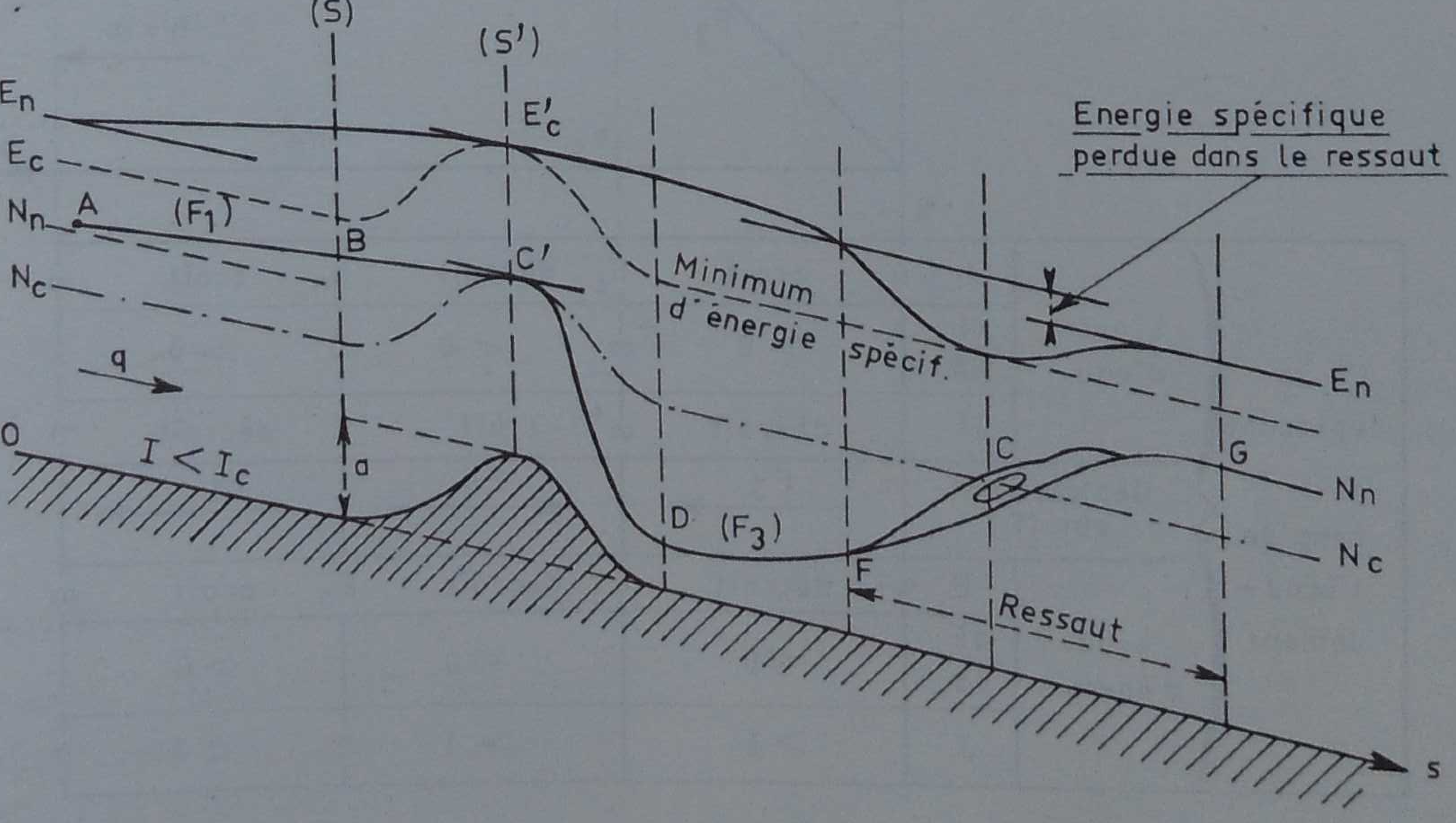


Fig. XII.2.11.2

Supposons que a soit tel que l'énergie spécifique critique E'_c au-dessus du seuil soit supérieure à l'énergie spécifique normale $E_n = h_n + \frac{U_n^2}{2g}$, soit :

$$E'_c = a + \frac{3}{2}h_c = a + \frac{3}{2g^{1/3}}q^{2/3} > E_n.$$

Supposons enfin que la passage du seuil s'effectue sans perte d'énergie spécifique.

Soient (S) une section transversale dans la partie uniforme du canal et (S') la section passant par le sommet du seuil. Ces deux sections ayant même largeur sont caractérisées par une même courbe (E). Le diagramme est cependant plus parlant si on rapporte E et h, non au fond de chaque section comme on le fait d'habitude, mais à la droite générale du fond Os. Dans ces conditions la courbe (E') de la section (S') se déduit de la courbe (E) de la section (S) par une translation parallèle à l'axe des E et définie par le vecteur $\vec{a}$ (hauteur du seuil).

Le point figuratif se déplace de (E) vers (E') lorsque le courant aborde le seuil en s'approchant du sommet et de (E') en (E) lorsqu'il s'en éloigne ; en définitive le point figuratif décrira ainsi un circuit fermé puisque nous avons supposé que le passage du seuil s'effectuait sans perte d'énergie spécifique.

En régime uniforme le niveau amont est en N_n correspondant au point A (régime fluvial). En s'approchant du seuil le point figuratif se déplace de A en B correspondant à une courbe de remous du type (F_1). En B on aborde le seuil, c'est-à-dire qu'on quitte la courbe (E) pour rejoindre la courbe (E') ; cette transition s'effectuera à énergie spécifique constante si elle est courte et sans perte de charge singulière, avec une énergie spécifique décroissante dans le cas contraire.

On traverse ainsi en C' la section critique (l'énergie spécifique passe par un minimum E'_c) et on passe en $C'D$ à un écoulement torrentiel. En D on retrouve une section (S) c'est-à-dire la courbe (E) initiale et on décrit DF sur la branche de régime torrentiel (courbe de remous du type F_3). Le régime fluvial devant se rétablir à l'aval, on l'atteindra par un ressaut FG (F et G sont deux points conjugués). On revient ainsi au point A (confondu avec G) après avoir décrit une courbe fermée puisqu'on a supposé que le seuil n'entraînait pas de perte d'énergie spécifique, c'est-à-dire que la ligne d'énergie restait à la même distance du fond à l'amont et à l'aval du seuil ($E_A = E_G$).

A titre d'exercice, on pourra étudier suivant la même méthode le cas où le seuil est placé dans un canal de section rectangulaire uniforme dont la pente est supérieure à la pente critique avec $E'_c > E_n$.

XII.3. JAUGEAGE DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE

XII.3.1. Généralités — Classification des méthodes de jaugeage

Les mesures du débit ou jaugeages des canaux ou rivières présentent un intérêt pratique qu'il est inutile de souligner. Il existe un très grand nombre de méthodes de mesures répondant à des conditions différentes d'utilisation et de précision ; elles ont été découvertes et se sont développées souvent indépendamment les unes des autres, au hasard des circonstances et des besoins.

Pour les classer dans un ordre logique nous adopterons comme critère la définition même de la grandeur à mesurer, ce qui permettra un groupement des différentes méthodes d'après les principes mis en œuvre.

Un débit est, par définition, la grandeur :

$$Q = L^3 T^{-1} \qquad (a)$$

ou

$$Q = L^2 LT^{-1} \qquad (b)$$

Sous la forme (a) un débit apparaît comme le quotient d'un volume L^3 par un temps T ; on déduira donc Q de la mesure de ces deux grandeurs.

Sous la forme (b) un débit apparaît comme le produit d'une surface L^2 par une vitesse LT^{-1} et sa mesure résultera de la multiplication de ces deux grandeurs.

Ces principes permettent donc de classer les mesures de débits en deux grandes catégories :

1ère Catégorie

Le débit se déduira de la mesure d'un volume et d'un temps. A cette catégorie appartiennent :

1 — La méthode *volumétrique* ou méthode de la capacité jaugée (jaugeage par empotement) qui est surtout utilisée dans les laboratoires.

2 – La méthode *chimique* ou *de dilution* qui peut être considérée comme apparentée à la méthode précédente.

2ème Catégorie

Le débit sera obtenu par le produit d'une surface par une vitesse ce qui conduit à une intégration :

$$Q = \int\int_{\Omega} v\, d\omega$$

Les méthodes de jaugeage classées dans cette catégorie vont différer les unes des autres par la manière d'effectuer cette intégration.

A – Dans un premier groupe de méthodes on cherche directement la valeur de la *vitesse moyenne* :

$$U = \frac{1}{\Omega}\int\int_{\Omega} v\, d\omega$$

Telles sont :

1) La *méthode de l'écran mobile,*

2) La *méthode de l'écran salin* ou *méthode d'Allen,*

3) La *méthode du flotteur.*

B – Dans un second groupe de méthodes on détermine la vitesse en chaque point de la section et on effectue l'intégration par un procédé graphique ou numérique.

C – Les deux groupes de méthodes précédentes utilisent les circuits hydrauliques (canaux ou rivières) tels qu'ils se présentent, sans créer de perturbations notables dans leur forme ou dans la distribution des pressions le long du circuit. Une autre catégorie de méthodes consiste à créer dans l'écoulement un *accident local* qui impose un type d'écoulement déterminé dont la distribution des vitesses sera connue par la seule mesure d'une vitesse en un point ou, ce qui revient au même, par la seule mesure d'une différence de pressions. Ici encore le débit est considéré comme un produit surface × vitesse mais le schéma d'écoulement étant constant l'intégration sera faite une fois pour toutes, on la retrouvera dans la constante de l'appareil et il suffira d'une seule mesure pour en déduire la valeur du débit. A cette catégorie de méthodes appartiennent :

1) La *méthode du déversoir,*

2) La *méthode des veines contractées* (orifices, vannes ou tuyères noyés ou non, Venturi-canal, etc.).

Remarque sur la classification proposée

Cette classification se référant à la définition même d'un débit présente un caractère très général et pourrait être utilisée pour classer toutes les méthodes de mesure des débits en général, notamment les débits en conduites. Pour cette dernière catégorie il conviendrait, pour être complet, d'y adjoindre la méthode de Gibson dont le principe a été donné au § XI.10.3.5 et qui, en raison de son caractère spécial, constitue une catégorie à part qui ne s'intègre pas dans la classification générale ci-dessus.

En définitive pour le jaugeage des écoulements à surface libre nous étudierons successivement les méthodes suivantes :

1ère Catégorie :

$$\text{Débit} = \frac{\text{Volume}}{\text{Temps}}$$

XII.3.2. Méthode volumétrique
XII.3.3. Méthode chimique.

2ème Catégorie :

Débit = Section × Vitesse.

A – A partir de la vitesse moyenne dans un tronçon de section constante :

XII.3.4. Méthode de l'écran mobile (écran Andersson)
XII.3.5. Méthode de l'écran salin (méthode d'Allen)
XII.3.6. Méthode du flotteur.

B – A partir de la vitesse en chaque point de la section de jaugeage :

XII.3.7. Méthode par exploration du champ des vitesses.

C – En créant un accident local dans l'écoulement :

XII.3.8. Méthode du déversoir
XII.3.9. Méthode des veines contractées (orifice, vanne ou tuyère noyé ou non, Venturi-canal, etc.).

Nous insisterons surtout sur la méthode chimique et la méthode par exploration du champ des vitesses qui sont couramment utilisées pour les jaugeages en rivière.

Ajoutons enfin que les principales méthodes de mesures de débits font actuellement l'objet d'une *normalisation* sur le plan international sous l'égide

de l'I.S.O. (Organisation Internationale de Normalisation). Au fur et à mesure que les normes correspondantes seront publiées il conviendra de s'y conformer.

XII.3.2. MÉTHODE VOLUMÉTRIQUE

Elle consiste à déterminer le temps nécessaire pour remplir ou vider un réservoir de capacité connue. Cette méthode est la plus précise de toutes et permet d'obtenir une précision de l'ordre de 0,1 % chiffre beaucoup plus faible que ceux auxquels conduisent les autres méthodes. Ce sera donc une méthode-étalon à laquelle on s'efforcera de ramener les autres.

Toutefois la méthode volumétrique est essentiellement une méthode de laboratoire et son application au jaugeage des canaux et rivières nécessite des modifications profondes au schéma de l'écoulement, de sorte qu'elle n'est pratiquement pas utilisée dans ce cas.

XII.3.3. MÉTHODE CHIMIQUE OU DE DILUTION

Deux procédés peuvent être utilisés :

XII.3.3.1. Injection à débit constant
XII.3.3.2. Injection instantanée ou jaugeage par intégration.

XII.3.3.1. *Injection à débit constant*

XII.3.3.1.1. *Principe*

On injecte dans le courant, de façon continue et avec un débit constant, une quantité connue d'un liquide ou d'une solution d'un sel de titre déterminé.

Le liquide injecté étant bien mélangé au liquide principal par la turbulence de l'écoulement on effectue, à l'aval du point d'injection, un prélèvement dont il suffit de mesurer le titre en sel injecté par une méthode chimique classique.

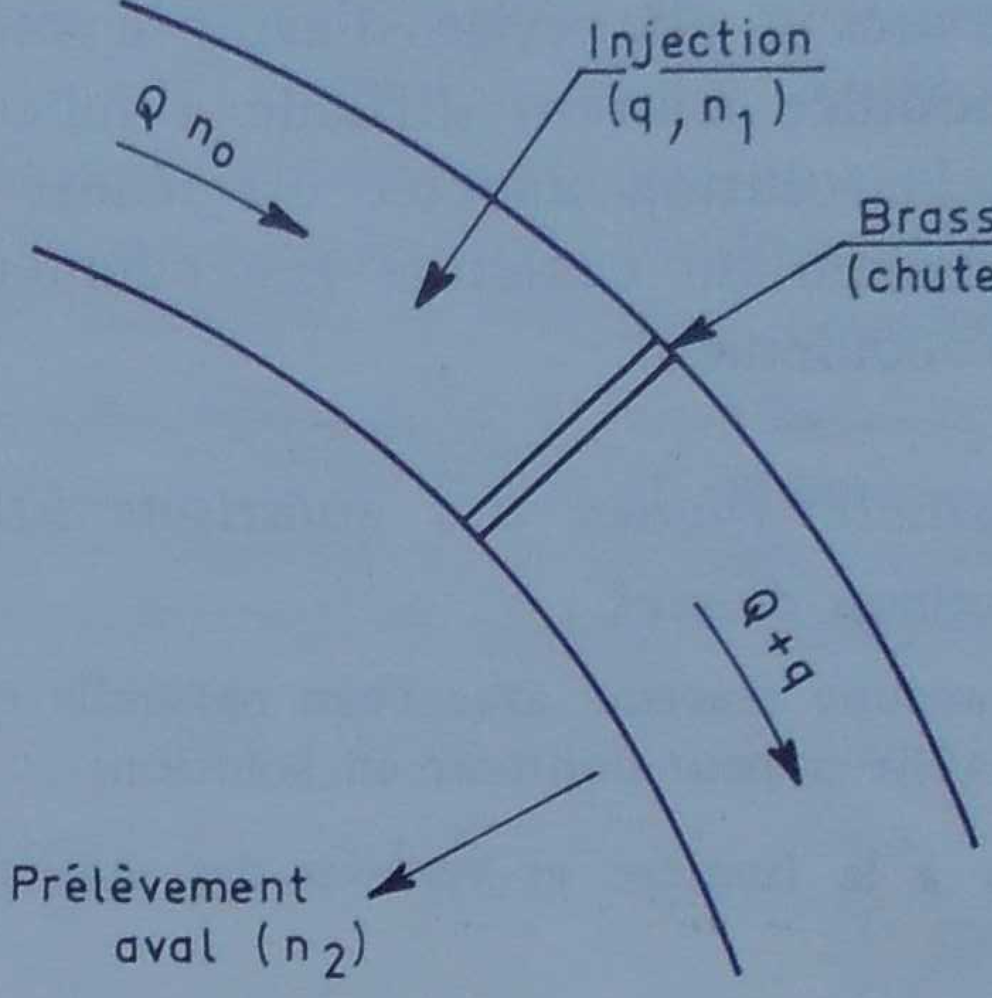


Fig. XII.3.3.1.1 – Principe du jaugeage chimique par injection à débit constant

C'est le physicien français Th. Schloesing qui, en 1863, eut pour la première fois l'idée de mesurer un débit suivant ce principe.

Désignons (fig. XII.3.3.1.1) par :

Q le débit principal à mesurer,

q le débit du liquide injecté présentant une concentration n_1 d'un certain sel,

n_2 la concentration de l'échantillon prélevé à l'aval,

n_0 la concentration de l'eau du courant avant injection.

Ecrivons l'égalité des débits de réactif dans la section d'injection et dans la section aval de prélèvement.

Il vient :

$$qn_1 + Qn_0 = (Q + q)\,n_2$$

d'où

$$Q = q\,\frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_0}.$$

On peut généralement négliger n_2 devant n_1 et n_0 devant n_2 et on utilise alors la relation

$$Q = q\,\frac{n_1}{n_2}$$

L'emploi de cette méthode nécessite l'existence d'une *turbulence* suffisante entre le point d'injection et le point de prélèvement pour que le mélange soit bien homogène dans la section de prélèvement.

La méthode est couramment utilisée pour le *jaugeage des torrents* ; elle évite d'avoir à mesurer une section mouillée souvent difficile à repérer et le brassage de la solution injectée est réalisé assez facilement en raison du caractère généralement tumultueux de l'écoulement.

XII.3.3.1.2. *Caractéristiques des solutions utilisées*

Les produits utilisés doivent :

– ne former aucune réaction avec l'eau naturelle et avec les matières que celle-ci peut contenir en solution,

– être stables à la lumière et vis-à-vis des matières organiques,

– ne pas être toxiques pour les poissons aux dilutions réalisées,

– ne correspondre qu'à une concentration n_0 faible dans les eaux naturelles. Si n_0 est stable on pourra choisir n_1 et q de telle manière que n_2 soit au moint égale à 5 n_0. Si n_0 est instable l'amplitude de sa variation conditionnera évidemment l'erreur maximale admissible sur le débit mesuré,

– permettre des dosages suffisamment sensibles.

Dans les meilleures conditions de titrage des solutions, si on veut obtenir une précision de jaugeage de l'ordre de 1 %, les ordres de grandeur de la concentration finale n_2 des échantillons prélevés devront être au moins égaux aux chiffres suivants pour les produits actuellement utilisés (déduction faite de la teneur en produit des eaux naturelles, c'est-à-dire de n_0).

Chlorure de sodium $n_2 \geqslant 30$ mg par litre

Nitrite de soude $n_2 \geqslant 1{,}5$ mg par litre

Bichromate de soude $n_2 \geqslant 0{,}1$ mg par litre

Sulfate de manganèse $n_2 \geqslant 2{,}5$ mg par litre

Il est intéressant que le produit utilisé possède également un *pouvoir colorant* suffisant pour permettre le contrôle visuel du passage du nuage dans le cours d'eau.

Le réactif le plus couramment utilisé est le *bichromate de soude* en raison de sa grande sensibilité. Le dosage des prélèvements est effectué par la méthode colorimétrique par comparaison avec des échantillons-témoins obtenus par dilution de la solution mère avec de l'eau du cours d'eau considéré. En utilisant pour les dosages un réactif composé essentiellement de diphényl-carbazide, on observe au colorimètre une coloration encore sensible pour des concentrations finales n_2 de l'ordre de 1 μg par litre (concentration relative de 10^{-9}).

XII.3.3.1.3. *Technique opératoire*

D'une manière générale, le degré d'approximation de la méthode chimique est excellent lorsqu'elle est correctement appliquée mais son emploi est assez délicat et nécessite l'utilisation d'opérateurs expérimentés. Nous ne donnerons ici que le principe du mode opératoire.

Préparation et injection de la solution initiale

La solution est préparée dans un *réservoir de brassage* muni d'une cloison isolant une partie de la capacité et jouant le rôle de tamis pour éviter l'entraînement des particules de sel non dissous (fig. XII.3.3.1.3.1).

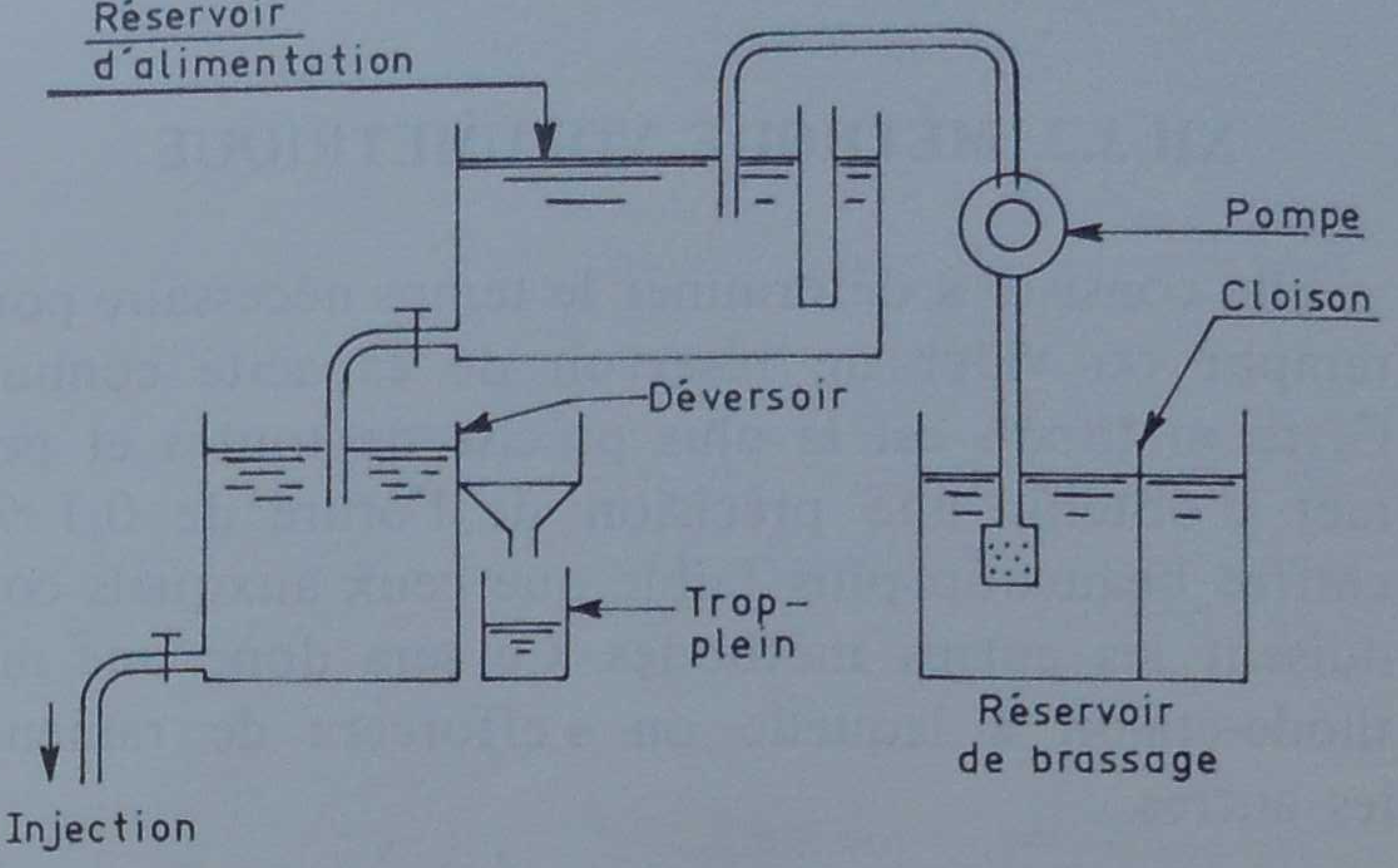


Fig. XII.3.3.1.3.1 – Préparation et injection de la solution

La solution est prélevée du réservoir de brassage par une pompe qui sert à alimenter un *réservoir d'alimentation.* L'injection est faite à partir d'un *réservoir à niveau constant* muni d'un déversoir de réglage. On peut également utiliser un vase de Mariotte ou un siphon à flotteur.

On s'efforce de répartir le mieux possible la solution saline dans la section d'injection ; à cet effet on utilise des dispositifs tels que des rampes ou des grilles tubulaires percées d'un grand nombre de petits trous et disposées en travers de la section.

Le débit d'injection q est mesuré par chronométrage de la descente du niveau dans le réservoir d'alimentation en tenant compte éventuellement du débit du trop-plein. Autrement dit le débit d'injection q duquel on déduira le débit du cours d'eau Q, est déterminé par le quotient du volume de solution écoulée par le temps d'injection, ce qui rattache la méthode chimique aux méthodes de jaugeage de cette catégorie.

Prélèvements

On prélève, à intervalles réguliers aussi rapprochés que possible :

– de l'eau en amont de la section d'injection (concentration n_0),

– de la solution mère prise au commencement et à la fin de chaque injection (pour vérifier que n_1 reste bien constant),

– de l'eau en aval de la section d'injection (concentration n_2) à un emplacement tel que des essais préliminaires auront montré une distribution uniforme des concentrations.

Les prélèvements sont effectués avec toutes les précautions nécessaires.

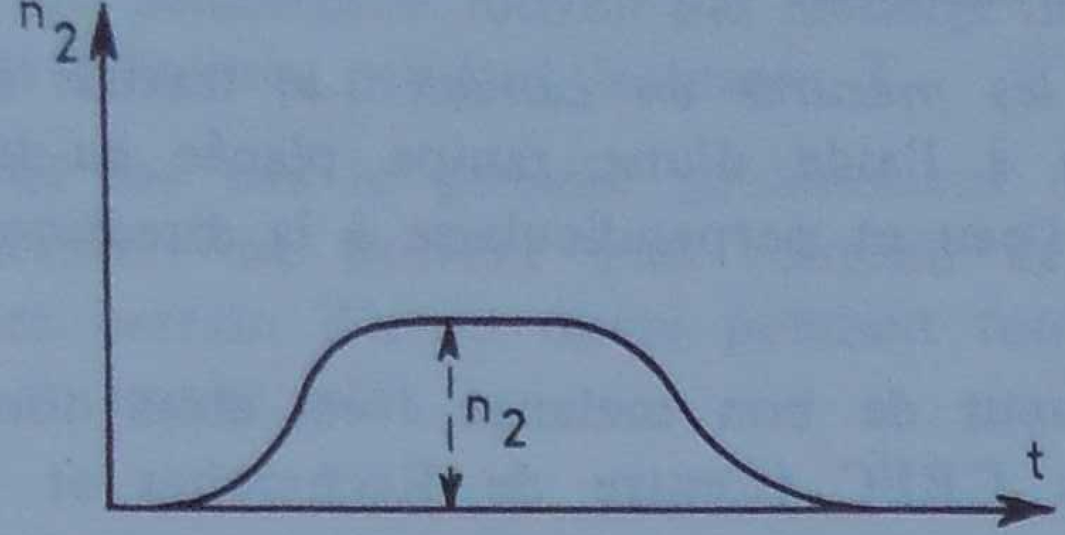


Fig. XII.3.3.1.3.2

Pour chaque essai on trace la courbe de concentration de l'eau en aval de l'injection (n_2) en fonction du temps ; cette courbe doit présenter un palier dont l'ordonnée sera la valeur n_2 à introduire dans les formules (fig. XII.3.3.1.3.2). Cette courbe permet en outre de vérifier la constance de l'homogénéité de la solution, condition essentielle pour obtenir une bonne exactitude de la méthode.

Notion de régime permanent de concentration constante

Si on injecte dans un cours d'eau en un temps très court une certaine quantité de solution colorée, un nuage prend naissance et se propage dans le cours d'eau en s'étalant et en se diluant dans des volumes d'eau de plus en plus grands.

Un observateur placé à la distance x à l'aval de l'injection verra apparaître et disparaître le nuage aux temps t et t' (fig. XII.3.3.1.3.3).

En observant ainsi le passage du nuage à différentes distances x, on peut tracer les courbes des temps d'apparition (A) et de disparition (A') de ce nuage (fig. XII.3.3.1.3.3).

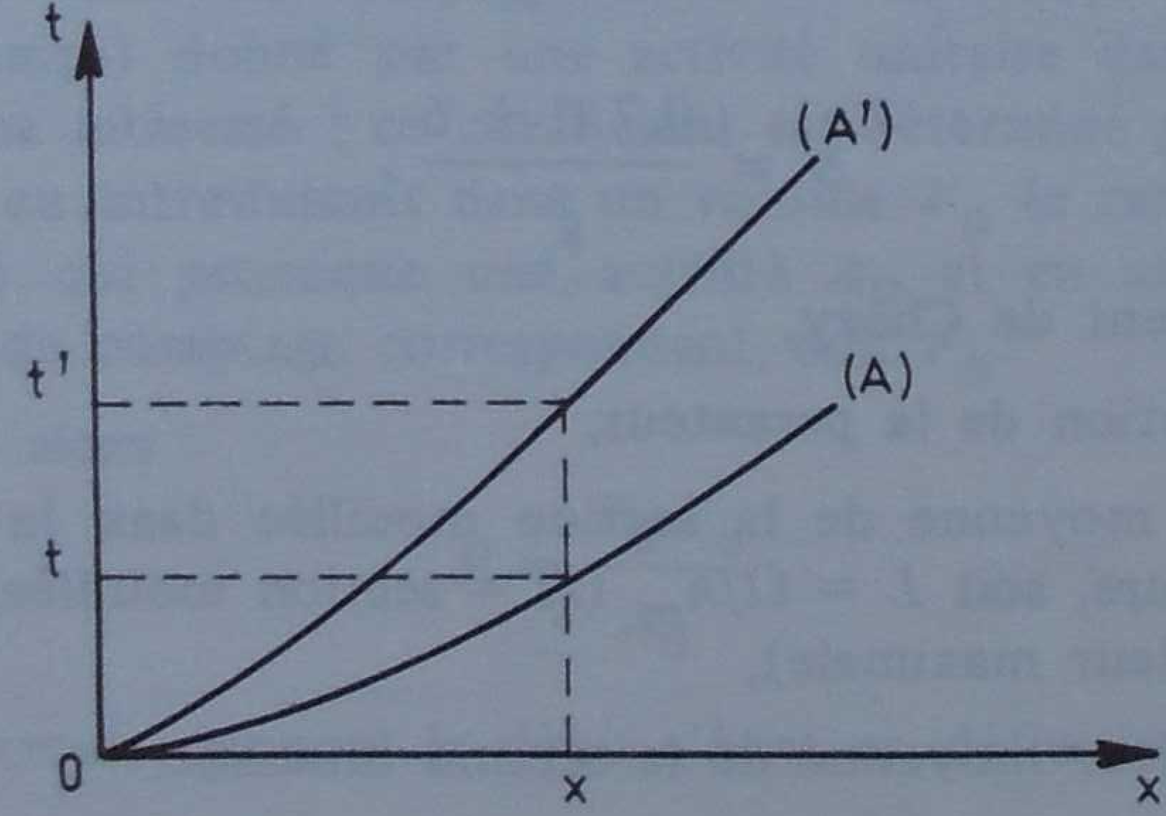


Fig. XII.3.3.1.3.3 – Diffusion d'une injection instantanée

Si on procède maintenant à une injection prolongée à débit constant et de temps t, chaque observateur placé à une distance x variable du point d'injection verra passer un nuage d'une durée beaucoup plus longue que pour une injection instantanée.

Si on assimile cette émission prolongée à une succession d'injections instantanées, on peut admettre que le dernier élément injecté se diffuse dans la rivière d'une manière identique au premier élément. Chacun de ces deux éléments donnera une courbe d'apparition (A pour le premier, B pour le dernier) et de disparition (A' pour le premier, B' pour le dernier) du nuage (fig. XII.3.3.1.3.3.4).

Ces deux paires de courbes ont un point commun P. Le triangle curviligne OPO' représente donc la zone où un régime permanent de coloration constante a été atteint.

Un observateur placé à la distance x_1 du lieu d'injection voit arriver le nuage au temps t_1, constate que la coloration croît de t_1 à t_2, reste constante de t_2 à t_3 (régime permanent de coloration constante), diminue de t_3 à t_4 et disparaît en t_4.

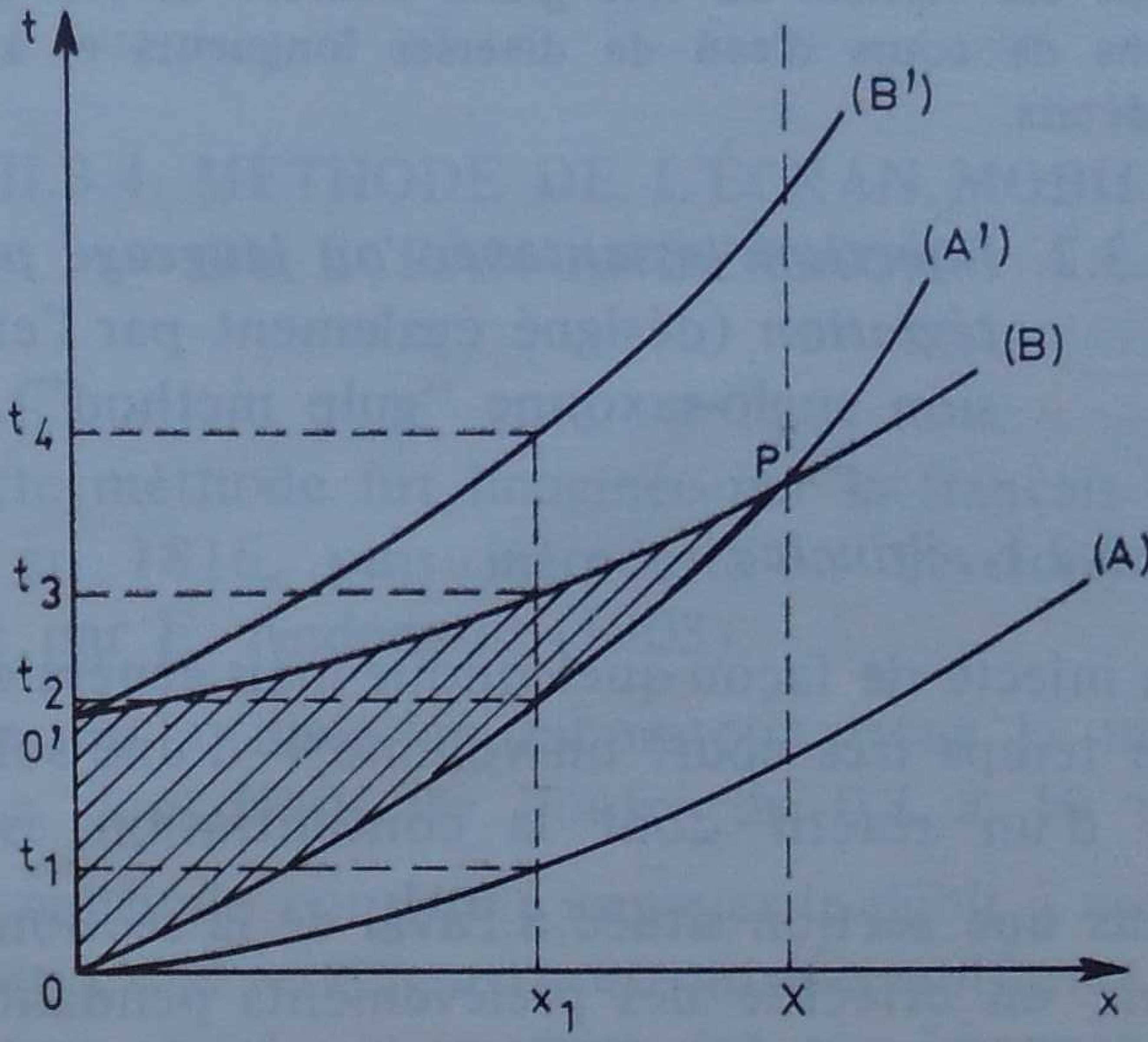


Fig. XII.3.3.1.3.4 – Obtention d'un régime permanent de concentration constante

La durée du régime permanent $t_3 - t_2$ diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne du point d'injection jusqu'à la distance X (abscisse de P). A partir de ce point le nuage se dilue dans des volumes d'eau de plus en plus grands et sa coloration devient de plus en plus faible. Il est visible que, dans ces conditions, la distance du point de prélèvement au point d'injection devra être inférieure à X.

La valeur de X croît évidemment avec la durée d'injection OO' mais dépend aussi de la rétention plus ou moins grande du colorant dans les zones d'eau morte de la rivière où il se diffuse lentement. Le principe de la méthode présuppose d'ailleurs que les débits en masse de matière soluble ou colorante sont les mêmes au point d'injection et au point de prélèvement. C'est pourquoi on devra toujours choisir un bief du cours d'eau dans lequel les zones d'eau morte sont aussi réduites que possible, sinon l'établissement d'un régime permanent de concentration ou de coloration constante exigerait une durée d'injection prohibitive.

Pratiquement, après avoir choisi le tronçon de rivière sur lequel sera effectuée l'opération, on procède à un *essai préalable* en réalisant une injection instantanée de fluorescéine. Des observateurs répartis le long du secteur à des distances connues du lieu d'injection notent les temps d'arrivée et de disparition du nuage, ce qui permet de tracer le

premier couple de courbes (A) et (A'). Ayant repéré l'abscisse x_1 du point choisi pour les prélèvements, on déplace parallèlement à lui-même le couple des courbes (A) (A') de manière à obtenir à cette abscisse x_1 un intervalle de temps $t_3 - t_2$ suffisamment grand pour permettre la prise d'un nombre suffisant d'échantillons. On en déduit l'ordonnée OO' qui détermine le temps d'injection et l'instant t_2 où devront être commencés les prélèvements.

Bien entendu cet essai préalable suppose une bonne concordance entre les durées de régime permanent obtenues à vue avec la fluorescéine et les durées du même régime déduites des dosages chimiques. Cette concordance a effectivement été vérifiée un très grand nombre de fois sur des tronçons de cours d'eau de diverses longueurs et à différents débits.

XII.3.3.2. *Injection instantanée ou jaugeage par intégration* (désigné également par l'expression anglo-saxonne "gulp method").

XII.3.3.2.1. *Principe*

On injecte de façon quelconque mais généralement en un temps très court un volume V d'une solution titrée d'un réactif dont la concentration est n_1.

Dans une section située à l'aval de la section d'injection, on effectue des prélèvements pendant tout le temps T de passage du nuage résultant de la dilution de la solution injectée. Soit n_2 la concentration du prélèvement effectué à un instant t quelconque $(0 < t < T)$.

La loi de conservation de la masse du réactif permet d'écrire :

$Vn_1 = Q \int_0^T n_2\, dt,$ en supposant qu'il n'existe aucune trace du réactif à l'état naturel dans la rivière.

On en déduit :

$$Q = \frac{Vn_1}{\int_0^T n_2\, dt}$$

XII.3.3.2.2. *Condition de bon mélange*

Il faut qu'en tout point de la section de prélèvement l'intégrale $\int_0^T n_2\, dt$ soit la même, ce qui implique une dilution convenable du réactif dans toute la section transversale du cours d'eau entre la section d'injection et la section de prélèvement. La réalisation de cette condition nécessite que les points d'injection et de prélèvement soient séparés par une distance minimale qu'on appelle la *distance minimale de bon mélange*. Elle peut être déterminée par les formules suivantes :

– *Pour les mesures en canaux* : le traceur est supposé être injecté à l'aide d'une rampe placée au-dessus de la surface de l'eau et perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

La longueur de bon mélange l est alors donnée par la formule du CREC (Centre de Recherches et d'Essais de Chatou) :

$$l = 9{,}5\, nh$$

avec

h = tirant d'eau,

$$n = \frac{U}{\sqrt{gRJ}},$$

U = vitesse moyenne,

R = rayon hydraulique de la section mouillée,

J = perte de charge unitaire.

Pratiquement on peut prendre pour n la valeur

$$n = 0{,}32\, KR^{1/6}$$

avec

K coefficient de Strickler,

R rayon hydraulique.

– *Pour les mesures sur les cours d'eau* :

Pour une injection ponctuelle dans l'axe de l'écoulement la longueur de bon mélange est donnée par la formule de Rimar (1960) :

$$l = 0{,}13 \quad N \frac{L^2}{h}$$

avec

$$N = \frac{0{,}7\, C + 6}{g},$$

C coefficient de Chézy,

g accélération de la pesanteur,

L largeur moyenne de la section mouillée dans la section de mesure, soit $L = \Omega/h_m$ (Ω = section mouillée, h_m = profondeur maximale),

h profondeur moyenne de la section mouillée.

– *Pour les mesures en conduite* :

Pour une injection dans l'axe de la canalisation ou en quatre points dans la section, MM. Dumas, Lièvre et Bonnin de l'Université de Grenoble ont proposé la formule

$$l = 75\, D$$

avec D = diamètre de la canalisation.

XII.3.3.2.3. *Technique opératoire*

L'intégrale $\int_0^T n_2\, dt$ peut être calculée en planimétrant la courbe $n_2(t)$ obtenue à l'aide de plusieurs prélèvements

effectués à intervalles réguliers pendant le temps T ou bien en réalisant un échantillon moyen par mélange de nombreux prélèvements effectués pendant le temps T.

Dans tous les cas le premier prélèvement et les deux ou trois derniers ne doivent plus contenir de réactif de façon à être certain d'avoir opéré pendant toute la durée de passage du nuage salin.

XII.3.3.2.4. *Réactifs utilisés – Utilisation des traceurs radioactifs*

Les qualités des réactifs ont été définies précédemment (§ XII.3.3.1.2). On utilise surtout le bichromate de sodium en raison de sa grande sensibilité.

La méthode par intégration se prête bien à l'utilisation des *radioéléments* (*Br* 82, *I* 131, *Au* 198, *Na* 24, tritium *H* 3, ce dernier présentant toutefois l'inconvénient d'émettre une très faible énergie et de ne pouvoir se détecter facilement sur place).

Dans ce cas on injecte dans la rivière une certaine quantité de traceur radioactif d'activité A et à une distance suffisamment grande en aval on effectue un comptage de la vague d'activité à l'aide d'une sonde à scintillations ou d'un compteur Geiger-Muller placé dans l'écoulement ; soit N le nombre total de coups enregistrés pendant tout le passage du nuage radioactif.

Le débit est donné par la formule :

$$Q = F \frac{A}{N}$$

F est le taux de comptage (nombre de coups par unité de temps) donné par une activité unitaire dans tout le volume intéressé ; ce coefficient est déterminé par étalonnage en introduisant dans un volume V_0 le radioélément utilisé qui provoque une activité A_0 et en mesurant le taux de comptage correspondant, soit F_0.

On a alors :

$$F = \frac{F_0 V_0}{A_0}$$

et la formule donnant le débit s'écrit en définitive :

$$Q = \frac{A}{A_0} \frac{F_0}{N} V_0$$

XII.3.3.2.5. *Avantages de la méthode d'intégration*

Elle est rapide et économique ; elle ne nécessite pas la mesure du débit q injecté ; il suffit de disposer de bonbonnes de solutions concentrées et de flacons et godets de prélèvements pour l'utilisation des analyses colorimétriques (bichromate de sodium). Le personnel nécessaire est beaucoup plus réduit que pour l'utilisation de la méthode par injection à débit constant (un jaugeage par une équipe de deux hommes entraînés demande une demi-heure). Dans le cas d'utilisation de traceurs radioactifs, les précautions nécessaires doivent être prises par application des prescriptions réglementaires concernant l'utilisation des radioéléments en hydrologie (traceurs de période inférieure à 8 jours ; maintien de la concentration du traceur en deçà de la concentration maximale admissible).

XII.3.4. MÉTHODE DE L'ÉCRAN MOBILE OU ÉCRAN ANDERSSON

Cette méthode fut imaginée par le français G.-A. Hirn en 1816, puis introduite et développée en Suède par E. Andersson (1905).

Elle est utilisée en laboratoire pour la mesure précise des débits de l'ordre de 0,1 à 10 m^3/s.

La méthode consiste à envoyer le débit à mesurer dans un canal rectiligne, horizontal et uniforme (section transversale et rugosité des parois constante), le long de ce canal se déplace un écran dont la surface correspond à la section transversale du canal ; cet écran, supporté par un chariot, est poussé par le courant et on mesure le temps $t = T_2 - T_1$ correspondant au déplacement du chariot entre deux repères distants de L (fig. XII.3.4.1).

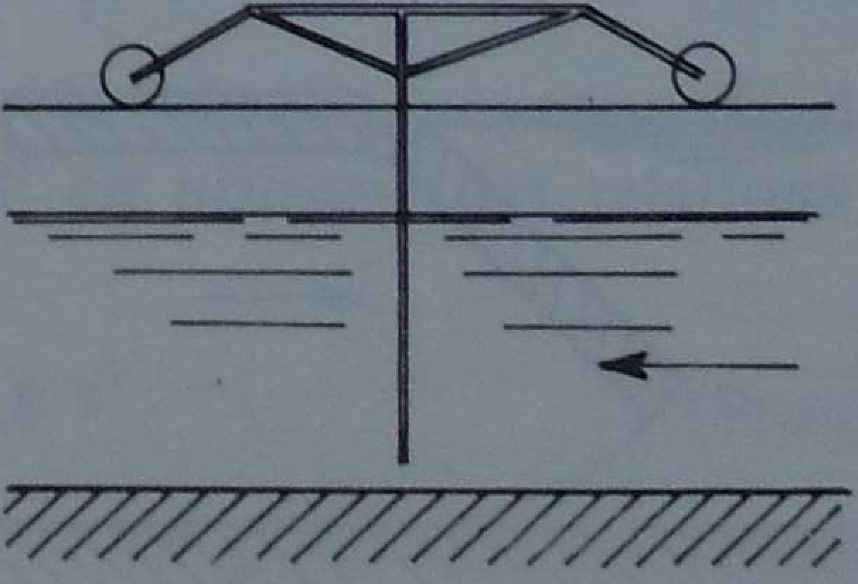


Fig. XII.3.4.1 – Ecran mobile monté sur chariot

La présence de l'écran entraîne une égalisation des vitesses et la vitesse de l'écran est égale à la vitesse moyenne du courant dans le canal, soit :

$$U = \frac{L}{t}$$

d'où

$$Q = \frac{LS}{t}$$

S étant la section mouillée du canal ; elle est généralement rectangulaire.

Le jeu entre les bords de l'écran et les parois du canal doit être très faible (5 à 10 mm) sans toutefois risquer d'introduire un frottement qui ralentirait le chariot. L'ensemble du chariot et de l'écran doit être très léger et parfaitement guidé par des rails sur lesquels roule le chariot ; pour diminuer la résistance au roulement on utilise trois ou quatre grandes roues-support à roulements à billes, très légères, de grand diamètre (du genre des roues de bicyclettes en alliage léger).

Pour obtenir des résultats convenables on ne doit constater aucune différence de niveau appréciable (supérieure par exemple à quelques dixièmes de millimètre) entre l'amont et l'aval de l'écran avant et après le passage de ce dernier.

Des dispositifs spéciaux (rails inclinés) sont disposés à l'amont et à l'aval de la section de mesure pour permettre la mise à l'eau et la sortie de l'eau de l'écran. La mesure de $U = L/t$ est facilitée par la fermeture de contacts électriques produite par le passage du chariot sur des micro-rupteurs disposés à des distances connues les uns des autres le long des rails de guidage.

Un dispositif de même principe mais plus simple est constitué par *l'écran flottant* (fig. XII.3.4.2).

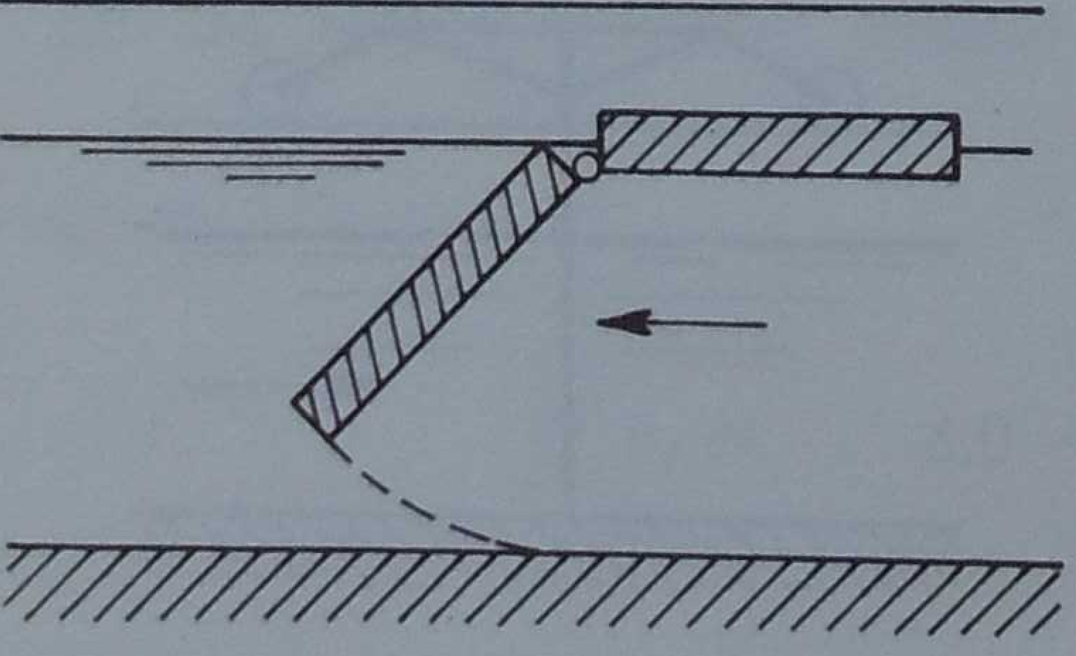


Fig. XII.3.4.2 – Ecran flottant

Un radeau flottant à la surface du canal comporte à son extrémité aval un panneau articulé lesté qui tombe normalement dans l'eau et constitue l'écran. Ce radeau étant arrêté, le panneau mobile est relevé par le courant ; si on abandonne alors le radeau il est entraîné par le courant en même temps que le panneau s'enfonce. En fin de course un butoir arrête le radeau et le panneau-écran se relève automatiquement sous l'action du courant. Le radeau remplace en somme le chariot porte-écran et il évite les frottements parasites ; il se place d'ailleurs de lui-même dans le courant sans venir frotter contre les parois latérales du canal.

Cette méthode de mesure des débits (écran d'Andersson ou écran flottant) donne une bonne précision qui, dans les meilleures conditions, peut atteindre le millième. Elle nécessite toutefois de disposer d'un canal rectiligne assez long ce qui limite son emploi dans les installations courantes.

XII.3.5. MÉTHODE DE L'ECRAN SALIN OU METHODE D'ALLEN

Cette méthode est, dans son principe, apparentée à celle de l'écran mobile ; elle est surtout utilisée pour la mesure du débit des conduites en charge mais peut également s'appliquer en canal de section constante.

Elle consiste à déterminer la vitesse moyenne U de l'écoulement par le rapport de la distance séparant deux sections de cet écoulement à la durée moyenne du parcours de cette distance par l'écran que constitue une solution saline injectée à l'amont et entraînée par le fluide.

Considérons (fig. XII.3.5.1) une conduite ou un canal de section transversale constante S. En un point 0 du courant on injecte avec un dispositif particulier un petit volume d'une solution saline conductrice (généralement du sel marin).

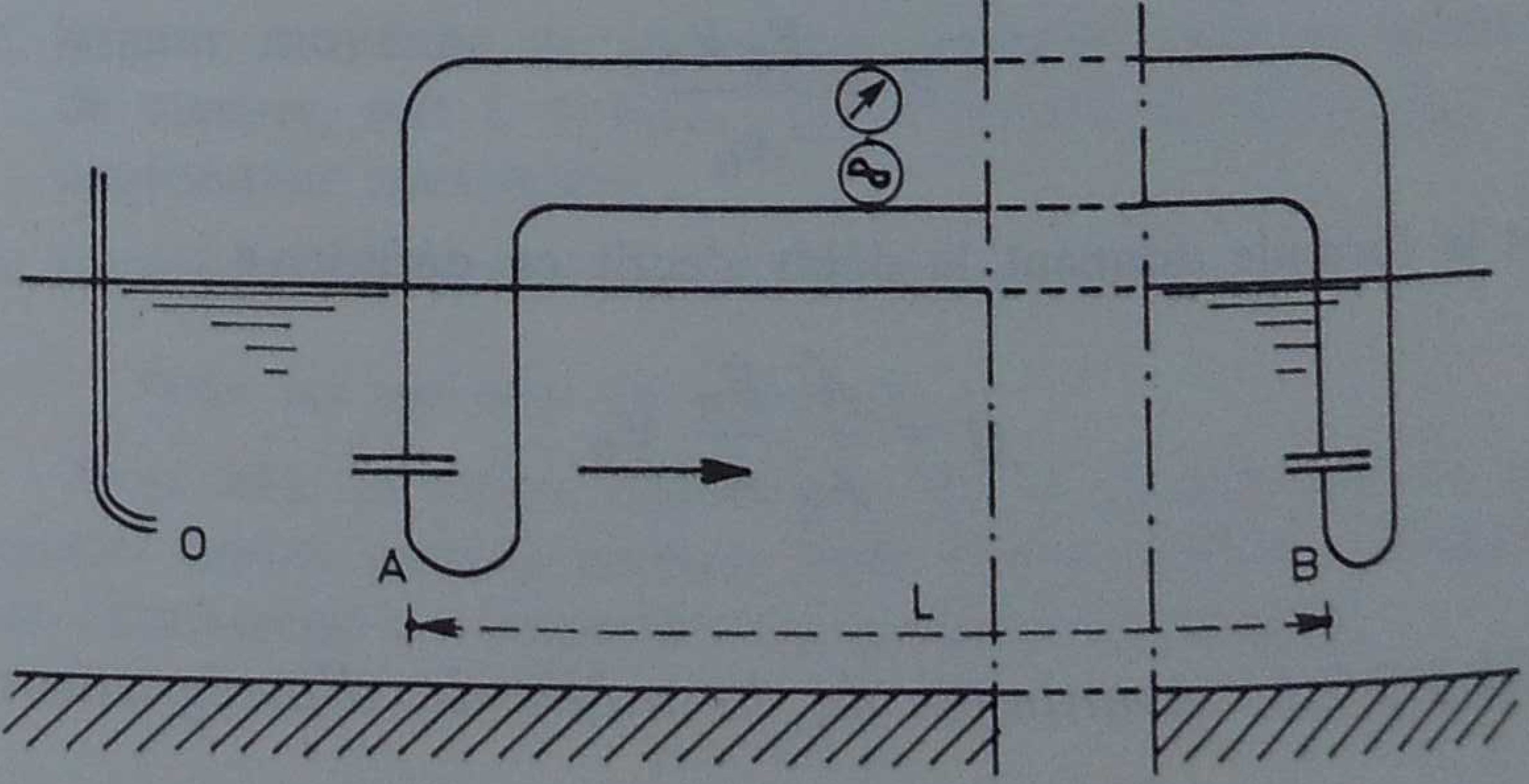


Fig. XII.3.5.1 – Principe de la méthode d'Allen

Le nuage salin ainsi formé est entraîné par le courant et se déplace à la vitesse moyenne U de l'écoulement considéré. En deux sections A et B

situées à une distance L l'une de l'autre sont placées des couples d'électrodes qui permettent, à l'aide d'un montage électrique approprié, l'enregistrement de la variation de conductibilité de l'eau. Cet enregistrement se traduit par deux bosses A et B dans la courbe de conductibilité en fonction du temps, la bosse B étant plus aplatie que la bosse A par suite de l'étalement du nuage salin sous l'effet de la turbulence le long du trajet AB (fig. XII.3.5.2).

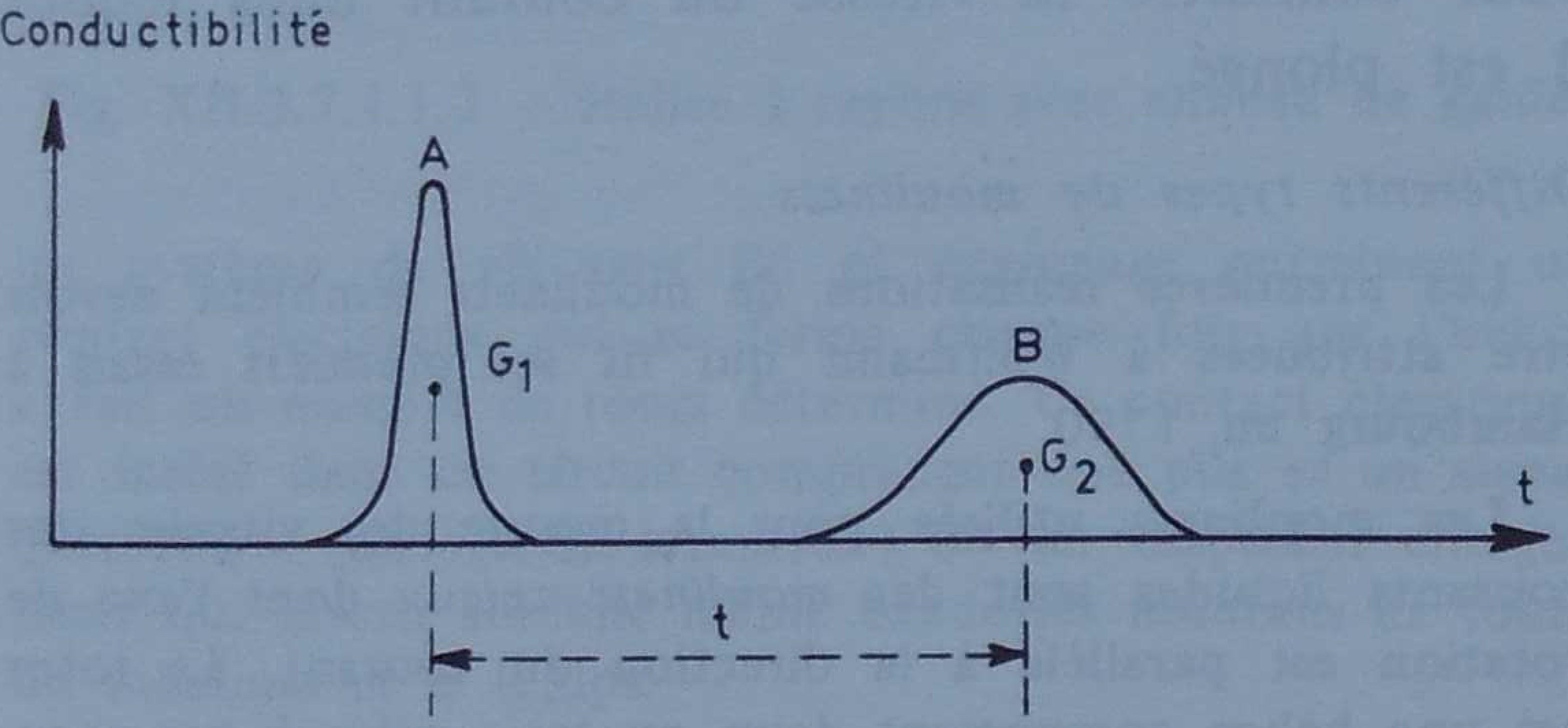


Fig. XII.3.5.2 – Enregistrement de la conductibilité de l'eau dans les sections de mesure

On détermine sur le diagramme enregistré les centres de gravité des ondes en A et en B ; la distance de ces deux centres de gravité correspond au temps de parcours t.

On en déduit facilement le débit :

$$Q = \frac{SL}{t}$$

L'application de la méthode est basée sur l'existence d'une *turbulence suffisante* de l'écoulement ce qui permet de supposer qu'une particule passant en un point quelconque d'une section de détection a une égale probabilité de passer en tous les points de la section de détection suivante. L'éloignement minimal entre la section d'injection O et la première section de détection A pour lequel cette condition est satisfaite est la *distance de bon mélange* qui peut être calculée en utilisant les formules du § XII.3.3.2.2.

La durée t du parcours entre les deux sections de détection A et B doit être de l'ordre de 10 à 20 secondes au minimum. Il n'y a d'ailleurs pas intérêt à utiliser une durée plus longue c'est-à-dire une distance L trop grande, car ce que l'on gagne en précision en augmentant la longueur de la base L se perd par ailleurs dans l'enregistrement de l'onde B qui, étant beaucoup plus aplatie, ne permet qu'un repérage difficile de son centre de gravité.

Cette méthode peut en principe s'appliquer aussi bien à la mesure du débit dans une conduite que dans un canal ; en fait, elle est pratiquement utilisée uniquement pour le jaugeage en conduites. Elle est intéressante car elle donne le débit en une seule opération et permet donc une mesure rapide. Le principe de la méthode s'applique également à l'utilisation de traceurs radioactifs.

XII.3.6. MÉTHODE DU FLOTTEUR

Cette méthode, de faible précision, peut être utilisée pour obtenir rapidement par une mesure très simple un ordre de grandeur du débit d'un canal de section uniforme.

Elle consiste à mesurer la plus grande vitesse superficielle V du courant à partir du temps mis par un flotteur F entraîné par le courant à parcourir une distance $L = AB$ définie par deux repères A et B (fig. XII.3.6).

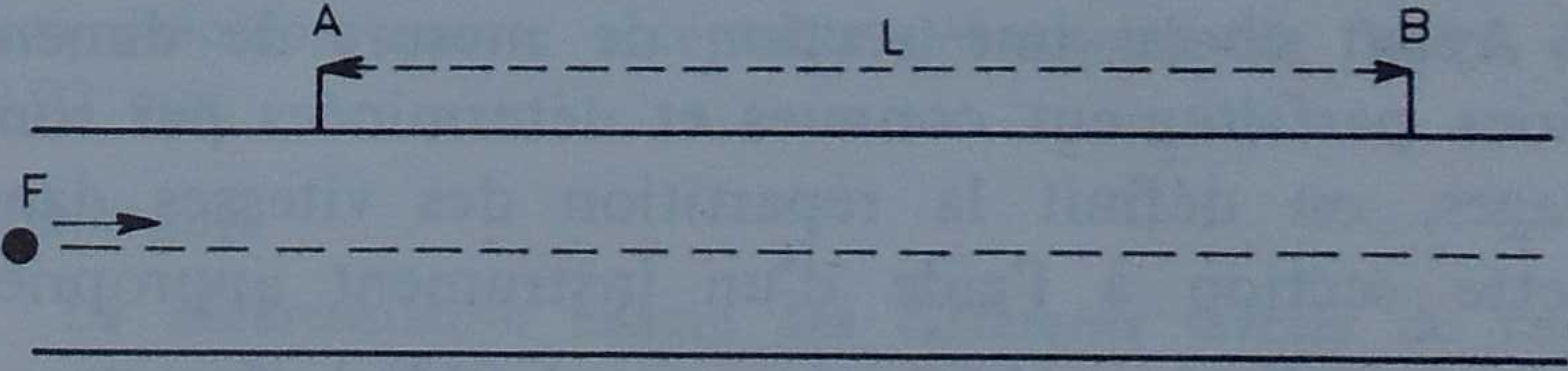


Fig. XII.3.6 – Méthode du flotteur

On déduit la vitesse moyenne U de la vitesse superficielle V en utilisant des relations approchées, telles que :

$$U = 0{,}8\ V \qquad \text{(Prony)}$$

$$U = V - 14\sqrt{RI} \qquad \text{(Bazin)}$$

ou

$$U = V\,\frac{C}{C + 14} \qquad \text{(d°)}$$

$$U = 0{,}82\ V\,\frac{1 + 0{,}6\sqrt{R}}{1 + 0{,}9\sqrt{R}} \qquad \text{(Koechlin)}$$

ou, plus simplement, $U = 0{,}82$ à $0{,}92\ V$ suivant l'importance de la rugosité des parois.

On en déduit

$$Q = SU$$

S étant la valeur moyenne de la section transversale mouillée entre les repères A et B.

Le *flotteur* utilisé doit s'enfoncer presque complètement de manière à ne pas donner prise au vent ; on peut utiliser une bouteille lestée dont le goulot seul est émergé.

On utilise aussi parfois une perche ou un *bâton lesté* dont la vitesse est la vitesse moyenne du courant dans le plan vertical correspondant à la profondeur de la base du bâton. Lorsque la profondeur immergée du bâton est de l'ordre de 90 % de la profondeur du canal, la vitesse du bâton peut être considérée comme égale à la vitesse moyenne de l'écoulement à ± 5 à 8 % près, suivant la régularité, le parallélisme et la bonne répartition des vitesses dans le tronçon de canal considéré.

XII.3.7. MÉTHODE PAR EXPLORATION DU CHAMP DES VITESSES DANS UNE SECTION TRANSVERSALE

Ayant choisi une section de mesure de dimensions parfaitement connues et déterminées par sondages, on définit la répartition des vitesses dans cette section à l'aide d'un instrument approprié.

Le débit s'en déduit par une *double intégration* :

$$Q = \iint_{\Omega} v d\omega$$

Il faut noter que v représente la composante de la vitesse moyenne dans l'élément de section $d\omega$ suivant la direction normale à cet élément ; il faudra donc déterminer cette composante normale en différents points de la section de jaugeage.

Cette méthode de jaugeage est couramment utilisée sur les cours d'eau naturels.

XII.3.7.1. *Mesure des vitesses*

On utilise essentiellement deux sortes d'appareils :

– les moulinets hydrométriques,
– le tube de Pitot.

XII.3.7.1.1. *Moulinets hydrométriques*

Ces appareils sont constitués par un rotor mis en mouvement par le fluide dans lequel il est plongé. Aucun couple résistant autre que celui dû aux frottements (et maintenu aussi faible que possible) ne s'opposant à la rotation du rotor, celui-ci prend sa vitesse d'emballement qui est une fonction pratiquement linéaire de la vitesse du courant. Il suffit donc de mesurer la vitesse de rotation du rotor pour connaître la vitesse du courant dans lequel il est plongé.

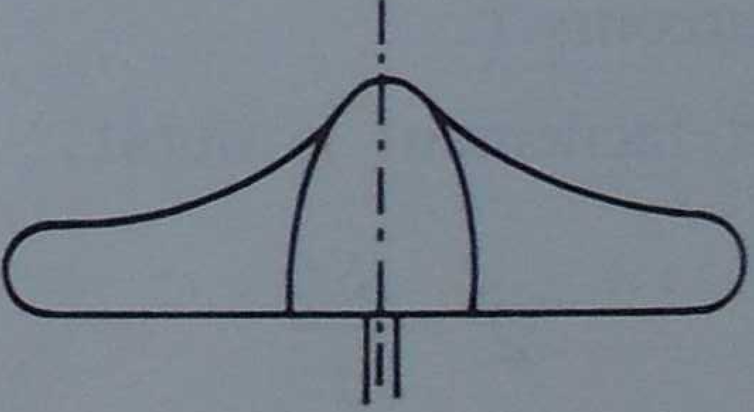
Différents types de moulinets

Les premières réalisations de moulinets semblent devoir être attribuées à Woltmann qui fit ses premiers essais à Hambourg en 1790.

Les moulinets utilisés pour la mesure des vitesses des courants liquides sont des *moulinets axiaux* dont l'axe de rotation est parallèle à la direction du courant. Le rotor est une hélice comportant deux ou trois pales à pas constant le long du rayon.

Les hélices présentent généralement deux formes :

Hélices à arêtes biaises constituées par un moyeu en forme d'ogive sur lequel sont implantées deux pales (rarement plus) dont la forme rappelle celle des hélices marines (fig. XII.3.7.1.1.1).



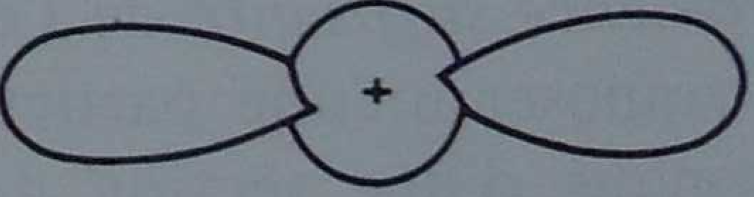


Fig. XII.3.7.1.1.1 – Hélice à arêtes biaises

Hélices à rayons dont les pales (généralement au nombre de trois) sont constituées par un bras à l'extrémité duquel est fixée une palette rectangulaire gauche inclinée sur l'axe (fig. XII.3.7.1.1.2).

Les hélices sont parfois protégées par un *anneau de garde* évitant les chocs éventuels des pales du moulinet contre les corps étrangers ; l'anneau de garde a une influence notable sur le fonctionnement de l'appareil lors de l'attaque du moulinet par un courant oblique (voir plus loin).

Mécanisme compte-tour

Ce mécanisme est placé dans un corps de forme profilée qui fait suite au moyeu de l'hélice. Il est constitué par

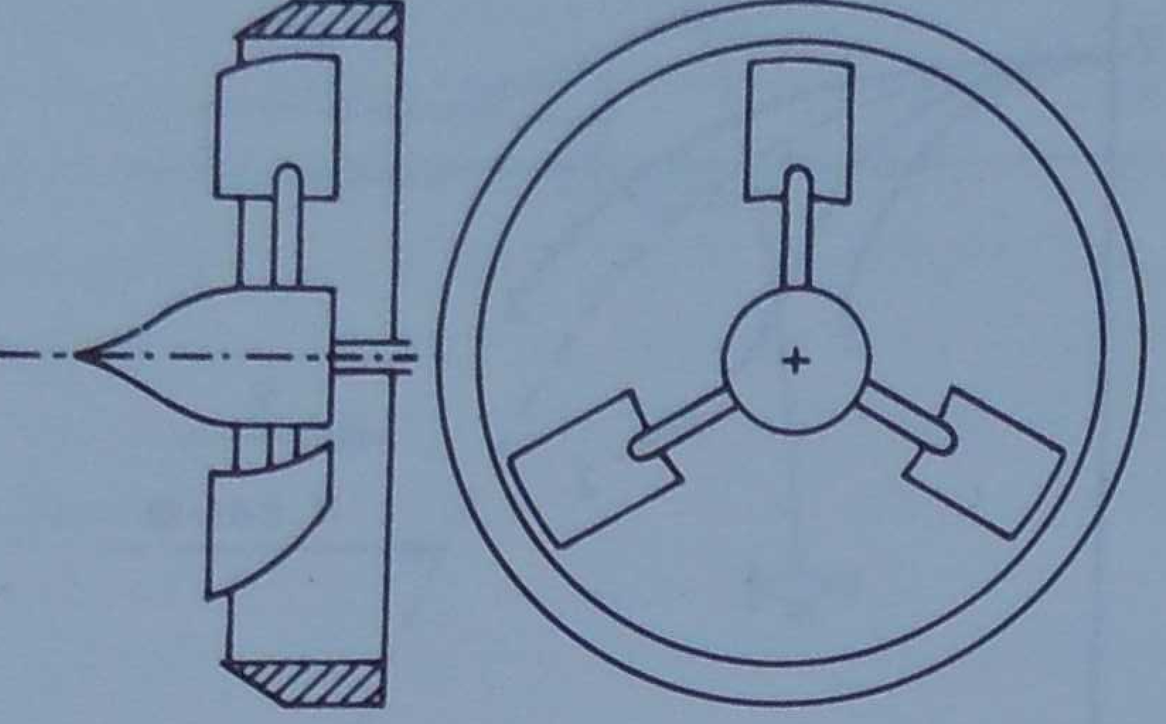


Fig. XII.3.7.1.1.2 – Hélice à rayons avec anneau de garde

un système de vis sans fin et engrenage entraînant un contact électrique qui se ferme chaque fois que l'hélice a fait un nombre de tours déterminé. Ce contact électrique est inséré dans un circuit comprenant une pile et un signal quelconque (sonore ou lumineux) ou un dispositif enregistreur qui inscrit sur une même bande les nombres de tours du moulinet et le temps.

La difficulté essentielle réside dans l'obtention d'un bon contact, l'ensemble du mécanisme étant obligatoirement plongé dans l'eau avec l'hélice qui l'entraîne. De ce point de vue, on distingue :

Les *contacts dans l'eau*, le mécanisme baignant entièrement dans l'eau ; ce dispositif ne peut être utilisé qu'avec une eau très pure mauvaise conductrice de l'électricité et limitant la corrosion des contacts.

Les *contacts dans l'huile* (les plus fréquents), le mécanisme réducteur et les contacts baignant complètement dans l'huile ; pour réaliser l'étanchéité tout en réduisant les frottements, le presse-étoupe est remplacé par un dispositif de joint-labyrinthe permettant de retenir l'huile par effet de capillarité. L'appareil doit toujours être plein d'huile ; il faut d'ailleurs utiliser une huile de qualité constante (notamment sa viscosité) de manière à conserver la fidélité de l'appareil.

Les *contacts dans l'air* : le mécanisme est complètement enfermé dans un carter étanche. L'arbre d'entraînement du compte-tours comporte une pièce en fer doux qui tourne à faible distance d'un aimant monté à l'extrémité de l'arbre de l'hélice. L'aimant est séparé du mécanisme par une cloison mince non magnétique. Les moulinets à entraînement magnétique sont assez répandus ; ils peuvent être utilisés en eau très conductrice ou corrosive, par exemple en mer.

Formules $V = f(N)$. En négligeant les frottements, la théorie montre que l'hélice tourne à sa vitesse d'emballement et on a :

$$V = kN$$

V vitesse du courant en m/s,

N nombre de tours par seconde de l'hélice,

k pas théorique de l'hélice en m.

En réalité les frottements (paliers, contact électrique, frottement du liquide sur les pales) et les pertes (tourbillons marginaux) ne peuvent pas être négligés. L'étude théorique complète montre que la courbe $V = f(N)$ est une hyperbole dont la courbure n'est sensible qu'aux faibles vitesses ; on peut généralement la remplacer par deux ou trois droites d'équations (fig. XII.3.7.1.1.3) :

$$V = AN + B \qquad \text{pour} \quad 0 < N < N_1$$
$$V = A'N + B' \qquad \text{pour} \quad N_1 < N < N_2$$
$$V = A''N + B'' \qquad \text{pour} \quad N > N_2$$

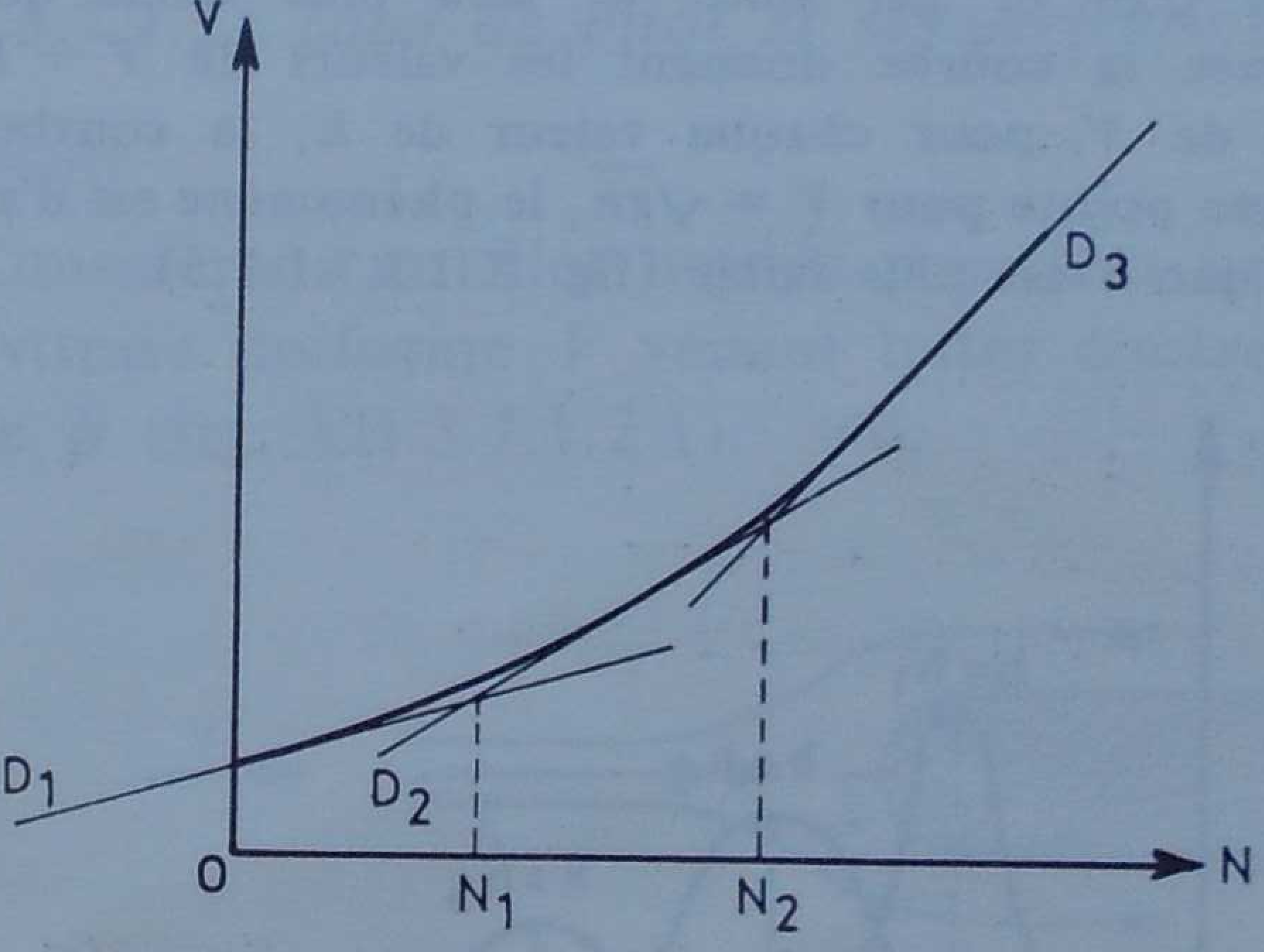


Fig. XII.3.7.1.1.3 – Courbe d'étalonnage d'un moulinet

La constante B correspond à la plus petite valeur de V susceptible d'être mesurée. Les moulinets spécialement conçus pour les faibles vitesses permettent de mesurer avec une précision encore acceptable des vitesses de l'ordre de 0,02 m/s.

Etalonnage

La détermination exacte des différents termes de l'expression $V = f(N)$ ne peut se faire que par un étalonnage du moulinet qui consiste généralement à déplacer le moulinet à des vitesses connues dans une eau immobile. On utilise un canal rectiligne contenant de l'eau au repos ; au-dessus du canal peut se déplacer un chariot supportant le ou les moulinets à étalonner et les appareils de mesure. Le canal doit avoir une longueur suffisante pour permettre la mise en vitesse (accélération), le déplacement à vitesse constante et le freinage du chariot (décélération) (fig. XII.3.7.1.1.4).

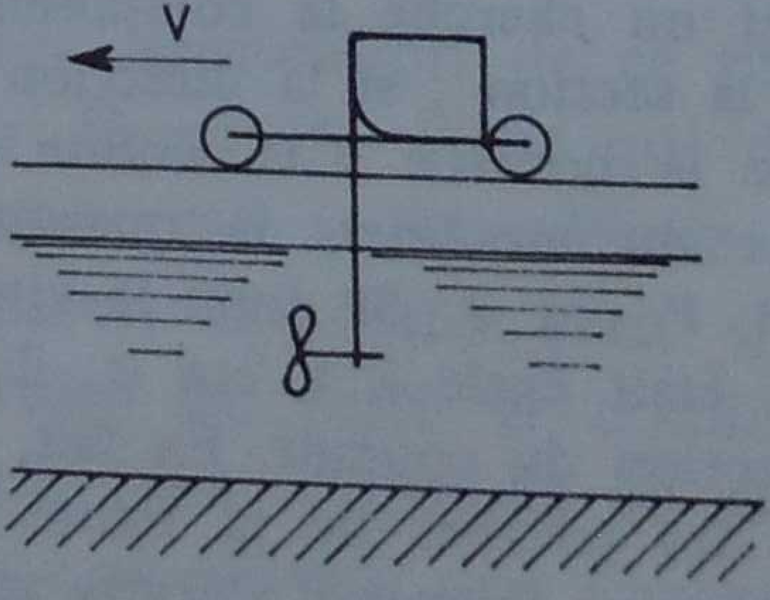


Fig. XII.3.7.1.1.4 – Etalonnage d'un moulinet

Il faut noter une particularité de l'étalonnage effectué dans ces conditions : si h est la profondeur d'eau dans le canal on sait qu'une onde se propage dans le canal avec la vitesse $\sqrt{gh}$. Lorsque la vitesse du chariot atteint cette valeur, l'onde qui se forme accompagne le chariot dans son mouvement et la valeur de la vitesse relative de l'eau par rapport à l'hélice (c'est-à-dire le nombre de tours par seconde N) s'en trouve modifiée. Ce phénomène est connu sous le nom de *pointe d'Eper.*

Si V est la vitesse exacte du chariot et V' la vitesse déduite de la lecture faite au moulinet, par suite du phénomène d'Eper la vitesse relative diminuera quand V sera voisin de $\sqrt{gh}$ et par suite V' sera plus faible que V. Si on trace la courbe donnant les valeurs de $V - V'$ en fonction de V pour chaque valeur de h, la courbe présentera une pointe pour $V = \sqrt{gh}$, le phénomène est d'autant plus net que h est plus faible (fig. XII.3.7.1.1.5).

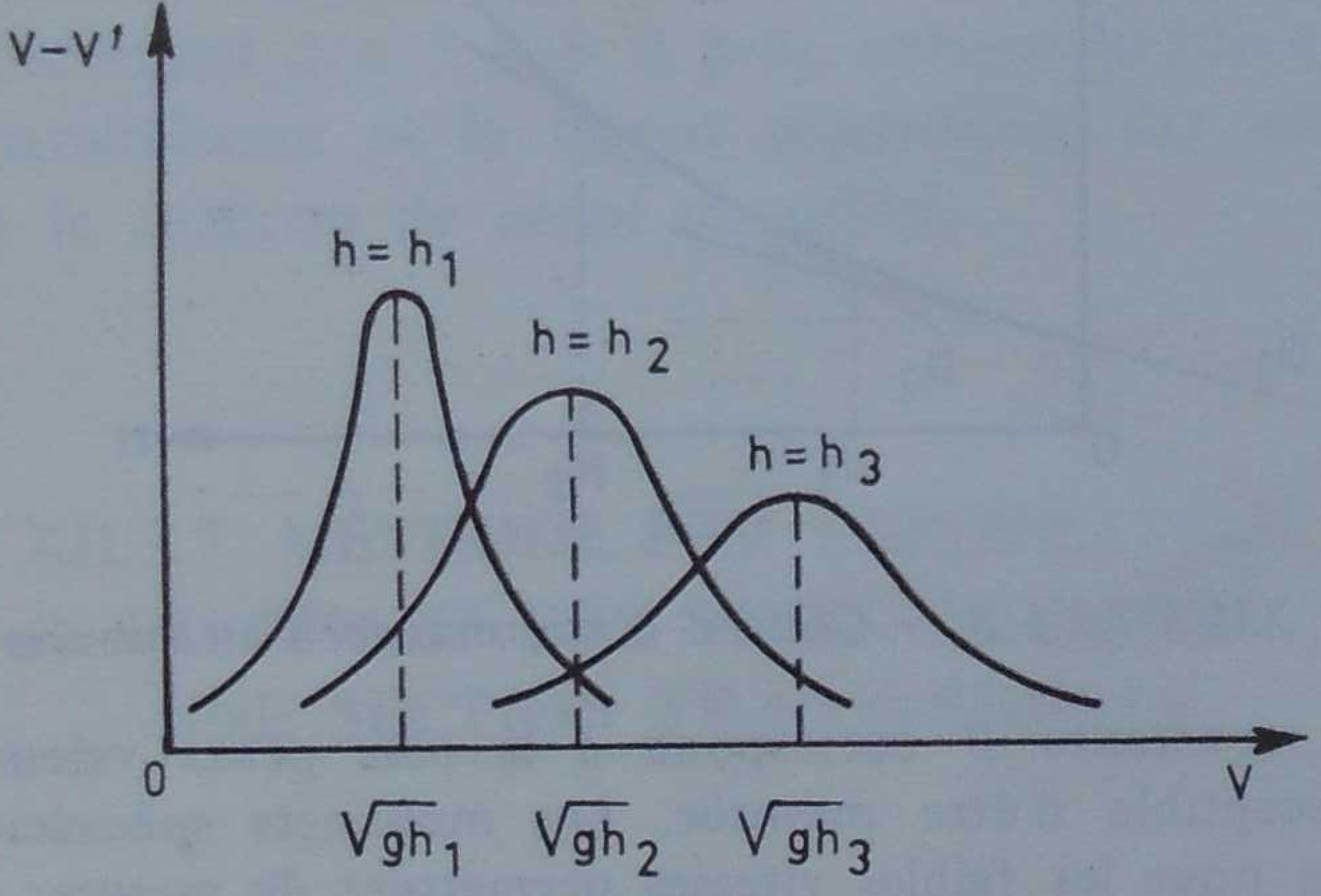


Fig. XII.3.7.1.1.5 – Pointe d'Eper

L'étalonnage d'un moulinet doit être effectué en utilisant le même dispositif de support que celui adopté au cours des essais.

Influence de l'orientation du courant

Lorsque la direction du courant dans lequel est plongé le moulinet n'est pas parallèle à l'axe de rotation mais fait avec lui un angle φ, on constate que la vitesse indiquée par l'appareil est inférieure à la vitesse du courant, la différence étant d'autant plus grande que φ est plus grand. Au voisinage de $\varphi = 0$, les différences sont très faibles.

Lorsqu'on utilise le moulinet pour le jaugeage d'un courant liquide (canal, rivière, canalisation) on se place dans une section droite et on cherche la composante de la vitesse normalement à la section ; si la direction du courant fait un angle φ avec la normale à la section de mesure c'est-à-dire avec l'axe du moulinet, la quantité qu'il importe de connaître est $V \cos \varphi$. Si donc la vitesse V' indiquée par le moulinet était égale à $V \cos \varphi$, il serait inutile de connaître la direction du courant. En fait, ainsi qu'on peut le constater sur les courbes de la figure XII.3.7.1.1.6, la valeur V' indiquée par l'appareil s'écarte assez sensiblement de $V \cos \varphi$ surtout lorsque φ est assez grand.

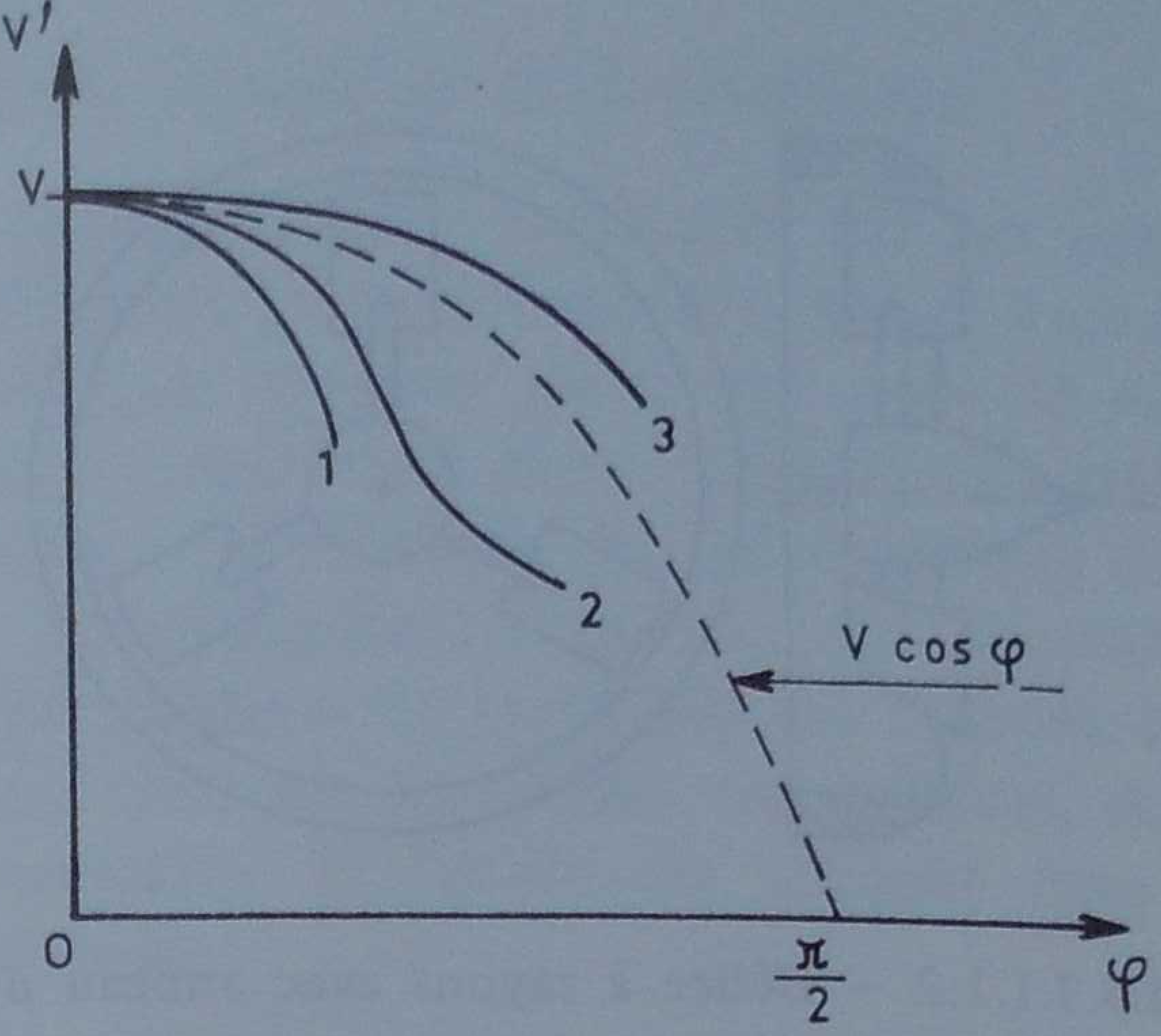


Fig. XII.3.7.1.1.6 – Influence de l'orientation du courant
1 – Hélice à arêtes biaises ; 2 – Hélice à rayons ;
3 – Moulinet avec anneau de garde

Avec le moulinet à anneau de garde on peut admettre des variations d'orientation de ± 15° par rapport à la position correcte pour un écart maximal $V' - V \cos \varphi$ de l'ordre de 1 %.

Le graphique de la figure XII.3.7.1.1.6 montre la grande sensibilité des hélices à arêtes biaises à la variation d'orientation du moulinet par rapport à la normale à la section de mesure. Malgré cet inconvénient on utilise souvent le moulinet avec hélice à arêtes biaises pour les jaugeages en rivière en raison du fait qu'il a moins tendance à arrêter les corps flottants ou les herbes entraînées par le courant.

Signalons enfin que certains constructeurs ont mis au point des moulinets à hélices "auto-composantes" qui donnent directement $V' = V \cos \varphi$ pour des valeurs assez importantes de l'angle φ.

Influence de la turbulence du régime et du gradient transversal de vitesse

Pour des variations de la vitesse de faible amplitude autour de sa valeur moyenne V, les indications données par l'appareil correspondent effectivement à la vitesse moyenne V du courant.

De manière analogue si le moulinet est placé dans une zone où le gradient transversal de vitesse est assez faible et uniforme, la vitesse moyenne indiquée par le moulinet est égale à la vitesse moyenne vraie pour la zone balayée par l'appareil ; le point efficace du moulinet (c'est-à-dire le point où doit être affectée la vitesse indiquée par l'appareil) est le centre de la zone balayée.

Utilisation du moulinet en rivière

Comme nous le préciserons plus loin les opérations de jaugeage par exploration du champ des vitesses nécessitent de placer l'appareil de mesure de la vitesse en des points bien déterminés de la section de mesure.

Chaque fois qu'on le peut, on monte le moulinet à l'extrémité d'une *perche graduée* susceptible de coulisser verticalement dans un support ou "chariot porte-moulinet" qui

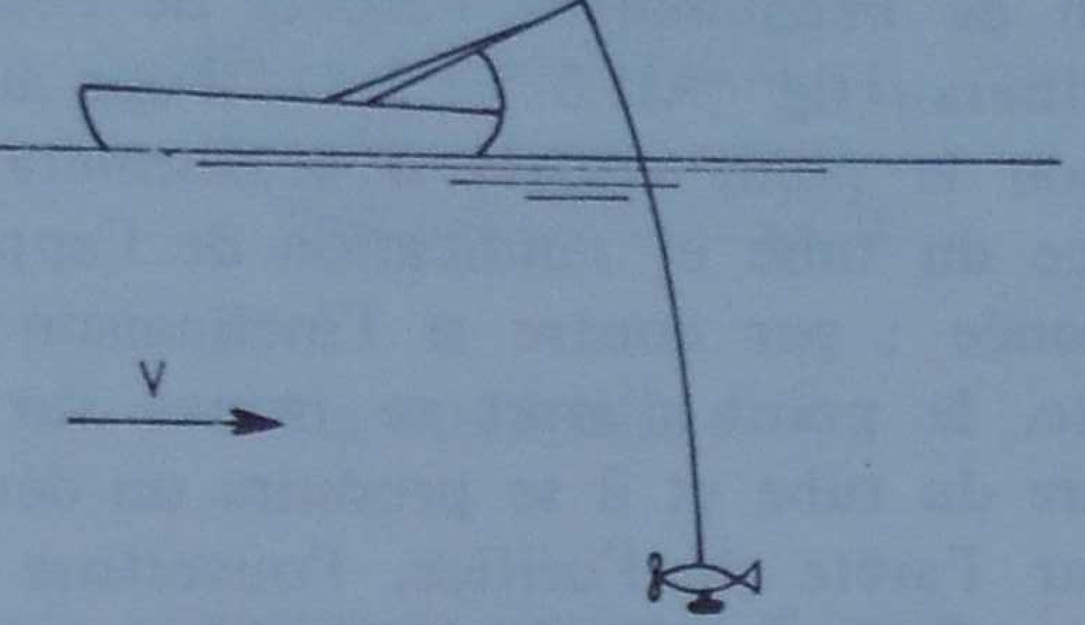


Fig. XII.3.7.1.1.7 – Moulinet suspendu et lesté par un saumon

est monté sur un pont ou sur une embarcation spéciale appelée "portières" et constituée de deux barques jumelées supportant un platelage.

Toutefois cette disposition n'est pas toujours possible ; en particulier si la profondeur est grande la perche ne présente pas une rigidité suffisante, elle vibre et occasionne de ce fait des erreurs importantes. On utilise alors un *moulinet lesté* (saumon de plomb), pourvu d'un empennage et suspendu à l'extrémité d'un *câble* (fig. XII.3.7.1.1.7).

Sous l'action du saumon et de l'empennage le moulinet se place horizontalement face au courant ; il suffit de dérouler la longueur de câble nécessaire pour placer le moulinet à la profondeur désirée.

Une difficulté se présente toutefois pour déterminer la *profondeur exacte d'immersion de l'appareil* car, par suite de la vitesse du courant, le moulinet et le câble sont entraînés et la longueur de câble déroulé est supérieure à la profondeur atteinte.

On utilise des abaques fournis par les constructeurs et qui permettent de déterminer la position du moulinet (profondeur et abscisse le long du courant) connaissant la longueur de câble déroulée, l'inclinaison du câble sur la verticale et les caractéristiques (poids et coefficient de traînée) du câble et du moulinet.

La méthode du moulinet suspendu à l'extrémité d'un câble est sans doute simple à utiliser mais conduit à des erreurs inévitables, de sorte qu'il sera toujours préférable d'ancrer le moulinet à un deuxième câble tendu à l'amont et maintenu par une tenaille.

De récents perfectionnements ont été apportés à la technique du moulinet suspendu, en particulier pour les jaugeages effectués en périodes de crues. Pour réduire les déviations et dérives exagérées dues au coefficient de traînée du câble électro-porteur et tenant à son diamètre toujours assez considérable (de l'ordre de 8 mm), on utilise un moulinet lesté suspendu à un *câble uniquement porteur* donc de diamètre beaucoup plus faible (2 à 3 mm). Le repérage du nombre de tours du moulinet est obtenu par un procédé électrique (variation de la résistance de l'ensemble du moulinet et de son saumon) ou radio-électrique (les indications du moulinet impressionnent périodiquement un vibreur logé dans le saumon ou dans le corps du moulinet et sont transmises sous forme de parasite à un poste radio-récepteur).

Micromoulinets

Pour mesurer les vitesses dans des zones très localisées (en particulier pour les études sur modèles réduits ou dans les petits canaux, ou encore au voisinage des parois d'un canal ou d'une canalisation) on utilise des moulinets de très petites dimensions ou "micro moulinets" ; leur fonctionnement et leur utilisation correspondent aux mêmes principes que les moulinets axiaux ordinaires.

XII.3.7.1.2. *Tube de Pitot et ses perfectionnements*

Principe

Considérons un filet liquide pris dans un courant de vitesse uniforme V venant buter contre un obstacle B (fig. XII.3.7.1.2.1).

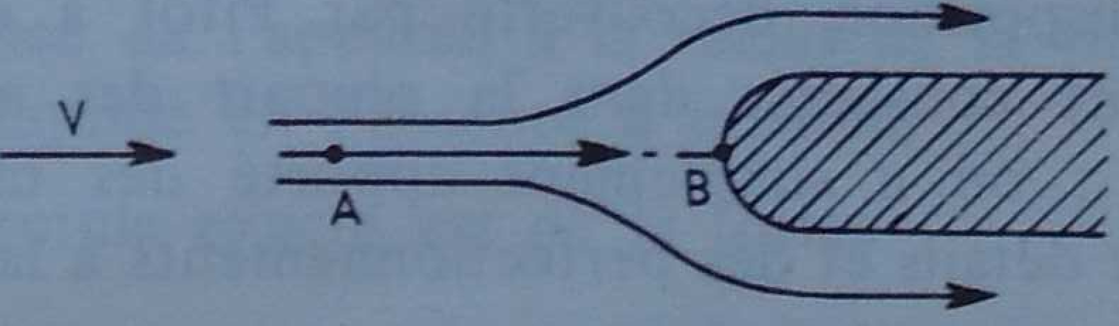


Fig. XII.3.7.1.2.1 – Principe du tube de Pitot

Appliquons le théorème de Bernoulli entre un point A à l'amont où la vitesse est V et la pression p_A et le point d'arrêt B où la vitesse est nulle et la pression p_B, les points A et B étant supposés sur le même plan horizontal ; on obtient :

$$\frac{p_A}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_B}{\varpi}$$

ou

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2} V^2$$

La pression en A soit p_A est la *pression statique*.

La pression en B soit p_B est la *pression totale*.

La différence $p_B - p_A$ est appelée *pression dynamique*. Si donc on mesure p_B et p_A ou la différence $p_B - p_A$, on pourra en déduire la vitesse V.

La première application de ce principe a été découverte par *Henri de Pitot* qui décrivit son procédé et le présenta à l'Académie des Sciences en 1732. L'appareil de Pitot était simplement constitué d'un tube de verre B coudé à l'une de ses extrémités qui était immergée au point où on cherchait la vitesse et orienté vers l'amont (fig. XII.3.7.1.2.2).

La distance verticale entre le niveau dans le tube B et le niveau de la surface libre (ou le niveau dans un tube piézométrique A disposé à côté du tube B) mesure la pression dynamique $\rho V^2/2$.

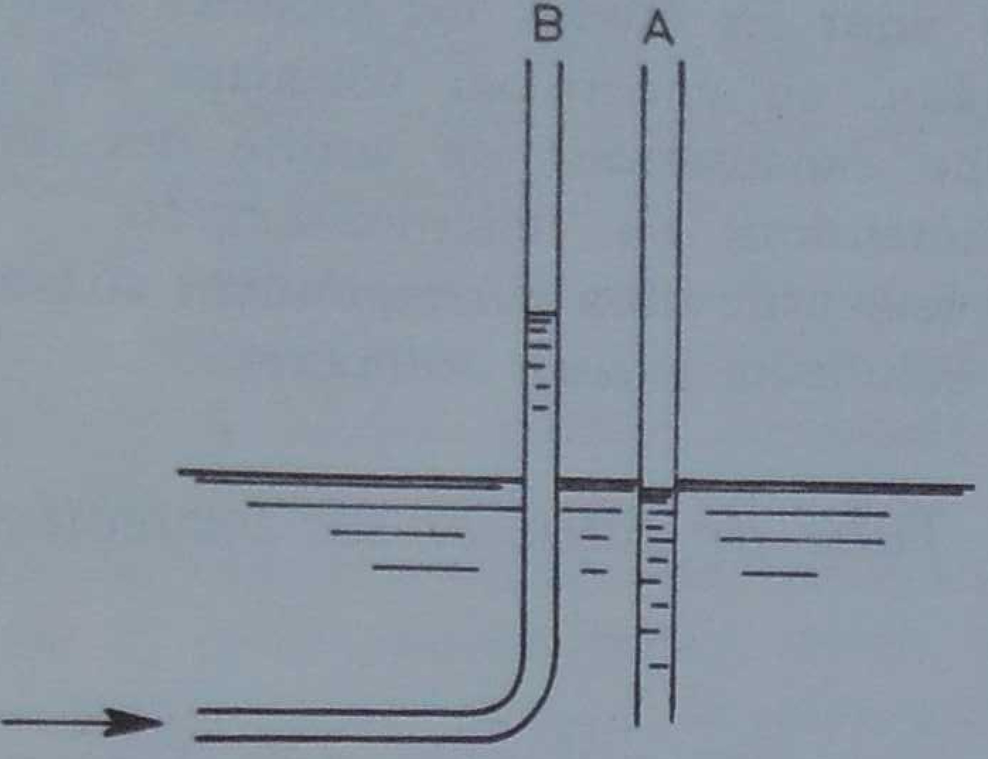


Fig. XII.3.7.1.2.2 – Schéma de l'appareil de Pitot

La disposition découverte par Pitot a été sensiblement consacrée dans la plupart des appareils actuels ; on a simplement apporté des modifications de détails et des perfectionnements à la mesure de la pression statique p_A.

Mesure de la pression totale p_B

Le tube de Pitot à bords francs constitue le dispositif le plus simple de prise de pression totale. Le courant extérieur vient buter contre l'obstacle constitué par le liquide contenu à l'intérieur du tube et qui peut être considéré comme étant au repos. Les bords francs du tube créent des décollements de la veine et le tube se trouve entouré d'une gaine turbulente formant sillage (fig. XII.3.7.1.2.3).

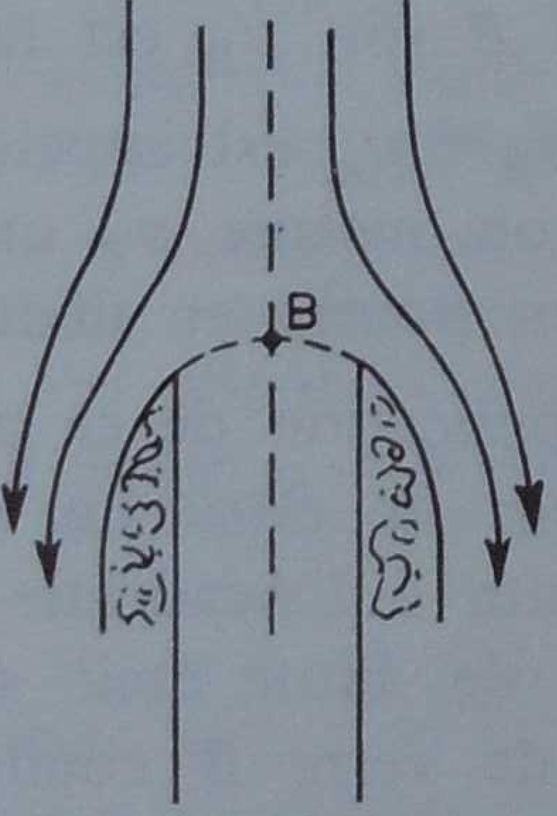


Fig. XII.3.7.1.2.3 – Tube de Pitot à bords francs

Si l'axe du tube est incliné par rapport à la direction de l'écoulement l'aspect de l'écoulement se modifiera (fig. XII.3.7.1.2.4). Pour une faible inclinaison le point d'arrêt B se formera toujours à l'entrée du tube et l'indication de l'appareil sera peu erronée ; par contre si l'inclinaison du tube augmente, le point d'arrêt se trouve sur la paroi extérieure du tube et il se produira un décollement franc sur l'arête de l'orifice, l'ouverture du tube étant complètement située à l'intérieur d'une zone en dépression, l'indication donnée par l'appareil sera donc trop faible.

En fait l'expérience montre que le tube à bords francs est utilisable avec une erreur maximale de l'ordre de 1 % pour des variations d'inclinaison de $\pm$ 15°, ce qui est très satisfaisant en raison de la simplicité du dispositif.

On peut éviter la formation de la gaine tourbillonnaire qui entoure le tube en utilisant un *cylindre terminé par une demi-sphère* au centre de laquelle est percé le trou de prise de pression totale (fig. XII.3.7.1.2.5). Les filets liquides ne se décollent pas de la paroi du tube et on peut alors réaliser facilement une prise de pression statique comme nous le préciserons plus loin.

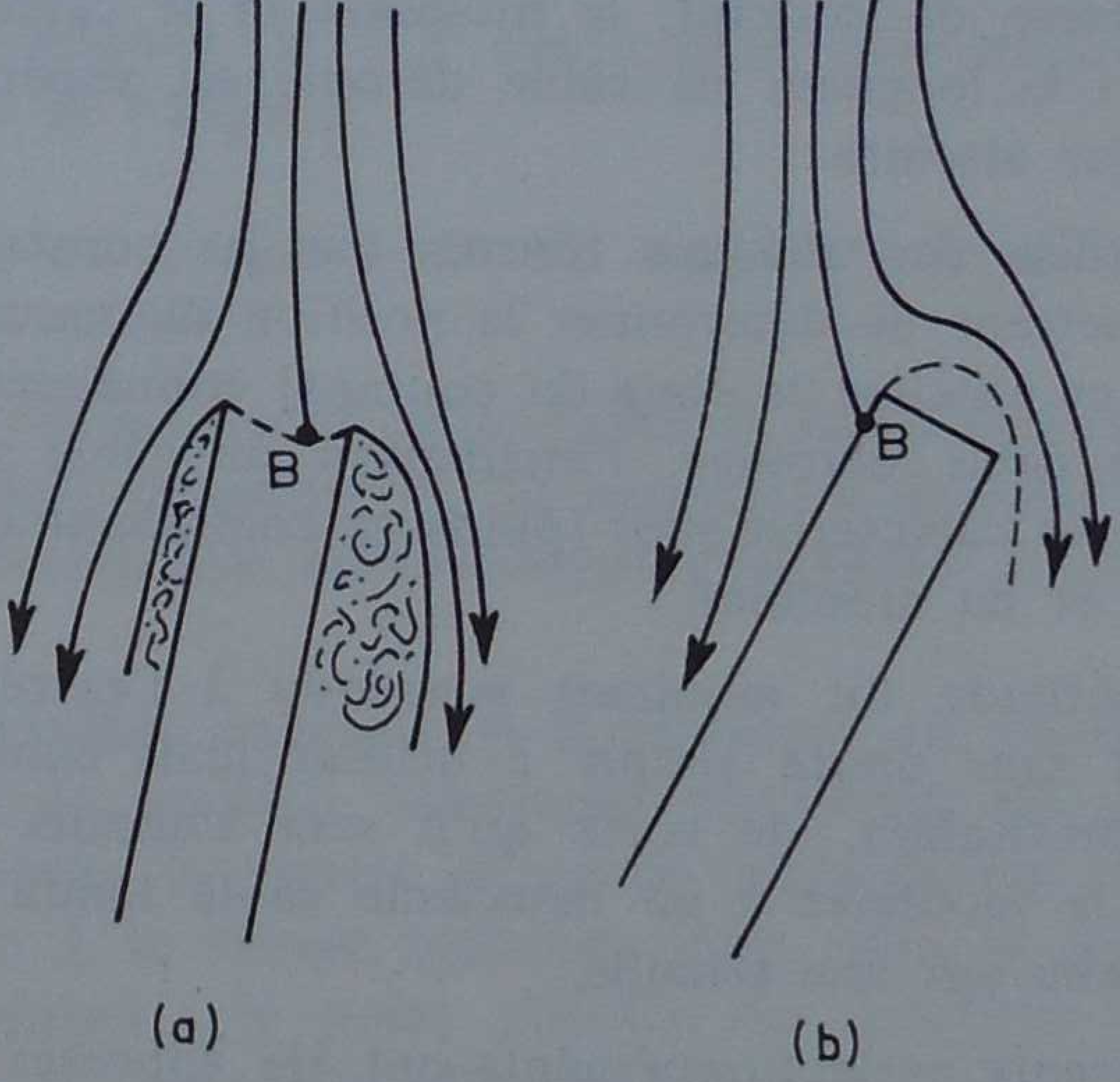


Fig. XII.3.7.1.2.4 – Influence de l'inclinaison du tube sur la direction du courant. (a) faible inclinaison ; (b) forte inclinaison

Toutefois ce dispositif est très sensible aux variations d'orientation et ce d'autant plus que le rapport d/D est plus petit, car le point d'arrêt a d'autant plus de chance de se former à l'extérieur de l'orifice que celui-ci est plus petit.

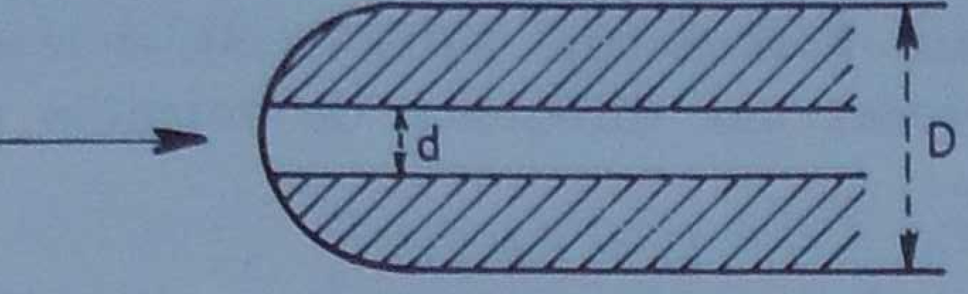


Fig. XII.3.7.1.2.5

Mesure de la pression dynamique $p_B - p_A$

Il suffit d'adjoindre à la prise de pression totale une *prise de pression statique.* Pour que les indications données par cette prise de pression statique soient exactes il convient de réaliser un orifice très petit dont l'axe soit rigoureusement perpendiculaire à la paroi dans laquelle est percé l'orifice ; ses bords doivent être très soigneusement ébarbés et ne pas faire saillie à l'intérieur du liquide ; enfin la prise de pression doit être disposée dans une zone d'écoulement régulier non perturbé et ne comportant pas de décollements ou sillages.

Une première amélioration au dispositif de Pitot fut apportée par *Ritter* qui préconisa l'adoption d'un cylindre C ouvert aux deux extrémités et entourant le tube piézométrique A, de manière à annuler l'effet de succion entraîné par le sillage produit par le tube (fig. XII.3.7.1.2.6).

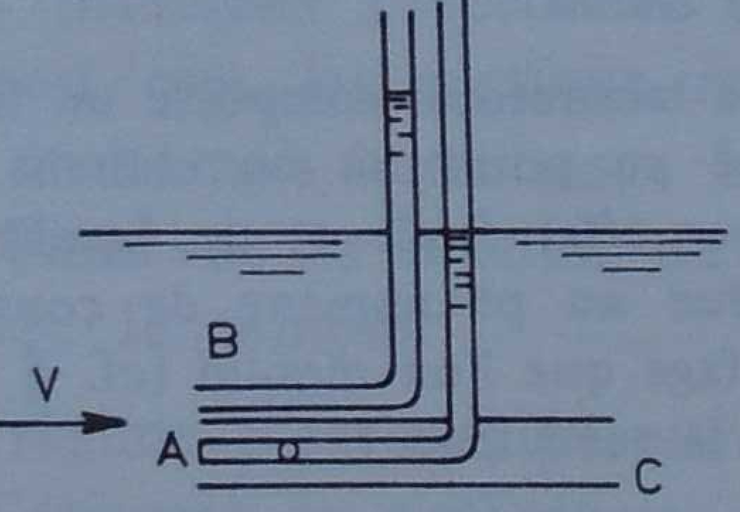


Fig. XII.3.7.1.2.6 – Cylindre de Ritter

Ultérieurement *Prandtl* a proposé d'adjoindre au tube de prise de pression totale à demi-sphère une prise de pression statique réalisée par plusieurs orifices (ou une fente) ménagés sur la paroi latérale du cylindre à $3D$ de l'extrémité amont (fig. XII.3.7.1.2.7).

Sous cette forme l'appareil généralement appelé *tube de Prandtl* est pratiquement insensible aux variations d'inclinaison du courant par rapport à l'axe du tube jusqu'à des valeurs de ± 15°. Toutefois, par mesure de sécurité, il est recommandé de ne pas dépasser une inclinaison de ± 7°.

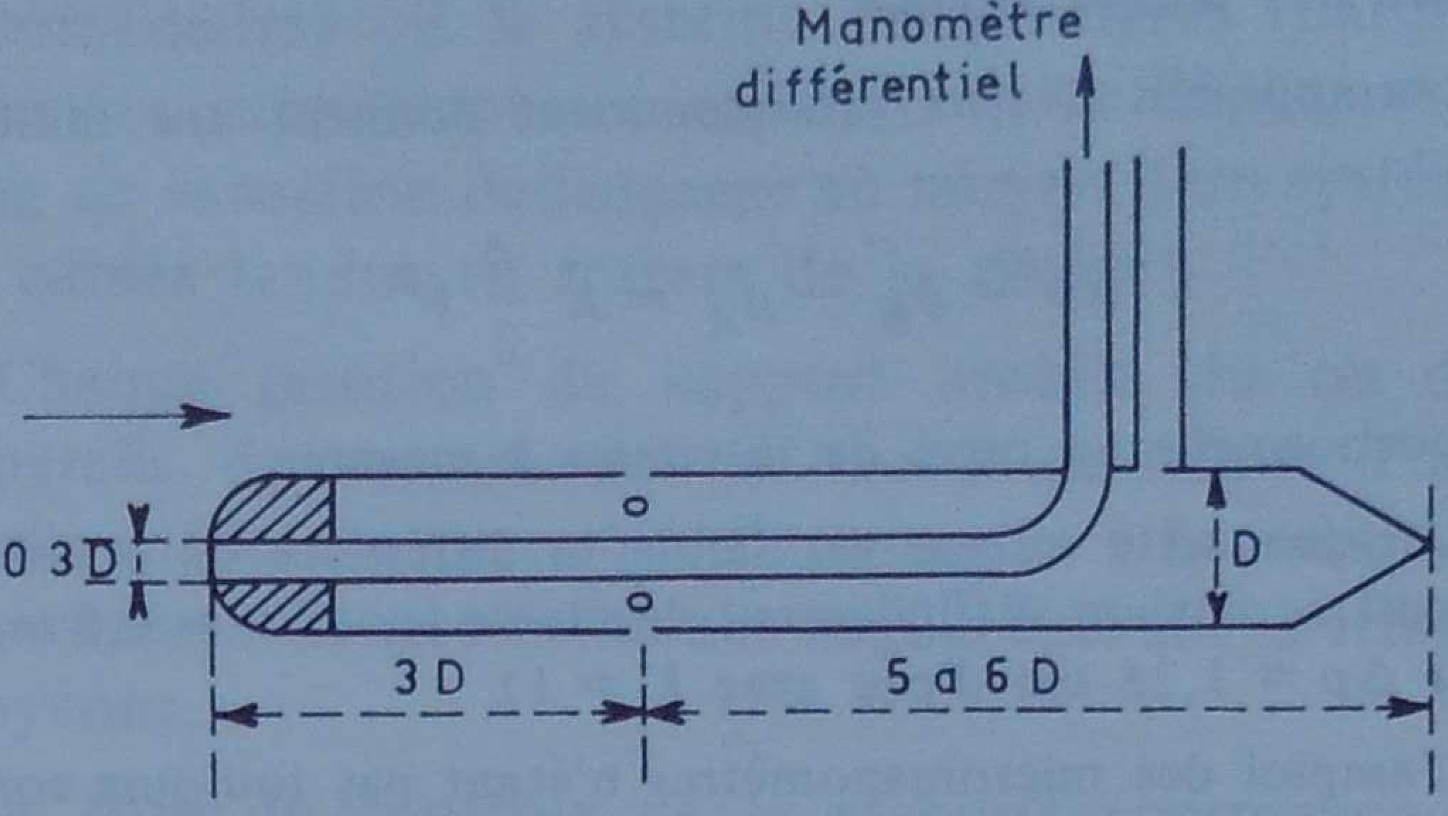


Fig. XII.3.7.1.2.7 – Tube de Prandtl

La pression dynamique $p_B - p_A$ est mesurée directement au *manomètre différentiel.* En toute rigueur la pression dynamique n'est pas égale à $\rho \frac{V^2}{2}$ en raison de la légère modification apportée par la présence de l'appareil à la valeur de la vitesse V dans le liquide en l'absence d'appareil.

La formule exacte est de la forme :

$$p_B - p_A = K \frac{\rho}{2} V^2$$

Le coefficient K, très voisin de 1, est déterminé par un étalonnage effectué dans les mêmes conditions que pour les moulinets.

On utilise également assez fréquemment un appareil constitué par *deux tubes de Pitot accolés,* l'un étant orienté face au courant et l'autre en sens contraire (fig. XII.3.7.1.2.8). Le premier B donne la pression totale, le second A donne une pression plus faible que la pression statique, la différence $p_B - p_A$ est donc plus grande que celle obtenue avec le tube de Prandtl. On a sensiblement :

$$p_B - p_A = K' \frac{\rho}{2} V^2$$

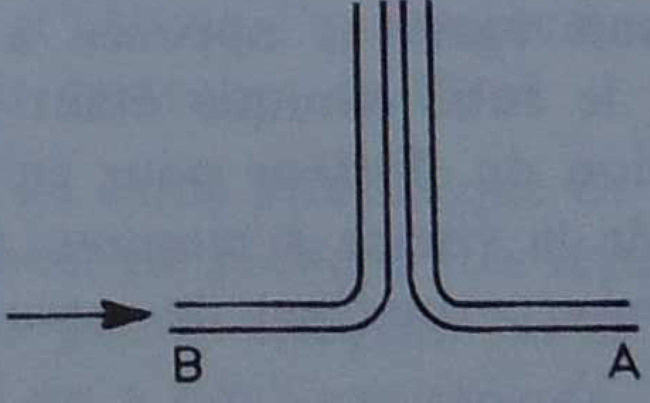


Fig. XII.3.7.1.2.8

La constante K' est de l'ordre de 1,4 mais dépend du mode de construction et du nombre de Reynolds de l'écoulement, inconvénient propre à ce type d'appareil.

Mesure des faibles vitesses

Les appareils décrits précédemment donnent une indication

$$\Delta p = p_B - p_A = K \frac{\rho}{2} V^2$$

proportionnelle au carré de la vitesse à mesurer.

Lorsque cette vitesse est faible la différence de pression enregistrée devient difficilement décelable (pour $V = 0{,}5$ m/s, on a $\Delta p = 1{,}28$ cm d'eau avec $K = 1$).

L'emploi des micromanomètres n'étant pas toujours commode on a imaginé des dispositifs permettant de mesurer ces faibles vitesses ; *l'appareil de Betz* est un des plus simples (fig. XII.3.7.1.2.9).

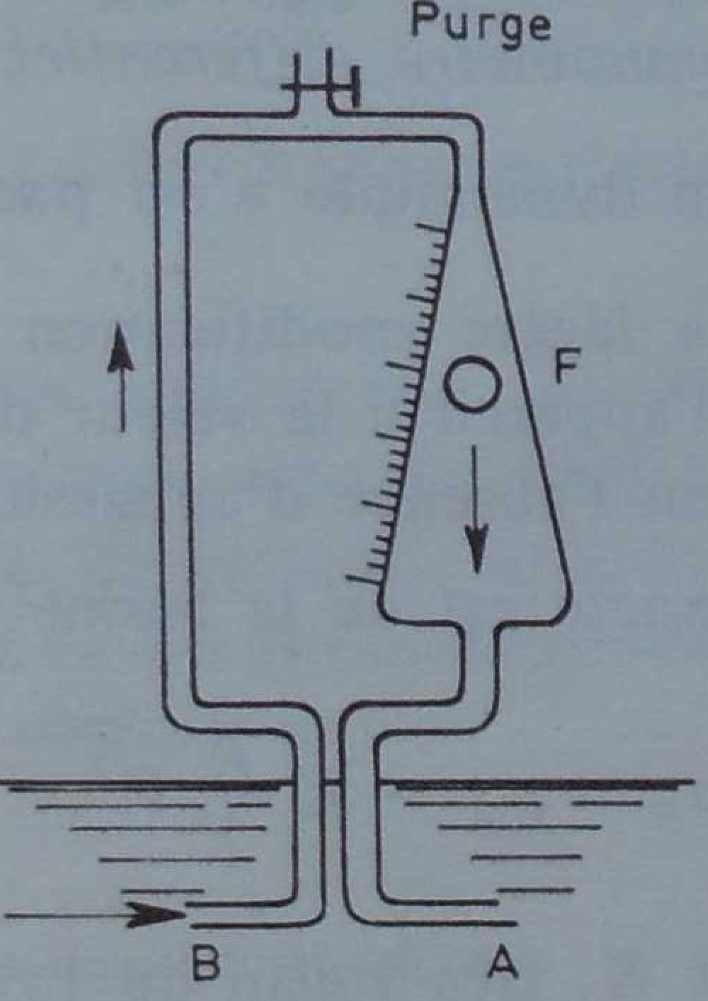


Fig. XII.3.7.1.2.9 – Appareil de Betz

Il est constitué par un tube de Pitot B disposé face au courant et relié à un tube de verre de forme conique disposé la pointe en haut et dont la base est reliée à un second tube de Pitot A orienté en sens inverse du courant. Par suite de la différence de pression $p_B - p_A$ un courant s'établit entre les deux tubes préalablement purgés d'air. Dans le tube conique la vitesse du courant d'échange va en diminuant du sommet à la base. On a placé à l'intérieur du tube conique un petit flotteur F lesté de telle façon qu'il présente une ligne de vitesse ascensionnelle. Lorsque l'appareil est en fonctionnement en régime permanent le flotteur F prend une position d'équilibre telle que sa vitesse ascensionnelle soit égale et opposée à la vitesse du courant descendant ; le tube conique étant gradué, il suffit de repérer la position du flotteur pour en déduire, après étalonnage, la valeur de la vitesse à mesurer. On a construit des appareils de ce genre permettant de mesurer des vitesses de l'ordre de 5 cm/s.

XII.3.7.1.3. *Autres appareils de mesure des vitesses*

Appareillage électromagnétique

Lorsqu'un courant liquide de vitesse V supposée uniforme dans toute la section, s'écoule entre deux électrodes séparées par la distance d placées dans un champ magnétique H perpendiculaire à V et d (fig. XII.3.7.1.3), il se crée entre les deux électrodes une différence de potentiel U donnée par la formule :

$$U = \mu H V d$$

μ représentant la perméabilité magnétique du liquide considéré.

Fig. XII.3.7.1.3 – Principe du débitmètre électromagnétique

Cette formule permet de déduire V de la mesure des autres grandeurs.

On opère avec des champs H alternatifs pour éviter la polarisation des électrodes. En raison de la faible grandeur de U pour les conditions usuelles de la pratique, on amplifie la tension U qui est ensuite mesurée au voltmètre à tube électronique, la lecture étant faite à l'oscillographe cathodique.

On construit suivant ce principe des *tuyères électromagnétiques* et des *débitmètres électromagnétiques* constitués d'un élément de canalisation comportant deux électrodes diamétralement opposées.

Anémomètre à fil chaud

Cet appareil de laboratoire comporte un fil de très faible diamètre immergé au point où on cherche la vitesse. Ce fil est chauffé par effet Joule et on équilibre la perte de chaleur du fil due au phénomène de convection par un courant de chauffage que l'on mesure (cf. § VI.3.7 : étude expérimentale de la turbulence).

XII.3.7.2. *Technique opératoire*

XII.3.7.2.1. *Choix de la section de jaugeage*

L'écoulement dans la section de jaugeage doit autant que possible comporter des filets parallèles sans tourbillons ni remous. Dans ce but, il faut choisir l'emplacement de la section de jaugeage dans un tronçon aussi *rectiligne* que possible du canal ou de la rivière et dans lequel les surfaces qui limitent la section mouillée soient sensiblement parallèles.

Dans certains cas (notamment sur un canal artificiel ou en laboratoire) on peut disposer à l'amont

des *dispositifs tranquillisateurs* (grilles, nids d'abeilles, radeau) de manière à se rapprocher des conditions susvisées.

Si les parois du canal ont un profil très irrégulier, on peut parfois y remédier par une installation provisoire en bois ou en ciment ; la longueur de cet aménagement représentera autant que possible deux fois la plus grande dimension de la section de jaugeage ; un léger convergent peut être réalisé à l'entrée du secteur aménagé de manière à provoquer une meilleure orientation des vitesses.

La section de jaugeage est disposée de préférence normalement à l'écoulement. Si on constate que des contre-courants se produisent en divers endroits, on s'abstiendra de procéder à des relevés dans cette section ; l'emploi de dispositifs spéciaux tels que les moulinets à fonctionnement inverse ne peut être envisagé que pour déceler ces contre-courants.

Signalons enfin que les indications précédentes supposent implicitement que l'écoulement est *permanent et uniforme* ou quasi-tel, au moins pendant la durée des mesures. Dans le cas des cours d'eau naturels ces conditions ne sont pas toujours bien réalisées.

En régime permanent (c'est-à-dire en dehors des périodes de crues ou d'étiages) on se rapproche le plus possible des conditions du régime uniforme en appliquant les principes précédents (lit et berges stables de façon que les sections mouillées, non seulement au droit mais aussi assez loin à l'amont et surtout à l'aval de la section de jaugeage, ne varient pas avec le temps).

Lorsque le régime n'est pas permanent (périodes de crues ou d'étiages) on s'efforcera d'effectuer les mesures pendant un intervalle de temps suffisamment bref pour que le régime puisse être considéré comme pratiquement permanent pendant la durée correspondante, de toute manière on s'assurera de la permanence du régime au cours de l'essai.

XII.3.7.2.2. *Exécution des jaugeages*

Les appareils de mesure (moulinets ou tubes de Pitot) peuvent être installés sur une *poutre horizontale* (cas des canaux ou galeries) ou sur une *perche verticale* susceptible d'explorer toute la section. Pour des rivières importantes on peut utiliser un *ouvrage* (pont ou passerelle) enjambant la rivière (sans pile intermédiaire) ou le système des *portières* (barques jumelées supportant les appareils et se déplaçant le long de la section de jaugeage au moyen d'un système de câbles tendus en travers de la rivière).

Chaque position du support mobile du ou des appareils de mesure donne lieu à un relevé d'une durée suffisante pour que l'erreur due à la pulsation des vitesses ait une influence négligeable sur la vitesse moyenne.

A titre de contrôle de la stabilité (permanence) du régime, il est souvent utile de placer à un poste fixe un appareil de mesure, si possible enregistreur. Un limnimètre ou mieux encore un limnigraphe permet de contrôler la stabilité de la cote du plan d'eau au cours du jaugeage.

Les dimensions de la section de jaugeage (section mouillée) sont relevées par sondages.

Nombre et répartition des points de mesure

D'une manière générale le nombre de points de mesure pour obtenir une précision donnée sur le débit ne dépend pas des dimensions absolues de la section de jaugeage ; ce nombre peut être fixé suivant les indications suivantes.

La vitesse moyenne suivant une verticale (ou une horizontale) de mesure le long de laquelle la distribution des vitesses est très régulière est déterminée à ± 1 % près si le nombre des points de mesure sur cette droite est au moins égal à 5 ; dans les meilleures conditions, c'est-à-dire pour un canal prismatique de section rectangulaire avec un écoulement très régulier, une précision de 1 % ne sera donc obtenue qu'avec un minimum de 25 points.

Lorsque la distribution des vitesses ou le profil de la section de jaugeage sont irréguliers le nombre de points de mesure est plus important ; notamment on utilise des points d'autant plus rapprochés que le gradient transversal de vitesse est plus élevé.

Au voisinage des parois et de la surface libre les appareils de mesure sont aussi rapprochés de ces dernières que le permettent leurs règles d'emploi ; au besoin on utilise des moulinets munis d'hélices d'encombrement réduit (micromoulinets) ou parfois des tubes de Pitot.

Dans le cas d'un canal prismatique de section rectangulaire lorsque l'écoulement est présumé très régulier, on peut adopter la répartition des points indiquée sur le schéma de la figure XII.3.7.2.2.1 où on a pris l'exemple de 36 points de mesure.

Dans le cas de *mesures rapides* pour lesquelles on peut accepter une précision moins grande, on pourra ne mesurer la vitesse qu'en *deux points par verticale* (à $0{,}2\,h$ et $0{,}8\,h$) et admettre que la moyenne des vitesses en ces deux points est égale à la vitesse moyenne le long de la verticale considérée.

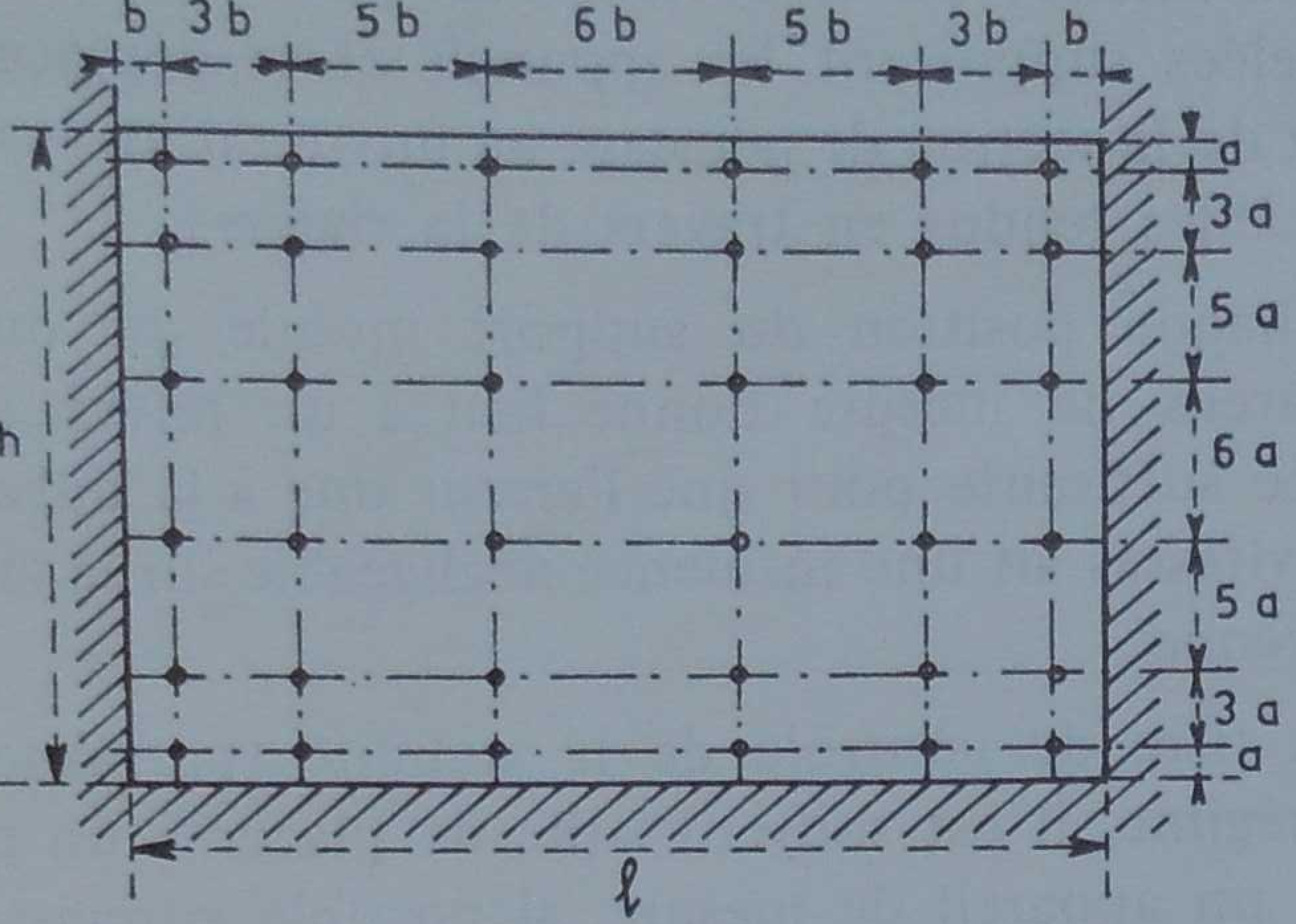


Fig. XII.3.7.2.2.1 – Répartition des points de mesure dans le cas d'une section rectangulaire

$$\left(a = \frac{h}{24} \quad ; \quad b = \frac{l}{24}\right)$$

Une méthode encore plus rapide mais évidemment moins précise consiste à ne mesurer la vitesse qu'en un seul point, à 0,6 h à partir de la surface et à faire la même approximation.

Procédés d'exploration point par point

Pour les petites rivières ou les canaux de faible profondeur on utilise un seul moulinet. Dans tous les autres cas il est préférable d'utiliser une *batterie de moulinets* montés sur une perche verticale ou une poutre horizontale à des distances correspondant aux normes indiquées précédemment. Pour chaque position du support on enregistre simultanément les lectures des différents moulinets.

Jaugeage par intégration continue

Considérons la formule de tarage du moulinet utilisé :

$$V = a\,\frac{n}{t} + b$$

n étant le nombre de tours enregistrés en un temps t.

La méthode d'intégration continue consiste à enregistrer le nombre total de tours de l'hélice, soit N, pendant la durée T de descente du moulinet à une vitesse constante U le long d'une verticale de mesure correspondant à une profondeur H.

A la profondeur h la vitesse du courant est V (fig. XII.3.7.2.2.2). Le moulinet descend de dh en un temps dt tel que :

$$U = \frac{dh}{dt}, \quad \text{soit} \quad dt = \frac{dh}{U}.$$

Pendant cet intervalle de temps dt l'hélice a tourné de dn tours tel que

$$V = a\,\frac{dn}{dt} + b = a\,\frac{dn}{dh}\,U + b$$

d'où :

$$dn = \frac{V - b}{aU}\,dh$$

Pendant la durée totale T de la descente du moulinet correspondant à une profondeur H on a enregistré un nombre total de tours :

$$N = \int dn = \int_0^H \frac{V - b}{aU}\,dh$$

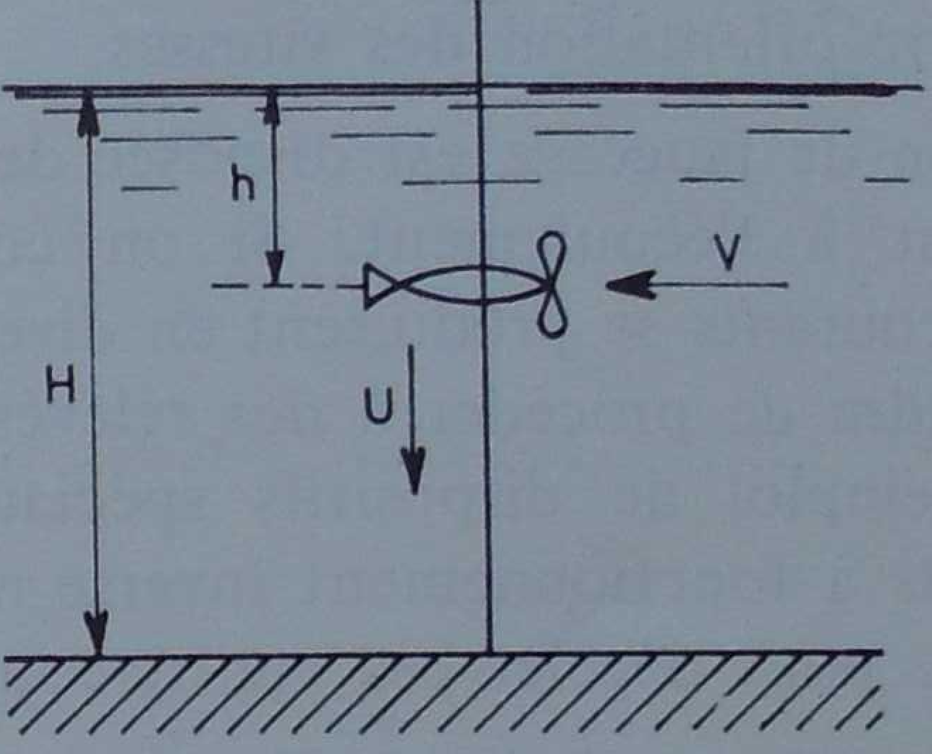


Fig. XII.3.7.2.2.2 – Jaugeage par intégration continue

La vitesse V_m correspondant à N tours enregistrés en T secondes est :

$$V_m = a\,\frac{N}{T} + b$$

ou

$$V_m = \frac{a}{T}\int_0^H \frac{V - b}{aU}\,dh + b$$

En remarquant que $UT = H$, on obtient, tous calculs faits :

$$V_m = \frac{1}{H}\int_0^H V\,dh$$

En enregistrant le nombre total de tours N pendant la durée T de la descente du moulinet le long de la verticale de profondeur H *on obtient donc directement la valeur de la vitesse moyenne* V_m le long de la verticale considérée :

$$V_m = a\,\frac{N}{T} + b = \frac{1}{H}\int_0^H V\,dh$$

Deux *remarques* doivent toutefois être signalées concernant le procédé de jaugeage par intégration continue :

1 – La vitesse U de déplacement vertical du moulinet ne doit pas être trop grande pour ne pas influencer la vitesse V du courant en chaque point ; U ne doit pas dépasser 5 *cm/s* et est généralement de l'ordre de 2 *cm/s*.

2 – Comme nous l'avons indiqué la courbe de tarage du moulinet est généralement constituée de deux droites d'équations

$$V = a_1\,\frac{n}{t} + b_1 \quad \text{et} \quad V = a_2\,\frac{n}{t} + b_2$$

L'intégration continue conduit à n'appliquer qu'une seule de ces deux équations ; il faut donc choisir un moulinet dont la courbe de tarage soit constituée d'une seule droite ou de deux droites de pentes peu différentes.

Le déplacement vertical du moulinet à vitesse constante est obtenu par un moteur à vitesse constante ou un régulateur centrifuge régularisant la vitesse de descente du moulinet (et éventuellement de son saumon) sous l'action de son poids.

Dans le cas du jaugeage d'une canalisation de section circulaire l'intégration continue est réalisée en déplaçant les moulinets suivant des trajectoires circulaires autour de l'axe de la canalisation.

XII.3.7.2.3. *Calcul du débit*

Le débit est calculé par *double intégration* suivant la relation :

$$Q = \iint_{\Omega} V\, d\Omega = \iint_{\Omega} V\, dx\, dy = \int_0^x dx \int_0^y V\, dy$$

Ω étant l'aire de la section mouillée rapportée au plan xOy.

La première intégration effectuée le long d'une verticale (ou d'une horizontale) de mesure donne le débit élémentaire

$$dq = \int_0^y V\, dy$$

correspondant à une verticale (ou une horizontale) de mesure ; dq représente en somme le débit par unité de largeur (ou de tirant d'eau) d'un canal dans lequel la répartition des vitesses sur chaque verticale serait identique à celle observée sur la verticale considérée ; il s'exprimera donc en m^2/s.

Si on utilise la méthode de jaugeage par intégration continue on obtient directement la vitesse moyenne V_m le long de chaque verticale c'est-à-dire dq et on n'a pas besoin d'effectuer les premières intégrations.

Le débit total Q est obtenu par la sommation de ce débit élémentaire dq suivant l'horizontale (ou la verticale) :

$$Q = \int_0^x dq\, dx$$

Les intégrations se font généralement par voie graphique. A cet effet les courbes de répartition des vitesses et des débits élémentaires sont tracées à une échelle suffisante pour que l'erreur de planimétrage soit négligeable.

Toutefois pour effectuer cette opération il faut au préalable *extrapoler les courbes de vitesse au voisinage de la surface et des parois.* Pour effectuer cette extrapolation on peut utiliser les règles suivantes(1) :

Canal rectangulaire

Au voisinage de la surface, la courbe de répartition des vitesses le long d'une verticale est extrapolée suivant la tangente tt' à cette courbe au point de mesure le plus voisin de la surface (fig. XII.3.7.2.3.1).

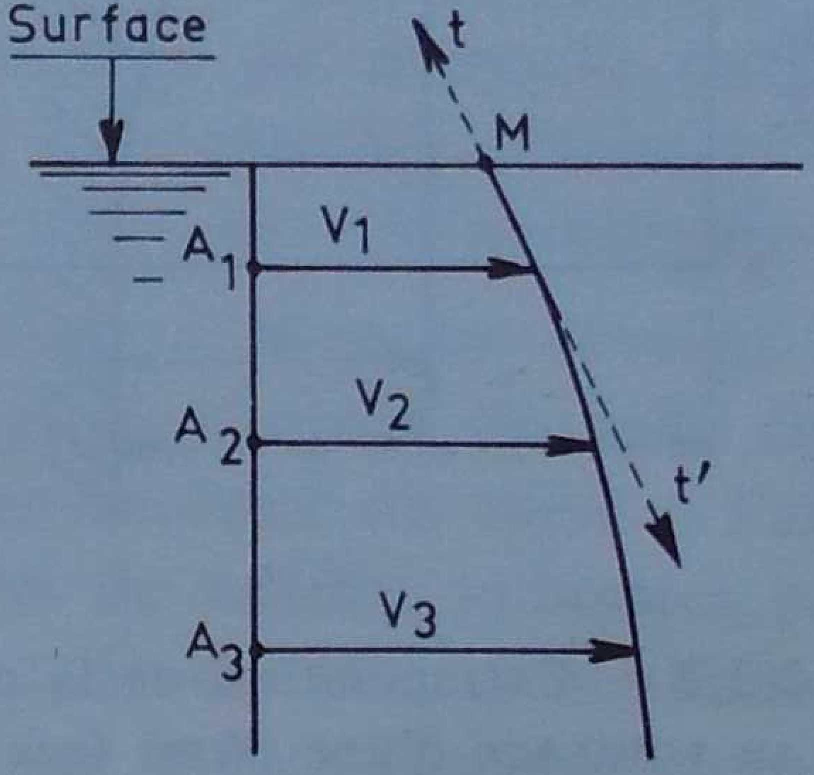


Fig. XII.3.7.2.3.1 – Extrapolation de la courbe des vitesses au voisinage de la surface

Au voisinage d'une paroi, la vitesse V_x en un point d'abscisse x comptée à partir de la paroi peut s'exprimer par la relation :

$$V_x = V_a \left(\frac{x}{a}\right)^{1/n}$$

V_a représente la vitesse mesurée au point A d'abscisse a le plus voisin de la paroi (fig. XII.3.7.2.3.2).

n est un coefficient qui dépend de la rugosité de la paroi et pour lequel on peut adopter les valeurs suivantes :

Planches bien rabotées Enduit en ciment lissé	$n = 10$
Maçonnerie bien dressée Béton brut	$n = 7$
Maçonnerie dégradée Parois en terre en bon état	$n = 5$

Cette hypothèse revient à admettre que la tangente tt' à la courbe des vitesses en un point situé à la distance a d'une paroi a pour coefficient angulaire :

$$tg\,\alpha = \frac{dV}{dx} = \frac{V_a}{an} \quad \text{(fig. XII.3.7.2.3.2)}$$

et que le débit élémentaire correspondant à l'intervalle compris entre la paroi et le point de mesure le plus voisin de celle-ci a pour valeur :

---

(1) Ces règles sont celles préconisées par la Sté Hydrotechnique de France (Code d'essais des installations hydrauliques. 2ème édit. fascicule 3).

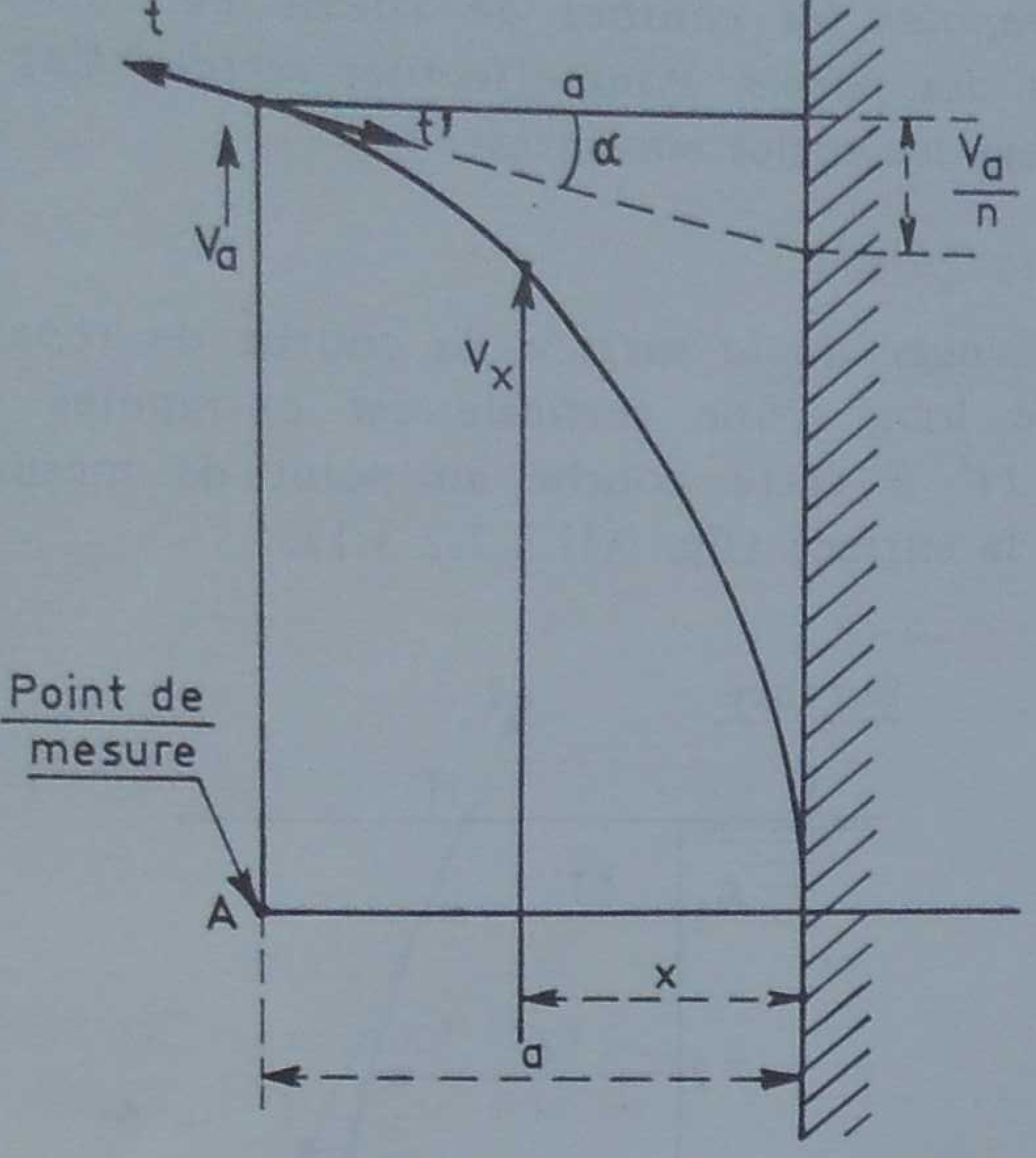


Fig. XII.3.7.2.3.2 – Extrapolation de la courbe des vitesses au voisinage d'une paroi (cas d'une section rectangulaire)

$$dq = \int_0^a V_x \, dx$$
$$= aV_a \frac{n}{n+1}$$

Canal légèrement trapézoïdal

Si le calcul des débits élémentaires est effectué le long d'horizontales de mesure les règles d'extrapolation précédentes seront appliquées.

Si les débits élémentaires sont calculés le long de verticales on peut utiliser la construction graphique suivante (fig. XII.3.7.2.3.3).

A partir de la vitesse observée au dernier point de mesure A le plus rapproché de la paroi inclinée, on construit la courbe (C_1) de répartition des vitesses suivant une direction AH perpendiculaire à la paroi en appliquant les principes précédents. On admet ensuite que les lignes d'égale vitesse sont sensiblement confondues avec les parallèles à la paroi inclinée ce qui permet de construire la courbe (C_2) donnant la répartition des vitesses le long de AK.

On a donc les relations :

$$\frac{V_x}{V_a} = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/n} = \left(\frac{x'}{a'}\right)^{1/n}$$

Pour pouvoir effectuer graphiquement la seconde intégration $Q = \int_0^x dq \, dx$ il faut *extrapoler les courbes des débits élémentaires au voisinage de la paroi.* On utilise les mêmes principes que pour les courbes des vitesses.

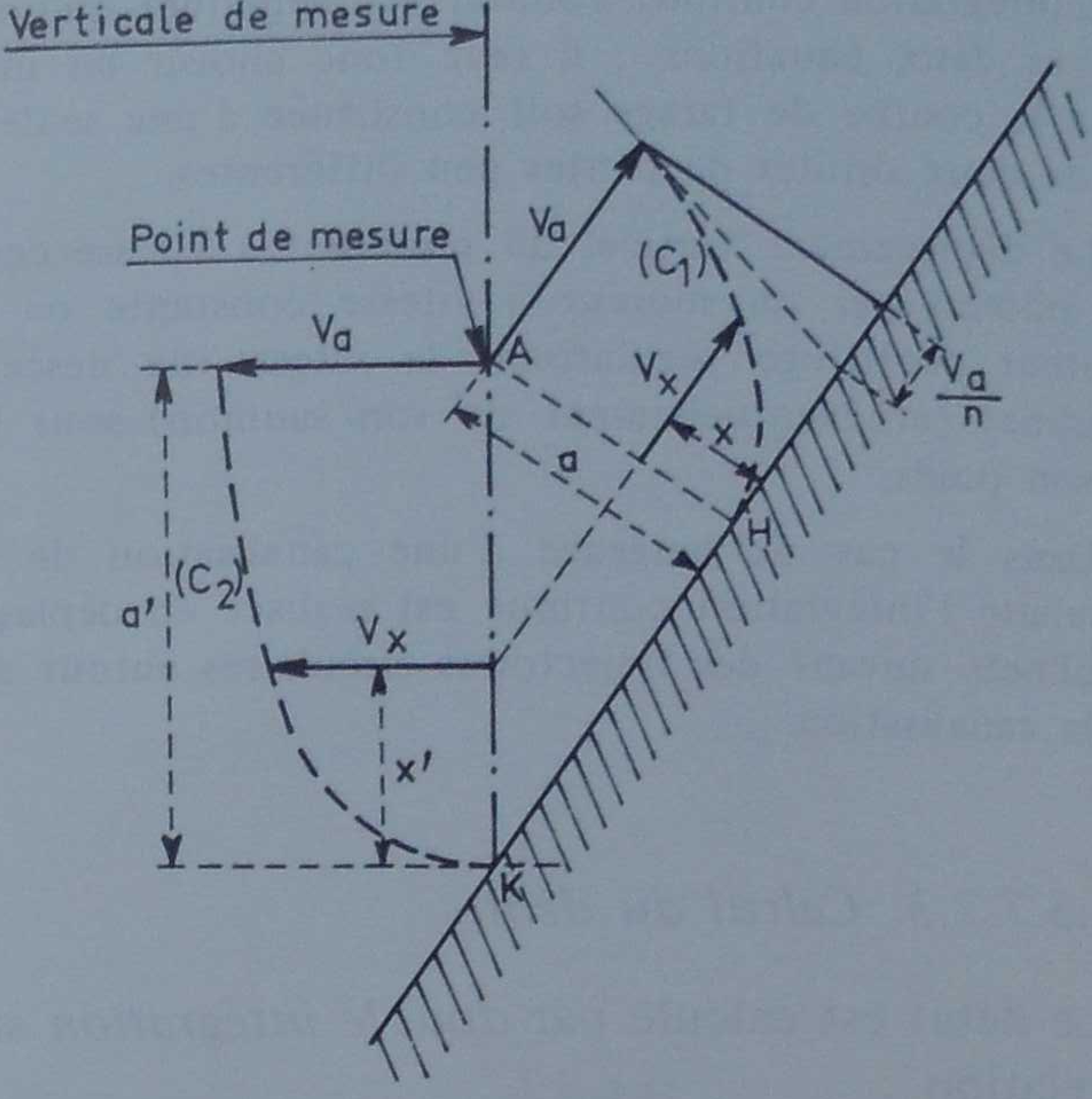


Fig. XII.3.7.2.3.3 – Extrapolation de la courbe des vitesses au voisinage d'une paroi (cas d'une section trapézoïdale)

En particulier, *pour un canal rectangulaire* (fig. XII.3.7.2.3.4), le débit s'écoulant à travers la fraction de section de largeur a comprise entre une direction de mesure (de débit élémentaire q_a) et la paroi la plus proche s'exprime par la relation :

$$dq = aq_a \frac{n}{n+1}$$

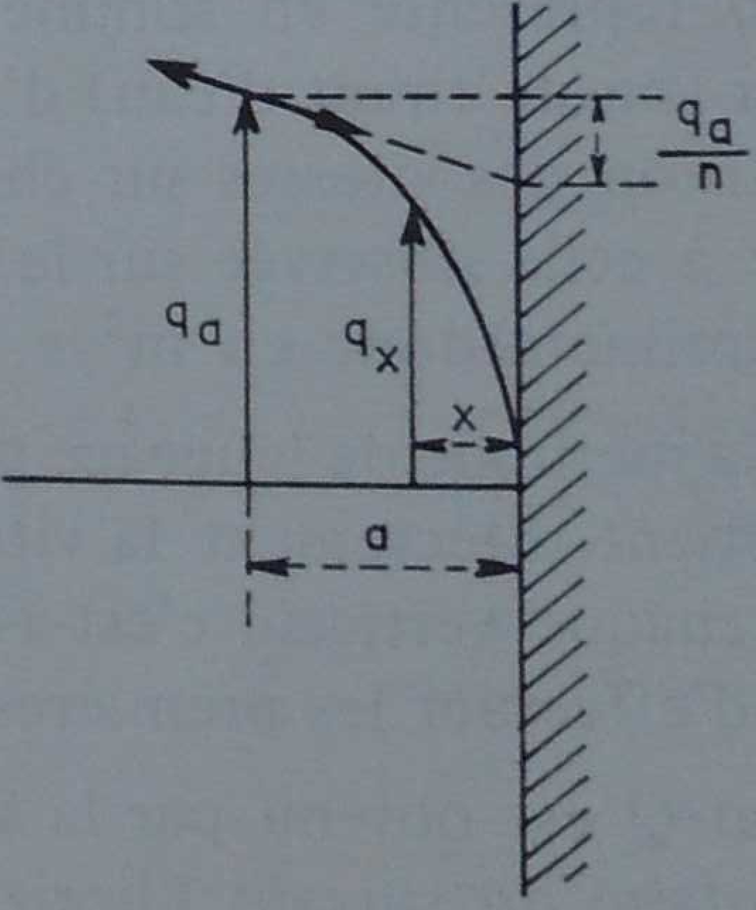


Fig. XII.3.7.2.3.4 – Extrapolation de la courbe des débits élémentaires au voisinage d'une paroi (cas d'une section rectangulaire)

Pour un canal trapézoïdal (fig. XII.3.7.2.3.5), si les débits élémentaires ont été calculés suivant des verticales de mesure, il faut bien noter la discontinuité de la courbe de ces débits élémentaires au droit de la jonction entre le plafond et les talus du canal (point M).

Fig. XII.3.7.2.3.5 – Extrapolation des courbes des vitesses et des débits élémentaires au voisinage du plafond et des talus d'une section trapézoïdale. (a) Courbe des vitesses mesurées ; (b) Courbe des débits élémentaires mesurés ; (C_1) Courbe des vitesses extrapolée ; (C_2) Courbe des débits élémentaires calculée

Pour faciliter la construction de la courbe de variation des débits élémentaires au droit des talus, on trace la courbe des vitesses extrapolée suivant les principes indiqués précédemment (courbe C_1). Pour chaque verticale la vitesse V_x ainsi obtenue, multipliée par le tirant d'eau h_x, donne le débit élémentaire q_x (courbe C_2).

XII.3.8. MÉTHODE DU DÉVERSOIR

XII.3.8.1. *Conditions d'emploi*

Le principe du jaugeage par déversoir, la théorie de l'écoulement, les différents types de nappes et les formules de débit ont été étudiés au chapitre X. Nous nous bornerons à donner ici des *indications pratiques* sur la technique du jaugeage.

En raison du caractère indirect de la méthode l'exactitude absolue des mesures au déversoir implique l'établissement de dispositifs aussi semblables que possible aux équipements ayant permis la détermination des formules utilisées.

Pour ces raisons :

1 – En principe on adoptera pour des mesures précises les *déversoirs rectangulaires en mince paroi à nappe libre, avec ou sans contractions latérales,* placés dans une section droite d'un tronçon rectiligne d'un canal rectangulaire.

Toutefois dans certains cas, en particulier pour la mesure de petits débits, on pourra utiliser un déversoir *triangulaire* bien que la précision des formules usuelles de ce type de déversoir soit moins bonne que celle des formules des déversoirs rectangulaires qui ont fait l'objet de très nombreuses expériences.

2 – Les débits à mesurer devront être tels que la charge H et la hauteur de pelle (hauteur de la crête au-dessus du fond du canal à l'amont) restent dans les limites de validité indiquées par les auteurs des formules ; de ce fait, la méthode de jaugeage par déversoir ne paraît convenir actuellement que pour la mesure des débits ne dépassant guère 1 à 2 m^3/s par mètre linéaire de crête.

3 – Les dispositions nécessaires devront être prises pour assurer une aération complète de la lame déversante de façon que le régime d'écoulement soit toujours celui dit "à nappe libre aérée" ; en outre le canal de fuite devra permettre à la lame déversante d'être toujours parfaitement dénoyée et éliminer ainsi toute influence du plan d'eau aval.

XII.3.8.2. *Types d'installations*

Les déversoirs de mesure de forme rectangulaire en mince paroi et à lame aérée peuvent être installés suivant deux types, correspondant chacun aux conditions expérimentales pour lesquelles les formules à appliquer ont été établies :

– *Type Bazin* caractérisé par un canal à l'amont de l'écran, à pente de 1 °/₀₀, de grande longueur (environ 50 fois la largeur du seuil) et sans aucun dispositif de régularisation des vitesses.

– *Type Rehbock* caractérisé par un canal à l'amont de l'écran de faible longueur, à fond sensiblement horizontal et avec dispositifs de régularisation des vitesses (grilles de barreaux, nids d'abeilles ou guideaux et éventuellement radeau tranquillisateur de surface) ; c'est le dispositif le plus fréquent dans la pratique des mesures.

Dans ces deux types d'installation on adoptera de préférence le *déversoir sans contraction latérale*

où l'écoulement est plus simple que dans le déversoir à contractions latérales et qui a été le plus étudié.

XII.3.8.3. *Normes d'exécution*

Canal à l'amont du déversoir

Dans tous les cas le canal à l'amont du déversoir sera *rectiligne* sur une longueur d'au moins 20 fois la charge maximale et 5 fois la largeur de la crête ; toutefois cette longueur pourra être réduite s'il est fait usage des dispositifs de régularisation indiqués plus haut ; le canal sera à *section rectangulaire* et à *parois verticales* ; dans le cas d'un déversoir sans contraction latérale les parois du canal doivent être parfaitement unies ; pour empêcher la déviation de la lame d'eau ces parois, éventuellement prolongées par des flasques, devront se trouver respectivement dans les mêmes plans à l'amont du déversoir et, sur une longueur au moins égale à la charge maximale, à l'aval de celui-ci.

Canal de fuite à l'aval du déversoir

Pour que la lame déversante reste dénoyée à l'aval du déversoir la cote du plan d'eau aval sera telle que la hauteur de retombée s soit supérieure à 0,5 h_{max} et en tout état de cause supérieure à 0,30 m (fig. XII.3.8.1.).

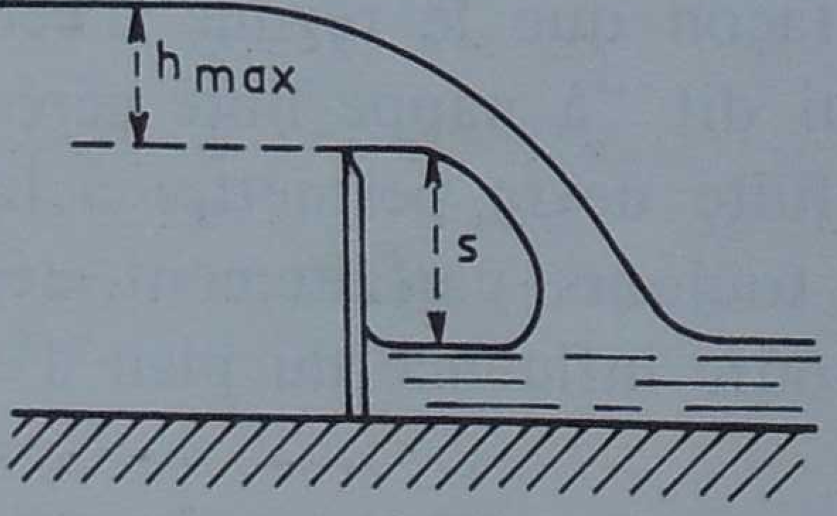


Fig. XII.3.8.1

Paroi du déversoir

La face amont du déversoir devra être parfaitement lisse et unie notamment dans sa partie supérieure. L'écran comportera à sa base une ou plusieurs ouvertures de vidange du canal ne donnant lieu à aucune saillie vers l'amont. L'arête du déversoir sera réalisée en métal inoxydable (acier inoxydable ou laiton) pour maintenir l'acuité des arêtes et le poli de la face amont. Le profil de la crête déversante sera conforme au schéma de la figure XII.3.8.2. L'arête sera parfaitement rectiligne et horizontale.

Dans le cas d'un déversoir à contractions latérales l'axe de l'échancrure coïncidera avec l'axe du canal. Les arêtes latérales des joues devront être parfaitement vives et de même profil que la crête déversante.

Aération du déversoir

Elle sera réalisée en perçant dans les parois du canal des orifices mettant la surface inférieure de la nappe en communication avec l'atmosphère, soit directement, soit éventuellement par l'intermédiaire de puits d'aération.

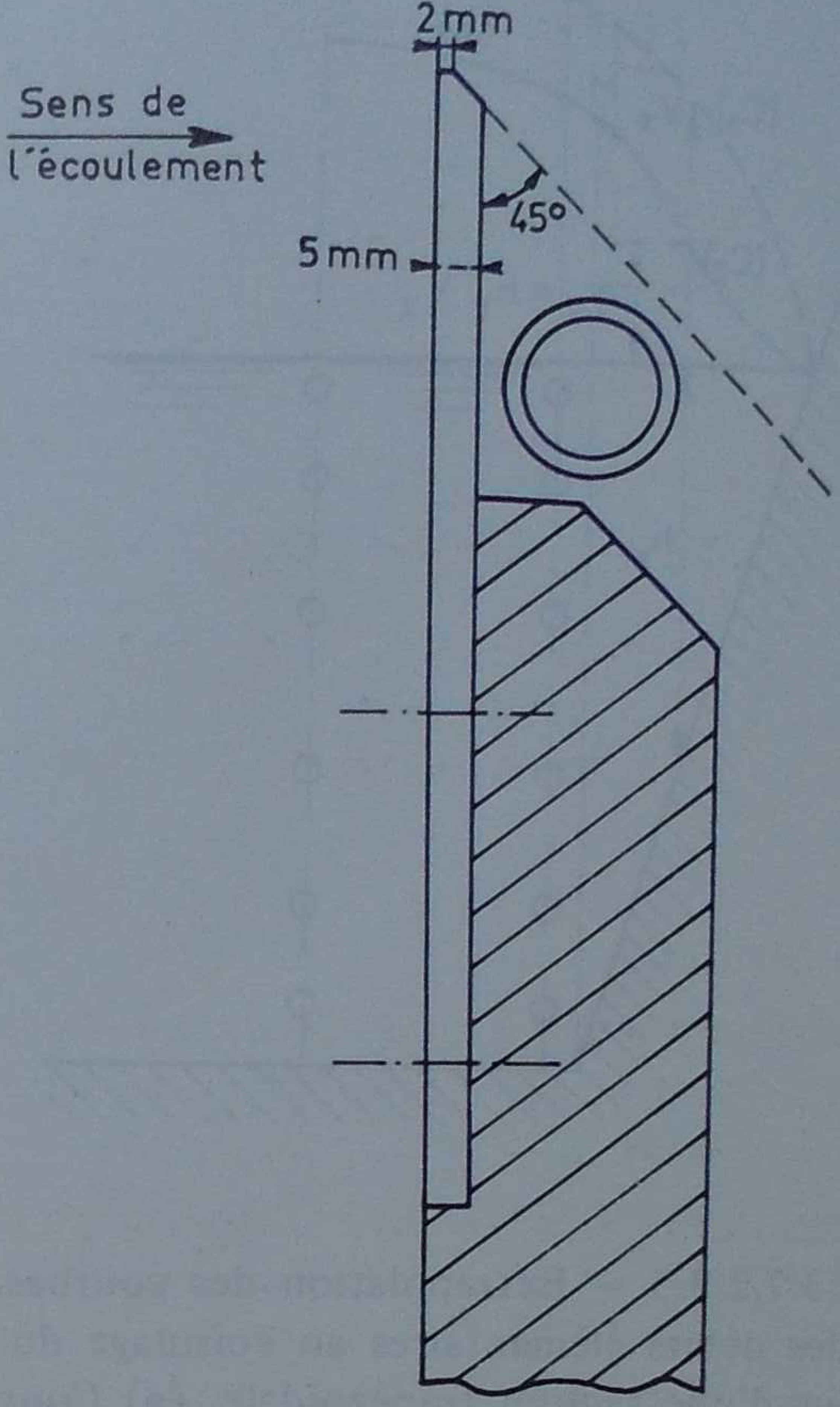


Fig. XII.3.8.2 – Profil de la crête déversante

Ces orifices déboucheront le plus près possible du sommet de l'angle de 45° déterminé par le profil de l'arête (voir fig. XII.3.8.2). Leur section sera suffisante pour que la dépression sous la nappe déversante soit pratiquement nulle.

XII.3.8.4. *Normes de mesure*

La largeur du déversoir et la hauteur de pelle peuvent être mesurées sans difficulté.

La mesure de la charge H est plus délicate ; elle doit être faite avec grande précision en raison de l'influence importante d'une erreur sur H sur la précision du débit mesuré.

Dispositifs de mesure de la charge

Il est préférable d'utiliser des limnimètres à pointe (droite ou recourbée).

On peut réaliser un circuit électrique se refermant sur l'eau au contact de la pointe, ce qui permet de faire la mesure sans avoir besoin de voir le niveau (cas des points de mesure peu accessibles). Dans ce cas la pointe droite est indispensable. Dans le cas contraire on utilisera une pointe recourbée pour éviter l'erreur due à la capillarité (fig. XII.3.8.3).

On peut également utiliser des tubes piézométriques de prise de pression statique analogues à la prise de pression

Fig. XII.3.8.3 – Mesure de la charge

statique du tube de Prandtl ou des flotteurs disposés dans des puits latéraux, ce qui permet de réaliser un dispositif enregistreur du débit en utilisant un limnigraphe enregistreur.

Repérage du zéro du déversoir

Cette opération a pour but de déterminer la lecture au limnimètre lorsque le niveau coïncide avec le plan horizontal passant par la crête du déversoir.

Pour réaliser cette opération avec toute la précision désirable on utilise un appareil fixé directement sur la crête du déversoir (fig. XII.3.8.4). On abaisse le plan d'eau amont légèrement en-dessous de la crête et on détermine ainsi la distance verticale séparant la crête du plan d'eau (soit $B - A$).

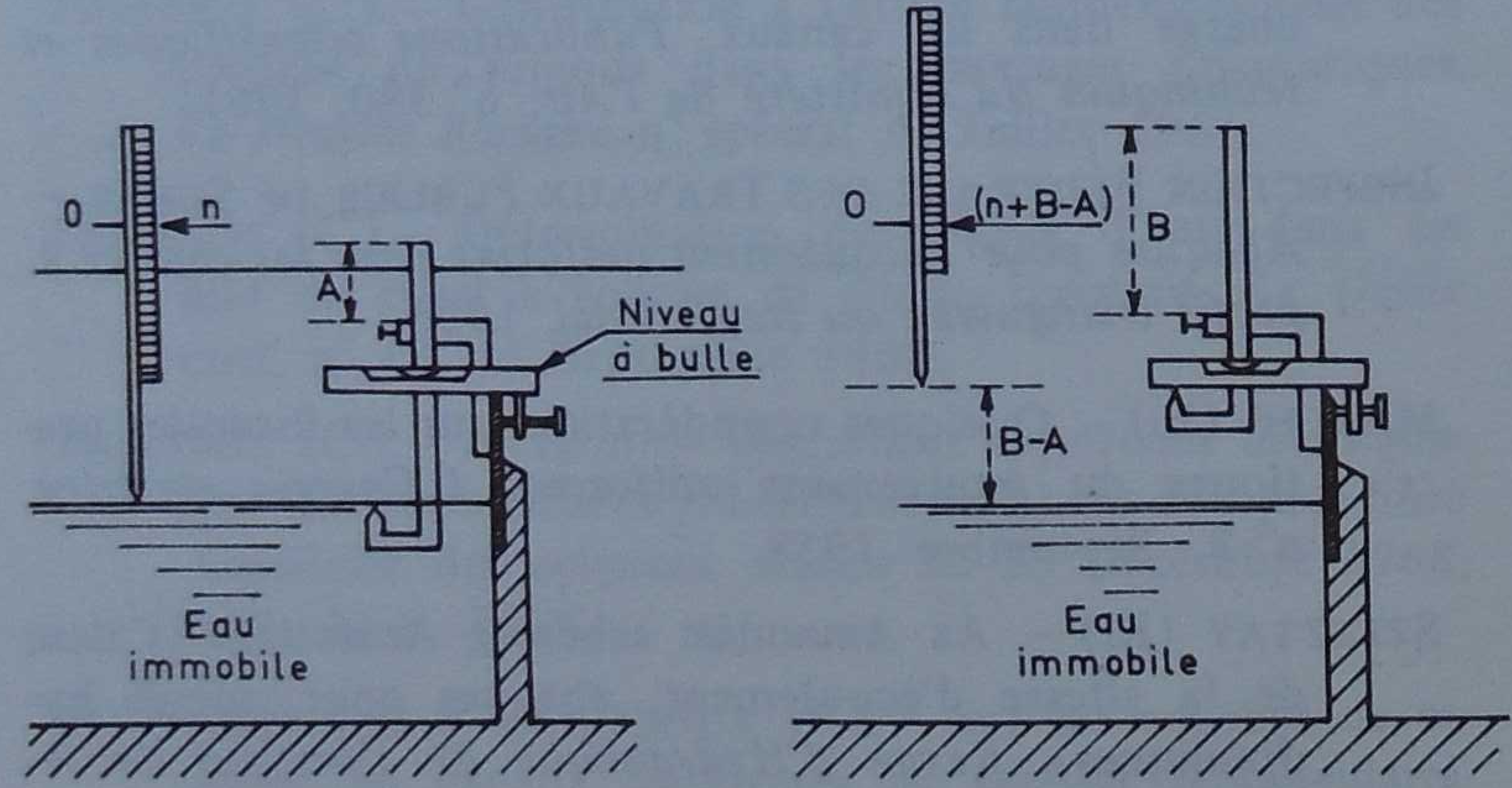


Fig. XII.3.8.4 – Repérage de la cote de la crête

Il suffit de corriger de cette valeur la lecture faite au limnimètre pour connaître la graduation de celui-ci correspondant au niveau de la crête du déversoir.

Emplacement et nombre des points de mesure

La mesure de la charge H doit se faire dans une section transversale située à une distance du déversoir égale au moins à $2\ (H + z)$ (z = hauteur de pelle) pour une installation type Rehbock et $10\ H$ ou 5 mètres pour une installation type Bazin.

Pour un canal d'amenée de largeur inférieure à 1 mètre, il suffira de prendre un point de mesure. Pour un canal d'amenée de largeur plus grande, il conviendra de prendre plusieurs points de mesure répartis régulièrement sur toute la largeur du canal. C'est la valeur moyenne des lectures faites qui sera utilisée pour le calcul du débit.

Enfin, il est indispensable que le régime soit parfaitement permanent avant d'effectuer les mesures, ce qui nécessite d'attendre un certain temps (au moins 10 minutes) après les manœuvres des vannes de réglage du débit avant de procéder à la détermination de H.

XII.3.8.5. *Précision des mesures*

Elle dépend essentiellement de la précision sur la mesure de la charge H. Toute erreur relative sur la valeur de H entraîne une erreur 1,5 fois plus grande sur le débit.

Les très nombreuses études expérimentales faites sur les déversoirs ont montré que :

– la pente du fond du canal n'intervient que faiblement dans la mesure du débit,

– le débit augmente lorsque, H restant constant, le parement amont du seuil n'est pas lisse et la crête du déversoir n'est pas à arête vive. Cet accroissement du débit est surtout sensible aux faibles charges,

– la distribution des vitesses dans le canal en amont a une influence notable sur le débit (on a pu observer des variations de 25 % dans des cas tout à fait exceptionnels),

– l'obliquité du déversoir sur le profil en travers de l'écoulement et l'inclinaison de la pelle vers l'amont diminuent le débit par mètre linéaire de crête tous autres facteurs restant inchangés.

En général, dans les cas usuels des mesures effectuées suivant les indications précédentes, l'erreur relative sur le débit calculé ne semble pas devoir être inférieure à 1,5 %.

XII.3.9. MÉTHODE DES VEINES CONTRACTEES

Les différentes méthodes correspondantes ont été décrites dans les chapitres précédents concernant les dispositifs utilisés. Nous nous bornerons à en rappeler la liste ci-après :

Orifice en mince paroi, noyé ou non (orifice de jauge), applicable à la mesure des petits débits (cf. § VIII.2.1).

Tuyère noyée ou non (cf. § VIII.2.2).

Vanne de fond noyée ou non (cf. § VIII.2 et 3).

Venturi-Canal ou "Parshall" ou "jaugeur à ressaut" (cf. § XII.2.10.2.3).

On peut rapprocher de ces méthodes celle qui consiste à créer une contraction de la veine liquide non pas par un étranglement de la section mais par la présence d'un corps de profil déterminé introduit dans le courant. Signalons notamment :

Le *Venturi à grille* dans lequel la contraction de la veine liquide est assurée par une grille de barreaux profilés divisant le courant en plusieurs éléments ; on peut faire varier le nombre de barreaux suivant l'importance du débit afin de conserver une bonne précision (fig. XII.3.9.1).

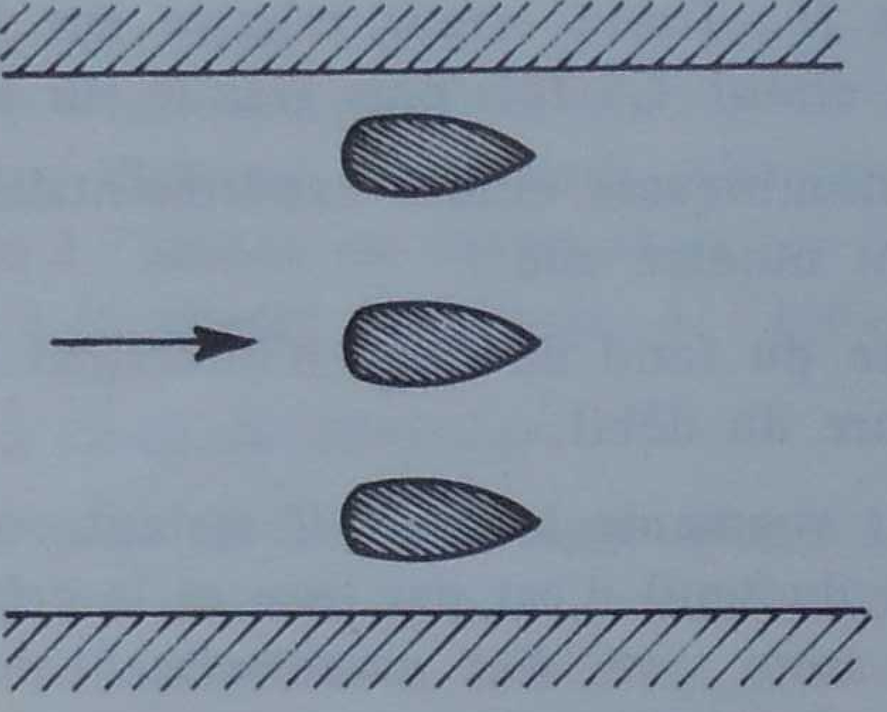


Fig. XII.3.9.1 – Venturi à grille

La *perche verticale fixe* dont la section droite a une forme dissymétrique (par exemple rectangulaire d'un côté et triangulaire de l'autre). En retournant la perche de 180° autour de son axe on mesure la différence de niveau de l'eau résultant de la différence de contraction de la veine liquide ; on en déduit une valeur approchée de la vitesse moyenne sur la hauteur immergée de la perche (fig. XII.3.9.2).

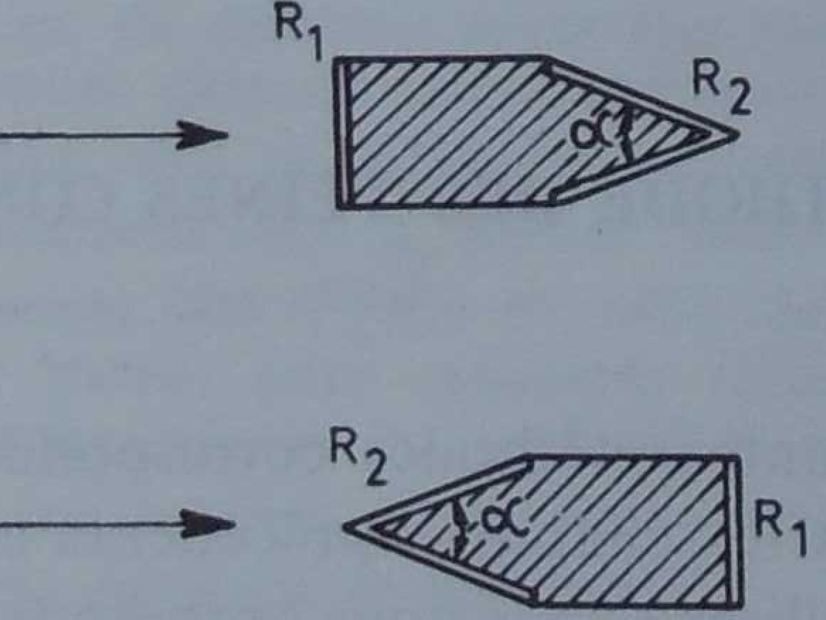


Fig. XII.3.9.2 – Perche verticale de mesure des vitesses

Par exemple, pour un angle $\alpha = 28°$ si on désigne par Δh la différence des hauteurs de remontée des niveaux sur les réglettes R_1 et R_2, la vitesse moyenne V sur la verticale de la perche sera :

$$V = K\sqrt{2g\Delta h}$$

le coefficient K étant voisin de 1.

La perche verticale de mesure est utilisable pour des profondeurs assez faibles (0,60 m au maximum) et des vitesses inférieures à 2,50 m/s. Elle permet des mesures rapides mais de précision assez faible.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE XII

1 – *Ouvrages généraux – Formules d'écoulements*

ARGHYROPOULOS (P.).– *Calcul de l'écoulement en conduites sous pression ou à surface libre d'après la formule de Manning-Strickler* Dunod (1958).

BAKHMETEFF (B.A.).– *Hydraulics of open channels.* Mc Graw-Hill, 1932.

BOUVARD (M.).– *Barrages mobiles et prises d'eau en rivière.* Collection du Laboratoire National d'Hydraulique, Ed. Eyrolles, 1958.

CHEN CHE-PEN (M.).– La différence des pertes de charge dans un écoulement en conduit circulaire, d'une part, et dans un écoulement en canal à ciel ouvert, à faible tirant d'eau, d'autre part. *La Houille Blanche,* n° 6, Novembre 1959.

CHEN CHE-PEN (M.).– Contribution à l'étude des pertes de charge dans les canaux. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air,* n° 380, 1961.

INSPECTION FÉDÉRALE DES TRAVAUX PUBLICS DE SUISSE.– *Abaques pour l'écoulement uniforme dans les canaux à profit triangulaire ou trapézoïdal,* 1956.

MARCHI (E.).– Quelques considérations sur les formules pratiques du mouvement uniforme. *L'Energia elettrica,* n° 9, Septembre 1958.

SZESZTAY (K.).– Az Amamlàsi sebesség Azàmitàsa (Calcul de la vitesse d'écoulement, abaques pour calculs hydrauliques). *Revue d'Hydraulique de l'Institut de recherches de ressources hydrauliques,* Budapest, 1957.

TAFFOREAU (R.).– Conduites à écoulement libre. Description d'une règle à calcul établie selon la formule de Manning. *Bulletin technique du Génie Rural,* n° *HS* 49, Octobre 1962.

THIRRIOT (C.).– Calcul rapide des conditions d'écoulement uniforme dans les canaux. *Le Génie civil,* 1er Mai 1962.

2 – *Courbes de remous*

ALACEVICH (F.).– Sulla determinazione delle curve di rigurgito nei canali con fondo acclive (Sur la détermination des courbes de remous dans les canaux à pente remontante). *L'Energia elettrica,* n° 3, Mars 1961.

CHABERT (J.).– *Calcul des courbes de remous.* Eyrolles, 1958.

DELORME (A.).– Nouvelles considérations sur les débouchés de petits ouvrages sous routes. *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 6, Novembre-Décembre 1959.

FELKEL (K.).– Le calcul de la courbe de remous d'un barrage par intégration. *Die Bautechnik*, n° 4, Avril 1958.

FUND (G.), LABYE (Y.) et NOUGARO (J.).– Calcul hydraulique des canaux d'assainissement agricole. *La Houille Blanche*, n° 6, 1968.

KLAMETH (E.). – Die Verfahren von Bakhmeteff und ihre Anwendung beider hydraulischen Berechnung für offene Überleitungskanäle. (La méthode Bakhmeteff et son utilisation pour le calcul hydraulique des canaux découverts). *Die Wasserwirtschaft*, n° 4, Janvier 1958.

LABYE (Y.).– Procédé de calcul des canaux à profil en long horizontal. *Bulletin du Centre de Recherches et d'Expérimentation de Génie Rural*, n^{os} 27, 29 et 33, Février 1955.

QUESNEL (B.).– Calcul des lignes d'eau dans les remous d'abaissement et d'exhaussement en régime graduellement varié, dans l'hypothèse d'une section d'écoulement de caractéristiques géométriques simples et restant identiques à elles-mêmes. *Annales techniques de la Direction Générale du Génie Rural et de l'hydraulique agricole*, fasc. 77, 1959.

SILBER (R.).– *Etude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières.* Ed. Dunod, 1968.

THIRRIOT (C.).– Contribution à l'étude adimensionnelle des courbes de remous dans les ouvrages prismatiques. *La Houille Blanche*, n° spécial A, Juillet 1961.

THIRRIOT (C.).– Détermination des lignes d'eau dans un bief de canal à volume de fluide constant. *Le Génie civil*, n° 18, 15 Septembre 1965.

THIRRIOT (C.).– *Intégration analytique approchée de l'équation des écoulements graduellement variés à surface libre* Académie des sciences, séance du 23 Décembre 1968, Série A, p. 1009.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Sur les courbes de remous en canaux uniformes de section rectangulaire. *Anais do Instituto Superior de Agronomica*, Lisbonne, vol. XXVI, 1963.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Du nouveau sur les courbes de remous en canaux uniformes de section rectangulaire (lits ascendants). *Anais do Instituto Superior de Agronomica*, Lisbonne, vol. XXVI, 1963.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Nouvelles méthodes analytiques de calcul des courbes de remous en canaux découverts uniformes. *Memõrias da Ordem dos Engenheiros*, Lisbonne, vol. III, fasc. I, Janvier-Février 1964.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Una nova tàbua da funçâo Dupuit-Bresse. (Une nouvelle table de la fonction de Dupuit-Bresse). *Memõrias da Ordem dos Engenheiros*, Lisbonne, n° 190, Mai-Juin 1964.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Avatars de la fonction de Dupuit. *Memõrias da Ordem dos Engenheiros*, n° 193, Juillet-Août 1964.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Volumes de regolfo em canais uniformes horizontais. (Volumes de remous en canaux uniformes horizontaux). *Boletim da Ordem dos Engenheiros*, Lisbonne, n° 199, Septembre-Octobre 1964.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– Backwater volumes in uniform rectangular channels. (Volumes de remous en canaux uniformes de section rectangulaire). *Boletim da Ordem dos Engenheiros*, Lisbonne, n° 203, Novembre-Décembre 1964.

VEN TE CHOW.– Integrating the equation of gradually varied flow. (Intégration de l'équation de l'écoulement graduellement varié). *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Hydraulics Division, vol. 81, n° 838, Novembre 1955.

VIBERT (A.).– L'écoulement de l'eau dans les aqueducs circulaires. *Le Génie civil*, n° 3, 1er Février 1962 et *Techniques et Sciences municipales*, n° 1, Janvier 1962.

VIBERT (A.).– L'écoulement de l'eau dans les aqueducs. *Le Génie civil*, n° 24, 15 Décembre 1962.

3 – *Ressaut hydraulique*

ARGYROPOULOS (P.A.).– *History and bibliography of the hydraulic jump.* (Historique et bibliographie sur le ressaut hydraulique). Inspection of Service for Hydraulic Works, Athènes, 1969.

ARIEMMA (R.).– Nouvelles formules de calcul des dimensions du ressaut hydraulique dans les canaux à forte pente et des pertes d'énergie corrélatives. *L'Energia elettrica*, n° 7, 1958.

BINNIE (A.).– Note sur la théorie du ressaut hydraulique dans un canal parabolique. *La Houille Blanche*, n° 6, Décembre 1961.

DISKIN (M.H.).– Ressaut hydraulique en canal trapézoïdal *Water Power*, Janvier 1961.

ELEVATORSKI (E.A.).– *Hydraulic energy dissipators.* (Dissipateurs d'énergie hydraulique). Mc. Graw-Hill, New-York, 1959.

ESCANDE (L.).– Remarques sur la perte de charge due au ressaut en écoulement plan. *Revue générale de l'Hydraulique*, n° 73, Juillet-Août 1956.

FANTA (K.).– Ouvrages de ressaut dans les petits cours d'eau et les ruisseaux. *Die Wasserwirtschaft*, n° 1, Janvier 1959.

FAUCONNIER (B.).– Le problème des affouillements à l'aval des barrages. *La Houille Blanche*, n° 2, Mars-Avril 1958.

LAPRAY (G.) et RINGUELET (R.).– Méthode directe pour la détermination des dimensions optimales d'un bassin d'amortissement à l'aval d'un barrage-déversoir d'un ouvrage. *Cahier n° 5 du Centre de Recherches et*

d'expérimentation du Génie Rural du Maroc*, Rabat, Juillet 1958.

LARRAS (J.).– Ressaut circulaire sur fond parfaitement lisse. *Le Génie civil*, 1er Septembre 1965.

LEVIN (L.) et SICARD (J.).– Abaques pour le calcul du ressaut classique dans un canal horizontal de toutes formes. Application à des cas particuliers. *La Houille Blanche*, n° 7, Novembre 1964.

MASSEY (B.S.).– Hydraulic jump in trapezoïdal channels. (Le ressaut hydraulique dans les canaux trapézoïdaux). *Water Power*, n° 6, Juin 1961.

DE MELLO FLORES (J.O.).– Le ressaut. *La Houille Blanche*, n° 6, Décembre 1954.

RUBATTA (A.).– Stabilité du ressaut à l'aval d'un seuil. *Giornale del Genio civile*, n° 4-5, Avril-Mai 1957.

4 – *Autres régimes variés, régime critique, entraînement d'air, courants de densité*

ADVANI (R.M.).– Critical depth in trapezoïdal channels. (Profondeur critique dans les canaux trapézoïdaux). *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, n° HY 3, Mai 1962.

ADVANI (R.M.).– Critical depth in prismatic channels. (Profondeur critique dans les canaux prismatiques). *Water Power*, n° 3, Mars 1966.

DISKIN (M.H.).– Equation exponentielle pour déterminer la profondeur critique dans les canaux circulaires. *Water Power*, n° 9, Septembre 1958.

HORNER (J.W.).– Le canal à ressaut. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 129, 15 Septembre 1957.

KOVACIC (E.).– Section critique de contrôle d'un écoulement en canal. *La Houille Blanche*, n° 6, Novembre 1962.

PICHON (J.).– Détermination théorique et visualisation de la ligne de jet d'un écoulement plan à surface libre sur une singularité en forme de marche. *La Houille Blanche*, n° 7, 1969.

REH (U.).– Application simplifiée de la formule de Rehbock pour le remous des piles de pont. *Die Wasserwirtschaft*, n° 9, Juin 1958.

VALEMBOIS (J.).– La question des courant de densité. *La Houille Blanche*, n° A, Juillet-Août 1960.

VALENTINE (H.R.).– L'écoulement dans des canaux rectangulaires présentant une section rétrécie. *La Houille Blanche*, n° 1, Janvier-Février 1958.

5 – *Jaugeage des canaux et rivières*

ISO.– Recommandation ISO/R 555. *Mesure de débit des liquides dans les canaux. Méthode de dilution pour la mesure de débit en régime permanent. 1ère partie : méthode d'injection à débit constant* (AFNOR).

ISO.– Recommandation ISO/R 748. *Mesure de débit des liquides dans les canaux découverts. Méthodes d'exploration du champ des vitesses.* (AFNOR).

ISO.– Recommandation ISO/R 772. *Vocabulaire des termes et symboles relatifs à la mesure de débit des liquides s'écoulant avec une surface libre* (AFNOR).

ANDRÉ (H.).– Méthode chimique de dilution. Procédé par intégration. *La Houille Blanche*, n° B, Décembre 1960.

ANDRÉ (H.).– *Contrôle des débits des cours d'eau. Techniques et matériels en 1962.* Conférence scientifique, Budapest, 1962.

ANDRÉ (H.).– *Améliorations récentes dans les mesures de débits des cours d'eau.* Association Internationale d'Hydrologie scientifique, publication n° 65, Berkeley, 1963.

ANDRÉ (H.).– *Hydrométrie pratique des cours d'eau. Tome 1 : Jaugeages par la méthode de dilution.* Faculté des Sciences de Grenoble, Division technique générale de la Production hydraulique d'EDF, 1964.

ANDRÉ (H.).– Méthodes par traceurs utilisés en 1969 pour la mesure des débits des liquides. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.

ANDRÉ (H.) et LUGIEZ (F.).– Contrôle des débits des cours d'eau. Le limniphone Sareg à mémoire. *Bulletin de l'Association internationale d'hydrologie scientifique*, n° 1, Janvier 1962.

BONNAFOUX (R.).– Une méthode de mesure des débits au moyen de moulinets dans les pertuis d'entrée des usines hydro-électriques de basse chute. *La Houille Blanche*, n° 5, Août-Septembre 1964.

BONNAFOUX (R.).– Mesures comparatives de débit par écran mobile, par pesée, par diaphragme et par déversoir. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.

CASTEX (L.).– Quelques nouveautés sur les déversoirs pour la mesure des débits. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.

CHTCHAPOV (N.).– *Hydrométrie des ouvrages et des machines hydrauliques* (en russe). Ed. Gosenergoizdat, Moscou, 1957.

DUBOE (A.).– Un nouveau matériel de mesure des débits des cours d'eau : la perche de jaugeage à intégration "Agar-2". Revue "*l'Eau*", n° 9, Septembre 1969.

GOGUEL (R.L.).– Mesure des débits dans les canaux. *Travaux communaux*, Avril 1968.

DARVES-BORNOZ (R.) et MEKIKDJIAN (C.).– Les méthodes de jaugeage des cours d'eau. *Le Génie Rural*, n° 12, Décembre 1964 et n° 1, Janvier 1965.

GABAUDAN (J.) et NOIRET (B.).– Evolution récente de la technique des jaugeages industriels aux moulinets dans les écoulements en charge. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.

GOUBET (A.).– Détermination des débits dans les rivières herbeuses. *La Houille Blanche*, n° 5, 1969.

GRANDCLEMENT (G.).– L'emploi des radioéléments traceurs en hydrologie et en hydraulique. Revue *"l'Eau"*, n° 5, Mai 1963.

HABIB (J.).– Mesure du débit des canaux et rivières au moyen du débitmètre Parshall. *Bulletin de l'Ecole Nationale supérieure d'Agriculture de Tunis,* n° 6, Novembre 1963.

HERMANT (C.).– Application de la mesure des débits par la méthode de dilution comparée à la détermination du rendement des turbines. *La Houille Blanche,* n° 6, Novembre 1959.

KOLUPAILA (S.).– Les jaugeages dans les ouvrages et les centrales hydroélectriques (résumé historique). *La Houille Blanche,* n° 4, Juin 1960).

LAPRAY (G,) et RINGUELET (R.).– Mesure des débits par ressaut hydraulique en canal triangulaire (débitmètre en canal triangulaire). *Cahier n° 4 du Centre de Recherches et d'expérimentation du Génie Rural du Maroc,* Rabat, Mars 1958.

LEFEBVRE (G.).– Note sur l'utilisation des formules du canal Venturi. *Bulletin agricole du Congo, bulletin d'information de l'INEAC,* n° 6, Décembre 1961.

MASON (M.A.).– Contribution à l'étude de la mesure des débits d'eau par la méthode Allen. *Revue générale de l'Hydraulique,* n^{os} 28-29, Juillet-Octobre 1939.

MATHIVET (P.).– Utilisation des cannes dérivées du tube de Pitot pour l'étude des débits dans les conduites. *La Houille Blanche,* n° 5, 1969.

MOLINARI (J.).– Contribution des traceurs radioactifs à la mesure des débits de cours d'eau et d'effluents pollués. *Techniques et Sciences municipales,* n° 4, Avril 1968.

MUSZKALAY (L.) et STAROSOLSZKY (O).– *Vizhozamméresi Zsebkönyv.* (Manuel d'hydrométrie). Institut de Recherches des ressources hydrauliques, Budapest, 1959.

SILBERSTEIN (J.P.).– Etat actuel des méthodes de dilution pour la mesure des débits dans les conduites en charge. *La Houille Blanche,* n° 5, 1969.

STAIMESSE (J.).– La mesure des débits des cours d'eau. *Annales des Ponts et Chaussées,* n° 3, Mai-Juin 1963 .

WILSON (G.) et YOUNG (L.).– Un nouvel appareillage pour le jaugeage des débits par écran salé (méthode Allen). *La Houille Blanche,* n° 5, Septembre-Octobre 1960.

6 – *Problèmes divers sur l'écoulement dans les canaux*

FABRE (H.).– Résolution graphique de problèmes fréquents en matière d'irrigation. Revue *"l'Eau"*, n° 4, Avril 1957.

LAPRAY (G.) et RINGUELET (R.).– Détermination directe des dimensions d'un canal à section trapézoïdale. *Cahier n° 5 du Centre de Recherches et d'Expérimentation du Génie Rural du Maroc,* Rabat, Juin 1958.

RANTZ (J.).– Calcul des canaux. Revue *"l'Eau"*, n° 5, Mai 1959.

TAFFOREAU (R.).– Une règle pour les calculs hydrauliques des canaux. Revue *"l'Eau"*, n° 11, Novembre 1961.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.) et ZOZIMO DE CASTRO REGO.– Sobre o cálculo hidráulico das caleiras rectangulares de betão usadas nas redes secundárias de rega. (Sur le calcul hydraulique des rigoles rectangulaires en béton utilisées dans les réseaux secondaires d'irrigation). Revue *"Agros"*, Mars-Avril 1963.



Henri-Philibert-Gaspard DARCY (1803-1858)

CHAPITRE XIII

HYDRAULIQUE SOUTERRAINE

XIII.1. DIFFÉRENTS ÉTATS DE L'EAU DANS LE SOL

Il existe plusieurs états de l'eau dans le sol suivant l'origine de l'eau ou sa situation. De ce dernier point de vue qui est le plus intéressant pour l'étude des écoulements on peut distinguer (fig. XIII.1) :

1 — *L'eau hygroscopique* fixée par adsorption à la surface des particules du sol.

2 — *L'eau capillaire* retenue par les forces de capillarité dans les interstices entre les particules du sol ;

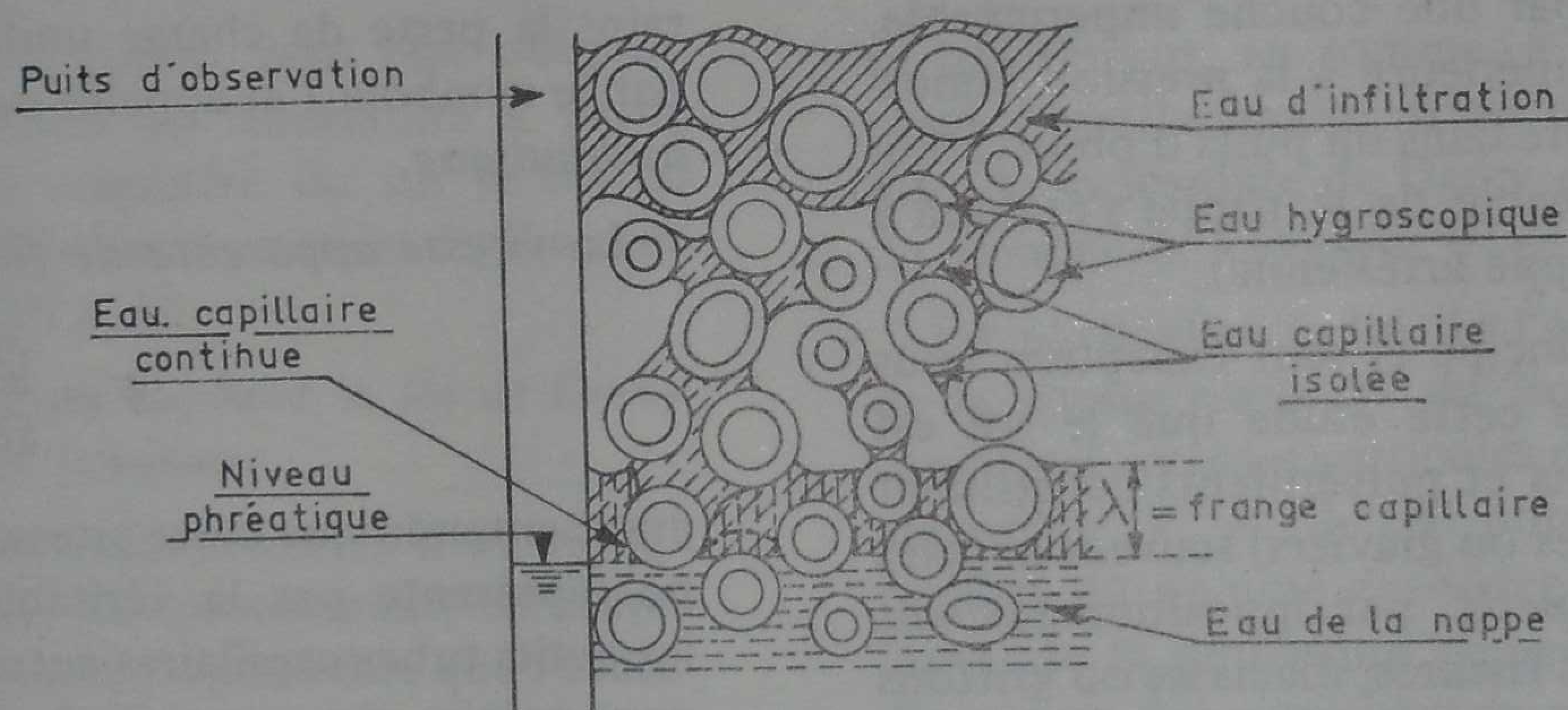


Fig. XIII.1 — Différents états de l'eau dans le sol

suivant sa position par rapport au niveau de la nappe on peut définir :

a) *l'eau capillaire isolée* qui se trouve dans les zones situées au-dessus de la nappe et qui n'occupe qu'une partie des pores, l'autre partie étant occupée par l'air.

b) *l'eau capillaire continue* située immédiatement au-dessus de la nappe et constituant ce qu'on appelle souvent la *"frange capillaire"* dont la hauteur λ est parfois désignée sous le terme de *"hauteur capillaire"*. Dans cette frange capillaire l'eau occupe la totalité des pores.

La hauteur capillaire λ peut être calculée à l'aide de la formule :

$$\lambda = \frac{4}{g\rho}\frac{A}{D} = \frac{4A}{\varpi D}$$

A = constante capillaire de l'interface eau-air (en unités CGS $A = 70$ environ pour de l'eau pure),

$g = 981 \text{ cm/s}^2$,

D = diamètre des interstices,

ρ = masse volumique de l'eau.

Si $D = 0{,}05$ cm on trouve : $\lambda = 6$ cm .

Si $D = 0{,}01$ cm ,, ,, $\lambda = 30$ cm .

3 — *L'eau d'infiltration* qui descend sous l'influence de la pesanteur de la surface du sol vers la nappe.

4 — *L'eau de la nappe* dont le niveau supérieur coïncide avec celui de l'eau dans un puits d'observation dans le cas d'une nappe au-dessus de laquelle règne la pression atmosphérique c'est-à-dire une *nappe libre*.

Immédiatement en-dessous de la surface libre il existe souvent une zone de terrain contenant des bulles d'air emprisonnées, l'épaisseur de cette zone dépend des mouvements antérieurs de la nappe. Si la nappe monte et envahit de nouvelles parties du terrain vides encore d'eau, elle emprisonne de l'air dans certains petits interstices. Par la suite cet air est lentement dissout sous pression (loi de Henry) ou chassé par l'eau.

La capillarité produit donc deux effets :

— relèvement de la surface libre de la quantité λ,

— rétention d'air (au-dessous de la surface libre) ou d'eau (au-dessus de la surface libre).

Dans le cas d'une *nappe forcée ou captive* limitée à sa partie supérieure par une couche imperméable, la pression peut être supérieure à la pression atmosphérique et la surface libre dans un puits d'observation perçant le toit imperméable de la nappe s'établira à une cote supérieure (nappe artésienne).

Milieu filtrant. En principe et sauf exception nous supposerons dans toute cette étude que le sol est constitué d'éléments fins et pulvérulents constituant des massifs poreux (sables ou graviers) souvent appelés *"terrains perméables en petit"* par opposition aux sols compacts présentant des fissures, diaclases ou griffons et constituant des *"terrains perméables en grand"* dans lesquels l'écoulement obéit à des lois très différentes et d'ailleurs très variables suivant la forme, la disposition et la dimension des fissures. Nous supposerons en outre le terrain filtrant homogène et isotrope, sauf cas particuliers que nous soulignerons.

XIII.2. LOI FONDAMENTALE DE L'ÉCOULEMENT – LES VITESSES DE FILTRATION

XIII.2.1. Loi de Darcy

Le mouvement de l'eau dans le sol, compte tenu des hypothèses indiquées précédemment, n'a pu être étudié sur des bases scientifiques qu'à partir du moment où H. Darcy(1) a établi par voie expérimentale la relation existant entre le débit Q à travers une couche de sable et la différence Δh des niveaux piézométriques entre deux points de la trajectoire d'un filet liquide pris dans la veine liquide considérée.

Dans le cas simple représenté sur la figure XIII.2.1, une colonne AB de sable de section apparente Ω est parcourue par un courant liquide créé par une différence de niveau h entre l'origine et l'extrémité de la colonne.

Entre deux points M et N distants de Δl la différence de niveau piézométrique est Δh. Si on néglige la différence des hauteurs représentatives des vitesses $V^2/2g$ aux points M et N en raison des très faibles valeurs des vitesses, *la perte de charge unitaire* est, en valeur absolue :

$$J = \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

Dans le cas particulier des écoulements souterrains la perte de charge unitaire est parfois désignée par le symbole I et appelée *pente motrice* ou *gradient hydraulique*.

La *vitesse apparente de filtration* est :

$$V = \frac{Q}{\Omega}$$

étant entendu que cette vitesse apparente de filtration ne représente pas la véritable vitesse de l'eau dans les petits tubes capillaires entre les particules de sable ; nous préciserons ce point plus loin.

Nous savons qu'un écoulement quelconque est caractérisé par la relation

$$V = f(J) = f(I) \quad .$$

Les expériences de Darcy ont montré que cette relation s'écrit simplement :

$$\boxed{V = KJ = KI} \qquad [XIII.2.1]$$

Le coefficient K qui a les dimensions d'une vitesse a été appelé par Porchet, en 1935, "vitesse de filtration par unité de pente motrice" ou *"vitesse de filtration par unité de gradient hydraulique"*. Il est

(1) H. Darcy — Les fontaines publiques de la ville de Dijon (Paris 1856).

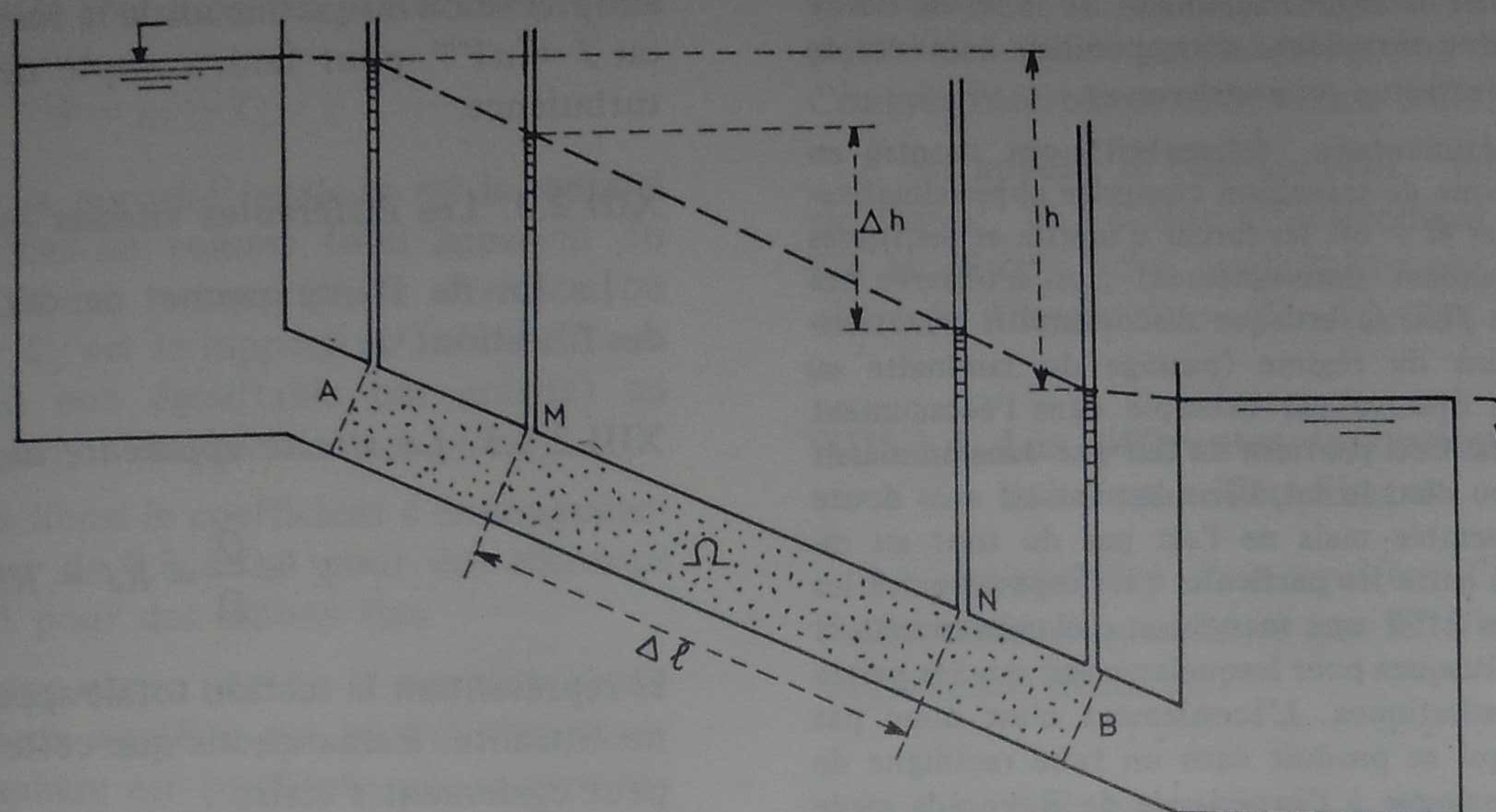


Fig. XIII.2.1 – Loi de Darcy

souvent désigné (à tort d'ailleurs) par le terme de "coefficient de filtration" ou "perméabilité".

Sa valeur, pour un sol donné, peut être obtenue par mesures expérimentales au laboratoire à partir d'un échantillon du sol considéré ou sur le sol en place. Les différentes méthodes de mesure de K seront indiquées plus loin (§ XIII.6.2).

La relation [*XIII.2.1*] qui exprime la *loi de Darcy* montre que *le régime est laminaire*.

D'autre part, cette loi étant *linéaire*, il en résulte une propriété importante des écoulements en milieu poreux : ils sont *superposables* c'est-à-dire que l'évolution de la nappe autour d'un point où on a provoqué une perturbation est la superposition de l'état antérieur supposé continuer d'évoluer normalement et d'un écoulement transitoire (ou à la limite permanent) dont la définition est souvent plus simple que celui de la nappe entière. Nous aurons plus loin l'occasion de faire appel à cette propriété.

La loi de Darcy est la loi fondamentale de l'hydraulique souterraine ; elle a été vérifiée par de nombreux expérimentateurs en se plaçant dans son domaine de validité que nous allons préciser.

XIII.2.2. Limites d'application de la loi de Darcy

On a parfois estimé que la loi de Darcy $V = KJ$ devait être remplacée par une autre, de la forme :

$$J = aV + bV^2$$

ou

$$J = aV^m \quad \text{avec} \quad 1 < m < 2$$

ce qui revient, en somme, à admettre que le régime cesse d'être laminaire. Il est donc normal que la validité de la formule de Darcy dépende essentiellement du *nombre de Reynolds* $\mathcal{R}$ de l'écoulement considéré.

En particulier la loi de l'écoulement va dépendre de la vitesse *réelle* V' du liquide dans les interstices capillaires entre les particules du sol (donc de la vitesse apparente V et de la porosité m c'est-à-dire du rapport du volume des vides du sol au volume apparent), de la dimension des pores d (c'est-à-dire de la dimension des particules de sol et de leur disposition relative, c'est-à-dire de la texture et de la structure du sol) et enfin du coefficient de viscosité cinématique ν (c'est-à-dire de la nature du liquide et de sa température).

De nombreuses études expérimentales effectuées sur cette question (Hugues, Lindquist, Muskat, Cambefort), il résulte que la loi de Darcy est applicable avec certitude tant que le nombre de Reynolds $\mathcal{R} = Vd/\nu$ (V = vitesse apparente de filtration) ne dépasse pas l'unité.

En réalité la limite (désignée parfois par l'expression "critère de Muskat") est assez imprécise et peut atteindre des valeurs du nombre de Reynolds de l'ordre de 4 à 5.

Pour des valeurs supérieures de $\mathcal{R}$, le régime d'écoulement tend à devenir turbulent et correspond à des lois de la forme :

$$J = \alpha V^2 + \beta V \quad \text{ou} \quad J = aV^m \quad \text{avec} \quad 1 < m < 2\,.$$

La *transition* entre le régime laminaire de la loi de Darcy et le régime de pleine turbulence correspondant à une loi de la forme $J = aV^2$ s'effectue *progressivement*.

Des études expérimentales (Schneebeli) ont montré en effet que dans la zone de transition comprise approximativement entre $\mathcal{R} = 4$ et $\mathcal{R} = 60$, les forces d'inertie et les forces de viscosité interviennent simultanément ; on n'observe pas sur les courbes $\lambda = f(\mathcal{R})$ la brusque discontinuité caractéristique du changement du régime (passage du laminaire au turbulent) que l'on observe par exemple dans l'écoulement dans les canalisations. Ceci provient du fait que dans un massif poreux homogène ou dans le sol, l'écoulement est sans doute uniforme dans l'ensemble mais ne l'est pas du tout au niveau des canalicules entre les particules ; les espaces entre les grains constituent en effet une succession d'élargissements et de rétrécissements brusques pour lesquels on sait que les pertes de charge sont quadratiques. L'écoulement n'est donc pas semblable à celui qui se produit dans un tube rectiligne de section constante analogue à l'expérience de Reynolds où le passage du régime laminaire au régime turbulent s'effectue brusquement et sans transition.

Cette *zone de transition*, caractéristique de l'écoulement dans les massifs poreux, correspond précisément à l'écoulement au voisinage de l'exutoire des nappes aquifères dans des terrains relativement perméables, par exemple à proximité immédiate d'un puits. Ce fait s'explique en raison des vitesses appréciables qui se produisent dans cette région de la nappe lorsque le gradient hydraulique atteint des valeurs un peu fortes ainsi que nous le verrons plus loin ; le nombre de Reynolds dépasse la valeur limite indiquée précédemment et le régime cesse d'être laminaire et tend à devenir turbulent.

Bien entendu ces conclusions sont valables pour les terrains perméables en petit. Pour les terrains perméables en grand la loi de Darcy est d'application moins générale et peut même devenir complètement inexacte dans le cas de certains sols (calcaires) dans lesquels les fissures s'élargissent au point de constituer de véritables cavernes ; toutefois, lorsque les dimensions des fissures restent limitées, la loi de Darcy peut encore s'appliquer sous la forme $J = aV^m$ avec $1{,}75 < m < 2$.

Le problème se complique encore par l'intervention de la tension superficielle et de la tension interfaciale dans le cas de *plusieurs fluides* en présence (eau douce et eau salée, eau salée et hydrocarbure, liquide et gaz).

En définitive, dans la pratique courante de l'Ingénieur, la loi de Darcy peut être considérée comme valable au moins en première approximation ; il ne faut toutefois pas perdre de vue les *hypothèses* sur lesquelles elle est fondée :

— laminarité de l'écoulement,

— uniformité, continuité et isotropie du milieu,

— unicité du fluide.

Lorsqu'on s'écarte plus ou moins de ces hypothèses, la loi de Darcy cesse d'être valable et on doit adopter selon les cas une loi de la forme $J = aV + bV^2$ ou $J = aV^m$ pour tenir compte de l'apparition de la turbulence.

XIII.2.3. Les différentes vitesses de filtration

La loi de Darcy permet de définir trois vitesses de filtration(1) :

XIII.2.3.1. *La vitesse apparente de filtration*

$$V = \frac{Q}{\Omega} = KJ = KI$$

Ω représentant la section totale apparente de la colonne filtrante. Remarquons que cette vitesse apparente peut également s'écrire :

$$\vec{V} = KJ = -K\frac{dh}{dl} = -K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h$$

en convenant de compter positivement vers le haut les charges $h = z + p/\varpi$.

Dans ces conditions, la vitesse apparente de filtration apparait comme une dérivée spatiale ou un gradient, ce qui permettra d'appliquer aux écoulements souterrains les méthodes d'étude des écoulements à potentiel comme nous le préciserons plus loin.

XIII.2.3.2. *La vitesse réelle* de l'eau qui circule entre les grains se définit en considérant la section réelle de l'écoulement qui est une fraction S de la section totale apparente soit $V' = V/S$.

La fraction S est appelée *coefficient d'emmagasinement* ou *capacité d'écoulement* ou *porosité efficace*, c'est le rapport du volume des vides accessibles à l'eau mobile d'un échantillon de sol au volume apparent de cet échantillon.

Dans le cas d'une nappe libre le volume d'eau prélevé sur les réserves est pratiquement celui qui est libéré du fait de la descente effective de la surface libre de la nappe et le coefficient d'emmagasinement est alors égal à la différence entre la porosité totale

(1) La terminologie adoptée ici pour les "vitesses de filtration" comme d'ailleurs pour toutes les grandeurs ou constantes physiques de l'hydraulique souterraine, n'est pas encore universellement admise. Une tentative d'uniformisation de cette terminologie est en cours d'élaboration.

m et la capacité de rétention ou porosité effective C_r, soit

$$S = m - C_r$$

Rappelons que la *porosité totale* m est le rapport du volume des vides au volume total apparent du terrain en place et que la *capacité de rétention* ou *porosité effective* C_r est le rapport du volume d'eau de rétention (eau non égouttable par gravité) au volume total apparent du terrain en place.

Pour les nappes libres le coefficient d'emmagasinement S peut varier de 0,3 à 0,4 pour des alluvions grossières à 0,005 pour des limons fins.

Dans le cas d'une nappe captive la pression totale exercée sur l'horizon aquifère par les couches supérieures et l'atmosphère est équilibrée par la pression interne de l'eau de la nappe et la résistance opposée par l'ossature solide formée par les particules du sol. Il en résulte qu'un pompage en un point d'une nappe captive provoque une dépression qui entraîne, d'une part, une libération d'eau dans la zone déprimée et, d'autre part, un tassement de l'ossature solide et, par suite, une nouvelle expulsion d'eau.

C.E. Jacob (U.S.A.) a montré que dans ce cas le coefficient d'emmagasinement S est donné par la formule :

$$S = m\overline{\omega}_0 e\left(\beta + \frac{\alpha}{m}\right)$$

avec

m = porosité totale,

$\overline{\omega}_0$ = poids volumique de l'eau,

e = épaisseur de la nappe,

α = compressibilité verticale du terrain,

β = compressibilité volumique de l'eau.

Le coefficient d'emmagasinement d'une telle nappe captive est inférieure à celui d'une nappe libre et est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-6}.

XIII.2.3.3. *La vitesse de filtration par unité de gradient hydraulique ou "vitesse de filtration de Darcy"*

La formule de Darcy $\vec{V} = KI = KJ = -K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h$ montre que K a les dimensions d'une vitesse. En effet, pour $I = J = 1$, on a $V = K$.

K peut donc être appelé *"vitesse de filtration par unité de pente motrice"* ou *"par unité de gradient hydraulique"*. C'est la définition qui avait été proposée dès 1935 par la délégation française au 2ème Congrès International de Génie Rural à Madrid.

K est appelé, le plus souvent, *"vitesse de filtration de Darcy"* et s'évalue effectivement en m/s ou cm/s. On le désigne aussi quelquefois par le terme "coefficient de filtration" ou "coefficient de Darcy".

XIII.2.4. Les différentes expressions de la perméabilité d'un milieu filtrant

La perméabilité d'un aquifère s'exprime parfois à l'aide d'autres grandeurs que K. Voici les principales expressions utilisées.

XIII.2.4.1. *Module de Thiem*

Si on désigne comme précédemment par Ω la section droite apparente de la colonne filtrante et par e *l'indice des vides*, c'est-à-dire le rapport du volume des vides au volume de la phase solide, le débit de filtration peut également s'écrire :

$$Q = Ke\Omega J$$

Le produit $\epsilon = Ke$ est appelé *"module de perméabilité"* ou *"module de Thiem"*.

Comme K, il a les dimensions d'une vitesse. Certains auteurs confondent d'ailleurs effectivement K et ϵ.

Remarquons qu'entre la porosité totale m et l'indice des vides e existent les relations :

$$e = \frac{m}{1 - m}$$

$$e - m = em$$

XIII.2.4.2. *Définition du "Darcy"*

Dans l'étude des nappes de pétrole on a affaire à des variations de pression très supérieures aux variations de cote et dans l'expression de la charge $h = z + p/\overline{\omega}$ on néglige généralement z devant $p/\overline{\omega}$; dans ces conditions la loi de Darcy s'écrit ;

$$\vec{V} = -K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h \simeq -K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{p}{\overline{\omega}} = -K\,\frac{d\left(\frac{p}{\overline{\omega}}\right)}{dl}$$

et

$$Q = KS \frac{d\left(\frac{p}{\varpi}\right)}{dl}$$

En hommage à la mémoire de Darcy l'American Petroleum Institute a proposé comme unité de perméabilité le *"Darcy"* qui est défini comme étant la perméabilité d'un milieu poreux débitant 1 cm^3/s à travers une surface de 1 cm^2 sous l'action d'un gradient normal à cette surface et égal à 1 atmosphère (soit 1033 cm d'eau) par cm.

La formule précédente montre que dans ces conditions un Darcy est égal à 1/1033 cm/s, soit approximativement 10^{-3} cm/s.

Il est regrettable que cette nouvelle unité de perméabilité ait été définie dans un système d'unités non cohérent.

Pour remédier à cet inconvénient on définit parfois le Darcy comme la perméabilité d'un milieu poreux qui permet, à travers une surface de 1 cm^2 perpendiculaire à l'écoulement, le passage de 1 cm^3/s d'un fluide de viscosité 1 centipoise sous l'effet d'un gradient de pression de 1 hpz (ou 1 bar) par cm ; cette unité homogène correspond alors exactement à 10^{-3} cm/s (pour de l'eau à 15°C).

XIII.2.4.3. *Perméabilité intrinsèque*

Le régime d'écoulement dans un milieu pulvérulent étant laminaire on peut lui appliquer la *loi de Hagen-Poiseuille* qui, pour un tube de rayon r, donne l'expression suivante du débit :

$$q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

Soit un parallélépipède du milieu considéré de longueur Δl mesurée dans la direction de l'écoulement et de section transversale apparente Ω ; on peut admettre que, par unité de section, le milieu est constitué de N tubes de rayon moyen r et le débit à travers la section Ω considérée sera :

$$Q = qN\Omega = \frac{\pi r^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} N\Omega$$

Posons

$$k = \frac{\pi r^4 N}{8} \qquad [XIII.2.4.3.1]$$

remarquons que k ne dépend que du milieu pulvérulent considéré et est indépendant du fluide qui le traverse.

Le débit s'écrit alors :

$$Q = k \frac{\Omega}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta l} = -\frac{k\Omega}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}\, p$$

ou, en explicitant la vitesse du fluide :

$$V = -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}\, p \qquad [XIII.2.4.3.2]$$

Les équations [*XIII.2.4.3.1* et *2*] montrent que k a les dimensions d'une surface. On l'appelle *"coefficient de perméabilité de Poiseuille"* ou *"coefficient de perméabilité absolue"* ou, plus fréquemment, *"coefficient de perméabilité intrinsèque"*.

En négligeant z devant p/ϖ, la formule de Darcy s'écrit :

$$V = -K \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p}{\varpi} \qquad [XIII.2.4.3.3]$$

La comparaison des équations [*XIII.2.4.3.2* et *3*] permet d'obtenir la relation entre K et k :

$$\frac{K}{\varpi} = \frac{k}{\mu} \quad \text{ou} \quad k = \frac{K\nu}{g}$$

avec

$$Q = -\frac{k\Omega}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}\, p \quad \text{d'où} \quad k = -\frac{Q\mu}{\Omega \overrightarrow{\text{grad}}\, p}$$

d'où résulte la définition de l'unité de perméabilité intrinsèque :

L'unité de perméabilité intrinsèque dans le système *CGS* est le *perm*. C'est la perméabilité d'un milieu poreux qui permet, à travers une surface de 1 cm^2 perpendiculaire à l'écoulement, le passage de 1 cm^3/s d'un fluide de viscosité 1 poise sous l'effet d'un gradient de pression de 1 barye par cm.

La poise correspondant à une viscosité élevée et la barye par cm à un gradient de pression très faible, le perm est une unité beaucoup trop grande pour exprimer commodément les perméabilités naturelles ; pour de l'eau à 15°C (μ = 0,01 poise) un perm correspond en effet à 10^8 Darcy, soit sensiblement 10^3 m/s. Pour cette raison, on utilise plus commodément le *Darce* qui vaut 10^{-8} perm, c'est-à-dire sensiblement un Darcy (pour de l'eau à 15°C).

Comme le coefficient de perméabilité intrinsèque ne dépend que du milieu pulvérulent considéré, il varie dans des limites beaucoup plus rapprochées que K et permet de comparer plus facilement divers milieux filtrants parcourus par des fluides de natures

différentes à diverses températures ; de ce point de vue il est surtout utile pour l'étude des nappes de pétrole ou de gaz.

XIII.2.4.4. *Perméabilité Lugeon*

Cette unité de perméabilité est couramment utilisée pour la mesure de la perméabilité des terrains en place à l'aide des essais d'injection d'eau dans les forages. Une *unité Lugeon* correspond à l'absorption de 1 litre d'eau par minute et par mètre de forage, sous une pression de 10 bars.

Pour un terrain homogène et perméable en petit (sable ou gravier) une unité Lugeon correspond sensiblement à 10^{-7} m/s.

La technique de l'essai Lugeon est décrite au § XIII.6.2.1.2.2 traitant de la mesure de la perméabilité des sols.

En définitive, dans la pratique de l'hydraulique souterraine, on utilise surtout la *vitesse de filtration par unité de gradient hydraulique K*. Nous allons examiner les divers paramètres dont dépend cette vitesse.

XIII.2.5. Variations de K en fonction des divers paramètres dont il dépend

Considérons le cas d'une substance de porosité totale m, de granulométrie uniforme constituée de grains de diamètre moyen d. A travers cette substance filtre un liquide de viscosité cinématique ν et de poids volumique $\overline{\omega}$.

A priori la vitesse de filtration K du liquide donné à travers la substance considérée sera fonction de m, d, ν et $\overline{\omega}$, soit :

$$K = f(m\,,d\,,\nu\,,\overline{\omega}) \qquad [XIII.2.5.1]$$

L'analyse dimensionnelle conduit à l'expression suivante :

$$K = A\,\frac{g}{\nu}\,d^2 f(m) \qquad [XIII.2.5.2]$$

dans laquelle :

A est un coefficient sans dimension qui dépend de la forme des particules de la substance poreuse considérée,

$f(m)$ est une fonction de la porosité qui peut être représentée par la formule semi-empirique de *Kozeny* :

$$f(m) = \frac{m^3}{(1-m)^2}$$

XIII.2.5.1. *Influence de la température*

Pour un liquide et un matériau pulvérulent donnés (A, d et m constants) la formule [*XIII.2.5.2*] montre que le produit $K\nu$ est constant.

Si on désigne par K_0 et ν_0 respectivement la vitesse de filtration et la viscosité cinématique à 0°C et par K et ν leurs valeurs respectives à une température θ, on aura :

$$K\nu = K_0\nu_0$$

$$K = K_0\,\frac{\nu_0}{\nu}$$

Par exemple pour de l'eau à 0°C, $\nu_0 = 0{,}018$ stoke ; pour $\theta = 30$°C, $\nu = 0{,}008$ stoke.

Donc

$$K_{30°} = K_{0°}\,\frac{0{,}018}{0{,}008} = 2{,}25\,K_{0°}$$

Lorsque la température passe de 0° à 30°C la vitesse de filtration K a plus que doublé.

XIII.2.5.2. *Influence des caractéristiques granulométriques du sol*

On sait que les résultats de l'analyse granulométrique d'un sol sont représentés par sa *courbe granulométrique* qui indique, en ordonnée, la proportion en poids de l'échantillon du sol considéré qui est passée au travers des mailles de différents tamis à mailles de plus en plus fines dont les dimensions sont portées en abscisses (généralement en utilisant une échelle logarithmique) (fig. XIII.2.5.2).

Rappelons également qu'une telle courbe permet de définir :

— la *dimension effective* des grains qui correspond à l'ouverture du tamis qui laisse passer 10 % du poids de l'échantillon, soit $d_{10} = 0{,}12$ mm dans le cas de la courbe de la figure XIII.2.5.2.

— le *coefficient d'uniformité granulométrique* du sol considéré qui est le quotient des deux dimensions des mailles du tamis laissant passer respectivement 60 % et 10 % du poids de l'échantillon, soit d_{60}/d_{10}. Par exemple, dans le cas de la courbe de la figure XIII.2.5.2, le coefficient d'uniformité granulométrique serait $0{,}25/0{,}12 = 2{,}08$.

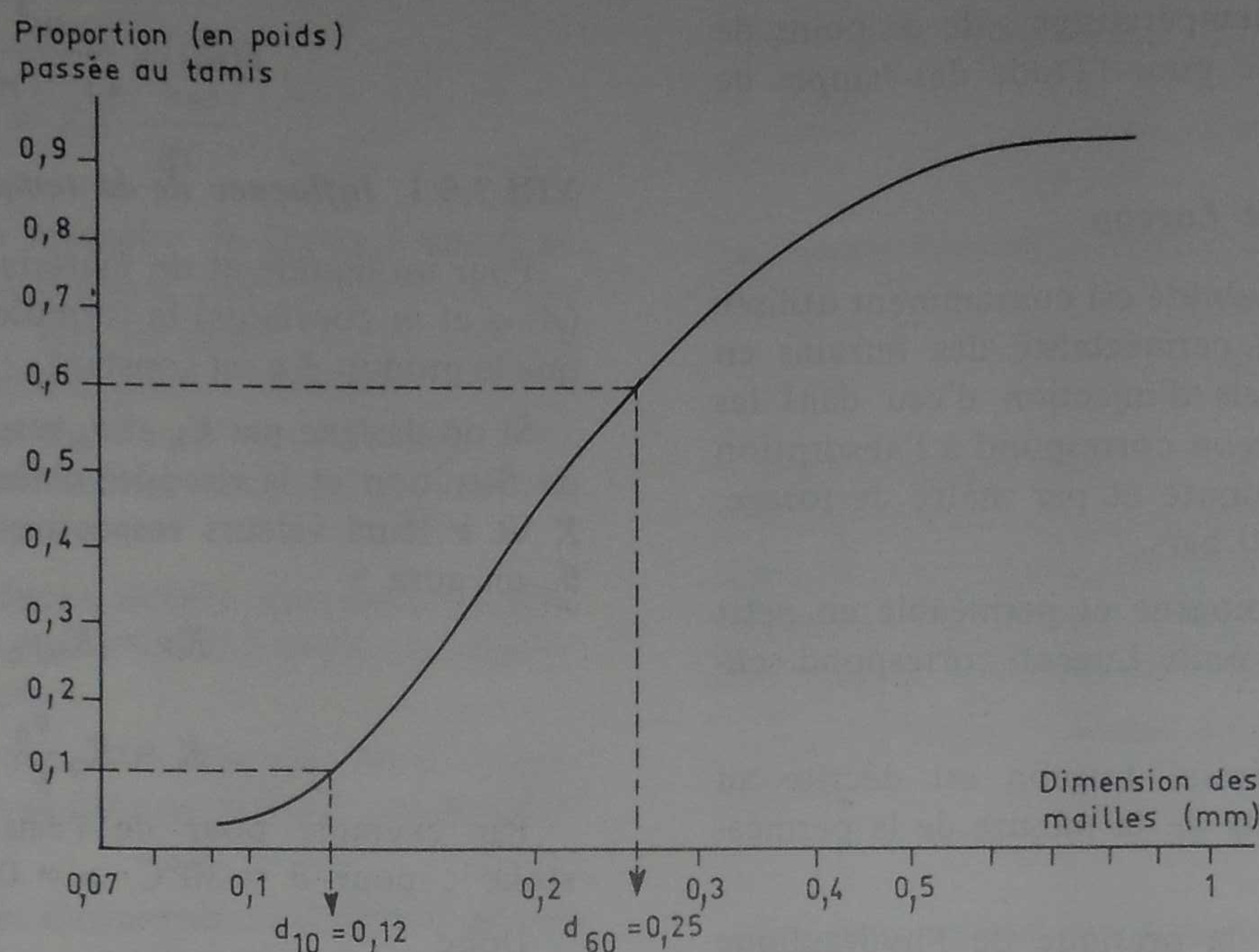


Fig. XIII.2.5.2 – Courbe granulométrique d'un sol (l'axe des abscisses est parfois orienté de la droite vers la gauche)

Formule de Hazen. Parmi les nombreuses formules proposées pour déduire K des résultats de l'analyse granulométrique, nous retiendrons celle de Hazen (1895). Cet auteur remplace le sol donné par un sable idéal de granulométrie uniforme dont la vitesse de filtration K serait la même ; ensuite il définit K en fonction du diamètre du grain (supposé sphérique) de ce sable idéal. Hazen adopte comme diamètre du grain sphérique du sable idéal la *dimension effective* des grains du sol considéré soit d_{10} et il propose la formule :

$$K = A d_{10}^2$$

K en cm/s et d_{10} en cm.

Le coefficient A varie de 45,8 pour des sables très argileux à 142 pour des sables non argileux. On adopte généralement pour A la valeur 116 ou, plus simplement, la valeur 100.

La formule de Hazen a été établie pour une porosité $m = 0,45$ et une température $\theta = 10°C$. Elle est considérée comme valable pour autant que le coefficient d'uniformité de l'échantillon soit inférieur à 5 et que sa dimension effective d_{10} soit comprise entre 0,1 et 3 mm.

Formule de Casagrande (1948). Pour tenir compte de la porosité totale m, Casagrande propose pour un sable la formule suivante :

$$K = 1,4\, K_{0,85}\, m^2$$

K = vitesse de filtration pour un sable de porosité m ;

$K_{0,85}$ = vitesse de filtration pour un sable de porosité $m = 0,85$.

Si toutefois le sable considéré contient des éléments plats (mica) la formule de Casagrande donne pour K des valeurs trop fortes.

Il existe de nombreuses autres formules qui donnent toutes pour K une valeur proportionnelle à d^2 comme l'indique la formule générale [*XIII.2.5.2*]. Il faut les considérer comme susceptibles de donner une première indication sur la valeur de K qu'il conviendra de vérifier s'il est possible, soit au laboratoire, soit sur le terrain, par les méthodes que nous indiquerons plus loin.

XIII.3. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE DUPUIT SUR LES NAPPES SOUTERRAINES

XIII.3.1. Hypothèses fondamentales de Dupuit

Considérons une saignée (tranchée ou puits) pratiquée dans une nappe libre dont nous supposerons

pour simplifier le fond imperméable horizontal (fig. XIII.3.1.1).

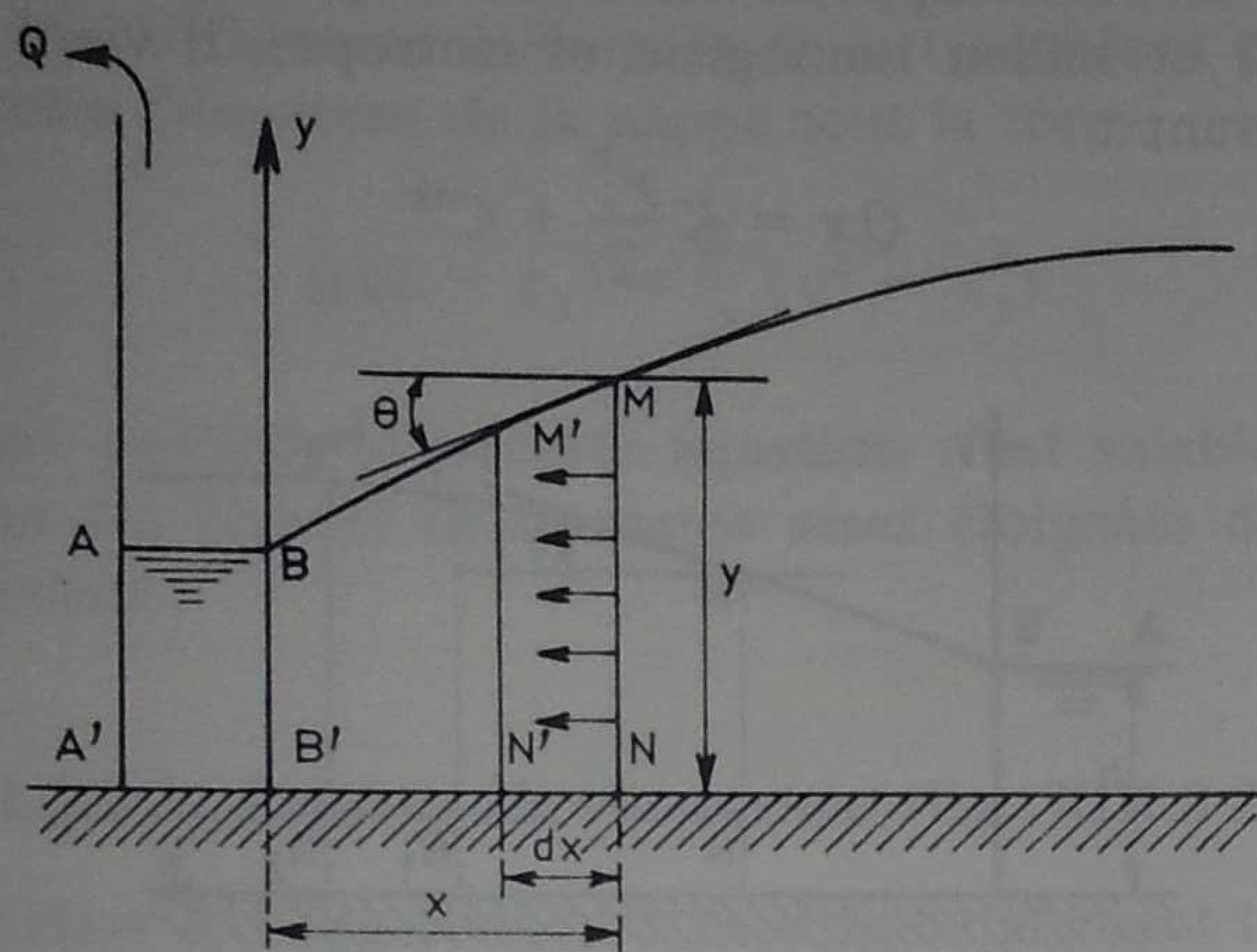


Fig. XIII.3.1.1 – Hypothèses de Dupuit

Soutirons par pompage dans la saignée un débit constant Q. La nappe prend l'allure indiquée sur la figure.

Proposons-nous de déterminer la relation existant entre la forme de la nappe, le débit Q et les caractéristiques du sol considéré.

La solution de ce problème dans les divers cas pratiques (puits ou tranchée atteignant ou non le fond imperméable horizontal ou incliné, puits unique ou puits multiples, etc . .) résulte d'une théorie élémentaire des nappes souterraines appuyée sur la formule de Darcy et qui repose sur une série d'hypothèses simplificatrices formulées par Dupuit (1863) :

— le régime d'écoulement est supposé *permanent*,

— le terrain considéré est supposé *homogène, isotrope* et *perméable en petit,*

— dans une section verticale de la nappe de trace MN, toutes les vitesses V sont supposées égales, parallèles entre elles et ayant pour valeur commune $V = K(dy/dx)$ au signe près, x et y étant les coordonnées du point M situé à la surface de la nappe dans la section transversale considérée.

On admet donc que l'écoulement se produit par *tranches ou anneaux verticaux* supposés animés sur toute leur hauteur de la vitesse horizontale V.

Si on considère le filet liquide superficiel traversant en M et M' deux tranches infiniment voisines MN et $M'N'$, la perte de charge unitaire entre M et M' a pour expression exacte d'après Darcy :

$$J = \frac{dy}{MM'} = \sin\theta \quad \text{(au signe près)}$$

La dernière hypothèse de Dupuit suppose donc que cette perte de charge a pour expression :

$$J_D = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$$

En fait cette hypothèse reste valable tant que θ est petit, c'est-à-dire lorsqu'on se trouve assez éloigné de l'extrémité aval de la nappe ; dans ces conditions la courbure de la surface libre est suffisamment faible pour qu'on puisse admettre une *répartition hydrostatique des pressions* le long de la verticale MN.

Par contre, cette hypothèse est en défaut lorsque la pente superficielle de la nappe atteint des valeurs assez grandes. Notamment l'hypothèse de Dupuit aboutit à un *contresens* lorsque le niveau de la surface libre AB dans le puits ou la tranchée s'abaisse pour atteindre le fond $A'B'$, c'est-à-dire lorsque la hauteur d'eau h dans le puits ou la tranchée devient égale à zéro. Dans ce cas en effet, il faudrait admettre que la vitesse de sortie de l'eau fut infinie ce qui est évidemment impossible (fig. XIII.3.1.2).

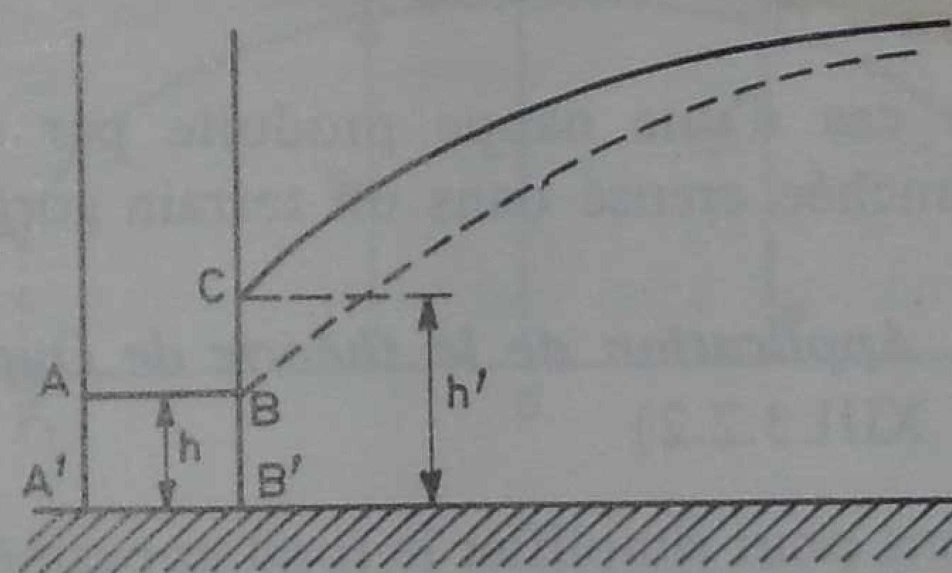


Fig. XIII.3.1.2 – Hauteur de résurgence

En fait, toutes les expériences faites montrent que dans la couche de sol perméable, le niveau de la nappe ne peut jamais s'abaisser jusqu'au niveau le plus bas dans le puits ou la tranchée et qu'il existe alors un décrochement BC entre le niveau de la nappe et le niveau dans le puits. Ce décrochement correspond à une *surface de résurgence BC* qui augmente lorsque h diminue.

La théorie de Dupuit ne peut pas expliquer ce décrochement mais elle conduit toutefois à des valeurs à peu près exactes du débit de la nappe.

Nous reviendrons ultérieurement sur les différentes hypothèses simplificatrices de Dupuit et nous indiquerons les principales théories qui ont été avancées pour tenter de s'affranchir de certaines des hypothèses et de mieux correspondre à la réalité des phénomènes.

Toutefois, dans de nombreux cas pratiques la théorie de Dupuit qui a le mérite de la simplicité, conduit à des résultats qui peuvent fournir un ordre de grandeur des phénomènes. Nous commencerons donc par étudier dans le cadre de cette théorie :

— les nappes cylindriques,

— les nappes à filets convergents.

XIII.3.2. Nappes cylindriques

XIII.3.2.1. *Définition*

Une nappe est dite cylindrique lorsque ses filets liquides coulent *par tranches verticales parallèles et identiques*. La surface et le fond d'une telle nappe sont des surfaces cylindriques qui pourront être définies par leur directrice.

L'écoulement considéré peut donc être étudié dans *deux dimensions* c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire aux génératrices de la surface et du fond de la nappe.

C'est le cas d'une nappe produite par un fossé ou une tranchée creusé dans un terrain gorgé d'eau.

XIII.3.2.2. *Application de la théorie de Dupuit* (fig. XIII.3.2.2)

Supposons pour simplifier le fond imperméable horizontal et considérons une tranche de sol de largeur unitaire comptée parallèlement à l'axe de la tranchée, c'est-à-dire perpendiculairement au plan de la figure.

Rapportons la position de la nappe aux axes xOy indiqués sur la figure.

Selon l'hypothèse de Dupuit les vitesses dans une tranche verticale de la nappe de trace $MN = y$ sont toutes égales à :

$$V = K \operatorname{tg} \theta = K \frac{dy}{dx}$$

Le débit à travers la tranche considérée est donc :

$$Q = K y \frac{dy}{dx}$$

ou

$$Q\, dx = K y\, dy$$

Q et K étant supposés constants (régime permanent établi et milieu homogène et isotrope), il vient en intégrant :

$$Qx = K \frac{y^2}{2} + C^{te}$$

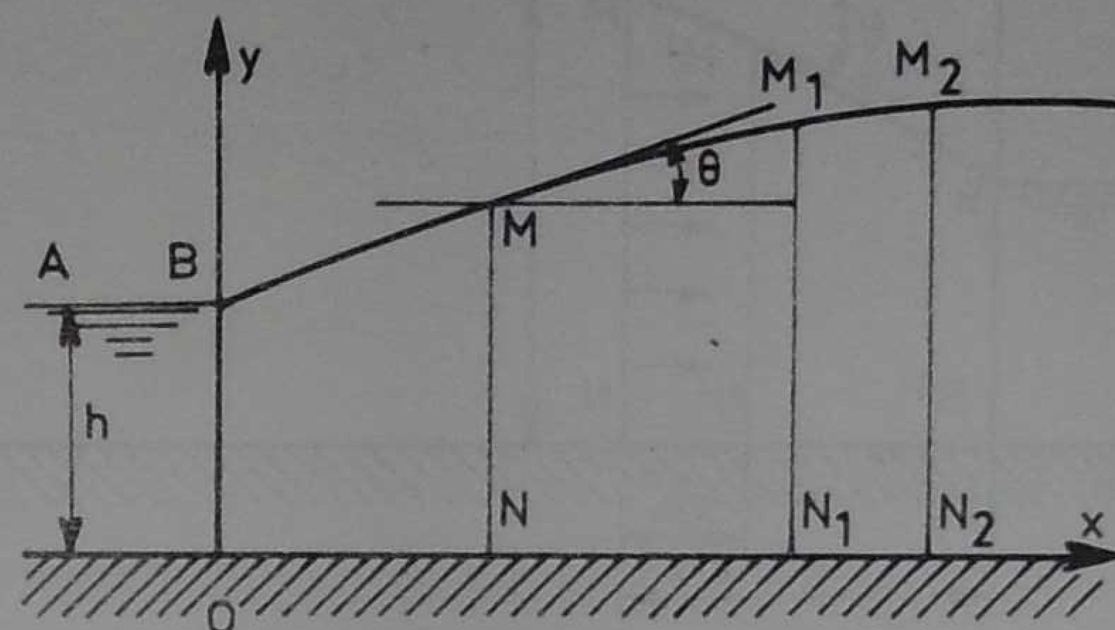


Fig. XIII.3.2.2 — Nappe cylindrique

La surface libre de la nappe est donc une *parabole*.

La constante s'obtiendra en considérant la section aval de la nappe ($x = 0$, $y = h$) et l'équation s'écrit en définitive :

$$Qx = \frac{K}{2}(y^2 - h^2)$$

Si on considère deux tranches verticales M_1N_1 et M_2N_2 d'abscisses x_1 et x_2 où les profondeurs de nappe sont respectivement y_1 et y_2 :

$$Q(x_2 - x_1) = \frac{K}{2}(y_2^2 - y_1^2)$$

Si on peut mesurer y_1 et y_2, cette formule permet d'obtenir K vitesse de filtration du terrain considéré.

Remarque — Comme nous l'avons déjà souligné la vitesse $V = K \operatorname{tg} \theta$ introduite dans les formules n'est pas en toute rigueur la vitesse qui figure dans la formule de Darcy $V = KJ$ avec $J = \sin \theta$.

Il est visible que l'approximation est d'autant meilleure que l'on considère des régions où la nappe présente une pente plus faible, c'est-à-dire des régions éloignées de la tranchée.

Par ailleurs il peut arriver qu'au voisinage de la tranchée le régime d'écoulement cesse d'être laminaire et que la loi de Darcy n'y soit plus applicable.

Pour ces différentes raisons les formules obtenues qui traduisent la théorie de Dupuit ne sont valables que pour les régions assez éloignées de la tranchée

mais il conviendra d'utiliser pour déterminer la constante de l'intégrale générale une autre section que l'exutoire de la nappe, par exemple une section M_1N_1 suffisamment éloignée de la tranchée et on obtiendra l'équation de la nappe sous la forme :

$$Q(x - x_1) = \frac{K}{2}(y^2 - y_1^2)$$

étant entendu que cette équation n'est valable que pour les régions de la nappe assez éloignées de son exutoire.

XIII.3.2.3. *Hauteur de résurgence* (fig. XIII.3.2.3) :

Vibert (1943) confirme expérimentalement l'existence d'une hauteur de résurgence h' et montre que la forme exacte de la directrice de la nappe est BF, alors que suivant la théorie de Dupuit cette directrice serait EF.

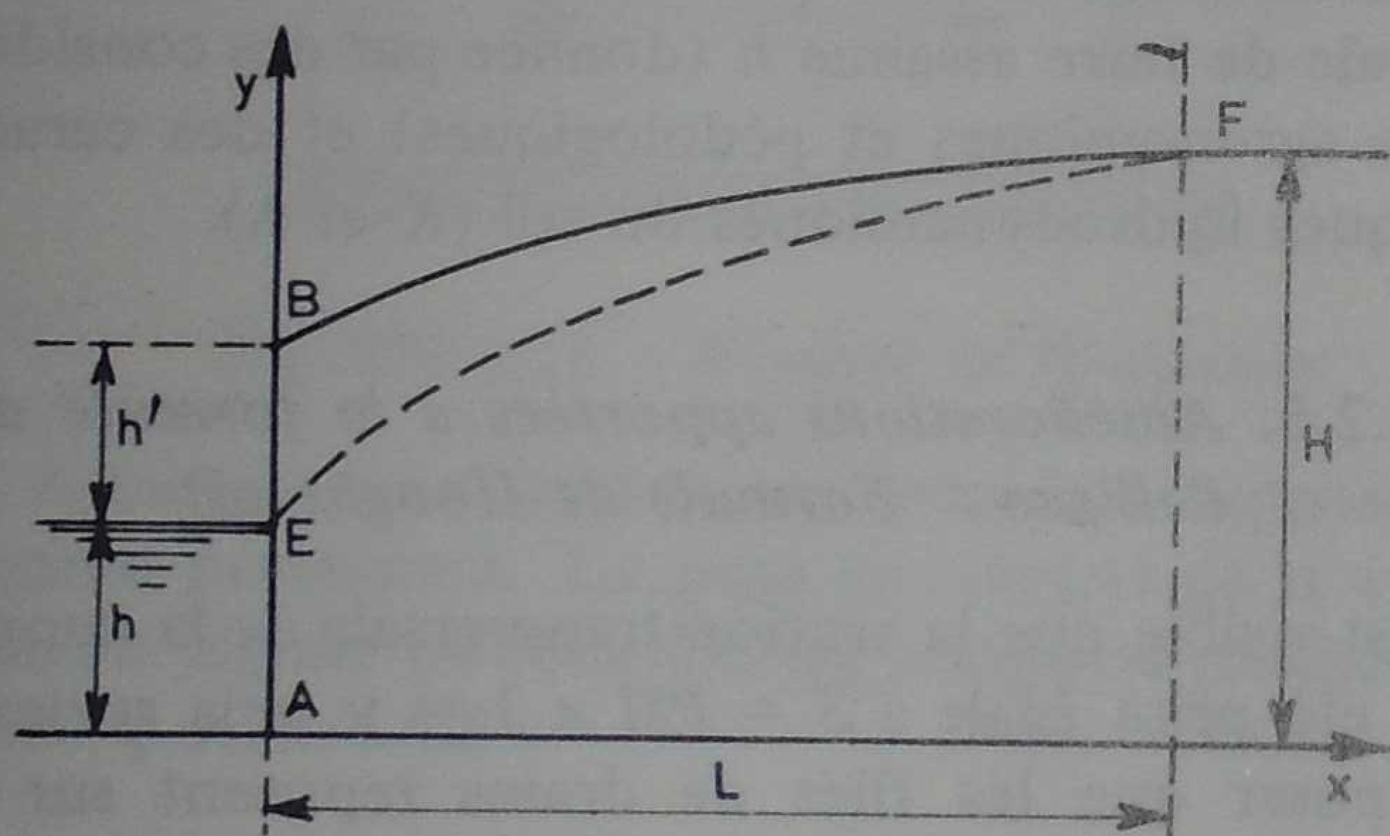


Fig. XIII.3.2.3 – Hauteur de résurgence d'une nappe cylindrique

Vibert propose en 1949 l'équation suivante pour la directrice BF :

$$y = h + \sqrt{h'(x + h')}$$

avec

$$h' = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4(H-h)^2}}{2}$$

L est la distance mesurée depuis la paroi de la tranchée, à partir de laquelle l'épaisseur H de la nappe n'est pratiquement pas modifiée.

En augmentant le débit de pompage h décroît ; pour $h = 0$ le débit est maximal et h' prend sa valeur maximale :

$$h'_m = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4H^2}}{2}$$

XIII.3.2.4. *Application de la théorie de Dupuit au drainage. Formule de l'ellipse*

La nappe comprise entre deux files de drains rectilignes et parallèles est également une nappe cylindrique. Nous donnons ci-après la démonstration de M. le Directeur Général *Armand Blanc* pour le calcul de la forme de cette nappe en application de la théorie de Dupuit.

Supposons le terrain horizontal et deux files de drains rectilignes horizontales et parallèles F_1 et F_2 situées à la profondeur H. La nappe étant cylindrique nous l'étudierons dans un plan vertical perpendiculaire aux drains (fig. XIII.3.2.4.1) et nous établirons l'équation de la nappe par rapport aux axes xOy indiqués sur la figure.

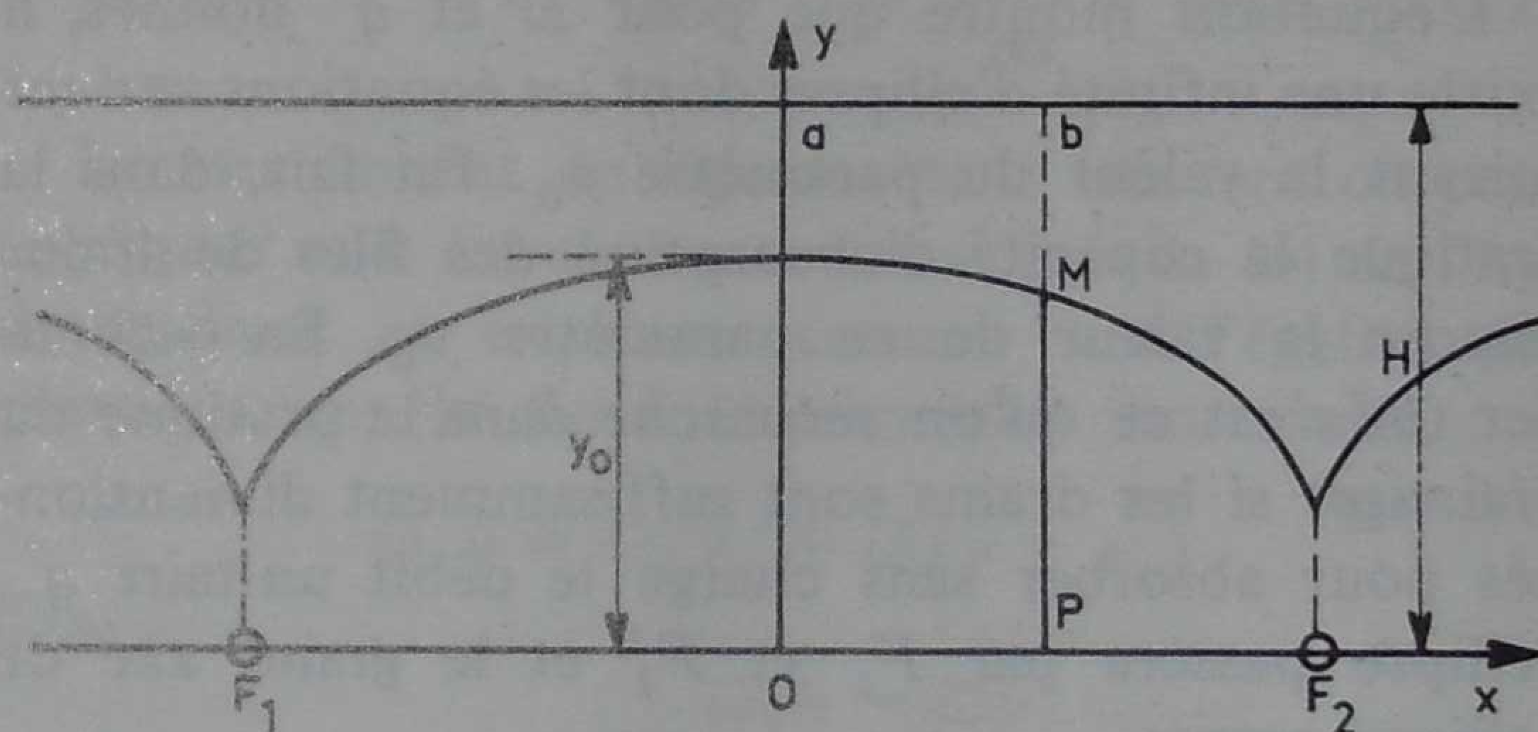


Fig. XIII.3.2.4.1 – Formule de l'ellipse

Supposons le régime permanent réalisé, c'est-à-dire que la quantité d'eau (pluie) tombée par m² de sol et par seconde est supposée égale à celle qui est évacuée par m² de sol et par seconde.

Considérons une tranche de la nappe de largeur unitaire comptée perpendiculairement au plan de la figure et soit PM la trace d'une section transversale de cette tranche ($OP = x$; $PM = y$). La théorie de Dupuit permet d'écrire :

$$Q = -Ky\frac{dy}{dx}$$

Mais, par hypothèse, Q correspond au débit infiltré sur la surface du sol $ab = x$. Si q' est le débit d'eau pluviale par unité de surface du sol, on a donc $Q = q'x$.

En remplaçant dans l'équation précédente, il vient :

$$q'x\,dx = -\,Ky\,dy$$

$$q'\frac{x^2}{2} = -\,K\frac{y^2}{2} + C^{te}$$

Pour $x = 0$, $y = y_0$, hauteur de la nappe entre deux files de drains et l'équation de la surface supérieure de la nappe s'écrit finalement :

$$q'\frac{x^2}{2} = -\,K\frac{y^2}{2} + K\frac{y_0^2}{2}$$

ou

$$\frac{x^2}{\dfrac{Ky_0^2}{q'}} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$$

La directrice de la nappe est donc une *ellipse* d'axes Ox et Oy.

L'équation montre que pour K et q' donnés, il existe une infinité d'ellipses dont les équations varient suivant la valeur du paramètre y_0. En fait, dans la pratique la capacité d'absorption des files de drains impose la valeur de ce paramètre y_0. En particulier (et c'est ce qu'on recherche dans la pratique du drainage) si les drains sont suffisamment dimensionnés pour absorber sans charge le débit unitaire q', l'ellipse passera par F_1 et F_2 et le grand axe de l'ellipse sera :

$$F_1F_2 = E = 2\,y_0\sqrt{\frac{K}{q'}} = 2\,H_0\sqrt{\frac{K}{q'}}$$

en désignant par H_0 la valeur particulière de y_0 c'est-à-dire le demi petit axe de l'ellipse.

Si enfin on fait intervenir la *hauteur capillaire* λ qui soulève uniformément toute la nappe (fig. XIII.3.2.4.2) on peut remplacer H_0 par $H - h - \lambda$ en désignant par h la hauteur minimale de sol assaini, ce qui conduit à la relation :

$$E = 2\,(H - h - \lambda)\sqrt{\frac{K}{q'}}$$

Si les longueurs E, H, h et λ sont exprimées en mètres, q' sera exprimé en $m^3/s/m^2$. Comme on l'exprime généralement en l/s/ha, on a la relation :

$$q' = q \times 10^{-7} \quad (q \text{ en l/s/ha})$$

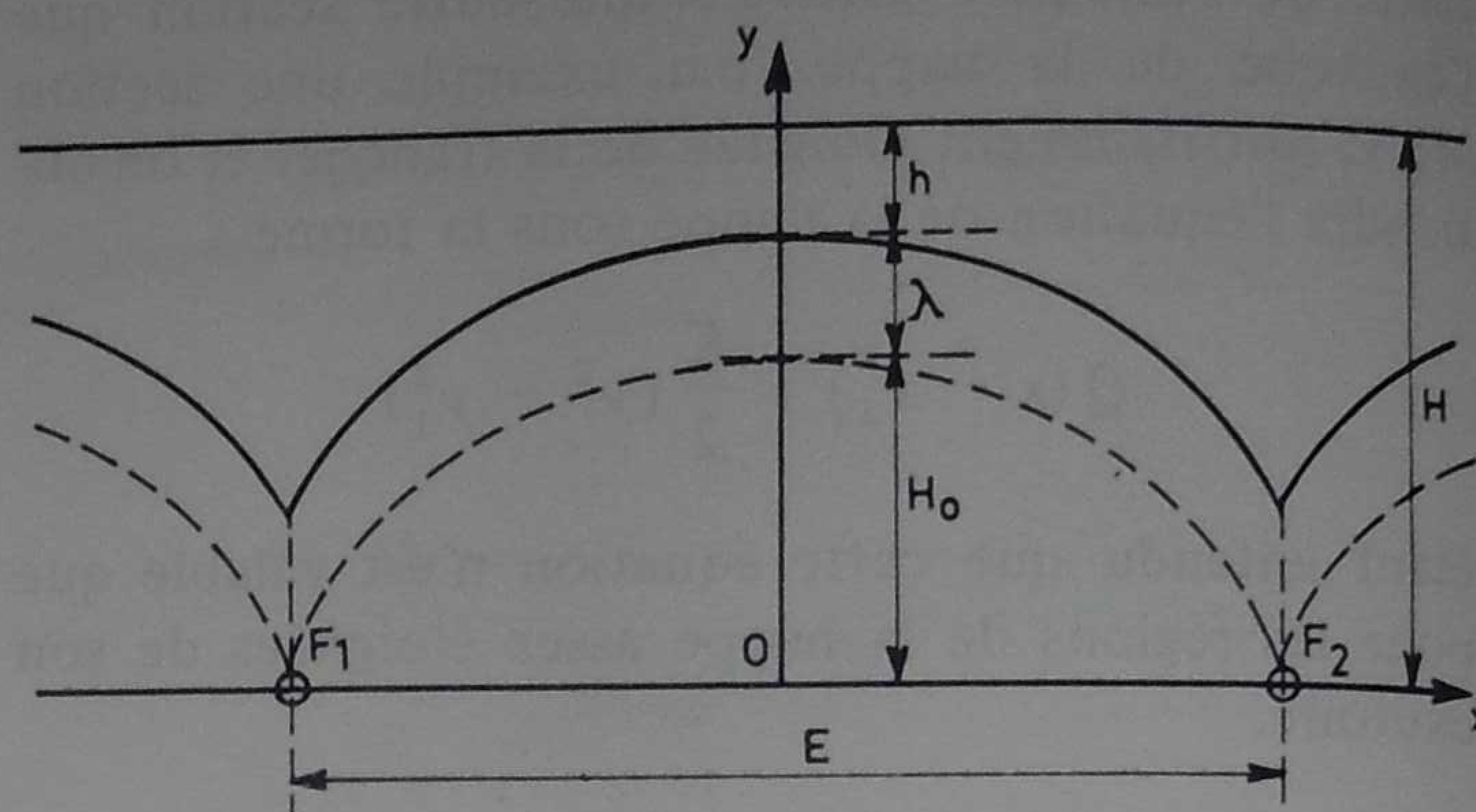


Fig. XIII.3.2.4.2 – Formule de Blanc

En adoptant $q = 1$ l/s/ha, valeur moyenne habituellement admise en France, on obtient la relation établie par M. Blanc (1935) :

$$E = 6.320\,(H - h - \lambda)\sqrt{K}$$

Cette formule permet de déduire l'écartement E des files de drains de leur profondeur H, de l'épaisseur minimale de terre assainie h (donnée par des considérations agronomiques et pédologiques) et des caractéristiques hydrodynamiques du sol (K et λ).

XIII.3.2.5. *Améliorations apportées à la formule de l'ellipse – Formule de Hooghoudt*

Il est visible que la section transversale de la nappe ayant été prise égale à $S = PM \times 1 = y$, cela revient à supposer que les files de drains reposent sur le substratum imperméable dont la trace est la droite F_1F_2 (fig. XIII.3.2.4.1). Effectivement les observations expérimentales faites sur les nappes de drainage confirment que, dans ce cas, la directrice de la nappe est une demi-ellipse (cf. recherches expérimentales de M. *Guyon*).

Si le substratum est beaucoup plus profond que les files de drains, l'écoulement intéresse également la zone située en-dessous des files. Une des meilleures formules proposées dans ce cas est celle de l'Ingénieur hollandais *Hooghoudt* (1940) ; elle s'écrit :

$$Q = \frac{8\,K_2 h\varphi + 4\,K_1 h^2}{E^2}$$

avec (fig. XIII.3.2.5) :

Q = débit spécifique du drainage en $m^3/jour/m^2$;

K_1 = vitesse de filtration de la couche située au-dessus des files de drains (en m/jour) ;

K_2 = vitesse de filtration de la couche située au-dessous des files de drains (en m/jour) ;

h = épaisseur maximale de la nappe mesurée au-dessus des files de drains (en m) ;

E = écartement des files de drains (en m) ;

φ = épaisseur de la "couche équivalente" (en m). Cette longueur introduite par Hooghoudt est fonction de l'écartement E des files de drains, du diamètre des drains et de la profondeur z de la couche imperméable au-dessous des files de drains.

Des abaques ont été établis par M. *Labye* pour faciliter l'utilisation de cette formule (voir bibliographie).

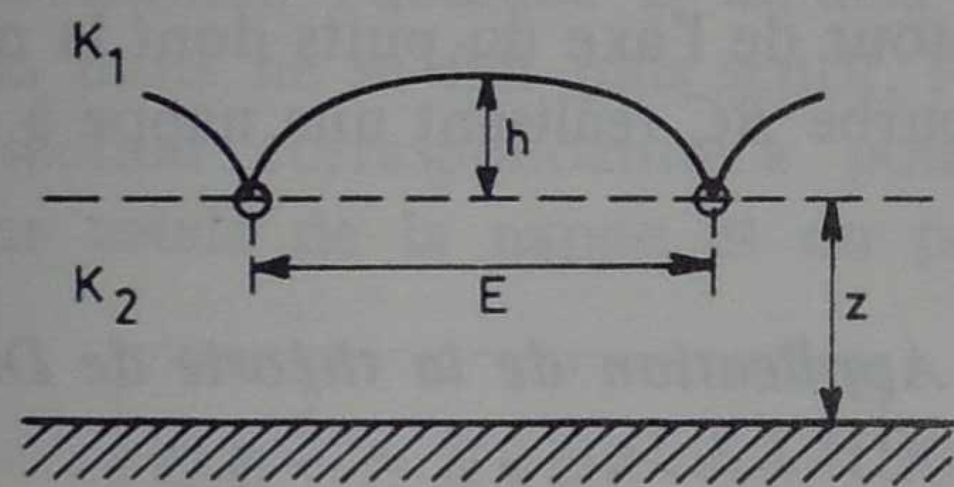


Fig. XIII.3.2.5 – Formule de Hooghoudt

Ajoutons que toutes ces formules supposent le régime permanent. La prise en compte de la variabilité du régime en fonction du temps est précisée plus loin (§ XIII.4.4.8).

XIII.3.2.6. ***Cas de deux liquides différents*** (eau douce et eau salée)

Considérons le cas simple (fig. XIII.3.2.6.1) d'un terrain perméable homogène et isotrope reposant sur une couche imperméable horizontale située à la profondeur h au-dessous du niveau de la mer.

L'eau douce (poids volumique $\overline{\omega}$) provenant de la terre et l'eau salée (poids volumique $\overline{\omega}_1$) provenant de la mer ont toutes deux tendance à s'infiltrer dans la couche perméable.

Sur un tronçon de côte supposé rectiligne on a donc affaire à des écoulements plans. Proposons-nous de déterminer la forme de la surface libre de la nappe d'eau douce et de la surface de séparation de l'eau douce et de l'eau salée. Ces deux surfaces cylindriques seront définies par leurs directrices DA et DB. Supposons établi un régime permanent caractérisé par un débit q d'eau douce par unité de largeur du massif filtrant, mesurée perpendiculairement au plan de la figure.

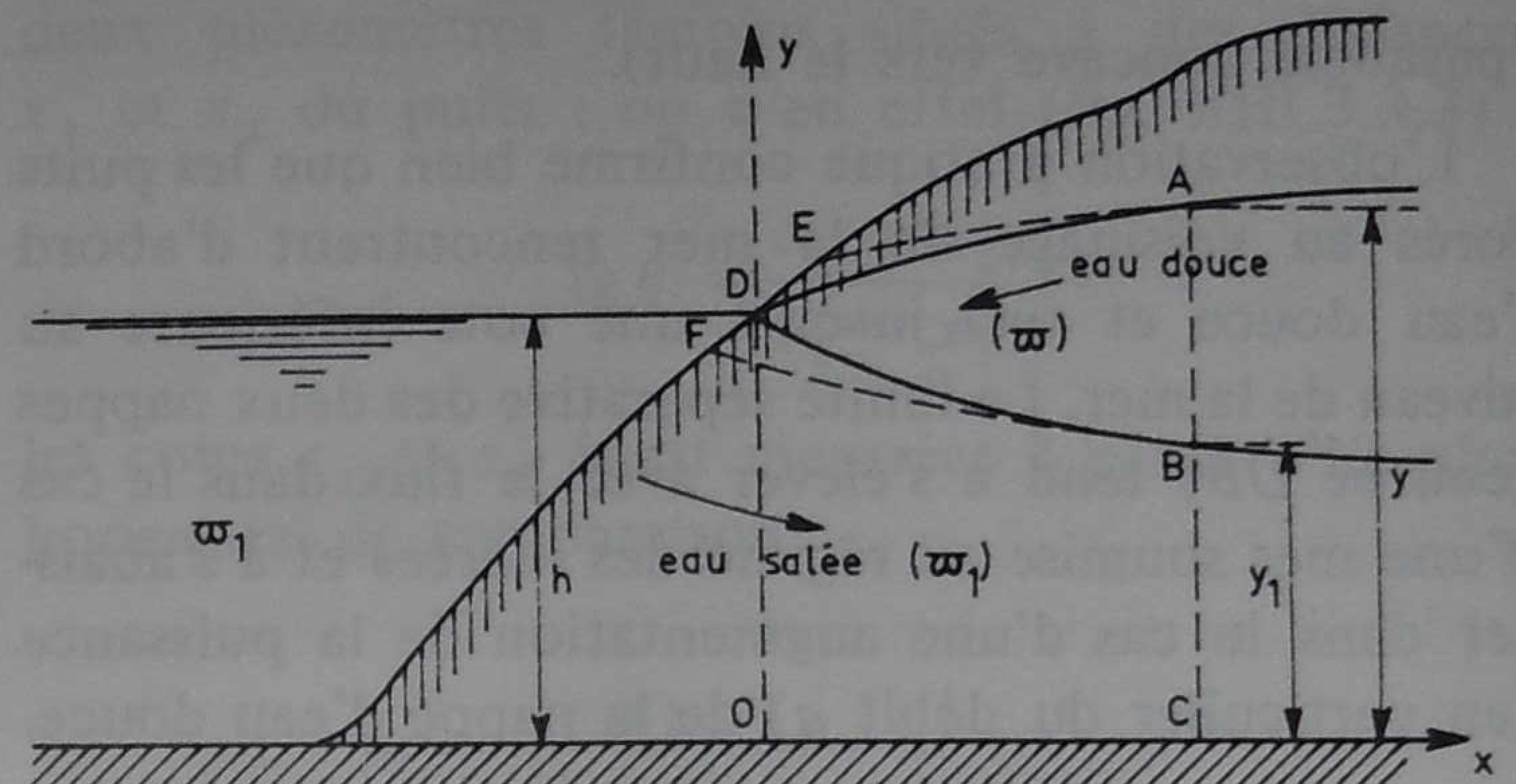


Fig. XIII.3.2.6.1

La loi de Darcy et l'hypothèse de Dupuit permettent d'exprimer le débit d'eau douce q à travers la section apparente du massif de largeur unité et de hauteur $BA = y - y_1$, soit :

$$q = K(y - y_1)\frac{dy}{dx} \qquad [XIII.3.2.6.1]$$

Le mouvement du liquide étant très lent on peut appliquer aux écoulements considérés la loi de l'hydrostatique et exprimer comme suit l'égalité des pressions sur le fond imperméable horizontal :

$$\overline{\omega}_1 h = \overline{\omega}_1 y_1 + \overline{\omega}(y - y_1)$$

d'où :

$$y_1 = \frac{\overline{\omega}_1 h - \overline{\omega} y}{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}} \qquad [XIII.3.2.6.2]$$

et

$$y - y_1 = \frac{\overline{\omega}_1 (y - h)}{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}$$

En reportant dans [*XIII.3.2.6.1*] et en tenant compte des conditions aux limites aval de la nappe (point D : pour $x = 0$, $y = h$) on obtient l'équation $y = f(x)$ de la directrice DA de la surface libre :

$$qx = \frac{K\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}}\,\frac{(y-h)^2}{2} \qquad [XIII.3.2.6.3]$$

(parabole concave vers le bas).

L'équation $y_1 = \varphi(x)$ de la directrice DB de la *surface de séparation* de l'eau douce et de l'eau

salée s'obtiendra en éliminant y entre les équations [*XIII.3.2.6.2* et *3*], ce qui conduit à l'équation :

$$qx = \frac{K\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega})}{2\overline{\omega}^2}(h - y_1)^2$$

(parabole concave vers le haut).

L'observation pratique confirme bien que les puits forés au voisinage de la mer rencontrent d'abord l'eau douce et ceci jusqu'à une cote inférieure au niveau de la mer. La limite séparative des deux nappes (courbe *DB*) tend à s'élever avec le flux dans le cas d'une mer soumise au régime des marées et à s'abaisser dans le cas d'une augmentation de la puissance (en particulier du débit q) de la nappe d'eau douce.

Dans le cas d'une langue de terre située entre deux bras de mer (fig. XIII.3.2.6.2), la théorie précédente conduit à l'existence d'une poche d'eau douce en forme de *lentille* ce que confirme l'observation pratique.

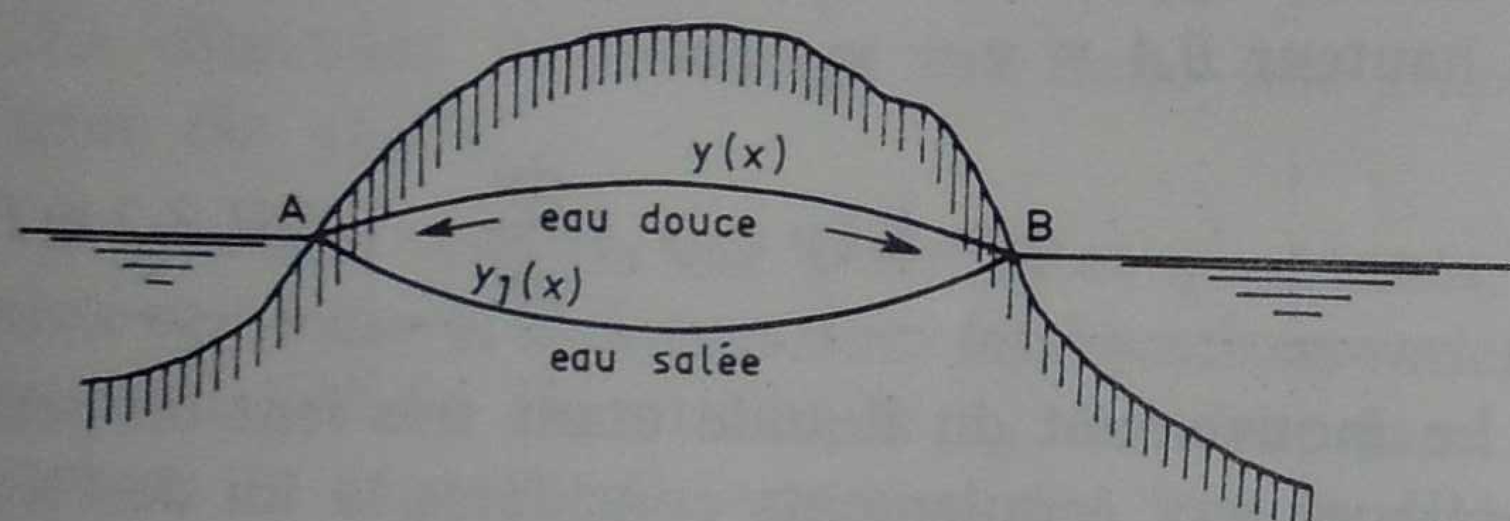


Fig. XIII.3.2.6.2

On peut noter d'ailleurs que l'hypothèse de Dupuit conduit ici encore à une impossibilité physique au voisinage des raccordements de la nappe d'eau douce avec la mer (point *D* de la figure XIII.3.2.6.1 et points *A* et *B* de la figure XIII.3.2.6.2) ; en ces points la surface libre de la nappe d'eau douce et l'interface des nappes d'eau douce et d'eau salée se rejoignent, ce qui nécessite une vitesse infinie de l'écoulement d'eau douce. En réalité, on constate généralement que l'eau douce s'écoule suivant des surfaces de résurgence *DE* et *DF* (fig. XIII.3.2.6.1).

XIII.3.3. Nappes à filets convergents

XIII.3.3.1. *Définition* (fig. XIII.3.3.1)

Supposons pour simplifier une nappe libre dont le fond imperméable est horizontal et considérons un puits cylindrique de rayon R atteignant le fond imperméable.

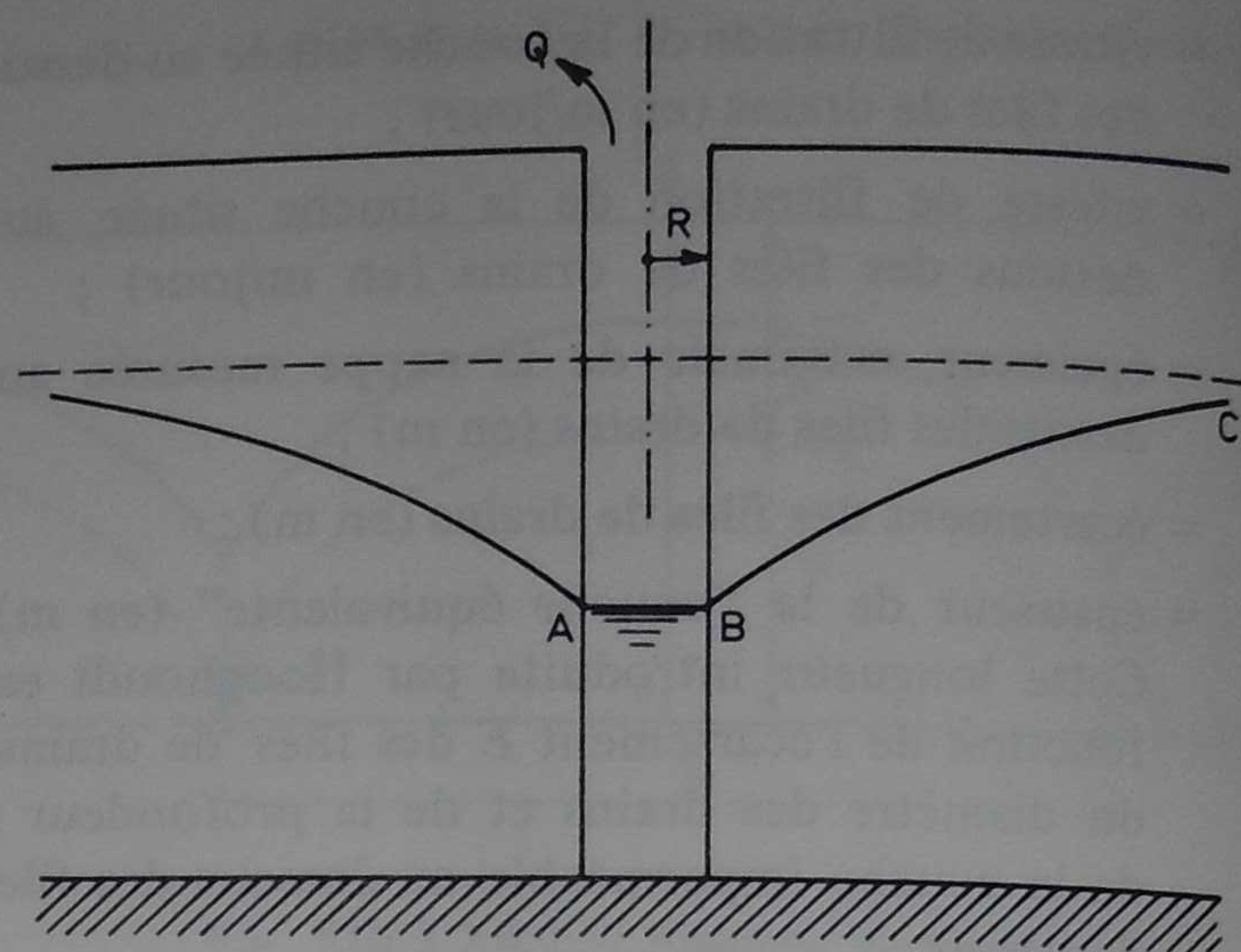


Fig. XIII.3.3.1 – Nappe à filets convergents

Si on pompe dans ce puits avec un débit constant Q en supposant le régime permanent réalisé, la surface de la nappe présentera la forme d'une surface de révolution autour de l'axe du puits dont la méridienne sera une courbe *BC* réalisant une nappe à filets convergents.

XIII.3.3.2. *Application de la théorie de Dupuit* (fig. XIII.3.3.2)

Il est visible que la forme de la nappe sera complètement définie par la forme de la *méridienne* de sa surface ce qui permet d'étudier le problème dans un plan passant par l'axe du puits et que nous prendrons comme plan de figure. Les axes xOy sont ceux indiqués sur la figure.

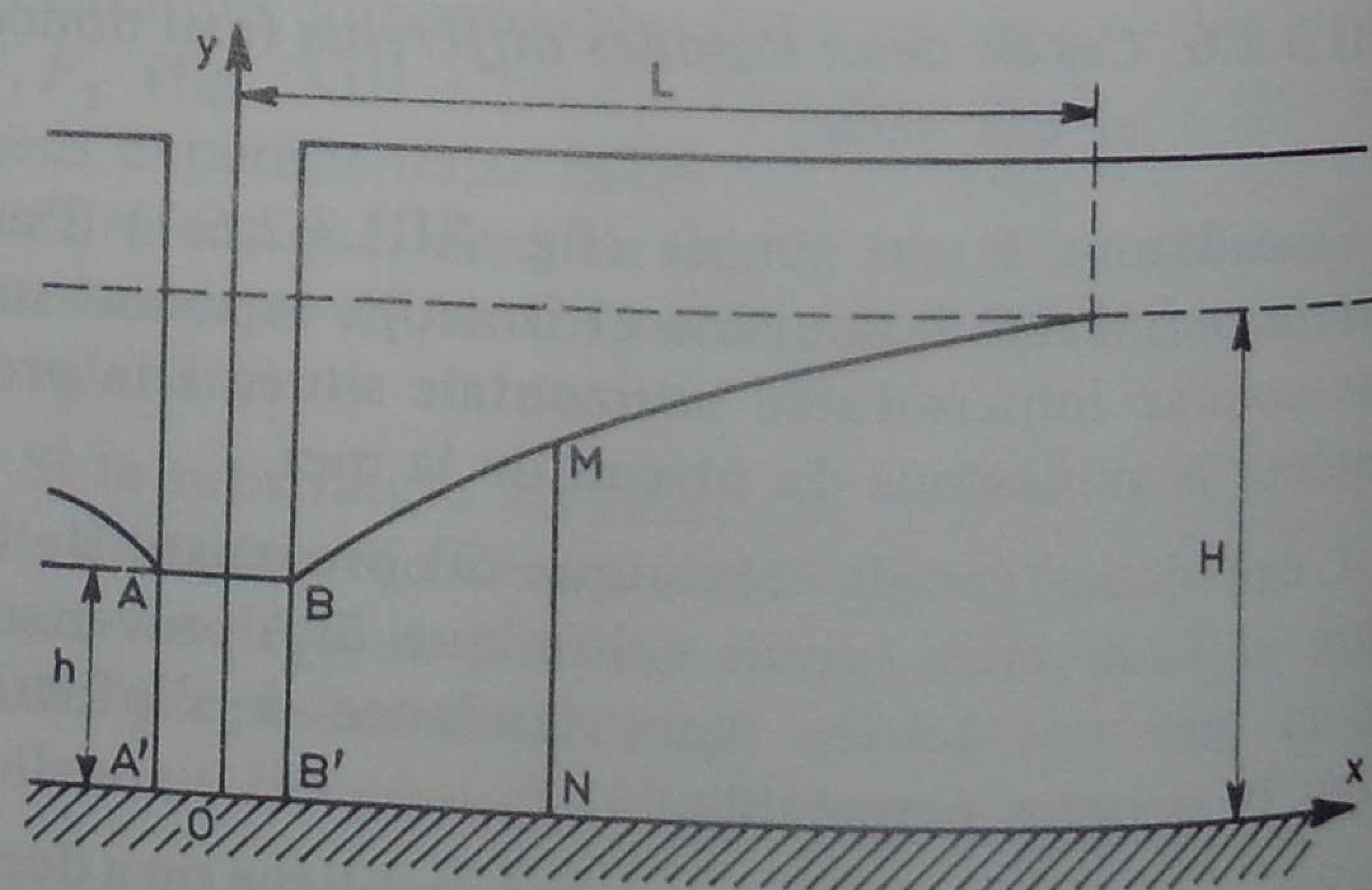


Fig. XIII.3.3.2

Considérons une section de la nappe définie par un cylindre vertical d'axe Oy et de rayon x, soit MN la trace de cette section sur le plan de la figure.

La théorie de Dupuit permet d'écrire le débit Q à travers cette section :

$$Q = 2\pi x y K \frac{dy}{dx}$$

$$Q \frac{dx}{x} = 2 K \pi y \, dy$$

$$Q \mathcal{L} x = K \pi y^2 + C^{te} \qquad [XIII.3.3.2.1]$$

La constante peut être déterminée en considérant la section BB' c'est-à-dire l'exutoire de la nappe dans le puits :

$$Q \mathcal{L} R = K \pi h^2 + C^{te}$$

d'où *l'équation de la méridienne* :

$$Q \mathcal{L} \frac{x}{R} = K \pi (y^2 - h^2)$$

Si on considère l'abscisse L au-delà de laquelle l'action du puits ne se fait plus sentir, l'ordonnée y dans la section correspondante a pour valeur H profondeur totale de la nappe et on peut écrire :

$$\boxed{Q \mathcal{L} \frac{L}{R} = K \pi (H^2 - h^2)} \qquad [XIII.3.3.2.2]$$

Cette formule donnée par *Dupuit* en 1863 a été peut-être obtenue simultanément par l'allemand *Thiem* qui ne la publia qu'en 1870.

L est appelée généralement le *rayon d'action du puits*.

Remarques : On peut faire ici les mêmes remarques que celles indiquées à propos de l'étude de la nappe cylindrique. L'hypothèse de Dupuit conduit à une valeur acceptable du débit en prenant pour h la valeur mesurée dans le puits, mais à une expression inexacte de l'équation de la méridienne de la surface libre de la nappe en raison de l'existence d'une surface de résurgence dans le puits. L'écart est d'autant plus grand qu'on considère des zones plus proches du puits.

XIII.3.3.3. *Mesure de K par la méthode de Thiem*

L'équation différentielle :

$$Q = 2\pi x y K \frac{dy}{dx}$$

peut encore s'écrire :

$$Q = 2\pi x y K \operatorname{tg} \theta$$

$\operatorname{tg} \theta$ représentant la pente de la nappe déterminée par exemple en relevant les cotes de la surface libre dans deux piézomètres témoins situés à des distances x_1 et x_2 du puits ; on a en effet (fig. XIII.3.3.3) :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1}$$

les cotes z_1 et z_2 étant mesurées à partir d'un plan horizontal de comparaison.

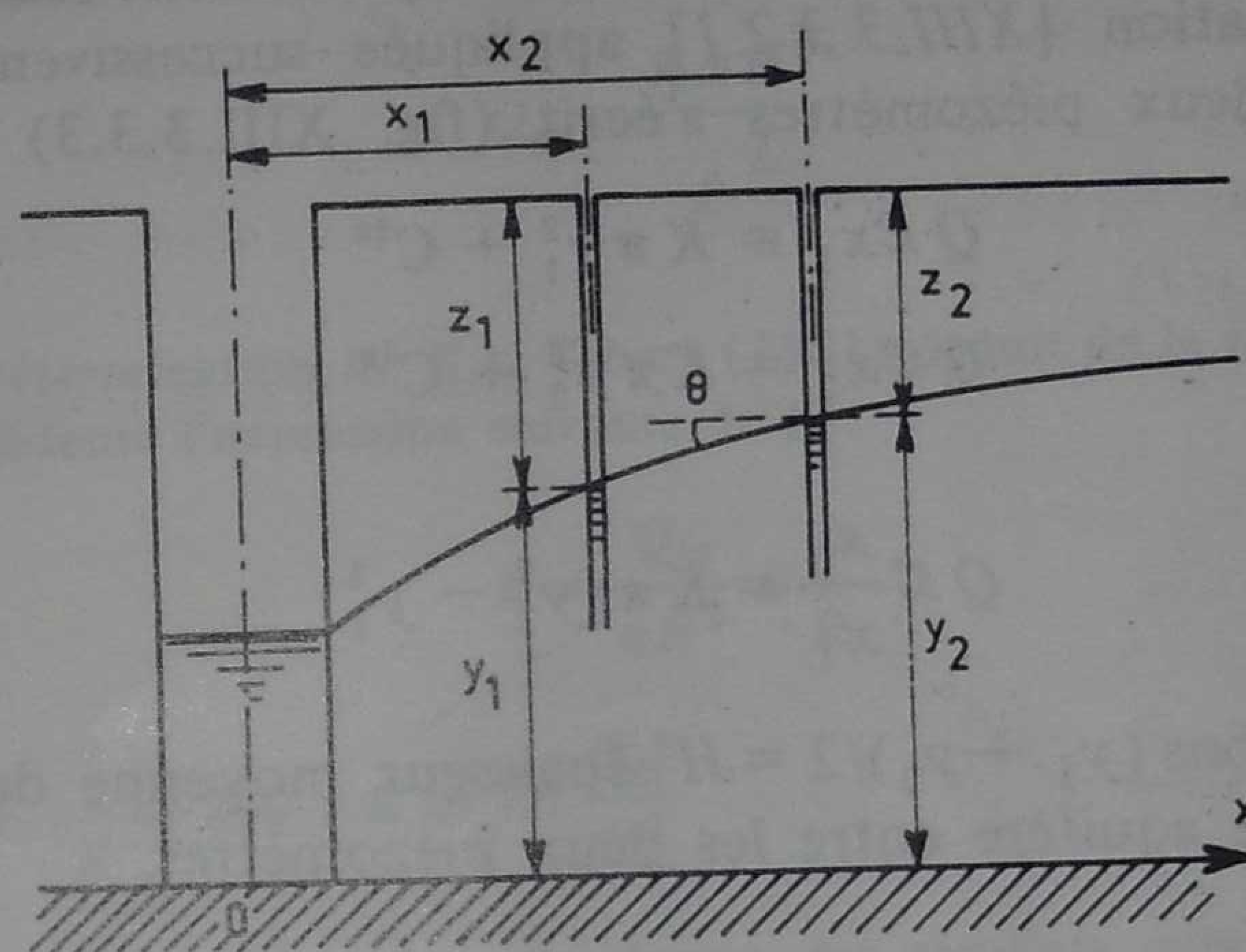


Fig. XIII.3.3.3 – Méthode de Thiem

Pour un premier régime permanent correspondant à un débit Q_1, on a dans la section d'abscisse x_1 :

$$Q_1 = 2 K \pi x_1 y_1 \operatorname{tg} \theta_1$$

Pour un second régime permanent correspondant à un débit Q'_1, on a dans la même section d'abscisse x_1 :

$$Q'_1 = 2 K \pi x_1 y'_1 \operatorname{tg} \theta'_1$$

De ces deux relations on déduit :

$$y_1 - y'_1 = \frac{1}{2 K \pi x_1} \left(\frac{Q_1}{\operatorname{tg} \theta_1} - \frac{Q'_1}{\operatorname{tg} \theta'_1} \right)$$

$$K = \left(\frac{Q_1}{\operatorname{tg} \theta_1} - \frac{Q'_1}{\operatorname{tg} \theta'_1} \right) \frac{1}{2 \pi x_1 (y_1 - y'_1)}$$

Cette formule permet de calculer K sans connaître y_1 et y'_1 mais uniquement leur différence $y_1 - y'_1 = z'_1 - z_1$.

Quant à tg θ_1 et tg θ'_1, ils sont déterminés à partir des formules suivantes :

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{z_1 - z_2}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad \text{tg}\,\theta'_1 = \frac{z'_1 - z'_2}{x_2 - x_1}$$

Toutefois la durée de chaque pompage doit être suffisamment longue de façon que les observations aux deux piézométres puissent se faire dans une zone où les hauteurs ne varient plus que lentement en fonction du temps, le régime étant devenu pratiquement permanent.

On peut également n'effectuer qu'*un seul essai de pompage* en supposant le régime permanent réalisé. L'équation [*XIII.3.3.2.1*] appliquée successivement aux deux piézomètres s'écrit (fig. XIII.3.3.3) :

$$Q\,\mathcal{L}x_1 = K\pi y_1^2 + C^{te}$$

$$Q\,\mathcal{L}x_2 = K\pi y_2^2 + C^{te}$$

ou

$$Q\,\mathcal{L}\frac{x_2}{x_1} = K\pi(y_2^2 - y_1^2)$$

Posons $(y_1 + y_2)/2 = H'$ épaisseur moyenne de la couche aquifère entre les deux piézomètres.

$$Q\,\mathcal{L}\frac{x_2}{x_1} = 2K\pi H'(y_2 - y_1) = 2K\pi H'(z_1 - z_2)$$

d'où

$$K = \frac{Q}{2\pi H'(z_1 - z_2)}\,\mathcal{L}\frac{x_2}{x_1}$$

XIII.3.3.4. *Prise en compte de la courbure des filets liquides*

Considérons un puits ou une tranchée descendant jusqu'au fond imperméable horizontal d'une nappe libre (fig. XIII.3.3.4).

Comme nous l'avons indiqué la théorie de Dupuit suppose que les surfaces d'égale vitesse, c'est-a-dire les surfaces équipotentielles, sont des surfaces (planes ou cylindriques) dont la trace est *MN*.

Dès 1905, *Louis Pochet*, Inspecteur Général des Ponts et Chaussées(1), avait proposé de remplacer les "orthogonales" aux lignes de courant (ce que nous appelons maintenant les équipotentielles) par des *arcs de cercles* normaux à la surface libre et au substratum imperméable.

M. l'Ingénieur Général *Vibert* a repris ce problème en faisant apparaître la composante verticale de la vitesse.

Enfin M. *Jaeger* a exposé cette même théorie dans son ouvrage "Hydraulique technique" en faisant appel à la notion de potentiel des vitesses. Les traces des surfaces équipotentielles sur le plan de la figure sont donc des arcs de cercle perpendiculaires à la surface libre et au fond de la nappe. La trace d'une telle surface sera, par exemple, l'arc de cercle *MP* dont le centre O' est défini par la tangente en *M* à la surface de la nappe et de rayon :

(1) Louis Pochet – *Etude sur les sources* (Imprimerie Nationale – 1905).

Fig. XIII.3.3.4

$$R' = O'M = O'P = \frac{y}{\sin\theta}$$

Deux arcs de cercles infiniment voisins PM et $P'M'$, de rayons R' et $R' + dR'$, sont deux surfaces équipotentielles et la vitesse en M à la surface de la nappe sur l'équipotentielle de rayon R' a donc pour expression :

$$V = K\frac{dy}{dR'} = K\sin\theta$$

(y étant l'ordonnée de M).

Ce résultat est mieux conforme à la loi de Darcy que celui donné par la théorie de Dupuit qui conduisait à $V = K\,\mathrm{tg}\,\theta$.

Nous renvoyons aux études de Vibert et à l'ouvrage de Jaeger cités dans la bibliographie pour l'application aux nappes cylindriques et aux nappes à filets convergents.

XIII.3.3.5. *La hauteur de résurgence. Débit maximal d'un puits*

La prise en compte de la courbure des filets liquides c'est-à-dire de la composante verticale des vitesses permet notamment d'expliquer l'existence de la *hauteur de résurgence* dans les tranchées (nappe cylindrique) ou dans les puits (nappe à filets convergents).

En 1949 M. l'Ingénieur Général Vibert propose les formules suivantes qui tiennent compte de la hauteur de résurgence h' (fig. XIII.3.3.5) :

Equation de la méridienne de la surface libre :

$$\frac{(y-h)^2 - h'^2}{(H-h)^2 - h'^2} = \frac{\mathcal{L}\dfrac{x}{R}}{\mathcal{L}\dfrac{L}{R}}$$

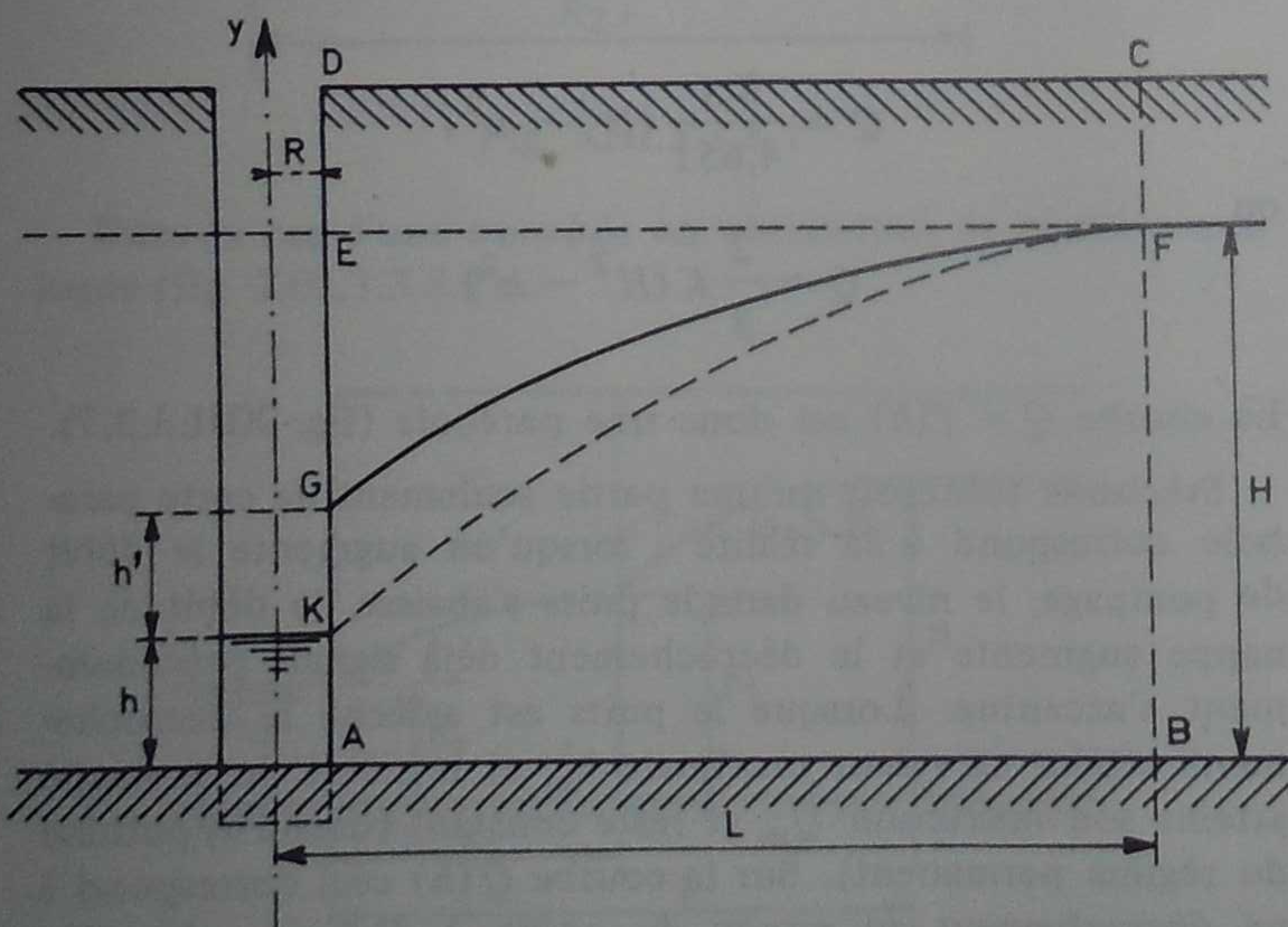


Fig. XIII.3.3.5 – Hauteur de résurgence d'un puits

Expression de la hauteur de résurgence :

$$h' = -R\,\mathcal{L}\frac{L}{R} + \sqrt{\left(R\,\mathcal{L}\frac{L}{R}\right)^2 + (H-h)^2}$$

Dans le cas du *débit maximal*, $h = 0$ (ce qui nécessite pratiquement la construction d'un avant-puits dans le substratum imperméable) et la hauteur de résurgence prend sa valeur maximale :

$$h'_m = -R\,\mathcal{L}\frac{L}{R} + \sqrt{\left(R\,\mathcal{L}\frac{L}{R}\right)^2 + H^2}$$

M. Vibert a construit un abaque donnant h'_m en fonction de H, L/R et R. Pratiquement on peut prendre $L/R \simeq 200$.

Le *débit maximal* est obtenu à partir de la formule de Dupuit [*XIII.3.3.2.2*] avec $h = 0$, soit :

$$Q_M = \frac{K\pi H^2}{\mathcal{L}\dfrac{L}{R}}$$

Détermination de K : Vibert (1961) déduit de la formule précédente l'expression suivante de K :

$$K = \frac{Q_M}{\pi H^2}\,\mathcal{L}\frac{L}{R}$$

avec $\dfrac{L}{R} \simeq 200$: $K \simeq 1{,}7\,\dfrac{Q_M}{H^2}$

Cette dernière formule donne des résultats qui ont été convenablement vérifiés par de nombreuses expériences dans les divers cas de la pratique usuelle.

XIII.3.3.6. *Coefficient de débit ou "module" d'un puits*

Cette notion a été introduite en 1969 par M. Vibert qui distingue le cas du milieu poreux justiciable de la loi de Darcy du cas des terrains diaclasés.

– *Dans le cas d'un milieu poreux* (fig. XIII.3.3.6), la formule de Dupuit [*XIII.3.3.2.2*] peut s'écrire :

$$Q = \frac{K\pi(H+h)(H-h)}{\mathcal{L}\dfrac{L}{R}}$$

Désignons par Δ le rabattement mesuré dans le puits et posons $\eta = \Delta/H$ $(0 \leqslant \eta \leqslant 1)$.

La formule de Dupuit devient

$$Q = \frac{K\pi H^2\eta(2-\eta)}{\mathcal{L}\dfrac{L}{R}}$$

Pour un terrain et un puits donnés on peut poser

$$C = \frac{K\pi H^2}{\mathcal{L}\frac{L}{R}} = C^{te}$$

d'où

$$Q = C(2\eta - \eta^2) = C\varphi(\eta)$$

avec

$$\varphi(\eta) = 2\eta - \eta^2$$

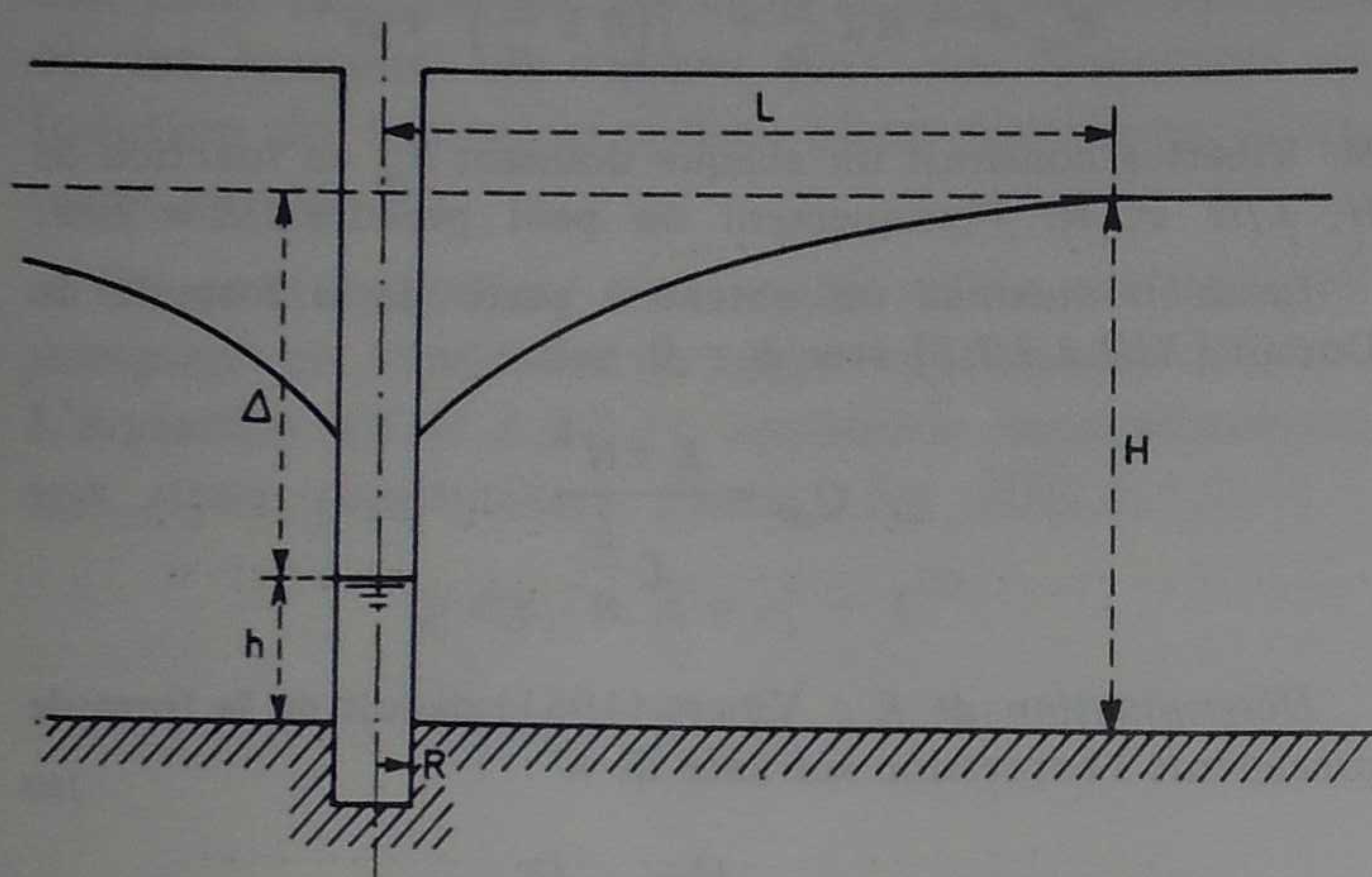


Fig. XIII.3.3.6

Le *coefficient de débit* ou *module* du puits est, par définition

$$C = \frac{Q}{\varphi(\eta)} = \frac{Q}{2\eta - \eta^2} \qquad [XIII.3.3.6.1]$$

$\varphi(\eta)$ est adimensionnel et C est donc homogène à un débit.

— *Dans le cas d'un terrain diaclasé* on sait que la loi de l'écoulement est de la forme $J = kV^m$ avec $1{,}75 \leqslant m \leqslant 2$.

On démontre que le débit du puits est alors de la forme

$$Q^m = A\Delta$$

A étant un coefficient numérique qui ne dépend que du puits et de la nappe considérés. Si par exemple on prend $m = 2$, on a

$$Q = \sqrt{A\Delta}$$

Si on pose comme précédemment $\Delta = \eta H$, on obtient

$$Q = \sqrt{A\eta H} = C'\sqrt{\eta}$$

d'où

$$C' = \frac{Q}{\sqrt{\eta}} \qquad [XIII.3.3.6.2]$$

C' est ici le coefficient de débit ou module du puits.

Remarque : Si dans les deux relations [*XIII.3.3.6.1* et *2*] on fait $\eta = 1$, c'est-à-dire $\Delta = H$, on sait que le débit du puits prend sa valeur maximale Q_M et les deux relations deviennent

$$C = C' = Q_M$$

Le module d'un puits est donc le débit maximal qu'on obtient lorsque le rabattement Δ créé à l'intérieur du puits est égal à la hauteur utile H du puits. Le module d'un puits caractérise cet ouvrage, il dépend de ses dimensions, de la nature de la paroi captante et des caractéristiques hydrodynamiques de l'aquifère. Il permet de se rendre compte de l'évolution dans le temps du rendement d'un puits et de prévoir, en conséquence, les mesures à prendre pour son amélioration ou son remplacement (acidification, traitement au chlore, aux polyphosphates, etc . . .). Il permet également de comparer les rendements de deux ouvrages, identiques ou non, établis dans une même formation aquifère.

XIII.3.3.7. *Hypothèse de Porchet – Formule simplifiée du débit d'un puits*

A la suite de très nombreux essais Porchet a proposé d'admettre :

$$\mathcal{L}\frac{L}{R} = C^{te} \simeq 4{,}651$$

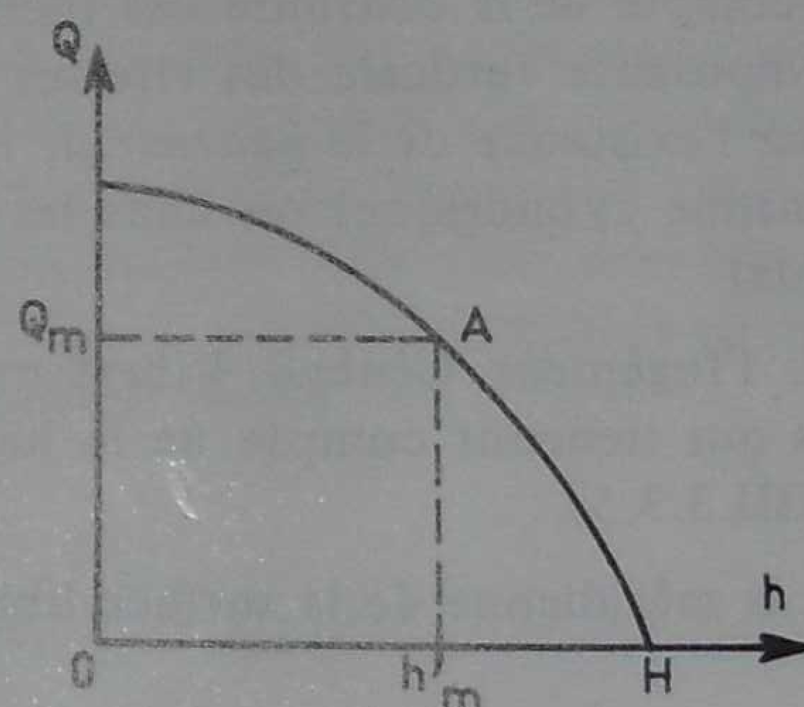


Fig. XIII.3.3.7

Dans ces conditions la formule de Dupuit [*XIII.3.3.2.2*] devient :

$$Q \simeq \frac{K\pi}{4{,}651}(H^2 - h^2)$$

ou

$$Q \simeq \frac{2}{3}K(H^2 - h^2)$$

La courbe $Q = f(h)$ est donc une parabole (fig. XIII.3.3.7).

Précisons toutefois qu'une partie seulement de cette parabole correspond à la réalité ; lorsqu'on augmente le débit de pompage, le niveau dans le puits s'abaisse, le débit de la nappe augmente et le décrochement déjà signalé précédemment s'accentue. Lorsque le puits est asséché le décrochement atteint sa valeur maximale h'_m et le débit de la nappe atteint son maximum Q_m et reste constant (dans l'hypothèse du régime permanent). Sur la courbe $Q(h)$ ceci correspond à un décrochement au niveau du point A d'abscisse h'_m (fig. XIII.3.3.7).

XIII.3.3.8. *Terrains de perméabilités différentes*

Supposons un puits de rayon R limité par un terrain de perméabilité K_1 sur un rayon R_1 et entouré, au-delà de R_1 et sur un rayon R_2, par un terrain de perméabilité K_2 (fig. XIII.3.3.8.1).

Si $K_1 > K_2$ ce sera, par exemple, le cas d'un puits entouré d'un manchon de graviers de granulométrie bien déterminée constituant un filtre destiné à éviter l'entraînement des particules plus fines du terrain naturel.

Si $K_1 < K_2$ ce peut être le cas d'un étanchement de terrain réalisé par injection (cas de la fig. XIII.3.3.8.1).

On peut écrire d'après la théorie de Dupuit :

$$H^2 - h_1^2 = \frac{Q}{K_2 \pi} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1}$$

$$h_1^2 - h_0^2 = \frac{Q}{K_1 \pi} \mathcal{L} \frac{R_1}{R}$$

et en additionnant :

$$H^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi}\left(\frac{1}{K_2} \mathcal{L} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{K_1} \mathcal{L} \frac{R_1}{R}\right)$$

d'où on peut déduire Q de la mesure de H et h_0, les valeurs de K_1, K_2, R, R_1 et R_2 étant connues.

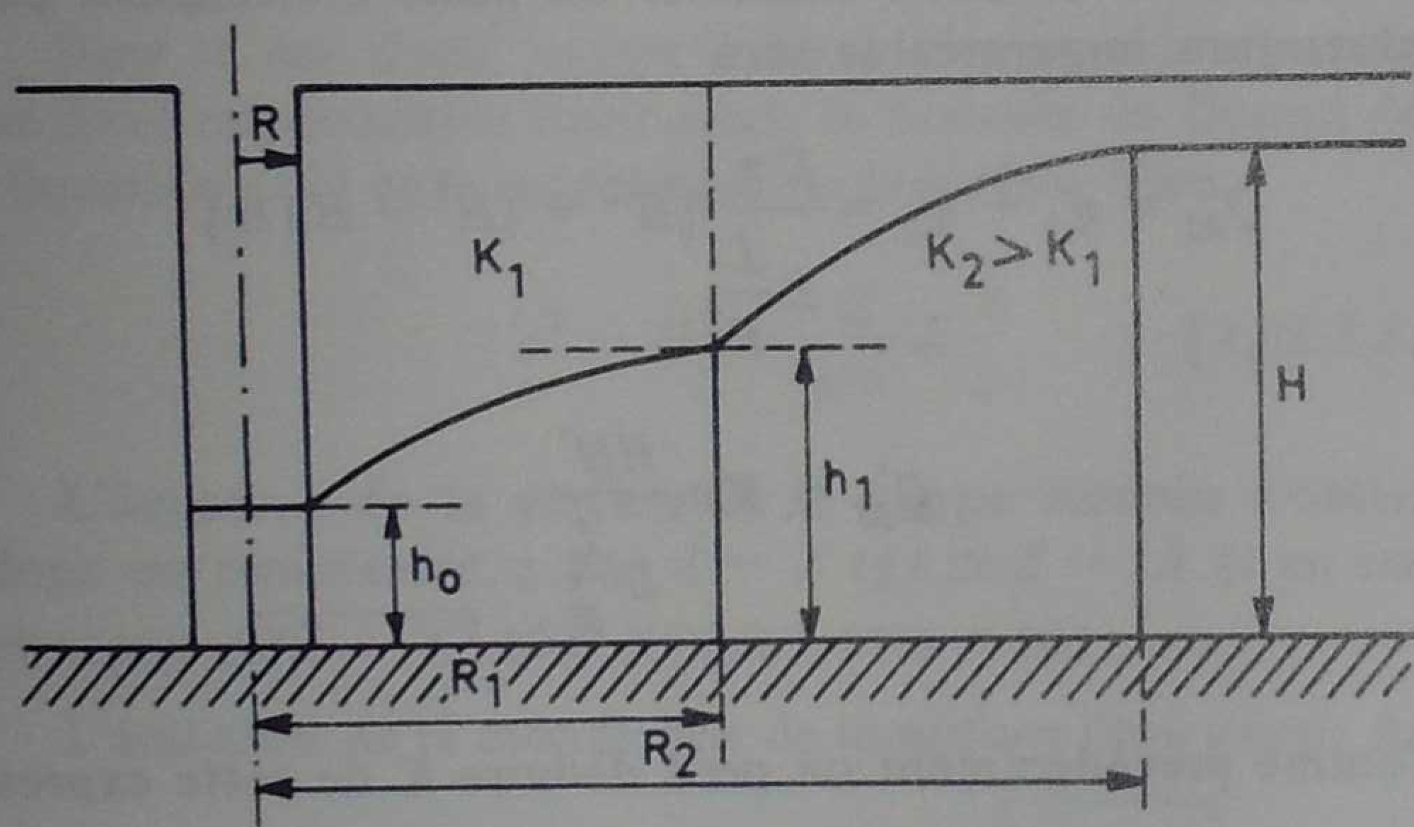


Fig. XIII.3.3.8.1

Dans le cas d'une *tranchée* on obtiendrait de manière analogue (fig. XIII.3.3.8.2) :

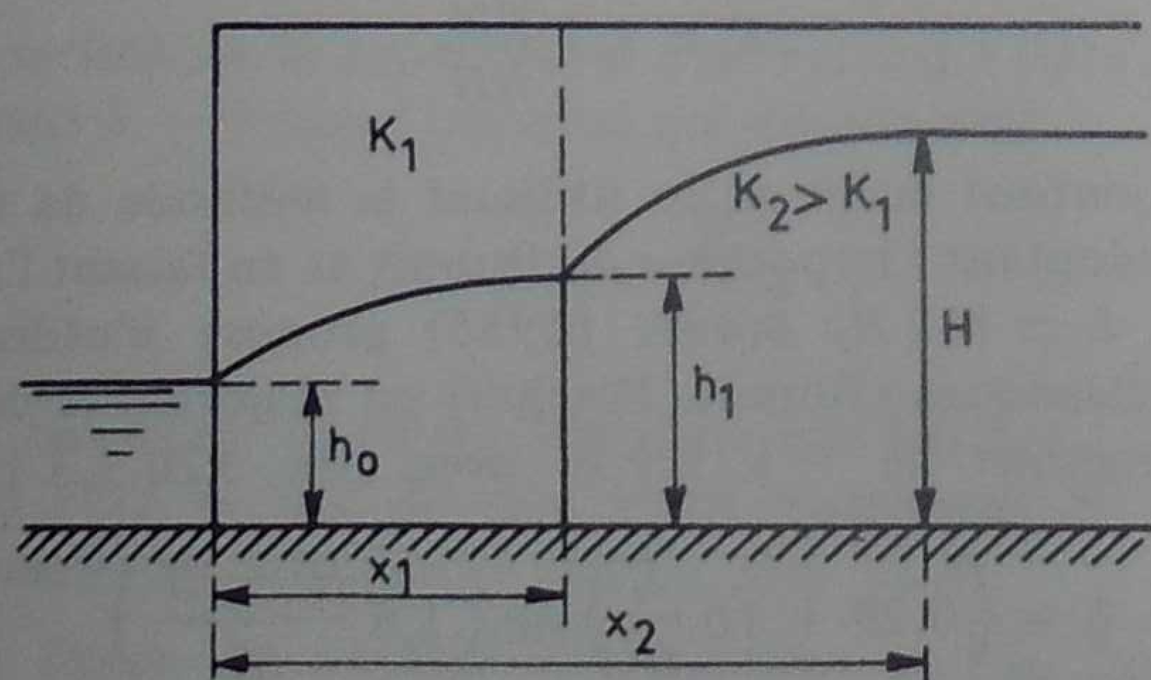


Fig. XIII.3.3.8.2

$$H^2 - h_0^2 = \frac{2Q}{K_2}(x_2 - x_1) + \frac{2Q}{K_1} x_1$$

permettant d'obtenir Q dans les mêmes conditions.

XIII.3.3.9. *Puits absorbant* (fig. XIII.3.3.9)

Si le puits reçoit un débit Q, la théorie de Dupuit permet d'écrire pour une section de trace MN :

$$Q = -2K\pi x y \frac{dy}{dx}$$

ce qui conduit, après intégration, à :

$$Q\mathcal{L}\frac{x}{R} = K\pi(h_0^2 - y^2)$$

Ce problème trouve une application pratique dans les procédés de recharge artificielle des nappes souterraines.

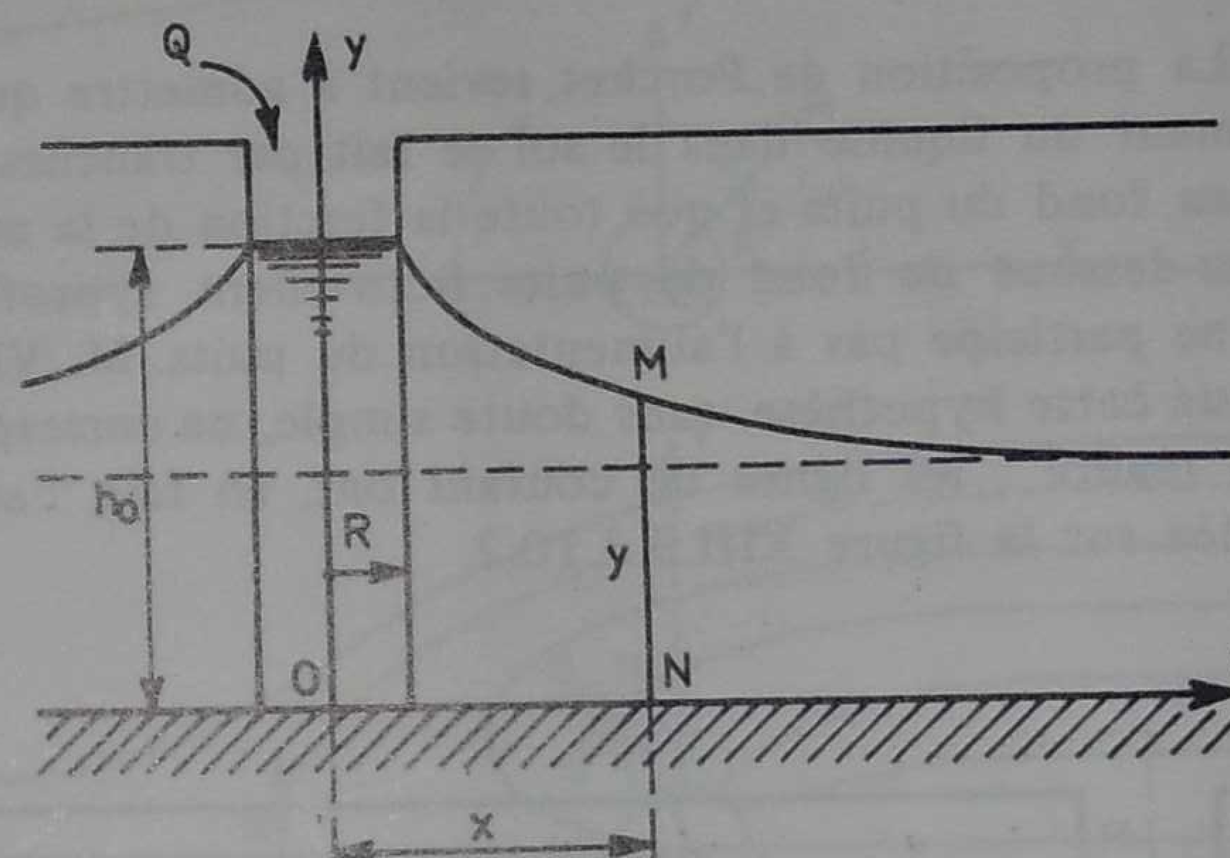


Fig. XIII.3.3.9 – Puits absorbant

XIII.3.3.10. *Puits n'atteignant pas le fond imperméable de la nappe* (fig. XIII.3.3.10.1)

1 — Si les parois latérales du puits sont imperméables, c'est-à-dire si le puits ne reçoit l'eau que par sa base supposée plane, *Forchheimer* propose la formule suivante :

$$H - h = \frac{Q}{4KR}$$

2 — Si le fond et les parois latérales sont perméables *Porchet* propose d'augmenter virtuellement la profondeur du puits d'une hauteur Δh telle que la surface latérale supplémentaire soit égale à la surface du fond, soit :

$$2\pi R \Delta h = \pi R^2$$

ou

$$\Delta h = \frac{R}{2}$$

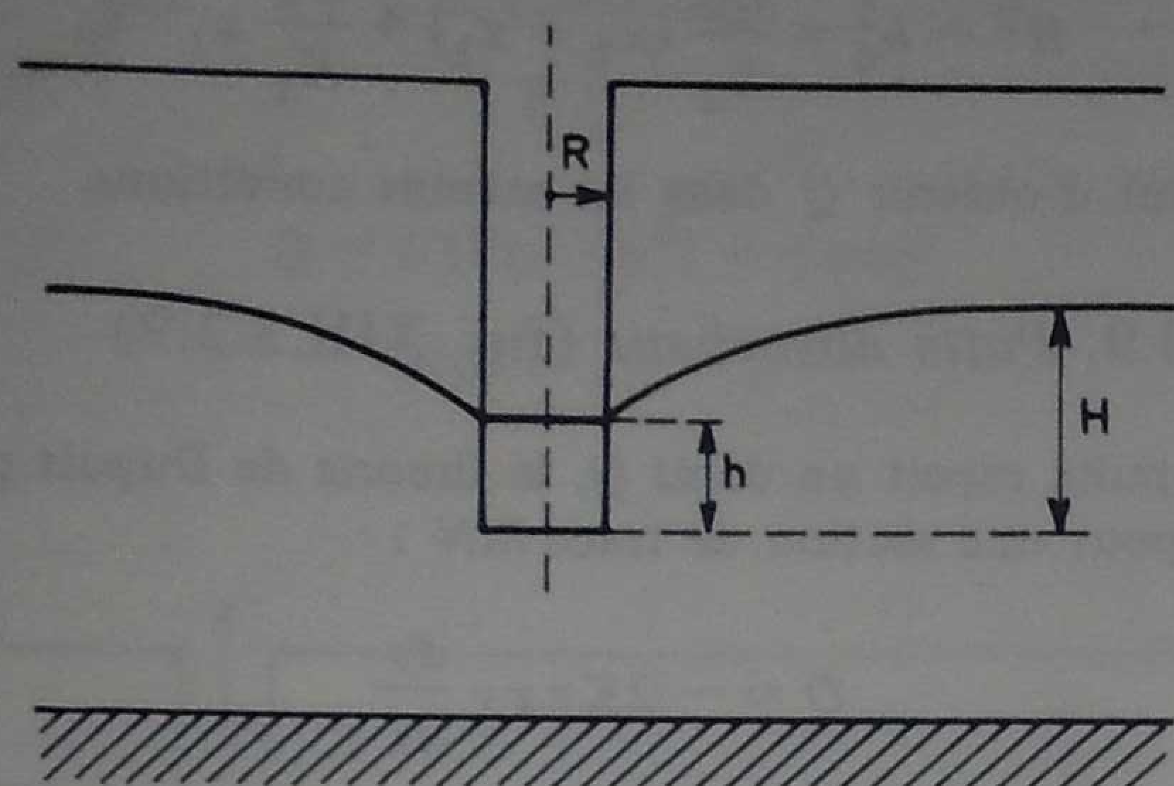


Fig. XIII.3.3.10.1

Il suffit, dans les formules précédentes, de remplacer h, h_0 et H respectivement par

$$h + \frac{R}{2} \quad , \quad h_0 + \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad H + \frac{R}{2} \quad .$$

3 — La proposition de Porchet revient à admettre que le déplacement du liquide dans le sol se fait par tranches parallèles au fond du puits et que toute la fraction de la nappe située au-dessous du fond du puits fictivement approfondi de $R/2$ ne participe pas à l'alimentation du puits. M. Vibert estime que cette hypothèse, sans doute simple, ne correspond pas à la réalité ; les lignes de courant ont, en fait, l'allure représentée sur la figure XIII.3.3.10.2.

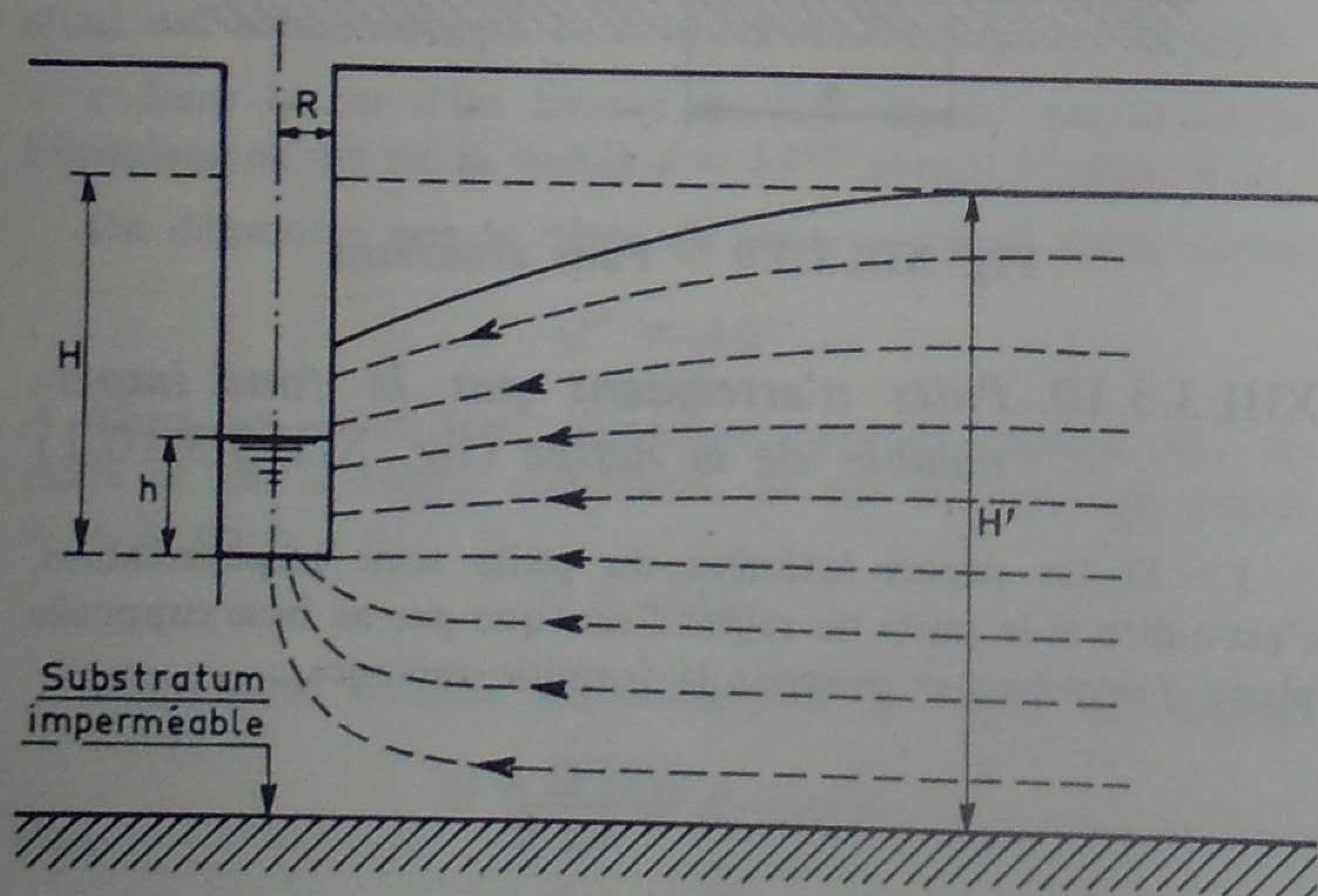


Fig. XIII.3.3.10.2

Selon M. Vibert, dans le cas du débit maximal Q'_M correspondant à $h = 0$ on peut considérer que $Q'_M = q'_1 + q'_2$ avec

q'_1 = débit correspondant aux filets liquides situés au-dessus du plan horizontal passant par le fond du puits,

et q'_2 = débit de la nappe située au-dessous de ce plan.

On a alors

$$q'_1 = K\pi \frac{H^2}{\mathcal{L}\frac{L}{R}}$$

Pour calculer q'_2 on peut remarquer que l'écoulement correspondant intéresse une zone d'épaisseur $H' - H$ et possède, à cette hauteur près, les mêmes caractéristiques que le précédent (la charge maximale H est la même et le rapport L/R est identique). En négligeant les pertes de charge particulières auxquelles donne lieu le passage du flux dans l'espace cylindrique de rayon R et de hauteur $H' - H$, le débit maximal q_2 sera donné par l'expression :

$$q_2 = K\pi \frac{H^2}{\mathcal{L}\frac{L}{R}}$$

Mais comme, à la paroi extérieure du puits, la hauteur de l'écoulement est $H' - H$ au lieu de H, on aura en réalité :

$$q'_2 = q_2 \frac{H' - H}{H} = K\pi \frac{H(H' - H)}{\mathcal{L}\frac{L}{R}}$$

En définitive le *débit maximal du puits* n'atteignant pas le substratum imperméable sera :

$$Q'_M = q'_1 + q'_2 = \frac{K\pi}{\mathcal{L}\frac{L}{R}} [H^2 + (H' - H)H]$$

$$Q'_M = K\pi \frac{HH'}{\mathcal{L}\frac{L}{R}}$$

Comme précédemment on peut déduire K de cette expression :

$$K = \frac{\mathcal{L}\frac{L}{R}}{\pi} \frac{Q'_M}{HH'}, \quad \text{avec} \quad \frac{L}{R} \simeq 200$$

$$K \simeq 1{,}7 \frac{Q'_M}{HH'}$$

4 — Ajoutons enfin qu'en utilisant la méthode de relaxation, en adoptant l'hypothèse de Dupuit et en faisant l'approximation $L \simeq 112\, R$, *Borelli* (1955) propose d'utiliser les résultats classiques (Dupuit, Porchet) en majorant le débit Q dans le rapport de 1 à $1 + \delta$, avec (fig. XIII.3.3.10.2) :

$$\delta = \left(0{,}29 + 10 \frac{R}{H'}\right) \sin \left(1{,}8 \frac{H' - H}{H'}\right)$$

Les limites de validité de cette formule sont :

$$\frac{H' - H}{H'} < 0{,}9 \quad \text{et} \quad \frac{2R}{H'} < 0{,}1$$

XIII.3.3.11. *Puits creusé dans une nappe dont le fond imperméable est incliné* (fig. XIII. 3.3.11)

Définissons comme suit les axes $OXYZ$ par rapport auxquels nous établirons l'équation de la surface de la nappe :

L'origine O est le centre du fond du puits supposé descendu jusqu'au fond imperméable de la nappe.

L'axe OZ est l'axe du puits (vertical orienté positivement vers le haut).

L'axe OX perpendiculaire à OZ dans le plan vertical contenant la ligne de plus grande pente du fond imperméable passant par O ; OX est orienté positivement vers l'amont.

Le plan de la figure sera le plan XOZ.

L'axe OY est perpendiculaire en O au plan XOZ et orienté positivement derrière le plan de la figure (le trièdre $OXYZ$ est donc direct).

Le fond de la nappe fait un angle i avec le plan horizontal XOY.

On admet que les hauteurs z de la nappe au-dessus du fond imperméable sont les mêmes, que le fond soit horizontal ou incliné.

Dans le cas d'une nappe à filets convergents reposant sur un fond imperméable horizontal, la formule de Dupuit donne l'équation $z(x)$ de la méridienne de la surface libre :

$$z^2 - H^2 = \frac{Q}{K\pi} \mathcal{L} \frac{x}{L} \qquad [XIII.3.3.2.2]$$

L'équation de la surface de la nappe inclinée s'obtiendra donc en remplaçant z par $Z - X \operatorname{tg} i \simeq Z - iX$ (i en radian) et x par $\sqrt{X^2 + Y^2}$ (fig. XIII.3.3.11 a et b);

L'équation de la méridienne de la surface libre s'écrit donc :

$$(Z - iX)^2 - H^2 = \frac{Q}{K\pi} \mathcal{L} \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{L} \qquad [XIII.3.3.11]$$

Pour obtenir l'équation d'une *courbe de niveau* de cote a il suffit de remplacer Z par a dans cette équation.

La section de la nappe par le plan vertical YOZ s'obtiendra en faisant $X = 0$ dans l'équation précédente, soit :

$$Z^2 - H^2 = \frac{Q}{K\pi} \mathcal{L} \frac{Y}{L}$$

On reconnaît la même équation que [*XIII.3.3.2.2*] (dans le plan YOZ au lieu du plan xOz). Autrement dit la forme de la nappe n'a pas changé dans le plan YOZ.

Les *lignes de courant* (représentées sur la figure XIII. 3.3.11.c) sont obtenues en écrivant qu'elles sont orthogonales aux courbes de niveau dont l'équation a été indiquée plus haut. On peut également les obtenir en remarquant qu'elles sont tangentes à la vitesse en chacun de leurs points. Or, en application du principe de superposition des écoulements souterrains, la vitesse $\vec{V}$ en un point M de la nappe est la résultante (fig. XIII.3.3.11.c) :

a) de la vitesse $\vec{C}$ de l'écoulement primitif de la nappe inclinée avant pompage dans le puits ($\vec{C}$ est donc parallèle à la ligne de plus grande pente passant par M en supposant que la nappe soit drainée par un émissaire situé à une distance assez grande, c'est-à-dire que la nappe primitive présente un écoulement en régime uniforme).

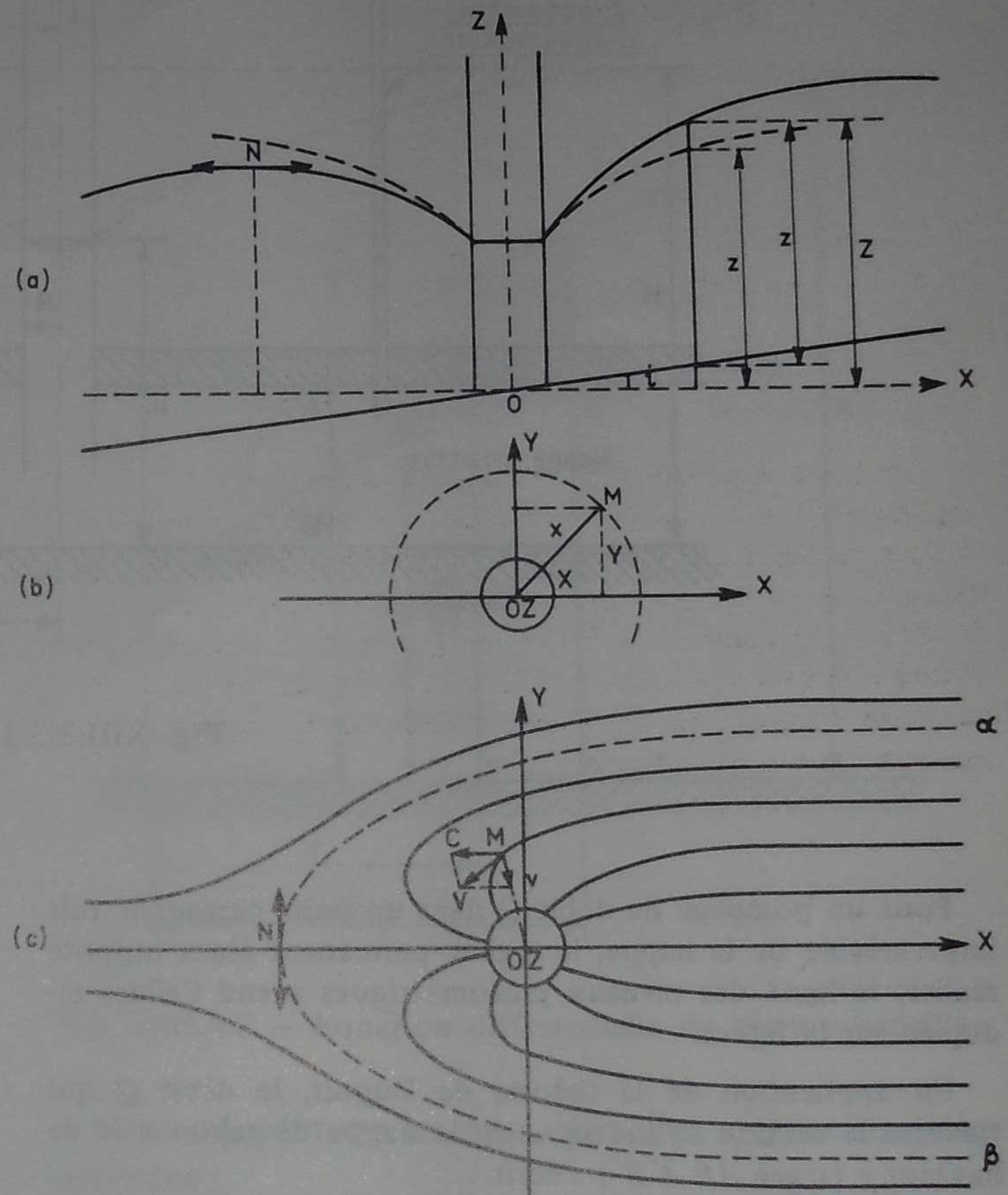


Fig. XIII.3.3.11 – Fond imperméable incliné

b) de la vitesse $\vec{v}$ qu'on aurait en M pour une nappe à filets convergents reposant sur un fond imperméable horizontal.

Il existe donc dans le plan XOZ un point N à l'aval du puits où la vitesse $\vec{V}$ est nulle et la tangente à la nappe en ce point est horizontale. On peut obtenir l'abscisse de N, soit X_N, en écrivant que $dZ/dX = 0$ à partir de l'équation [*XIII.3.3.11*] dans laquelle on fait $Y = 0$ et $Z - iX = z$.

On obtient ainsi :

$$X_N = - \frac{Q}{2K\pi z_N i}$$

On donnera d'abord à z_N la valeur H de la nappe cylindrique primitive ce qui fournira une valeur de X_N qu'on corrigera par approximations successives.

On peut également rechercher la valeur de X pour laquelle $\vec{C} = -\vec{v}$.

Le réseau des lignes de courant montre que toutes les lignes de courant situées à l'intérieur de $\alpha N \beta$ vont vers le puits (fig. XIII.3.3.11.c). La détermination de cette limite est intéressante dans le cas de captage au voisinage d'une rivière pour se rendre compte si les eaux de celle-ci peuvent arriver au captage, ce qu'il faut parfois éviter.

XIII.3.3.12. *Nappe captive – Puits artésien*

Soit une nappe captive d'épaisseur e limitée par deux couches imperméables supposées horizontales (fig. XIII.3.3.12) :

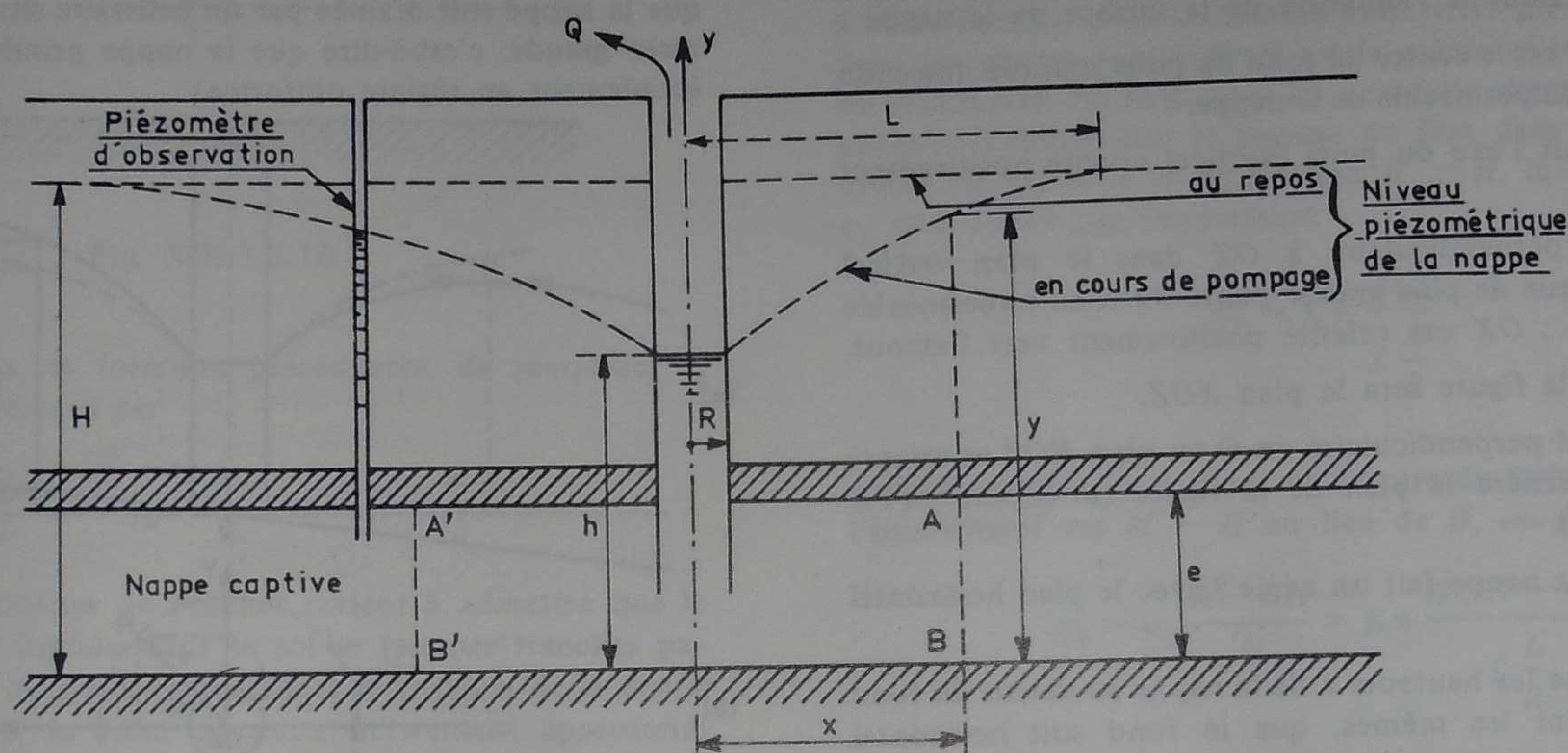


Fig. XIII.3.3.12 – Nappe captive

Pour un pompage de débit Q dans un puits perçant le toit imperméable de la nappe, le régime permanent étant supposé réalisé, la ligne des niveaux piézométriques prend l'allure indiquée sur la figure.

En application de la théorie de Dupuit, le débit Q qui traverse la section cylindrique de la nappe de rayon x et de hauteur e (trace $AB\,A'B'$) s'écrit :

$$Q = 2K\pi x e \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2K\pi e}{Q} dy$$

$$\mathcal{L}x = \frac{2K\pi e}{Q} y + C$$

Compte tenu des conditions aux limites amont ($x = L$; $y = H$) et aval ($x = R$; $y = h$), on obtient

$$Q = \frac{2K\pi e(H-h)}{\mathcal{L}\dfrac{L}{R}}$$

XIII.4. NAPPES SOUTERRAINES EN RÉGIME VARIABLE

Nous nous limiterons aux nappes libres.

XIII.4.1. Mise en évidence du régime variable

Considérons (fig. XIII.4.1) un puits creusé jusqu'au fond imperméable horizontal d'une nappe libre d'étendue très grande circulant dans un terrain filtrant homogène et isotrope.

Soutirons du puits par pompage un débit Q maintenu constant.

La théorie de Dupuit suppose qu'après une certaine durée de pompage il s'établit un régime d'écoulement permanent, c'est-à-dire qu'en un point quelconque de la nappe les caractéristiques hydrodynamiques (vitesse et hauteur piézométrique) ne varient ni en grandeur ni en direction.

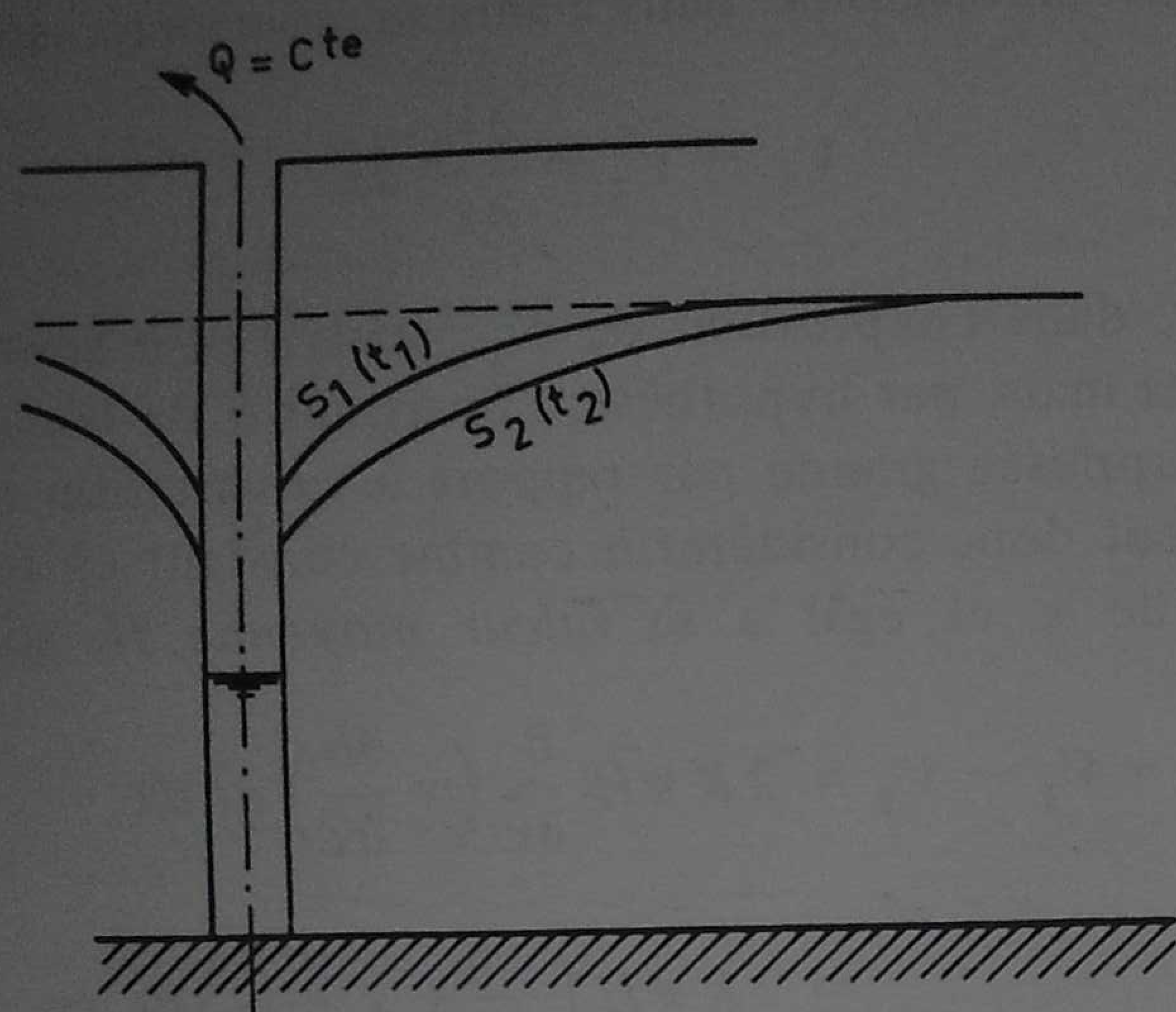


Fig. XIII.4.1 – Régime variable

En fait, cette hypothèse suppose implicitement qu'il existe une alimentation permanente de la nappe.

Dans la plupart des cas cette hypothèse n'est pas vérifiée.

En réalité, au début du pompage le plan d'eau dans le puits baisse rapidement et la surface libre de la nappe, à une faible distance du puits, se creuse en un cône de dépression ou "entonnoir" (fig. XIII.4.1).

Si, à l'instant t_1 après le début du pompage la méridienne du cône de dépression est en S_1, à l'instant $t_2 > t_1$ elle sera en S_2 tel que le volume d'eau mobile compris entre S_1 et S_2 compense le prélèvement $Q(t_2 - t_1)$.

Ainsi *le cône de dépression s'étale et se creuse progressivement* au fur et à mesure que le pompage se poursuit. Le régime d'écoulement n'est plus permanent mais *variable*, on dit aussi *"régime transitoire"*.

Toutefois un même abaissement dh de la surface libre libérant un volume d'eau d'autant plus grand que l'aire influencée est plus vaste, on conçoit que l'accroissement et le creusement du cône de dépression soient de plus en plus lents et qu'on puisse admettre qu'après une certaine durée de pompage ce cône demeure pratiquement stationnaire, un régime quasi permanent étant alors atteint.

XIII.4.2. Equation différentielle du régime variable

Pour analyser de manière plus précise le régime variable d'écoulement de la nappe, proposons-nous de définir l'équation :

$$s = f(x, t)$$

liant, en un point b de la surface de la nappe (fig. XIII.4.2) :

— le rabattement s,

— la distance x au centre du puits,

— le temps t écoulé depuis le début du pompage.

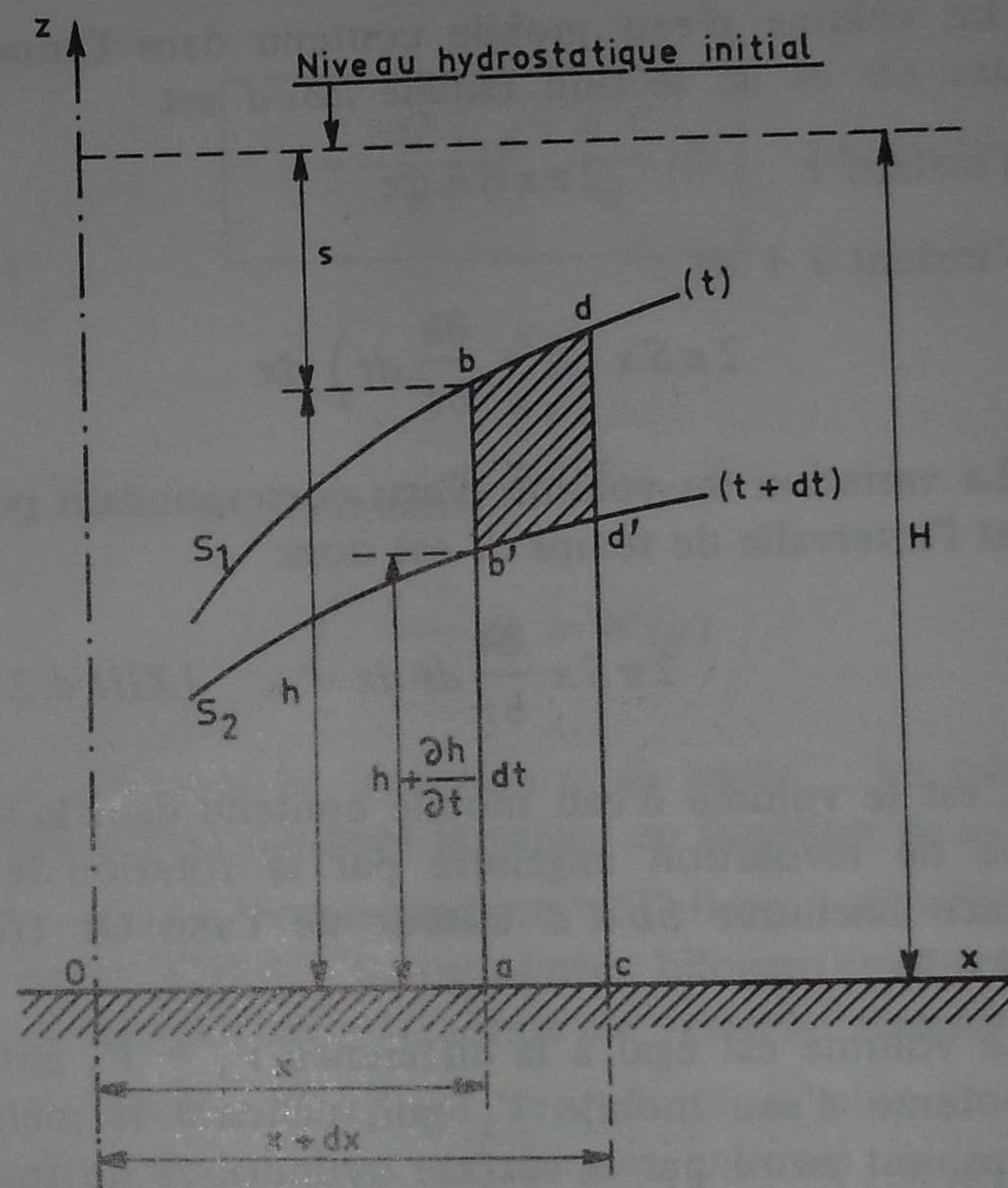


Fig. XIII.4.2 – Equation différentielle du régime variable

Nous adopterons les *hypothèses* et *approximations* suivantes :

— l'épaisseur de la nappe est très petite par rapport à ses dimensions horizontales, soit $h \ll x_{max}$,

— la pente de la surface libre est faible, c'est-à-dire que les composantes verticales des vitesses sont négligeables,

— l'amplitude des mouvements de la surface libre est faible par rapport à l'épaisseur de la nappe, soit $dh \ll h$.

A l'instant t la méridienne de la surface libre est en S_1 ; à l'instant $t + dt$ elle est en S_2.

Appliquons à l'écoulement considéré le raisonnement classique qui nous a permis d'établir l'*équation de continuité* en hydrodynamique.

Considérons deux sections cylindriques infiniment voisines de traces ab et cd correspondant respectivement à des rayons x et $x + dx$. Désignons par S la *porosité utilisable* ou *"coefficient d'emmagasinement"* de l'aquifère, c'est-à-dire le volume d'eau libéré par une colonne verticale du milieu aquifère saturé ayant une section horizontale unité et une hauteur égale à l'épaisseur de l'aquifère quand la cote de la surface libre diminue d'une unité.

Le volume d'eau mobile contenu dans l'anneau d'axe Oz et de section radiale $abcd$ est

à l'instant t : $2\pi x Sh\, dx$

à l'instant $t + dt$:

$$2\pi Sx\left(h + \frac{\partial h}{\partial t}\,dt\right)dx$$

La variation du volume d'eau correspondant pendant l'intervalle de temps dt est donc

$$2\pi Sx\,\frac{\partial h}{\partial t}\,dt\,dx \qquad [XIII.4.2.1]$$

C'est le volume d'eau mobile contenu dans le volume de révolution engendré par la rotation de la surface hachurée $bb'd'd$ autour de l'axe Oz (fig. XIII.4.2).

Ce volume est égal à la différence $V_1 - V_2$ entre le volume d'eau mobile V_1 qui, pendant le même temps, est *entré* par la surface cylindrique de trace cd et le volume V_2 qui en est *sorti* par la surface cylindrique de trace ab.

Compte tenu des hypothèses, en tout point de la surface cylindrique ab de rayon x la vitesse est radiale et a pour expression :

$$V = K\,\frac{\partial h}{\partial x}$$

Le volume d'eau V_2 qui, pendant l'intervalle de temps dt, est *sorti* par la surface cylindrique de trace ab est donc :

$$V_2 = 2K\pi x h\,\frac{\partial h}{\partial x}\,dt$$

Le volume V_1 qui, pendant le même temps, est *entré* par la surface cylindrique de trace cd est égal au volume *sorti* V_2 augmenté de sa différentielle par rapport à x, soit :

$$V_1 = V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x}\,dx$$

La différence $V_1 - V_2$ représente le volume d'eau mobile emmagasiné dans l'anneau considéré, soit :

$$V_1 - V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial x}\,dx$$

Or, dans l'expression de V_2, seuls x et h sont variables mais, par hypothèse, l'épaisseur h de la nappe est supposée grande par rapport à sa variation dh ; on peut donc considérer h comme constant en fonction de x et égal à sa *valeur moyenne* H, soit :

$$V_1 - V_2 = 2K\pi H\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial h}{\partial x}\right)dt\,dx$$

$$= 2K\pi H\left(\frac{\partial h}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)dt\,dx \qquad [XIII.4.2.2]$$

L'*équation de continuité* s'écrira donc en égalant les expressions [*XIII.4.2.1* et *2*], soit :

$$2\pi Sx\,\frac{\partial h}{\partial t}\,dt\,dx = 2K\pi H\left(\frac{\partial h}{\partial x} + x\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)dt\,dx$$

ou

$$\frac{S}{KH}\,\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{x}\,\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Le produit KH est appelé *transmissivité* de l'aquifère et généralement désigné par le symbole τ ; son équation aux dimensions est L^2T^{-1} ; il s'exprimera donc en m^2/s. Le quotient τ/S est parfois appelé *"diffusivité"* de l'aquifère.

Par ailleurs :

$$s = H - h$$

$$h = H - s \quad ; \quad dh = -\,ds$$

L'équation devient ainsi :

$$\boxed{\frac{S}{\tau}\,\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial s}{\partial x}} \qquad [XIII.4.2.3]$$

C'est l'équation cherchée qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre analogue à l'équation dite *"équation de la chaleur"* :

$$\Delta u - \lambda^2\,\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Boussinesq qui, le premier, établit l'équation du régime variable, signala également cette analogie entre la propagation de la chaleur dans un milieu continu et isotrope et celle des frottements dans un fluide homogène et isotrope ; dans les deux cas il s'agit d'un phénomène de diffusivité : diffusivité thermique dans le premier et diffusivité visqueuse dans le second.

Rappelons les *hypothèses justifiant la validité* de l'équation différentielle du régime variable (équation [*XIII.4.2.3*] :

— terrain homogène et isotrope,

— nappe horizontale indéfinie et non réalimentée,

— variations relatives d'épaisseur dh/h restant faibles, pratiquement $dh/h < 0{,}02$; cette dernière hypothèse nécessitera de mesurer les rabattements $s = H - h$ dans des zones suffisamment éloignées du puits ou du forage en utilisant des piézomètres.

Précisons enfin les *conditions aux limites* de l'équation :

1) $s = 0$ pour $t \leqslant 0$ quel que soit x ;

2) $s = 0$ pour $x = \infty$ pour $t > 0$;

3) L'expression [*XIII.4.2.1*] calculée précédemment exprime la variation du volume d'eau mobile contenue dans une tranche élémentaire de la nappe pendant l'intervalle de temps dt, soit :

$$dV = 2\pi S x \frac{\partial h}{\partial t}\, dt\, dx \qquad [XIII.4.2.1]$$

ou, au signe près :

$$dV = 2\pi S x \frac{\partial s}{\partial t}\, dt\, dx$$

Le débit élémentaire correspondant est donc :

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi S x \frac{\partial s}{\partial t}\, dx$$

Pour l'ensemble de la nappe (x variant de 0 à ∞) c'est-à-dire pour l'intégrale correspondante, on obtient le débit de pompage Q, soit :

$$Q = 2\pi S \int_0^\infty x \frac{\partial s}{\partial t}\, dx$$

c'est la troisième condition aux limites.

XIII.4.3. Intégration de l'équation différentielle du régime variable. Formules de Theis et Jacob

Compte tenu des conditions aux limites définies ci-dessus, l'intégrale exacte de l'équation [*XIII.4.2.3*] a été établie en 1935 par le Professeur américain *Theis* (U.S. Geological Survey).

La *formule de Theis* s'écrit ainsi :

$$\boxed{s = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du} \qquad [XIII.4.3.1]$$

avec

$$u = \frac{S x^2}{4 T t}$$

On pose généralement :

$$\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du = W(u)$$

$W(u)$ s'appelle la *"fonction u du puits"* ; les tables de Wenzel en donnent la valeur en fonction de u (1).

La courbe correspondante a l'allure indiquée sur la figure XIII.4.3 (coordonnées bilogarithmiques) ; on la désigne sous le terme de *"courbe standard"*.

La courbe $W(u)$ est reproduite à plus grande échelle sur les deux graphiques annexés (annexes 11a et 11b). L'utilisation pratique de cette courbe standard est indiquée plus loin.

Formule approximative de Jacob (1950)

La fonction

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

peut s'expliciter ainsi :

$$W(u) = -0{,}5772 - \mathcal{L}u - \sum_{n=1}^{n=\infty} (-u)^n \frac{1}{n \cdot n\,!}$$

Lorsque u est suffisamment petit, la série constituant le troisième terme du second membre tend

----

(1) Marcel Boll – *Tables numériques universelles* – Dunod – 1947 (tables nos 366 à 369).

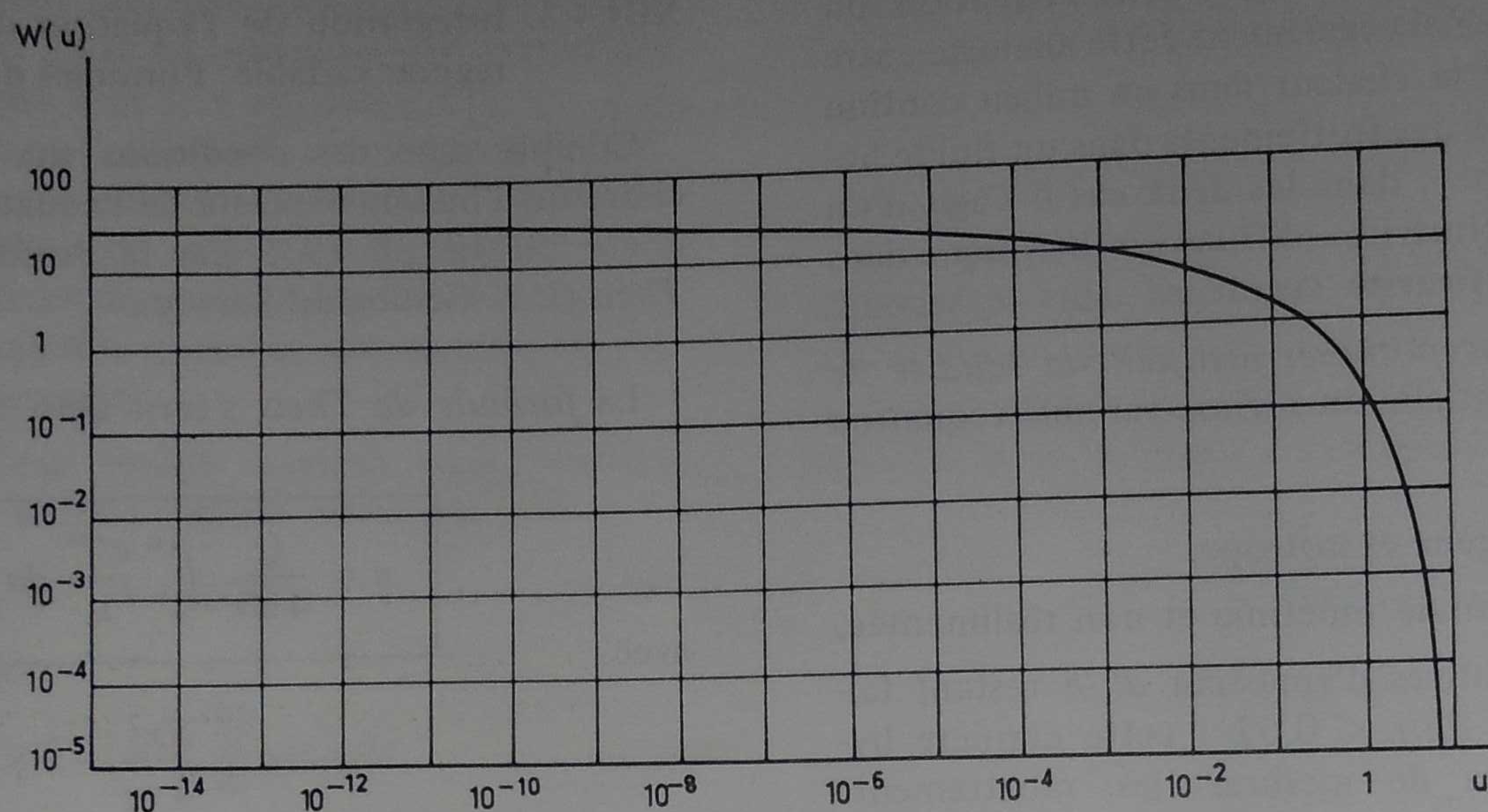


Fig. XIII.4.3 – Courbe standard

rapidement vers 0 et $W(u)$ peut alors être pris égal à

$$W(u) = -0{,}5772 - \mathcal{L}u$$

d'où :

$$s = \frac{Q}{4\pi\tau}\left(-0{,}5772 - \mathcal{L}\frac{Sx^2}{4\tau t}\right)$$

ou, en passant aux logarithmes décimaux :

$$s = \frac{2{,}3\,Q}{4\pi\tau}\log\frac{2{,}25\,\tau t}{Sx^2}$$

$$\boxed{s = 0{,}183\,\frac{Q}{\tau}\log 2{,}25\,\frac{\tau t}{Sx^2}} \quad [XIII.4.3.2]$$

Le Professeur américain *Jacob* (Université d'Utah) estime que cette formule peut être adoptée pour $u < 0{,}01$,

soit $\frac{Sx^2}{4\tau t} < 0{,}01$ ou $t > \frac{25\,Sx^2}{\tau}$

La formule simplifiée de Jacob ne peut donc être utilisée que pour des durées de pompage suffisamment longues et pour des piézomètres situés à proximité du puits (distance maximale de l'ordre de 50 m).

XIII.4.4. Utilisation pratique des formules du régime variable

Les formules de Theis et Jacob sont utilisées couramment pour l'étude des nappes souterraines, notamment pour la détermination de la *transmissivité* $\tau = KH$ et du *coefficient d'emmagasinement* S de l'aquifère.

Nous donnerons quelques exemples pratiques d'application de ces formules à l'étude des nappes à filets convergents, en renvoyant aux traités spécialisés d'hydrogéologie pour les détails complémentaires (voir bibliographie).

XIII.4.4.1. *Utilisation de la formule de Theis et de la courbe standard*

Lorsque la durée de pompage est trop courte ou que la distance x des piézomètres à l'axe du puits de pompage est relativement grande, la valeur de

$$u = \frac{Sx^2}{4\tau t}$$

est trop élevée pour pouvoir adopter la formule simplifiée de Jacob ; on doit alors utiliser la formule complète de Theis :

$$s = \frac{Q}{4\pi\tau}\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = \frac{Q}{4\pi\tau}W(u)$$

avec

$$u = \frac{Sx^2}{4\tau t}$$

Pour tirer parti de cette formule on utilise la *méthode graphique* suivante : On trace la courbe standard $W = f(u)$ en utilisant des graduations logarithmiques sur les deux axes. Cette courbe standard est représentée à grande échelle (module = 12,5 cm) sur les annexes 11 a et 11 b ; l'équation de la courbe standard est donc

$$\log W = f(\log u)$$

La formule de Theis s'écrit alors :

$$W = \frac{4\pi\tau s}{Q} \quad \text{ou} \quad \log W = \log\frac{4\pi\tau}{Q} + \log s$$

et

$$u = \frac{Sx^2}{4\tau t} \quad \text{ou} \quad \log u = \log\frac{S}{4\tau} + \log\frac{x^2}{t}$$

Au cours d'un essai de pompage à débit Q maintenu constant les quantités $\log 4\pi\tau/Q$ et $\log S/4\tau$ sont constantes car elles caractérisent le terrain supposé homogène et le pompage dont le débit Q est maintenu constant pendant toute la durée de l'essai.

L'ordonnée $y = \log W$ d'un point de la courbe standard est donc la somme algébrique de

$$y_0 = \log\frac{4\pi\tau}{Q} = C^{te}$$

et $Y = \log s$ qui varie d'un point à un autre suivant la position du piézomètre d'observation.

De même pour les abscisses de la courbe standard on peut écrire :

$$x = \log u = x_0 + X$$

avec

$$x_0 = \log\frac{S}{4\tau} = C^{te}$$

et

$$X = \log\frac{x^2}{t}$$

variable suivant la position du piézomètre.

Si par conséquent dans un système d'axes parallèles à ceux de la courbe standard mais dont l'origine Ω a pour coordonnées (x_0, y_0), on porte, pour tous les piézomètres d'observation, les points d'abscisse $X = \log x^2/t$ et d'ordonnée $Y = \log s$, tous ces points se placeront sur la courbe standard (fig. XIII.4.4.1).

Au cours de l'essai de pompage, dans plusieurs piézomètres distants de x du puits et à des époques différentes t mesurées depuis le début du pompage, on note le rabattement s. On peut ainsi construire sur calque à la même échelle que la courbe standard et pour tous les piézomètres les points d'abscisse $X = \log x^2/t$ et d'ordonnée $Y = \log s$. Si le terrain aquifère suit la loi de Theis les points obtenus doivent se placer sur une courbe identique à la courbe standard mais dont l'origine est le point Ω d'abscisse $x_0 = \log S/4\tau$ et d'ordonnée $y_0 = \log 4\pi\tau/Q$ (fig. XIII.4.4.1).

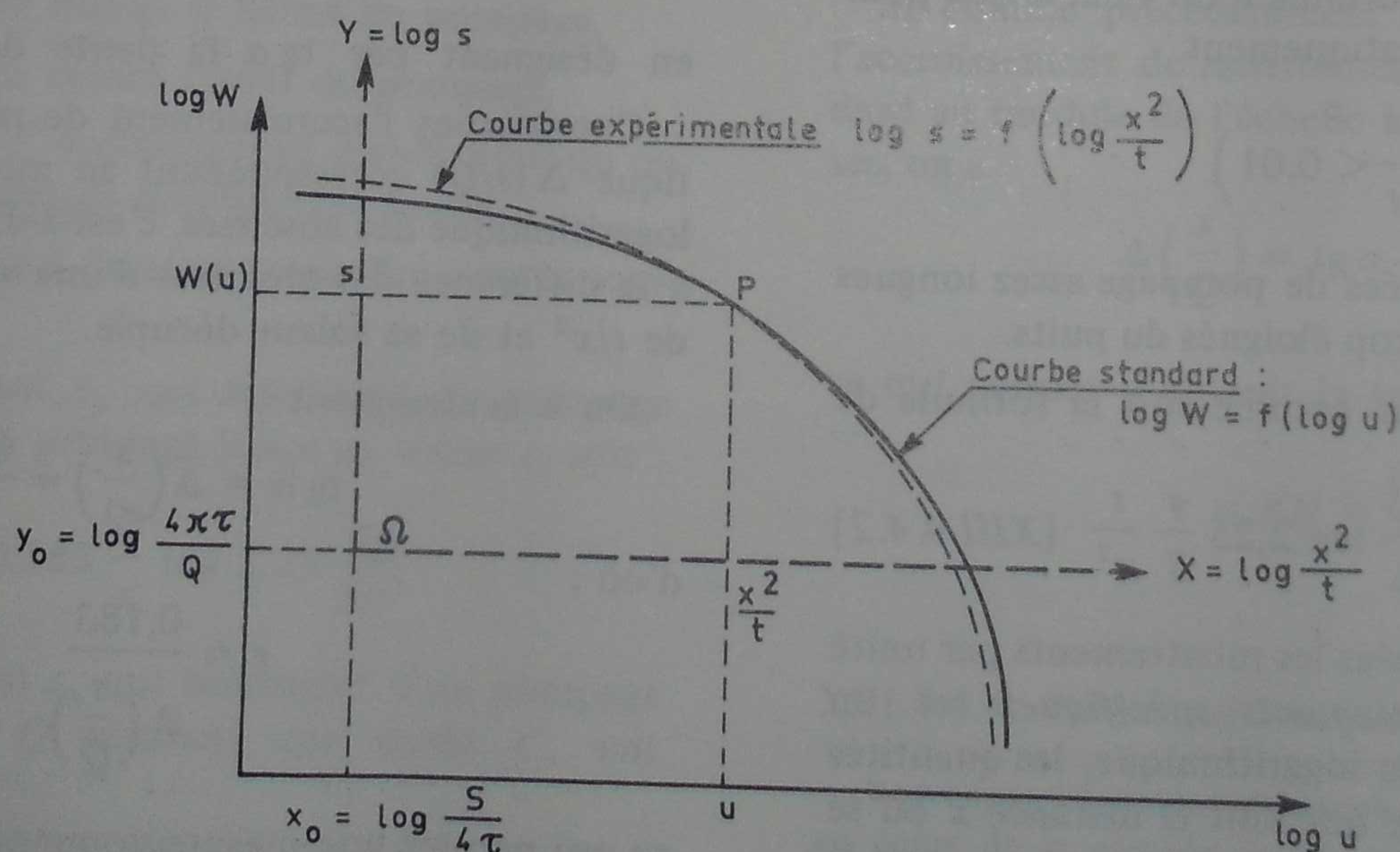


Fig. XIII.4.4.1 – Utilisation pratique de la courbe standard

On déplace donc le calque de la courbe expérimentale sur la courbe standard en conservant le parallélisme des axes jusqu'à réaliser la meilleure coïncidence des deux courbes ; on choisit un point P commun aux deux courbes superposées et tel que son abscisse corresponde à une durée de pompage t suffisamment élevée (par exemple supérieure à 12 heures).

On lit alors les coordonnées du point P (fig. XIII.4.4.1) :

— sur la courbe standard :

$$u \quad \text{et} \quad W(u)$$

— sur le calque (courbe expérimentale) :

$$\frac{x^2}{t} \quad \text{et} \quad s$$

Il suffit d'appliquer la formule de Theis :

$$s = \frac{Q}{4\pi\tau} W(u) \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{QW(u)}{4\pi s}$$

et

$$u = \frac{Sx^2}{4\tau t} \quad \text{d'où} \quad S = \frac{4\tau u}{\dfrac{x^2}{t}}$$

ce qui permet d'obtenir la transmissivité τ et le coefficient d'emmagasinement S de l'aquifère.

XIII.4.4.2. ***Utilisation de la formule simplifiée de Jacob au cours de la période de pompage***

Rappelons que cette formule n'est valable que pour u suffisamment petit (pratiquement

$$u = \frac{Sx^2}{4\tau t} < 0{,}01\Big) \ ,$$

ce qui nécessite des durées de pompage assez longues et des piézomètres pas trop éloignés du puits.

On peut alors utiliser comme suit la formule de Jacob :

$$\frac{s}{Q} = \frac{0{,}183}{\tau} \log 2{,}25 \frac{\tau}{S} \frac{t}{x^2} \quad [XIII.4.4.2]$$

Si on porte en ordonnées les rabattements par unité de débit s/Q ou *rabattements spécifiques* et en abscisses, sur une échelle logarithmique, les quantités t/x^2, on obtient, quelle que soit la distance x où se trouve le piézomètre d'observation et quel que soit le débit Q du pompage (sous réserve qu'il soit maintenu constant au cours de l'essai), une *droite unique* pour un puits et un terrain donnés (fig. XIII.4.4.2). En réalité les points expérimentaux se groupent autour d'une courbe ABC dont la branche AB concerne des durées de pompage trop faibles pour correspondre au domaine d'application de la formule de Jacob, mais à partir du point B la courbe est pratiquement confondue avec la droite théorique représentée par l'équation [*XIII.4.4.2*].

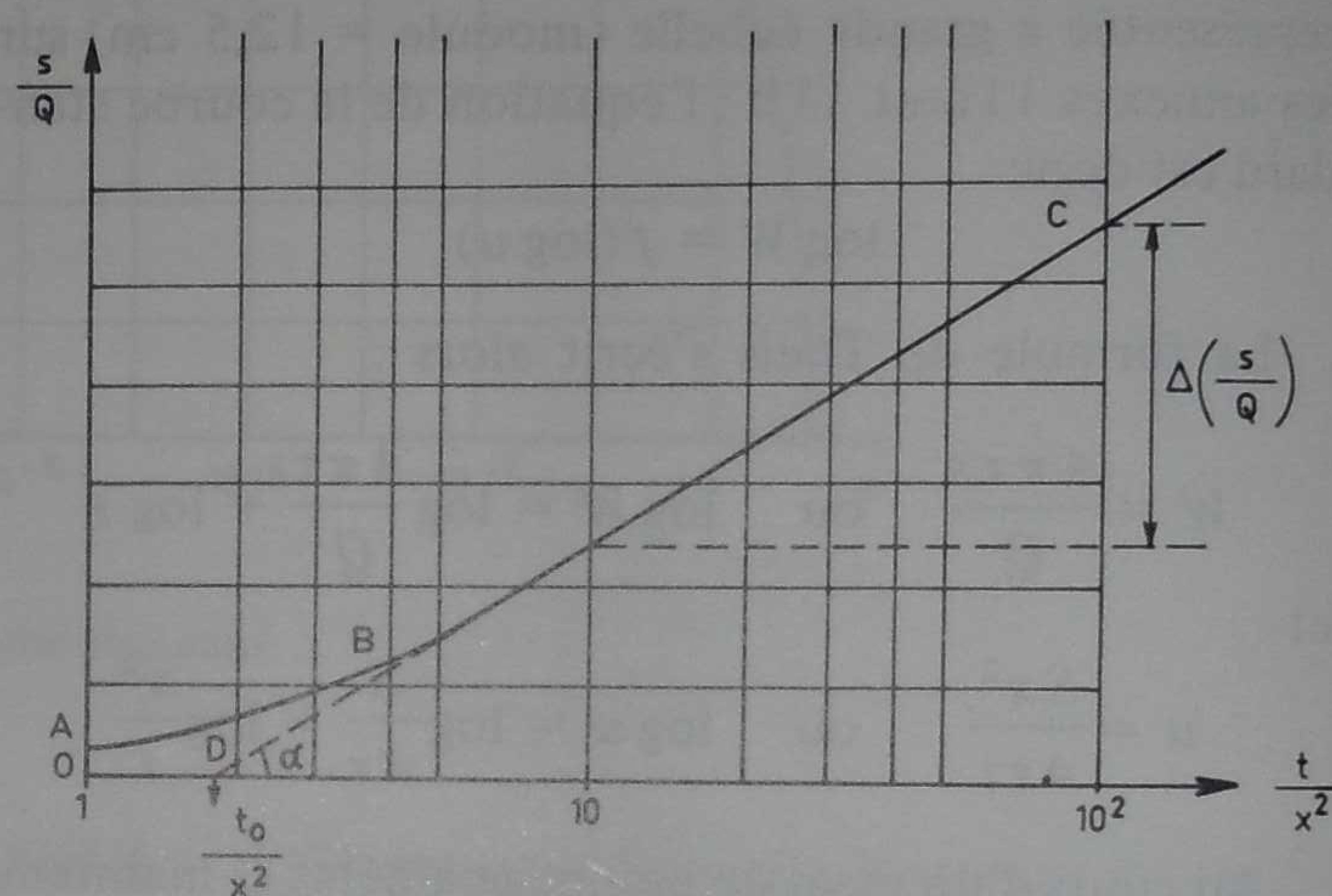


Fig. XIII.4.4.2 – Application de la formule de Jacob au cours de la période de pompage

Or cette équation permet d'écrire :

$$\frac{\partial\left(\dfrac{s}{Q}\right)}{\partial\left(\log \dfrac{t}{x^2}\right)} = \frac{0{,}183}{\tau} = \text{tg}\,\alpha$$

en désignant par $\text{tg}\,\alpha$ la pente de la droite BC.

Considérons l'accroissement de rabattement spécifique $\Delta(s/Q)$ correspondant au module de l'échelle logarithmique des abscisses, c'est-à-dire correspondant à la différence des abscisses d'une valeur quelconque de t/x^2 et de sa valeur décuple.

On a évidemment :

$$\text{tg}\,\alpha = \Delta\left(\frac{s}{Q}\right) = \frac{0{,}183}{\tau}$$

d'où :

$$\tau = \frac{0{,}183}{\Delta\left(\dfrac{s}{Q}\right)}$$

ce qui permet une mesure commode de la *transmissivité* $\tau = KH$ du terrain considéré.

Par ailleurs la droite BC (fig. XIII.4.4.2) coupe l'axe des abscisses au point D (abscisse t_0/x^2) défini par :

$$\frac{s}{Q} = \frac{0{,}183}{\tau} \log 2{,}25 \frac{\tau}{S} \frac{t_0}{x^2} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2{,}25\,\tau t_0}{S x^2} = 1$$

d'où, connaissant τ, on déduit le *coefficient d'emmagasinement* du terrain :

$$S = \frac{2{,}25\,\tau t_0}{x^2}$$

XIII.4.4.3. *Application de la formule simplifiée de Jacob à la remontée de la nappe après l'arrêt du pompage*

Le principe de *superposition* des écoulements souterrains défini précédemment permet l'analyse commode des phénomènes consécutifs à l'arrêt du pompage.

Le régime d'écoulement de la nappe pendant sa remontée peut, en effet, être considéré comme résultant de la superposition du *pompage* supposé prolongé au-delà de l'arrêt de la pompe et d'une *injection* dans le puits d'un débit Q, c'est-à-dire d'un pompage fictif de débit $-Q$.

Au cours de la phase de remontée de la nappe, considérons un instant défini par

t durée mesurée depuis le début du pompage,

t' durée mesurée depuis l'arrêt du pompage.

Supposons t et t' suffisamment grands pour qu'on puisse utiliser la formule simplifiée de Jacob.

Le rabattement s à l'instant considéré sera la somme

— du rabattement s_1 qui résulterait du pompage au débit Q supposé prolongé jusqu'au temps t, soit :

$$s_1 = 0{,}183 \frac{Q}{\tau} \log 2{,}25 \frac{\tau t}{S x^2}$$

— du rabattement s_2 qui résulterait d'un pompage fictif de débit $-Q$ pendant une durée t', soit

$$s_2 = -\,0{,}183 \frac{Q}{\tau} \log 2{,}25 \frac{\tau t'}{S x^2}$$

Le rabattement réel sera donc

$$s = s_1 + s_2$$

$$s = 0{,}183 \frac{Q}{\tau} \log \frac{t}{t'}$$

ou

$$\frac{s}{Q} = \frac{0{,}183}{\tau} \log \frac{t}{t'} \qquad [XIII.4.4.3]$$

Sous cette forme le phénomène est également susceptible d'une *interprétation par voie graphique* en portant en ordonnées les rabattements spécifiques s/Q et en abscisses les quantités $\log(t/t')$ (fig. XIII.4.4.3).

Le coefficient angulaire de la droite représentative de l'équation [*XIII.4.4.3*] est égal à $0{,}183/\tau$.

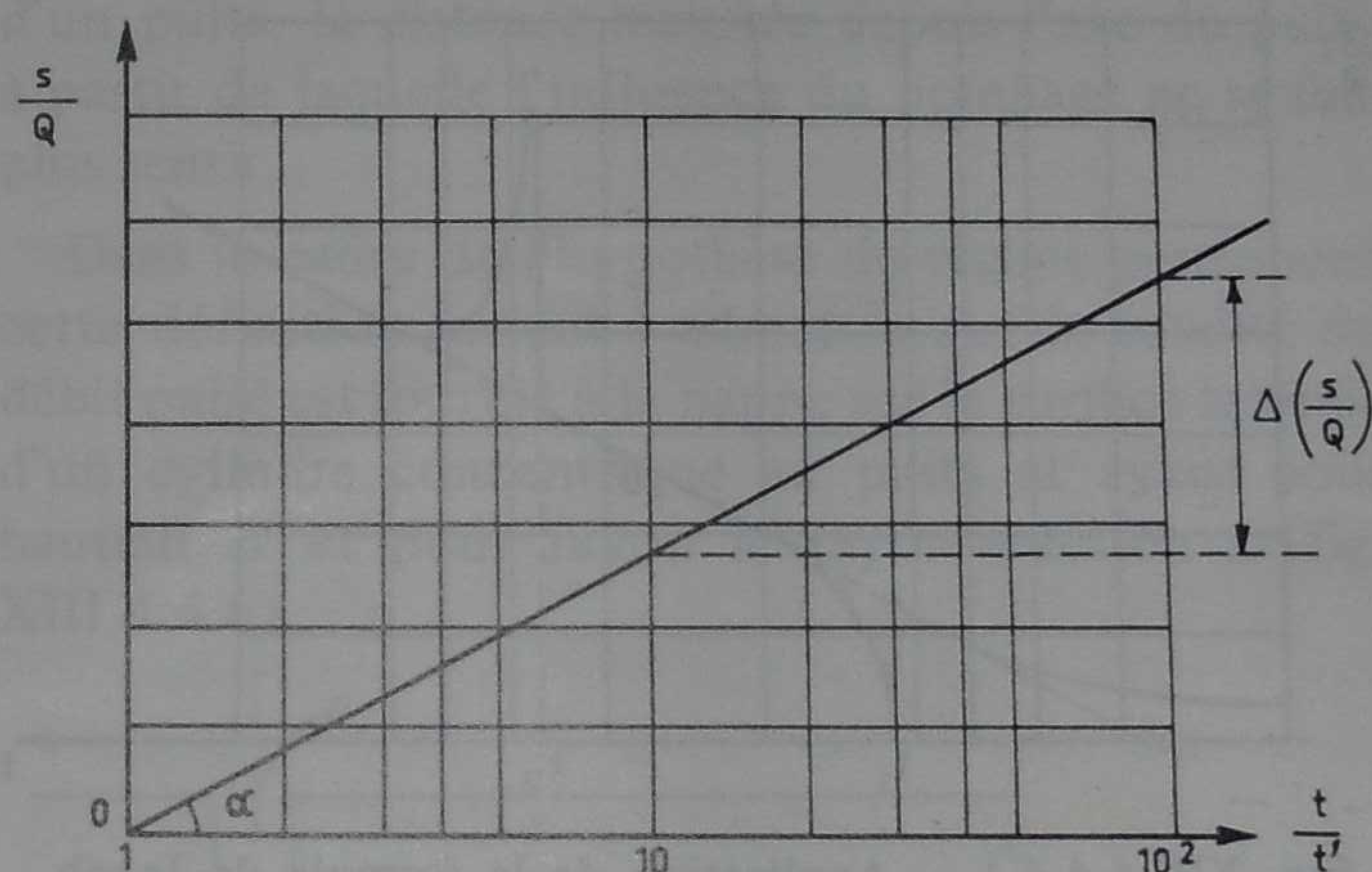


Fig. XIII.4.4.3 — Application de la formule de Jacob au cours de la remontée de la nappe après l'arrêt du pompage

Si comme précédemment on désigne par $\Delta(s/Q)$ l'accroissement de rabattement spécifique correspondant au module de l'échelle logarithmique des abscisses, on a :

$$\Delta\left(\frac{s}{Q}\right) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{0{,}183}{\tau}$$

ce qui permet d'obtenir la transmissivité :

$$\tau = KH = \frac{0{,}183}{\Delta\left(\frac{s}{Q}\right)}$$

XIII.4.4.4. *Variations brusques du débit de pompage*

Reprenons l'équation de Jacob qui définit le rabattement au cours de la période de pompage, à partir d'un temps t suffisamment prolongé depuis le début du pompage et pour des piézomètres suffisamment rapprochés du puits :

$$s = 0{,}183\,\frac{Q}{\tau}\log 2{,}25\,\frac{\tau t}{Sx^2} \qquad [XIII.4.3.2]$$

ou

$$\frac{s}{Q} = \frac{0{,}183}{\tau}\left(\log t + \log\frac{2{,}25\,\tau}{Sx^2}\right)$$

Dans le système de coordonnées semi-logarithmiques habituel (s/Q en ordonnées, $\log t$ en abscisses) cette équation représente une droite D (fig. XIII.4.4.4.1). Cette droite est unique pour un point donné de la nappe, quel que soit le débit constant Q du pompage. Si au cours du pompage le débit varie par paliers, comme il est indiqué sur la figure XIII.4.4.4.2 et si chaque palier de débit est maintenu suffisamment longtemps, la droite D constitue l'asymptote commune aux arcs de courbe correspondant à chacun des paliers (fig. XIII.4.4.4.1).

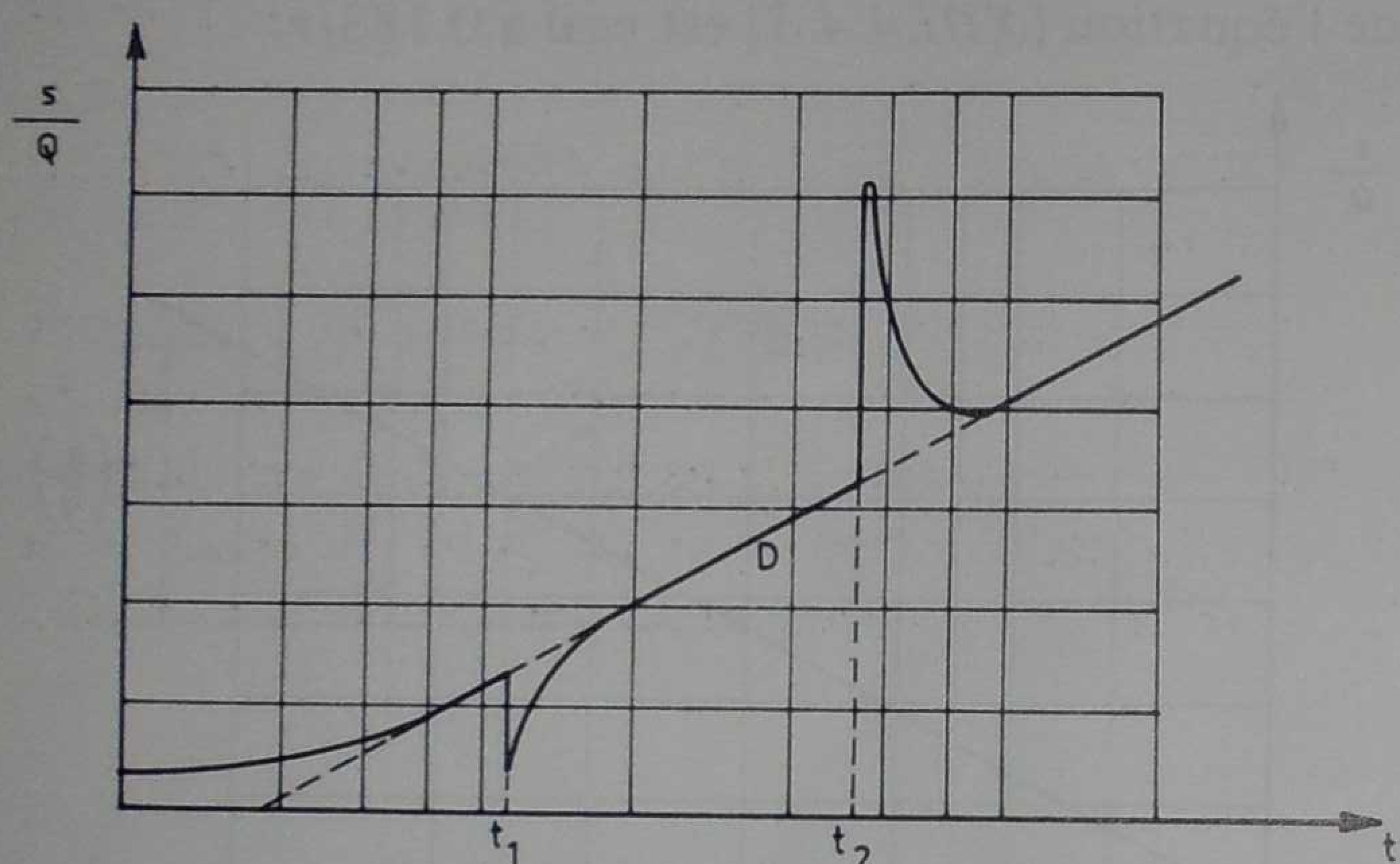


Fig. XIII.4.4.4.1 – Application de la formule de Jacob dans le cas de variations brusques du débit de pompage

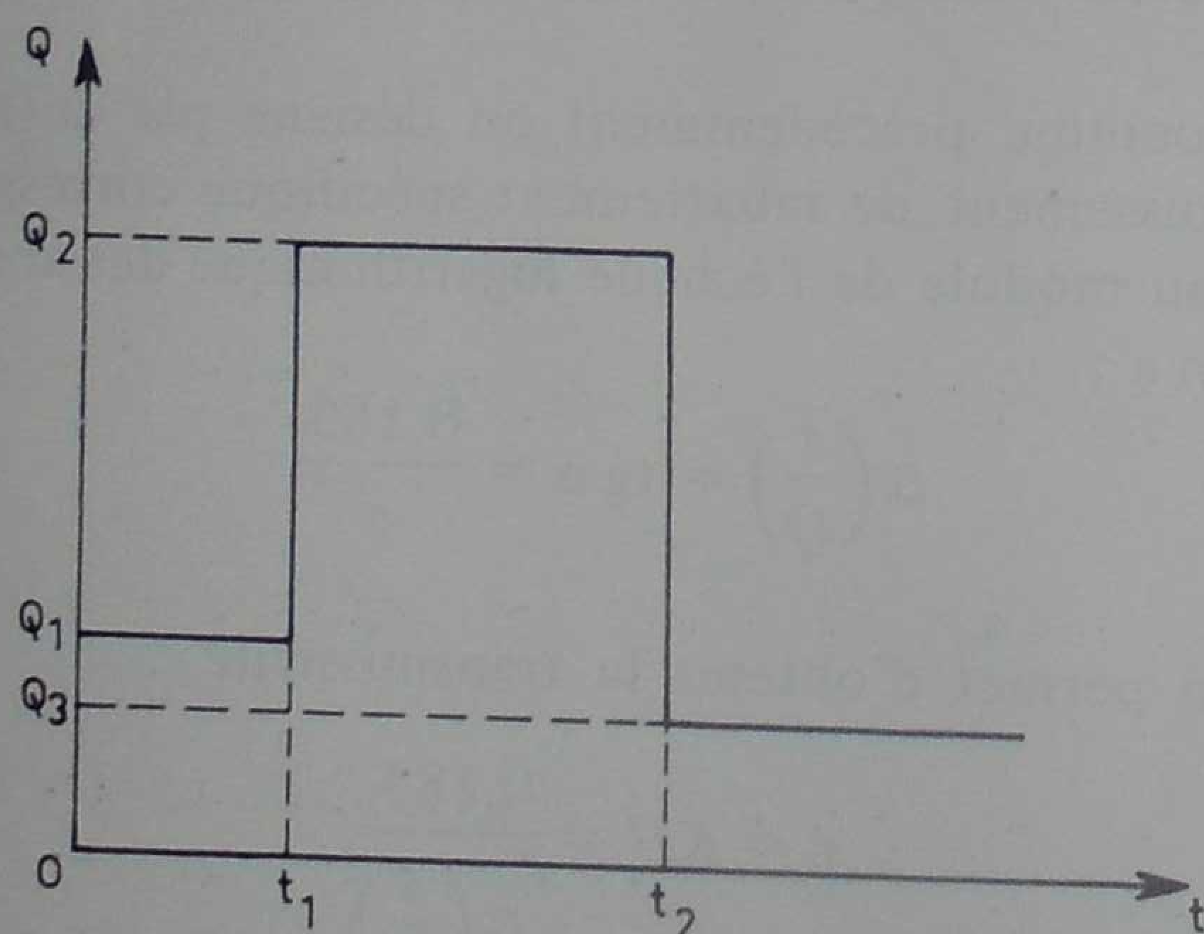


Fig. XIII.4.4.4.2

L'essai d'un puits à plusieurs débits présente sur l'essai à débit uniforme l'avantage de vérifier si l'ouvrage et le terrain obéissent bien à la loi de Darcy (proportionnalité des influences aux débits) et par conséquent de mettre en évidence certaines anomalies.

XIII.4.4.5. *Extension des méthodes de Theis et Jacob à plusieurs forages* (1)

Soient n forages notés $j = 1, 2, \ldots, n$,

Q_j le débit de pompage du forage j supposé maintenu constant,

r_j la distance du piézomètre d'observation au forage j.

En application du principe de superposition des écoulements souterrains le rabattement s observé au temps t dans le piézomètre est la somme des rabattements s_j que provoquerait chaque forage supposé agissant seul, soit

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n = \Sigma\, s_j$$

XIII.4.4.5.1. *Application de la formule de Theis*

Le forage j supposé agir seul provoquerait un rabattement

$$s_j = \frac{Q_j}{4\pi\tau}\,W(u_j) \quad \text{avec} \quad u_j = \frac{Sr_j^2}{4\tau t}$$

n forages agissant simultanément provoqueront donc un rabattement

$$s = \Sigma\, s_j = \frac{1}{4\pi\tau}\sum_1^n Q_j\,W(u_j) \qquad [XIII.4.4.5.1]$$

Mais u_j peut s'exprimer en fonction d'un seul u_j de la série, par exemple :

$$u_1 = \frac{Sr_1^2}{4\tau t} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{Sr_2^2}{4\tau t}$$

d'où

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{et} \quad u_2 = u_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

et, d'une manière générale :

$$u_j = u_1\left(\frac{r_j}{r_1}\right)^2$$

De façon analogue :

$$W(u_2) = W\left(u_1\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) \quad \text{et} \quad W(u_j) = W\left(u_1\frac{r_j^2}{r_1^2}\right)$$

Toutes les fonctions $W(u_j)$ pourront donc s'exprimer également en fonction d'une seule des grandeurs u_j, par exemple u_1. Il en sera de même de la somme

$$\Sigma\, Q_j\,W(u_j)$$

On peut donc poser

$$w(u_1) = \Sigma\, Q_j\,W(u_j) = \Sigma\, Q_j\,W\left(u_1\frac{r_j^2}{r_1^2}\right)$$

---

(1) L'exposé qui suit est extrait de l'article suivant : De Vulpillières (B.) – Formules de non-équilibre pour les essais de débit des nappes aquifères. *La technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 265, Janvier 1969.

En reportant dans [*XIII.4.4.5.1*], le rabattement s s'écrit :

$$s = \frac{1}{4\pi\tau} w(u_1) \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{Sr_1^2}{4\tau t}$$

On peut alors appliquer la méthode de Theis aux deux expressions précédentes en adoptant le processus suivant :

— On construit par points sur papier transparent bilogarithmique la courbe $w(u_1)$ en fonction de u_1. Le tracé de cette courbe est facilité par l'utilisation de la courbe standard $W(u)$.

— On construit par points sur papier bilogarithmique de même module la courbe $s = f(t)$

— On procède ensuite comme pour l'utilisation de la méthode de Theis en ajustant les deux courbes par superposition et en lisant sur les différents axes les coordonnées (s_0, t_0) et $(w_0, (u_1)_0)$ qui permettent de calculer τ et S.

Si on dispose de plusieurs piézomètres, la même méthode est applicable en prenant pour abscisse la quantité t/r_1^2 au lieu de t.

XIII.4.4.5.2. *Application de la formule de Jacob*

Le forage j supposé agir seul provoquerait un rabattement

$$s_j = \frac{0{,}183\, Q_j}{\tau} \log \frac{2{,}25\,\tau t}{Sr_j^2}$$

En application du principe de superposition, le rabattement observé résultant des pompages dans les n forages sera

$$s = \Sigma s_j = \frac{0{,}183}{\tau} \Sigma Q_j \log \frac{2{,}25\,\tau t}{Sr_j^2}$$

ou tous calculs faits :

$$s = \frac{0{,}183}{\tau} \left[\log \frac{2{,}25\,\tau t}{S} \Sigma Q_j - 2\, \Sigma Q_j \log r_j \right]$$

En posant

$$\Sigma Q_j = Q$$

et

$$\frac{\Sigma Q_j \log r_j}{\Sigma Q_j} = \log R$$

on obtient, après simplification :

$$s = \frac{0{,}183}{\tau} Q \log \frac{2{,}25\,\tau t}{SR^2}$$

Le rabattement observé sur le piézomètre est donc celui que provoquerait un forage unique dont le débit serait $Q = \Sigma Q_j$ et qui serait situé à la distance R du piézomètre. La méthode de Jacob peut donc s'appliquer à ce forage fictif sous les réserves habituelles ($SR^2/4\tau t < 0{,}01$).

Si au lieu d'un seul piézomètre on dispose de p piézomètres d'observation des n forages et si on désigne par r_i^j la distance du piézomètre d'indice i ($1 \leqslant i \leqslant p$) au forage d'indice j ($1 \leqslant j \leqslant n$), on considérera un forage fictif unique dont le débit serait $Q = \Sigma Q_j$ et qui serait situé à la distance R_i du piézomètre i, tel que

$$\log R_i = \sum_{j=1}^{j=n} Q_j \log r_i^j$$

Comme ce forage fictif ne peut être localisé que dans un espace à i dimensions, on prendra comme abscisses pour la représentation graphique de la droite de Jacob, la quantité t/R_i^2.

XIII.4.4.6. *Rayon d'action d'un puits dans le cadre du régime variable*

L'application de la théorie de Dupuit aux nappes à filets convergents conduit à définir le rayon d'action d'un puits, la distance mesurée depuis l'axe du puits à partir de laquelle l'influence du pompage ne se fait plus sentir.

Dans le cadre de l'hypothèse du régime permanent cette définition revient à admettre que la totalité du débit puisé est fournie à la nappe sur la surface latérale d'un cylindre concentrique au puits et ayant pour hauteur H et pour rayon le rayon d'action L (fig. XIII.4.4.6).

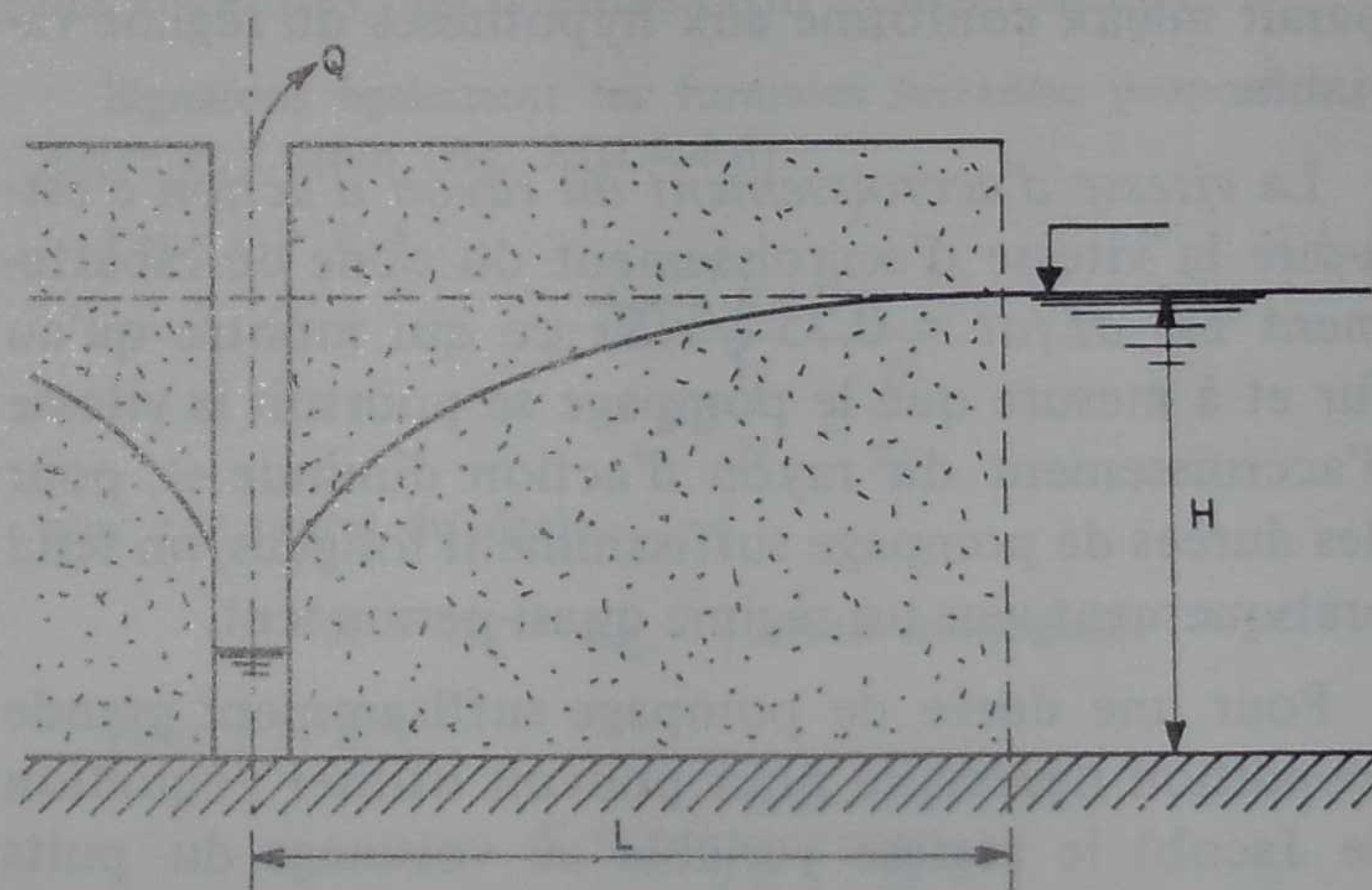


Fig. XIII.4.4.6 – Rayon d'action d'un puits en régime permanent

Il est bien évident que dans la réalité l'alimentation de la nappe n'est pas limitée à la surface latérale d'une section cylindrique de la nappe de rayon L mais que l'eau pompée provient de toute la surface de la nappe par évacuation de l'eau libre comprise entre deux cônes de dépression successifs.

Les équations du régime variable vont permettre de mieux préciser la conception qu'on doit alors se faire du rayon d'action du puits.

Reprenons l'équation de Jacob qui, rappelons-le, est valable pour t suffisamment grand :

$$s = 0{,}183 \frac{Q}{\tau} \log 2{,}25 \frac{\tau t}{Sx^2}$$

qu'on peut écrire :

$$s = 0{,}183 \frac{Q}{\tau} \log \frac{L^2}{x^2} \quad [XIII.4.4.6.1]$$

en posant

$$L^2 = 2{,}25 \frac{\tau t}{S} \quad \text{ou} \quad L = 1{,}5 \sqrt{\frac{\tau t}{S}} \quad [XIII.4.4.6.2]$$

L'équation [*XIII.4.4.6.1*] s'écrit alors :

$$s = 0{,}366 \frac{Q}{\tau} \log \frac{L}{x}$$

si $x = L$, $s = 0$, c'est-à-dire que le rabattement est nul à la distance L du puits ; la grandeur L définie par l'équation [*XIII.4.4.6.2*] correspond donc à la définition du *rayon d'action du puits*. On constate que cette grandeur dépend non seulement des caractéristiques géométriques et hydrauliques du terrain (K, H, h et S) mais également de la durée du pompage ce qui paraît mieux conforme aux hypothèses du régime variable.

La *vitesse d'accroissement du rayon d'action* c'est-à-dire la vitesse d'accroissement du cône de rabattement est $dL/dt = 0{,}75 \sqrt{\tau/St}$ ce qui montre qu'au fur et à mesure que le pompage se poursuit la vitesse d'accroissement du rayon d'action diminue et, pour des durées de pompage suffisamment longues, on tend pratiquement vers un régime quasi-permanent.

Pour une durée de pompage suffisamment grande (condition nécessaire pour pouvoir utiliser l'équation de Jacob) le régime variable au voisinage du puits peut être considéré comme la succession de régimes permanents fictifs, le rayon d'action croissant avec le temps conformément à la formule [*XIII.4.4.6.2*].

XIII.4.4.7. *Cas des nappes cylindriques*

L'application des études de Theis au régime variable d'une nappe cylindrique a été faite par le Professeur américain *Ferris* (1950) qui a établi l'équation suivante donnant l'expression du rabattement s à la distance x de la tranchée et à l'instant t mesuré depuis le début du pompage (fig. XIII.4.4.7) :

$$s = \frac{qx}{2\tau}\left[\frac{e}{u\sqrt{\pi}} - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-u^2}\,du\right]$$

avec

$$u = x\sqrt{\frac{S}{4\tau t}}$$

q = débit unitaire de pompage par mètre linéaire de tranchée,
τ = transmissivité ($= KH$),
S = porosité utilisable ou coefficient d'emmagasinement,
e = 2,718.

On peut poser pour simplifier :

$$D(u) = \frac{e}{u\sqrt{\pi}} - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-u^2}\,du$$

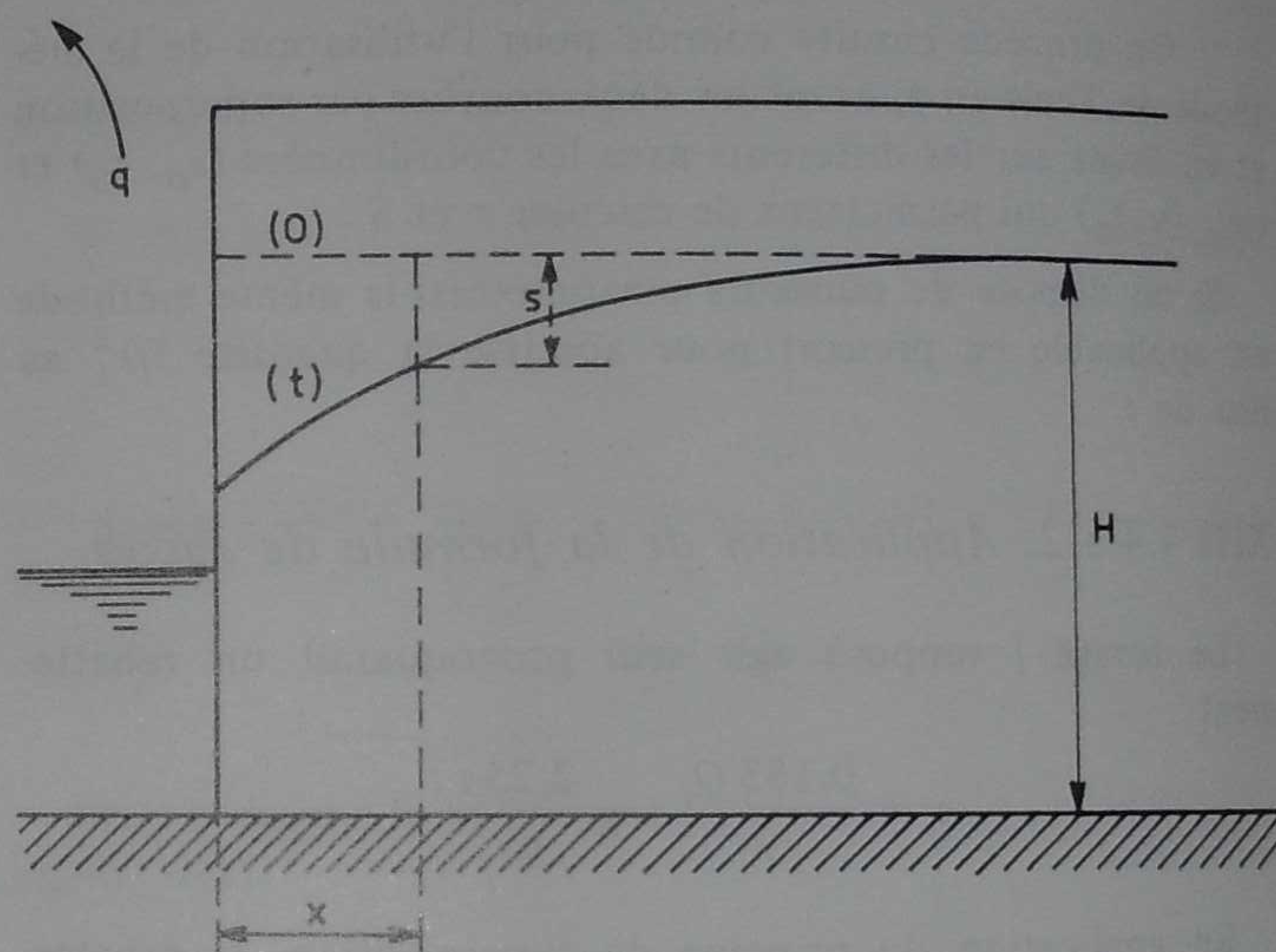


Fig. XIII.4.4.7 – Nappe cylindrique en régime variable

Les valeurs de la fonction $D(u)$ ont été tabulées[1]. On trouvera également les valeurs tabulées de la fonction dite "fonction de Kramp-Laplace" :

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-u^2}\,du$$

dans les tables numériques universelles[2].

La *formule de Ferris* s'écrit donc sous forme résumée :

$$s = \frac{qx}{2\tau} D(u)$$

ou :

$$s = \frac{qx}{2\tau}\left(\frac{e}{u\sqrt{\pi}} - 1 + \theta\right)$$

Rappelons que, comme la formule de Theis, elle est applicable dans le cadre des hypothèses suivantes :

— terrain homogène et isotrope,

— nappe indéfinie dans la direction x,

(1) Knowles (D.B.) – *Ground-water hydraulics* : a summary of lectures presented by J.G. Ferris. (U.S. Geological survey open-file report, 1955 – table 5, page 54).

(2) Boll (Marcel) – *Tables numériques universelles* – Dunod 1947 – tables nos 634 et 635.

– tranchée traversant toute la nappe,
– régime laminaire justiciable de la loi de Darcy,
– pompage à débit constant.

XIII.4.4.8. *Nappes de drainage en régime variable*

Divers auteurs ont appliqué la théorie de base de Boussinesq au problème de l'évolution en fonction du temps de la nappe cylindrique entre deux files parallèles de drains. Signalons, notamment, les études de MM. Hugues et Habib, Ferrari et Guyon dont on trouvera les références dans la bibliographie.

Les *études de M. Guyon* appuyées sur l'observation expérimentale (enregistrement continu des précipitations pluviométriques et des débits des collecteurs et relevés périodiques des cotes du toit de la nappe entre les files de drains) ont conduit aux résultats suivants :

– *Pour un substratum imperméable situé à une grande profondeur sous les files de drains*, la directrice de la nappe peut être assimilée à un arc de *parabole* ayant pour axe la médiatrice du segment F_1F_2 (fig. XIII.4.4.8).

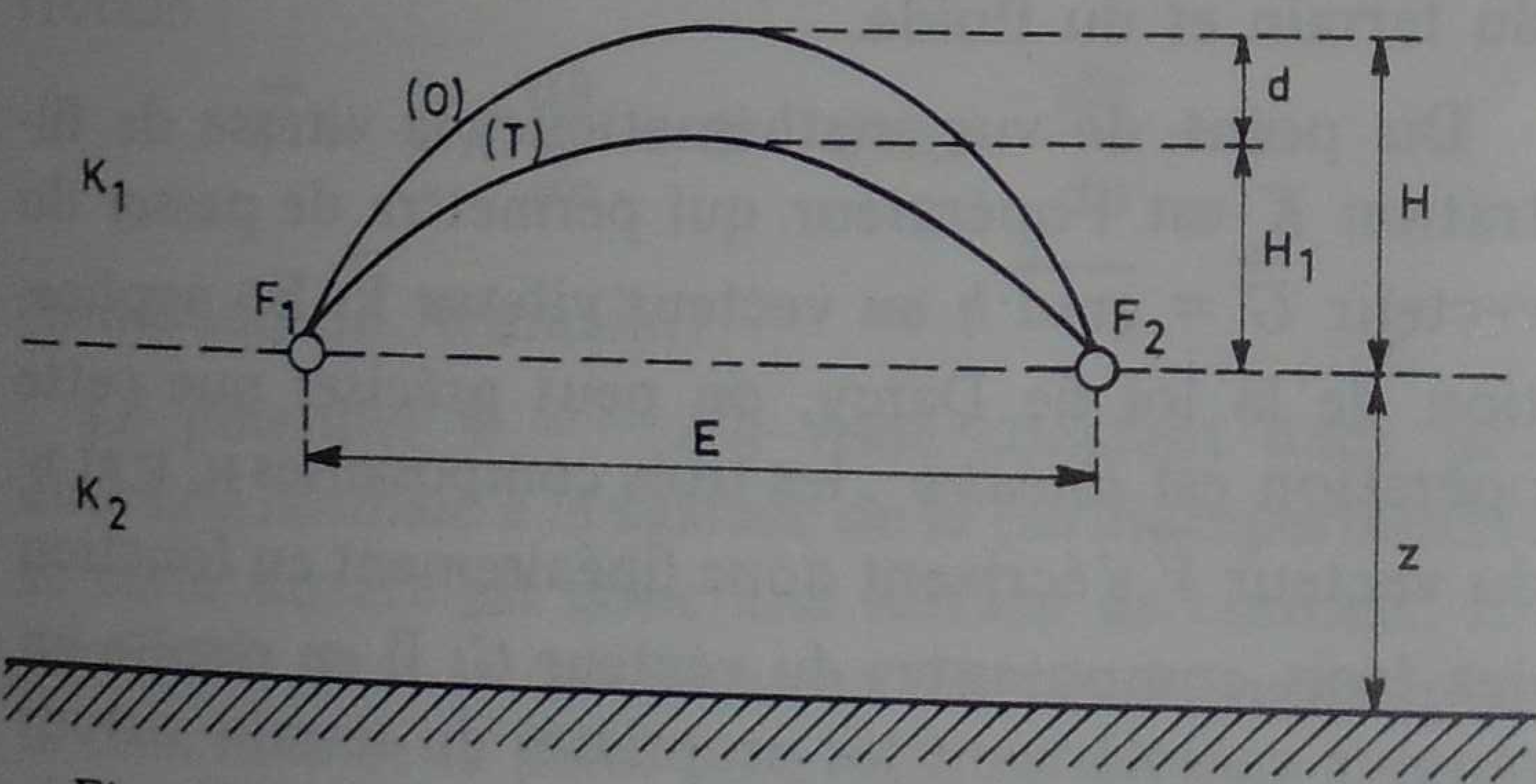


Fig. XIII.4.4.8 – Nappe de drainage en régime variable

Dans le cas général, c'est-à-dire quelle que soit la profondeur du substratum imperméable, on se donne la hauteur de rabattement $d = H - H_1$ qu'on désire réaliser en un temps T et on utilise la formule suivante :

$$T = \frac{0{,}26\,SE^2}{K_2\varphi} \log \frac{\left(1{,}8\varphi + H_1 \dfrac{K_1}{K_2}\right) H}{\left(1{,}8\varphi + H \dfrac{K_1}{K_2}\right) H_1}$$

avec

T = durée du rabattement (s) ;
S = coefficient d'emmagasinement ;
E = écartement des files de drains (m) ;
H = hauteur maximale de la nappe au-dessus des files de drains à l'instant initial ; on prendra souvent pour H la profondeur des drains (m) ;
$H_1 = H - d$, hauteur maximale de la nappe au-dessus des files de drains au bout du temps $T\,(m)$;
K_1 et K_2 = vitesses de filtration par unité de gradient hydraulique dans la direction horizontale perpendiculaire aux files de drains, respectivement au-dessus et au-dessous des files (m/s) ;
φ = épaisseur de la "couche équivalente" de Hooghoudt, fonction de E, de la distance z du substratum imperméable au plan des files de drains et du diamètre des drains (m).

– *Lorsque les drains reposent sur le substratum imperméable* la directrice de la nappe peut être assimilée à un arc d'ellipse ayant pour grand axe la droite F_1F_2. Dans l'hypothèse du régime variable la formule précédente se simplifie et devient :

$$E^2 = \frac{4{,}8\,KHH_1T}{S(H - H_1)}$$

M. Guyon a établi un abaque facilitant l'utilisation des formules précédentes (voir bibliographie).

Signalons également les formules suivantes proposées par *Amer et Luthin* (fig. XIII.4.4.8) :

Pour $z > E/4$:

$$E = \frac{K\pi T}{S\mathcal{L}\dfrac{H}{H_1}\,\mathcal{L}\dfrac{E}{\pi r}}$$

avec r = rayon du drain

$$K = K_1 = K_2 \quad \text{(terrain homogène)}$$

Pour $z = E/4$:

$$E = \frac{KT}{Sf\left(\dfrac{E}{2}\right)\mathcal{L}\dfrac{H}{H_1}}$$

avec

$$f\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\mathcal{L}\frac{E}{\pi r} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\cos\frac{2n\pi r}{E} - \cos n\pi\right)\left(\coth\frac{2n\pi z}{E} - 1\right)\right]$$

La fonction $f(E/2)$ est tabulée en fonction de $2r/E$ et z/E.

Pratiquement, l'hypothèse du régime variable peut être prise en considération dans les régions où les pluies sont suffisamment espacées (4 à 5 jours) pour permettre un rabattement de la nappe suffisamment important au bout de 2 à 3 jours et pour que, d'une manière générale, le rendement des cultures ne soit pas affecté par de brèves durées de submersion des

racines et que les façons culturales puissent être pratiquées en temps voulu. Dans ce cas l'écartement des files de drains sera calculé en considérant un régime variable se traduisant par un rabattement d'une profondeur donnée (par exemple 0,40 m) en un temps donné (par exemple 3 jours) compatible avec les exigences des cultures ; la comparaison des accroissements de rendements bruts et des charges d'investissement du réseau permet d'ailleurs de dégager la solution économiquement optimale.

XIII.5. APPLICATION AUX ÉCOULEMENTS SOUTERRAINS DE LA THÉORIE DES ÉCOULEMENTS À POTENTIEL DES VITESSES

XIII.5.1. Existence d'un potentiel des vitesses

Comme nous l'avons montré au § XIII.2.3.1, la *loi de Darcy* permet d'écrire, dans le sens de l'écoulement, la vitesse apparente de filtration sous la forme :

$$\vec{V} = -K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h$$

Slichter (1897) généralise cette équation dans un espace à trois dimensions en supposant le terrain homogène et isotrope, c'est-à-dire qu'en projection sur trois axes rectangulaires :

$$\vec{V}\begin{cases} u = -K\dfrac{dh}{dx} \\ v = -K\dfrac{dh}{dy} \\ w = -K\dfrac{dh}{dz} \end{cases}$$

avec $K = C^{te}$ (terrain homogène et isotrope) et

$$h = z + \frac{p}{\varpi}$$

En rapprochant de *l'équation de continuité* :

$$\text{div}\,\vec{V} = 0$$

on obtient

$$\text{div}\,\vec{V} = \text{div}\,(-K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h)$$

$$= -K\,\text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,h)$$

$$= -K\,\Delta h = 0$$

ou

$$\Delta h = 0$$

La fonction $h = z + p/\varpi$ est donc une fonction harmonique et Slichter montre ainsi que l'*équation de Laplace* $\Delta h = 0$ est l'équation fondamentale de l'hydraulique souterraine pour un fluide incompressible circulant dans un terrain homogène et isotrope.

Intervention de l'anisotropie du terrain

Dans le cas d'un terrain anisotrope, on peut continuer de définir en chaque point la *charge* $h = z + p/\varpi$. Du champ de cette charge h, résulte le champ du vecteur $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\,h$ normal en tout point aux surfaces équipotentielles du champ. L'écoulement est caractérisé en chaque point par le vecteur $\vec{V}$ *vitesse de filtration* mais le milieu étant anisotrope les deux vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{V}$ n'ont plus la même direction et la relation qui les lie dépend maintenant des propriétés du terrain et du fluide.

Du point de vue mathématique, la vitesse de filtration K est l'opérateur qui permettra de passer du vecteur $\vec{G} = \overrightarrow{\text{grad}}\,h$ au vecteur vitesse $\vec{V}$. En application de la loi de Darcy, on peut préciser que cette opération est *linéaire* ; les trois composantes u, v et w du vecteur $\vec{V}$ s'écrivent donc linéairement en fonction des trois composantes du vecteur $\vec{G}$. Il en résulte un tenseur caractérisant les propriétés du terrain autour du point considéré et définissant complètement la transformation géométrique, linéaire et univoque, qui permet de passer de $\vec{G}$ à $\vec{V}$.

Au lieu des trois équations linéaires faisant intervenir les neuf "paramètres de perméabilité", on écrira plus simplement l'équation unique :

$$\vec{V} = -\overline{\overline{K}}\,\vec{G}$$

où $\overline{\overline{K}}$ est le *tenseur de perméabilité* (généralement symétrique) défini par ses neuf composantes.

La théorie des écoulements de filtration en milieu anisotrope se rattache ainsi à l'algèbre et la mécanique linéaires et à l'élasticité et pourra utiliser les possibilités de calcul de l'analyse tensorielle.

Conformément à l'hypothèse généralement admise, nous supposerons, dans tout ce qui suivra, le terrain homogène et isotrope, sauf les exceptions particulières que nous préciserons.

XIII.5.2. Conditions aux limites de l'écoulement

Nous savons qu'un écoulement à potentiel des vitesses ne peut être calculé que si les conditions aux limites sont connues. Du point de vue mathématique les conditions aux limites des écoulements souterrains appartiennent à l'une des deux catégories suivantes :

– *Condition de Dirichlet* : on connaît le potentiel Φ sur une des limites du domaine,

– *Condition de Neumann* : on connaît le gradient de potentiel $d\Phi/dn$ dans une direction donnée $\vec{n}$ sur une des limites du domaine.

Voici les principales conditions aux limites susceptibles d'intervenir dans les divers cas pratiques de l'hydraulique souterraine :

XIII.5.2.1. ***Au contact d'une paroi imperméable*** limitant l'écoulement, si on désigne par dn un déplacement normal à la paroi on doit avoir dans cette direction :

$$\vec{V} = -K\frac{dh}{dn} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{dn} = 0$$

(condition de Neumann)

Le potentiel $\Phi = -Kh$ reste constant dans une direction normale à la surface de la paroi imperméable et cette surface est donc une surface de courant. En particulier dans le cas fréquent d'un écoulement plan la directrice de la paroi imperméable est une ligne de courant $\psi = C^{te}$.

XIII.5.2.2. ***Au contact d'une masse d'eau présentant une surface libre*** (par exemple le fond perméable d'une rivière ou la paroi amont d'une digue en terre) (fig. XIII.5.2.2).

En tout point du fond on a :

$$z + \frac{p}{\omega} = C^{te} = h$$

Si dl représente un déplacement élémentaire le long du fond, on a donc :

$$\frac{dh}{dl} = 0$$

ou

$$\frac{d\Phi}{dl} = 0$$

$\Phi = C^{te}$ (Condition de Dirichlet)

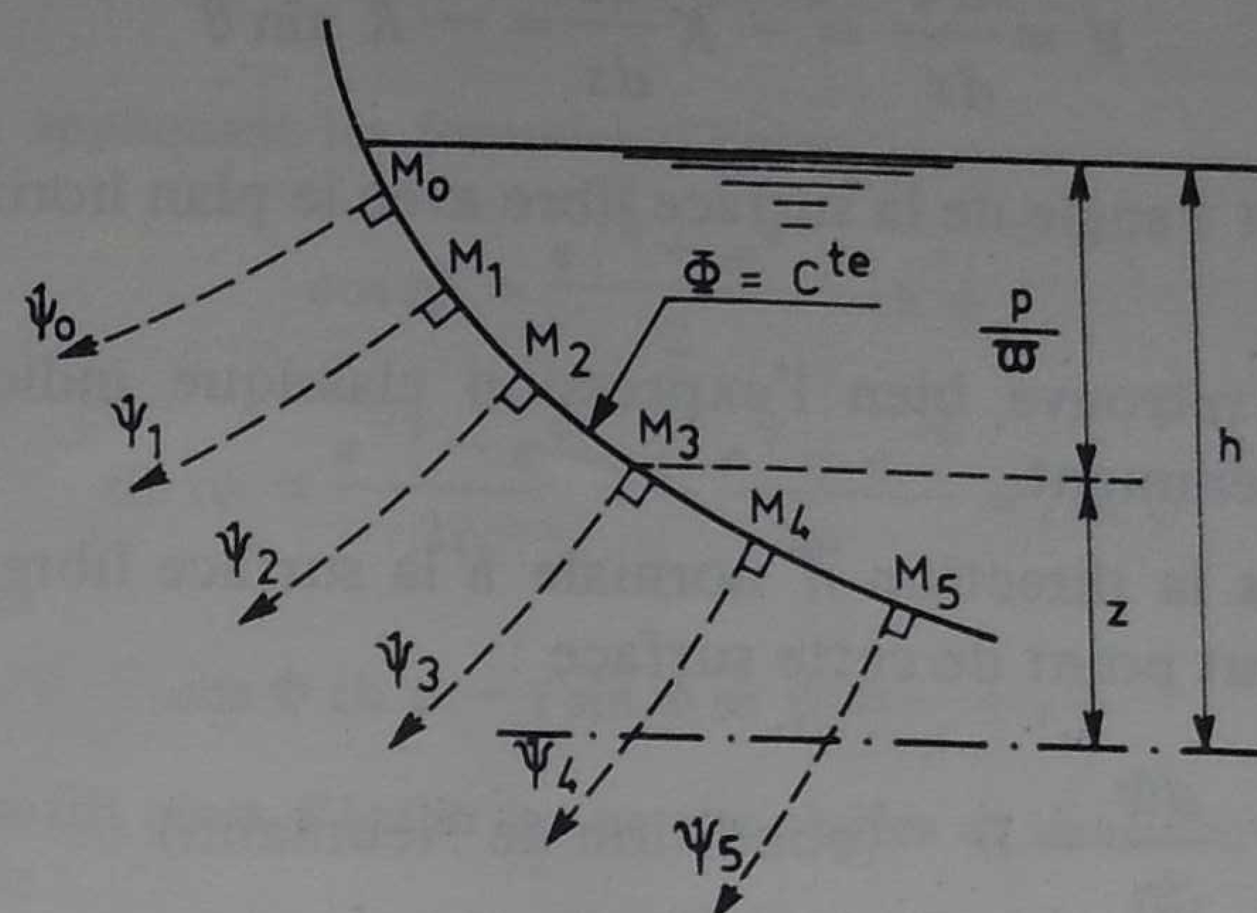


Fig. XIII.5.2.2 – Conditions aux limites au contact d'une masse d'eau présentant une surface libre

La surface de la paroi limitant le massif pulvérulent perméable au contact de la masse d'eau libre est donc une surface équipotentielle et les lignes de courant à l'intérieur du massif sont perpendiculaires sur cette surface.

XIII.5.2.3. ***Au contact de la surface d'une nappe libre*** (fig. XIII.5.2.3) la pression est constante et égale à la pression atmosphérique p_a et en tout point de la surface libre de cote z le potentiel a pour valeur :

$$\Phi = -K\left(z + \frac{p_a}{\omega}\right)$$

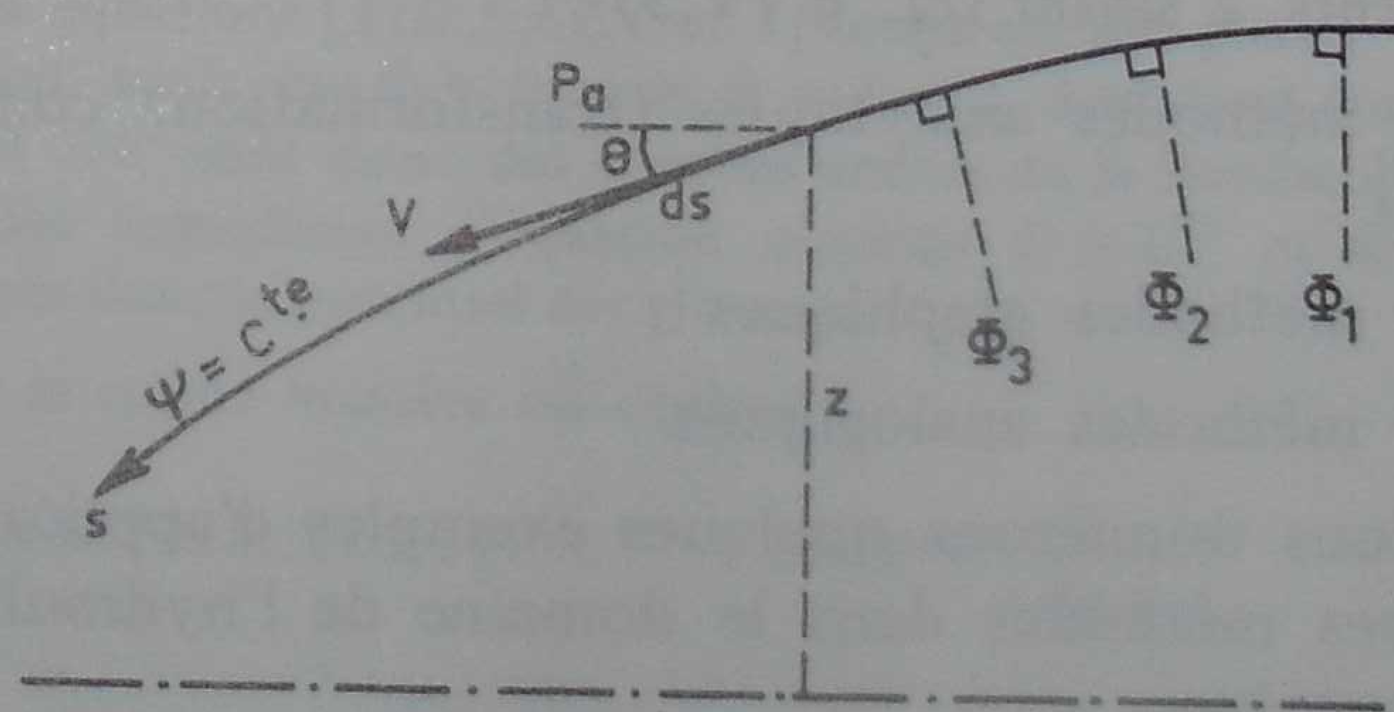


Fig. XIII.5.2.3 – Conditions aux limites au contact de la surface d'une nappe libre

Si on admet comme on le fait couramment qu'il n'y a pas d'échange d'eau notable entre la nappe souterraine et sa frange capillaire, la surface libre de la nappe est une surface de courant (ligne de

courant dans un écoulement à deux dimensions) et le vecteur vitesse est tangent à la surface au point considéré et a pour expression :

$$V = \frac{d\Phi}{ds} = -K\frac{dz}{ds} = -K \sin\theta$$

θ étant l'angle de la surface libre avec le plan horizontal.

On retrouve bien l'expression classique indiquée précédemment.

Dans la direction $\vec{n}$ normale à la surface libre, on a en tout point de cette surface :

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0 \quad \text{(condition de Neumann)}$$

$$\Phi = C^{te}$$

Dans un écoulement plan, la surface libre est donc une ligne de courant ($\psi = C^{te}$) et les équipotentielles à l'intérieur du massif sont perpendiculaires sur cette surface libre (fig. XIII.5.2.3).

XIII.5.2.4. *Surface de suintement*

C'est le cas, par exemple, de la base du parement aval d'une digue en terre où se produirait un suintement à l'air libre tout le long de la surface de trace AB (fig. XIII.5.2.4).

En tout point de cette surface le liquide qui suinte est à la pression atmosphérique et le potentiel a pour valeur :

$$\Phi = -K\left(z + \frac{p_a}{\omega}\right) = -Kz + C^{te}$$

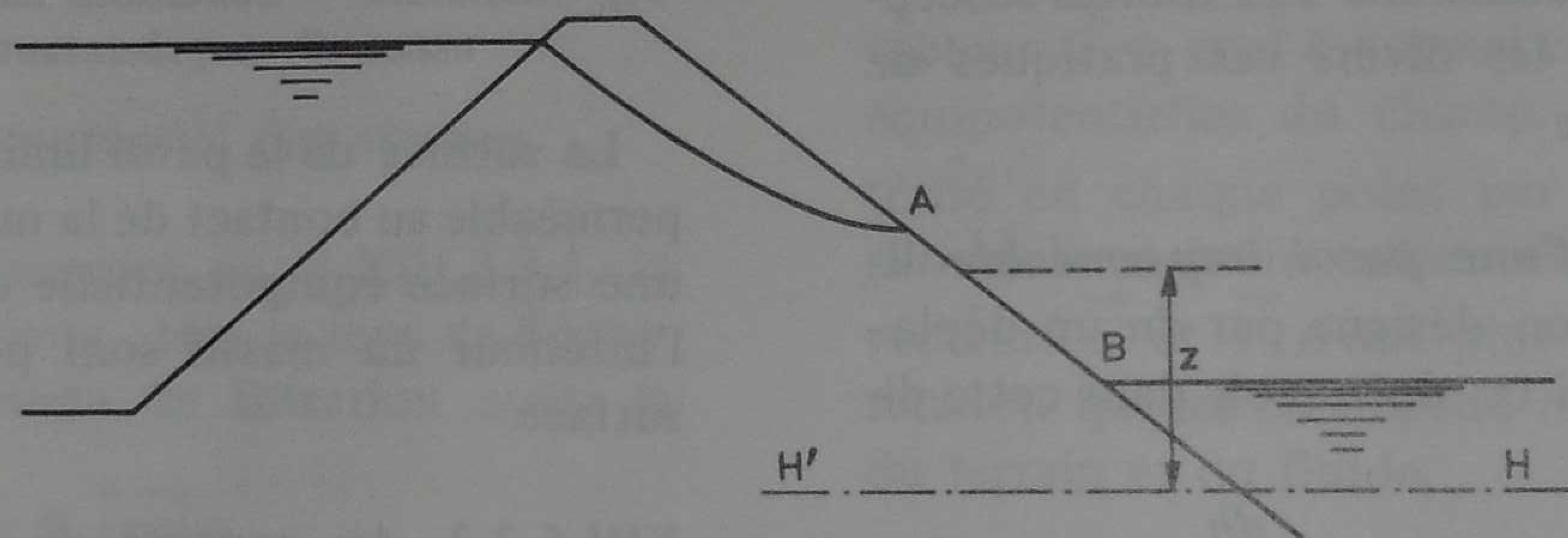


Fig. XIII.5.2.4 – Surface de suintement

c'est-à-dire que Φ est proportionnel à la cote z du point considéré (condition de Dirichlet).

Les écoulements souterrains considérés comme des écoulements à potentiel des vitesses sont donc justiciables des méthodes classiques d'étude de ces écoulements, à savoir (cf. § IV.5) :

— méthodes analytiques (transformations conformes) :

— méthodes graphiques ;

— méthodes analogiques.

Nous donnerons quelques exemples d'application de ces méthodes dans le domaine de l'hydraulique souterraine.

XIII.5.3. Méthodes analytiques : application à l'écoulement autour d'une file de palplanches – le phénomène de renard

Comme nous l'avons déjà souligné, les méthodes analytiques d'étude des écoulements à potentiel ne peuvent être utilisées que dans certains cas assez simples, sous peine de conduire à des calculs très compliqués ou impossibles.

Nous traiterons à titre d'exemple l'application de la méthode des transformations conformes à l'écoulement autour d'une file de palplanches (fig. XIII.5.3.1).

XIII.5.3.1. *Définitions*

Supposons qu'une paroi de palplanches imperméables soit enfoncée verticalement jusqu'à une profondeur t (longueur de fiche) dans une couche de sol perméable et homogène caractérisé par une vitesse de filtration K.

Cette couche est limitée à sa partie supérieure par un plan horizontal $H'H$ et elle est supposée d'épaisseur infiniment grande, c'est-à-dire que la couche imperméable sur laquelle elle repose est supposée à une très grande profondeur.

Entre les deux portions du massif perméable séparées par la ligne de palplanches agit une charge

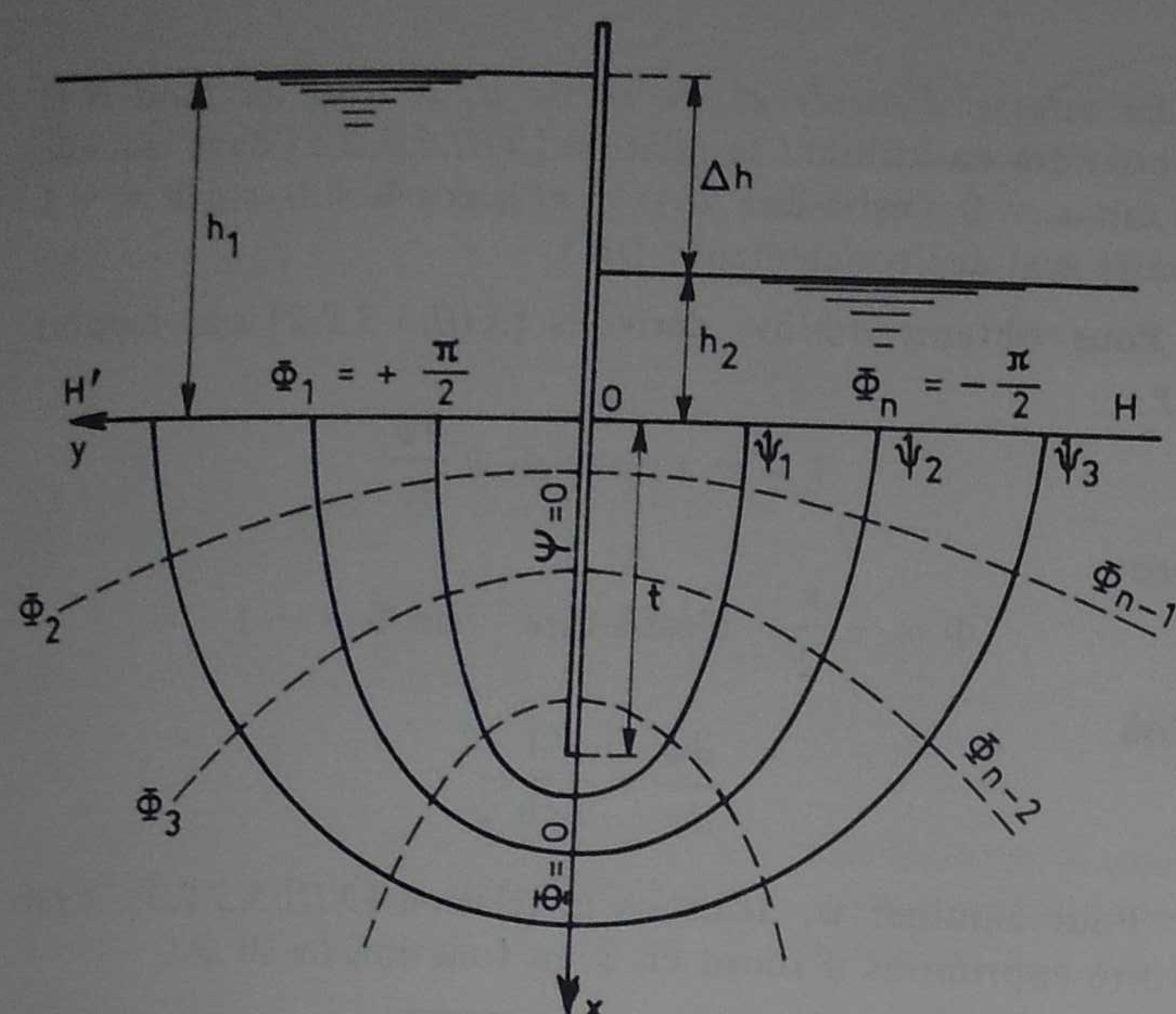


Fig. XIII.5.3.1 – Ecoulement autour d'une file de palplanches

$\Delta h = h_1 - h_2$ résultant de la différence des profondeurs d'eau dans le bief amont (h_1) et dans le bief aval (h_2).

Sous l'influence de cette charge Δh, il va s'établir un écoulement à travers le massif perméable. La ligne de palplanches étant supposée très longue, l'écoulement est le même dans toutes les sections normales à la ligne de palplanches ; il s'agit donc d'un écoulement plan qu'il suffira d'étudier dans une des sections précitées que nous choisirons comme plan de figure.

Les *conditions aux limites* sont les suivantes :

a) les demi-droites OH' et OH constituent les limites entre le massif et une masse d'eau libre, ce sont donc des équipotentielles.

b) les faces amont et aval des palplanches constituent les limites entre le massif et une paroi imperméable ; ce sont donc des lignes de courant. Il en est de même de la surface supérieure de la couche imperméable supposée à une profondeur infiniment grande.

XIII.5.3.2. *Application de la méthode des transformations conformes*

Une image d'écoulement qui remplit exactement ces conditions aux limites est obtenue par la transformation conforme à l'aide de la fonction :

$$f(z) = \Phi + i\psi = \text{arc cos}\,\frac{z}{t}$$

$f(z)$ représente donc le *potentiel complexe* et

$z = x + iy$ représente la *variable complexe*, les axes xOy étant définis sur la figure XIII.5.3.1.

On obtient donc :

$$\cos(\Phi + i\psi) = \frac{z}{t} = \frac{x}{t} + i\,\frac{y}{t}$$

ou

$$\cos\Phi\cos i\psi - \sin\Phi\sin i\psi = \frac{x}{t} + i\,\frac{y}{t}$$

En appliquant les formules d'Euler :

$$\cos i\psi = \frac{e^{-\psi} + e^{\psi}}{2} = \text{ch}\,\psi$$

$$\sin i\psi = \frac{e^{-\psi} - e^{\psi}}{2i} = -\frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2i} = i\,\text{sh}\,\psi$$

il vient :

$$\cos\Phi\,\text{ch}\,\psi - i\sin\Phi\,\text{sh}\,\psi = \frac{x}{t} + i\,\frac{y}{t}$$

Il suffit alors d'égaler les parties réelles et imaginaires pour obtenir :

$$x = t\cos\Phi\,\text{ch}\,\psi \qquad [XIII.5.3.2.1]$$

$$y = -\,t\sin\Phi\,\text{sh}\,\psi \qquad [XIII.5.3.2.2]$$

De la première de ces deux équations on tire :

$$\text{ch}\,\psi = \frac{x}{t\cos\Phi}$$

et de la seconde :

$$\text{sh}\,\psi = -\frac{y}{t\sin\Phi}$$

En portant ces deux valeurs dans la relation classique :

$$\text{ch}^2\psi - \text{sh}^2\psi = 1$$

il vient :

$$\frac{x^2}{t^2\cos^2\Phi} - \frac{y^2}{t^2\sin^2\Phi} = 1 \qquad [XIII.5.3.2.3]$$

Pour $\Phi = C^{te}$ cette équation représente, dans le plan xOy, une famille d'*hyperboles homofocales* de distance focale $2t$, le paramètre variable étant Φ. Ces hyperboles constituent donc les lignes *équipotentielles* de l'écoulement.

Les équations [*XIII.5.3.2.1* et *3*] montrent que pour $x = 0$ on doit avoir $\cos\Phi = 0$, soit $\Phi = \pm\,\pi/2$. Les demi-droites OH et OH' sont donc des courbes limites de la famille d'hyperboles considérées d'équation générale $\Phi = C^{te}$ et Φ représente donc le potentiel des vitesses.

De la même manière on obtient :

à partir de [*XIII.5.3.2.1*] : $\cos\Phi = \dfrac{x}{t\,\text{ch}\,\psi}$

à partir de [*XIII.5.3.2.2*] : $\sin\Phi = -\dfrac{y}{t\,\text{sh}\,\psi}$

et en portant ces deux valeurs dans la relation classique :

$$\cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1$$

il vient :

$$\frac{x^2}{t^2\text{ch}^2\psi} + \frac{y^2}{t^2\text{sh}^2\psi} = 1 \qquad [XIII.5.3.2.4]$$

Pour $\psi = C^{te}$ cette équation représente, dans le plan xOy, une famille d'*ellipses homofocales* possédant les mêmes foyers que les hyperboles de l'équation [*XIII.5.3.2.3*].

Ces ellipses, normales en chacun de leur point à l'hyperbole qui y passe, représentent donc les *lignes de courant* de l'écoulement.

Les équations [*XIII.5.3.2.2* et *4*] montrent que pour $y = 0$ et $|x| < t$ on a $\psi = 0$ (condition limite sur la file de palplanches).

Pour passer à l'*expression de la vitesse et du débit* nous désignerons par :

$\overline{V}$ (composantes $\overline{u}$ et $\overline{v}$) la vitesse dans le mouvement à potentiel,

V (composantes u et v) la vitesse apparente de filtration dans le sol.

Dans le mouvement à potentiel, la fonction Φ passe de $\Phi_1 = + \pi/2$ à l'origine amont du massif (demi-droite OH') à $\Phi_n = - \pi/2$ à l'extrémité aval (demi-droite OH).

La différence de potentiel à la traversée du massif a donc pour valeur $\Phi_1 - \Phi_n = \pi$.

Dans le sol, la différence de potentiel à la traversée du massif est égale à la différence des niveaux piézométriques multipliée par K soit $K \Delta h$.

Dans chacun des deux mouvements la vitesse entre deux points est proportionnelle à la différence de potentiel entre ces deux points, soit :

$$\frac{V}{K\Delta h} = \frac{\overline{V}}{\pi}$$

$$V = \overline{V}\,\frac{K\Delta h}{\pi}$$

Les composantes de $\overline{V}$ sont :

$$\overline{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\overline{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Les composantes de la vitesse de filtration V seront donc :

$$u = \frac{K\Delta h}{\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{K\Delta h}{\pi}\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad [XIII.5.3.2.5]$$

$$v = \frac{K\Delta h}{\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{K\Delta h}{\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad [XIII.5.3.2.6]$$

Il est intéressant dans la pratique de pouvoir calculer la *valeur maximale de la vitesse d'infiltration*, afin d'éviter l'entraînement des particules du massif pulvérulent (risque de renard).

Or, on démontre que dans un écoulement à potentiel des vitesses les valeurs maximales de la vitesse ne peuvent jamais se produire à l'intérieur mais au bord du domaine.

La vitesse d'entrée et de sortie u_1 le long du fond $H'H$ s'obtiendra en utilisant la relation [*XIII.5.3.2.5*] dans laquelle on fait $x = 0$ c'est-à-dire $\Phi = -\pi/2$, $\cos\Phi = 0$, $\sin\Phi = -1$ (limite aval de l'écoulement : OH).

Pour obtenir $\partial\psi/\partial y$, dérivons [*XIII.5.3.2.2*] par rapport à y :

$$1 = -t \sin\Phi \,\mathrm{ch}\,\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

avec

$$\Phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sin\Phi = -1$$

d'où

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{t\,\mathrm{ch}\,\psi}$$

Pour éliminer ψ, utilisons la relation [*XIII.5.3.2.2*], c'est-à-dire exprimons d'abord ch ψ en fonction de sh ψ :

$$\mathrm{ch}\,\psi = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\psi}$$

sh ψ sera donné par la relation [*XIII.5.3.2.2*] dans laquelle $\sin\Phi = -1$, soit sh $\psi = y/t$ donc :

$$\mathrm{ch}\,\psi = \sqrt{1 + \frac{y^2}{t^2}}$$

et, en définitive :

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{t\sqrt{1 + \frac{y^2}{t^2}}}$$

En portant dans l'expression de u (équation [*XIII.5.3.2.5*]), il vient :

$$u_1 = \frac{K\Delta h}{\pi t\sqrt{1 + \frac{y^2}{t^2}}}$$

La valeur maximale de u_1 sera obtenue pour $y = 0$ c'est-à-dire au voisinage immédiat de la paroi de palplanches, soit :

$$u_{1\max} = \frac{K\Delta h}{\pi t}$$

et par conséquent :

$$J_{\max} = \frac{u_{1\max}}{K} = \frac{\Delta h}{\pi t}$$

Le long de la paroi de palplanches la vitesse u_2 s'obtiendra en utilisant la relation $u = \partial\Phi/\partial x$ avec $y = 0$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{sh}\,\psi = 0 \quad ; \quad \psi = 0 \quad ; \quad \mathrm{ch}\,\psi = 1$$

Pour obtenir $\partial\Phi/\partial x$, dérivons par rapport à x l'équation [*XIII.5.3.2.1*] où ch $\psi = 1$; il vient :

$$1 = -t\sin\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{t\sin\Phi} = -\frac{1}{t\sqrt{1 - \cos^2\Phi}}$$

Pour éliminer Φ, utilisons l'équation [*XIII.5.3.2.1*] où ch $\psi = 1$; on obtient donc :

$$\cos \Phi = \frac{x}{t}$$

Donc :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{1}{t\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}}$$

et, au signe près :

$$u_2 = \frac{K\Delta h}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{K\Delta h}{\pi t\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}}$$

Pour $x = t$, c'est-à-dire à l'extrémité inférieure de la paroi de palplanches, u_2 serait infiniment grand ; en fait ce maximum prendra des valeurs finies en raison de l'influence des forces d'inertie que nous avons négligées dans cette démonstration ; par ailleurs la paroi a une épaisseur finie alors que nous l'avons assimilée à un plan idéal sans épaisseur ($y = 0$).

Pour $x = 0$ on retrouve la valeur de u_{1m}, soit :

$$u_{1m} = \frac{K\Delta h}{\pi t}$$

XIII.5.3.3. *Application au calcul de la condition d'entraînement des particules — Risque de renard*

Cette vitesse maximale peut servir à rechercher si un entraînement des particules est possible ce qui constitue le risque de renard.

Considérons un volume du massif pulvérulent ayant la forme d'un cube de côté a limité par deux surfaces de courant, deux surfaces équipotentielles et deux plans parallèles au plan de l'écoulement. Cherchons la valeur de la force qu'exercera sur ce volume le courant d'infiltration (fig. XIII.5.3.3.1).

En raison de la très faible grandeur de V on peut négliger l'effort dynamique dû au terme $V^2/2g$; l'effort s'exerçant par unité de section des faces d'entrée et de sortie est alors égal à la différence des hauteurs piézométriques entre les faces considérées multipliée par le poids volumique du liquide soit, pour l'ensemble du cube :

$$a^2 (h_1 - h_2)\,\overline{\omega}$$

ou

$$a^3 \frac{h_1 - h_2}{a}\,\overline{\omega}$$

Mais $\frac{h_1 - h_2}{a}$ représente la perte de charge unitaire J dans la traversée du cube.

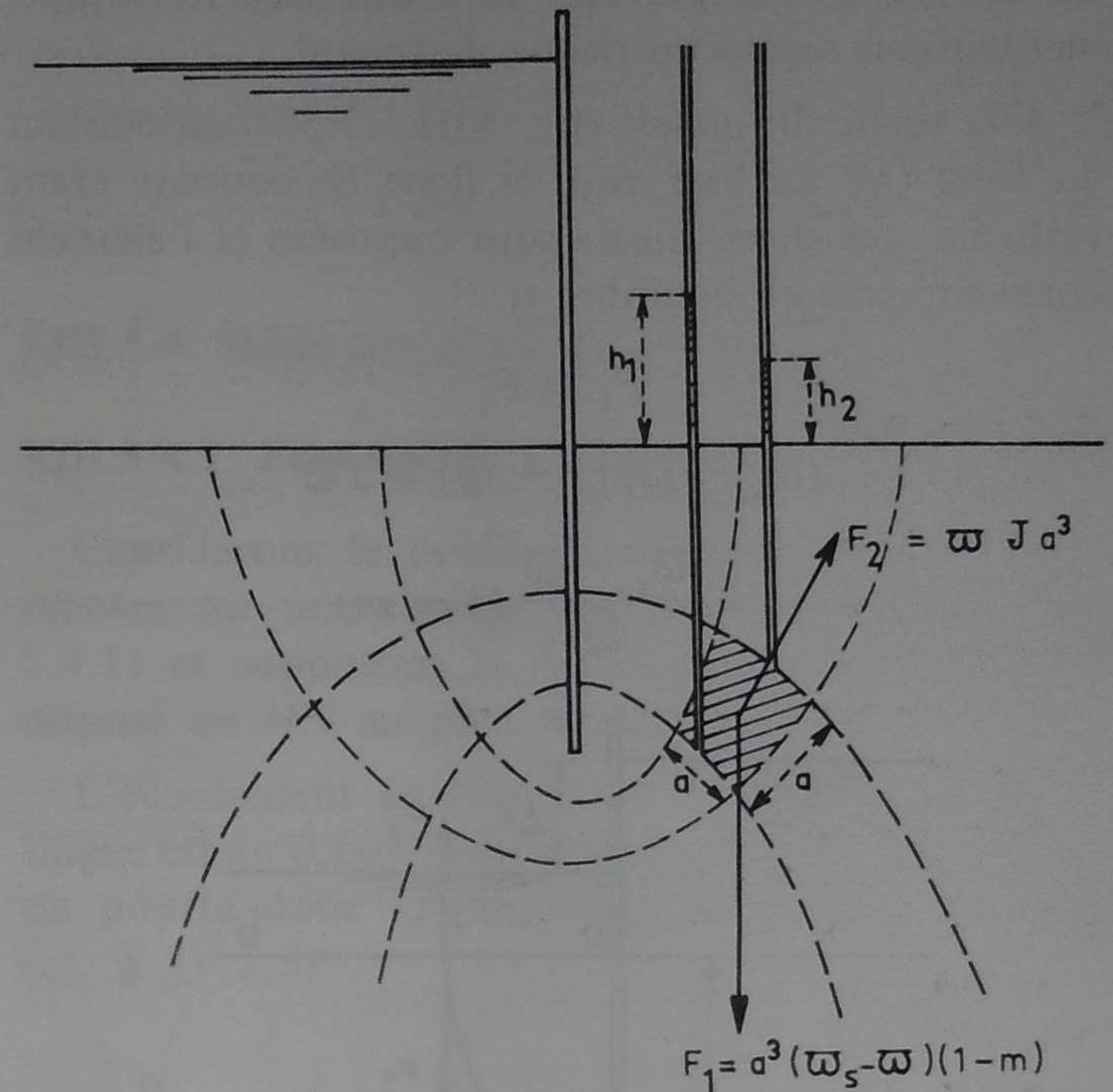


Fig. XIII.5.3.3.1

En définitive la force s'exerçant sur l'unité de volume apparent du massif du fait de l'action du courant d'infiltration a pour expression $J\overline{\omega}$.

L'élément de volume apparent unitaire du massif a une porosité totale m et, étant immergé dans l'eau, est donc soumis à une force verticale descendante qui a pour expression :

$$(\overline{\omega}_s - \overline{\omega})(1 - m)$$

$\overline{\omega}_s$ = poids volumique de la substance constituant les grains.

En définitive, l'élément de volume apparent a^3 du massif pulvérulent est soumis à un *système de deux forces* (fig. XIII.5.3.3.1) :

— la résultante du *poids* et de la *poussée d'Archimède* soit :

$$F_1 = a^3 (\overline{\omega}_s - \overline{\omega})(1 - m)$$

(suivant la verticale descendante)

— la *force d'entraînement* due au courant d'infiltration :

$$F_2 = \overline{\omega} J a^3$$

(dans le sens de la vitesse).

En réalité, il faudrait également tenir compte de la réaction de frottement des éléments voisins que nous

négligeons, ce qui correspond à une sécurité supplémentaire au regard du risque de renard.

A la sortie du massif (fig. XIII.5.3.3.2) au contact du fond OH du bief aval, la ligne de courant étant verticale, ces deux forces sont opposées et l'élément considéré sera en équilibre si :

$$F_1 \geqslant F_2$$

ou

$$(\overline{\omega}_s - \overline{\omega})(1 - m) \geqslant J\overline{\omega}$$

$$J \leqslant \frac{\overline{\omega}_s - \overline{\omega}}{\overline{\omega}}(1 - m)$$

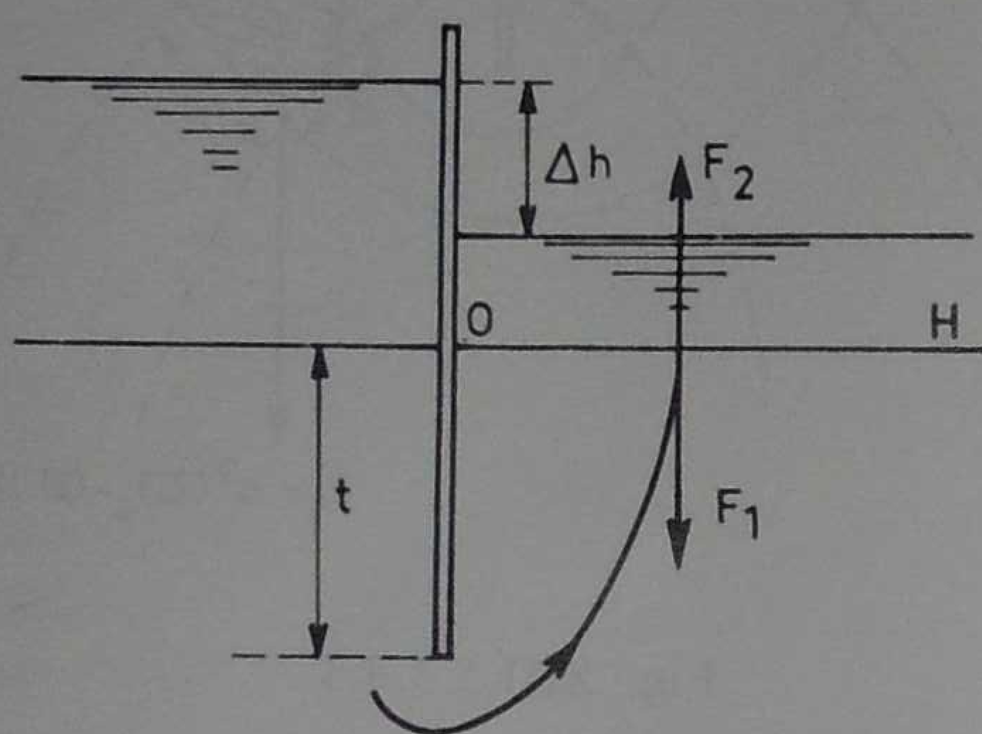


Fig. XIII.5.3.3.2

Si J dépasse cette valeur on a $F_2 > F_1$ et si les particules ne sont pas retenues par les forces de liaison ou de frottement dont nous n'avons pas tenu compte dans cette étude, elles se mettront en mouvement, entraînant la destruction du massif ; c'est ce qui constitue le *"renard"*.

Or nous avons calculé la vitesse maximale u_{1m}, soit :

$$u_{1m} = \frac{K\Delta h}{\pi t} = KJ_{max}$$

$$J_{max} = \frac{\Delta h}{\pi t}$$

Donc, si

$$J_{max} > \frac{\overline{\omega}_s - \overline{\omega}}{\overline{\omega}}(1 - m)$$

il y a risque de renard.

Or :

$$\frac{\overline{\omega}_s - \overline{\omega}}{\overline{\omega}}(1 - m)$$

est voisin de 1 en moyenne.

On peut donc exprimer approximativement comme suit la condition cherchée (risque de renard) :

$$J_{max} > 1$$

ou :

$$\frac{\Delta h}{\pi t} > 1$$

$$\Delta h > \pi t$$

La destruction du massif commence d'ailleurs au voisinage des palplanches sur la droite OH, précisément là où la vitesse est maximale : $u_{1m} = K\Delta h/\pi t$.

Règle pratique — Nous avons constaté que le risque de renard intervient pour

$$J_{max} > 1$$

soit

$$V_{max} = KJ_{max} > K .$$

C'est bien ce que confirme la règle pratique suivante :

La vitesse apparente d'écoulement qui risque d'entraîner les matériaux fins constituant un massif pulvérulent est de l'ordre de grandeur de la vitesse de filtration par unité de gradient hydraulique valable pour ces matériaux.

Vérification expérimentale — On vérifie expérimentalement ce résultat en faisant filtrer de l'eau de bas en haut dans un récipient rempli de sable sur lequel on a placé un poids (fig. XIII.5.3.3.3). Un tube manométrique indique la perte de charge h à la traversée du massif de sable, donc la perte de charge unitaire :

$$J = \frac{h}{H}$$

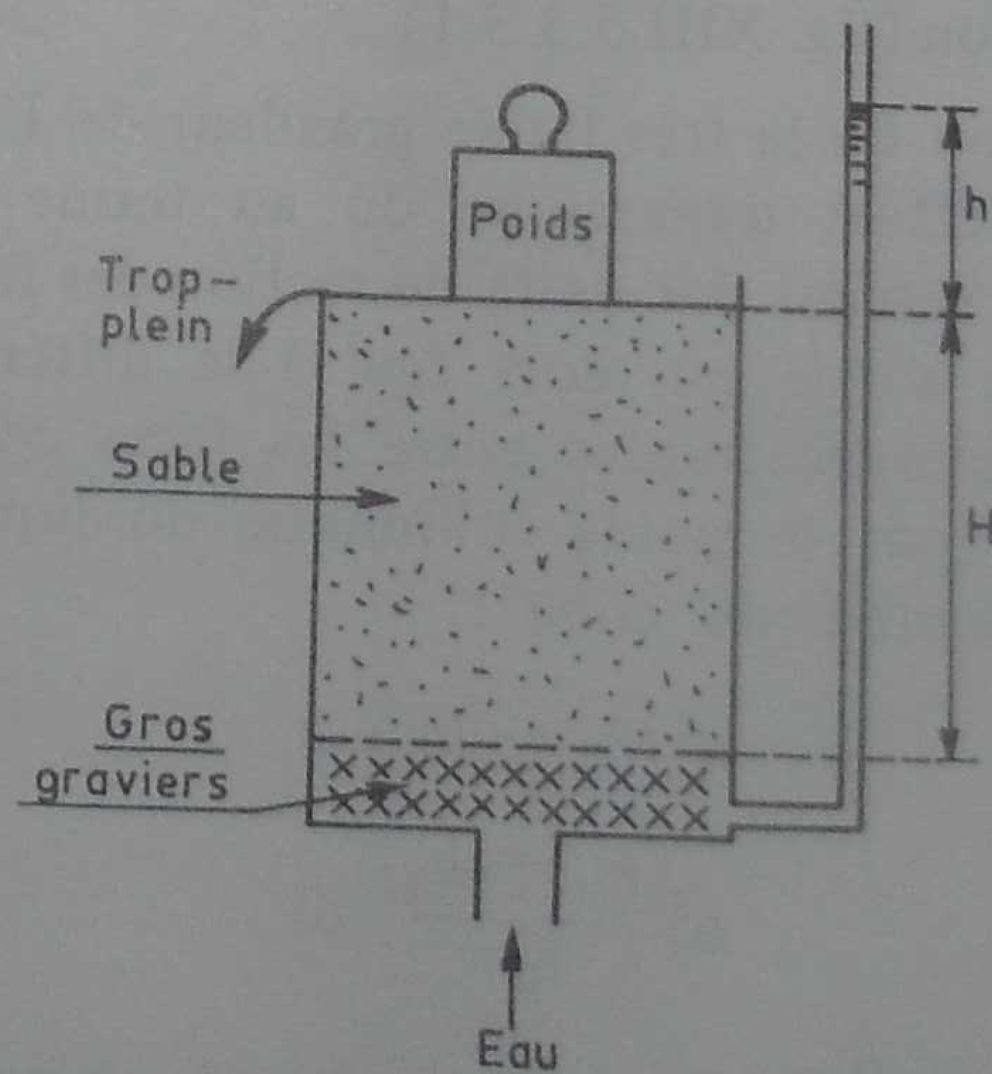


Fig. XIII.5.3.3.3 – Vérification expérimentale du risque de renard

Si on augmente le débit d'infiltration c'est-à-dire h, on constate que pour une certaine valeur de J voisine de 1 la vitesse de filtration K croît brusquement et le poids s'enfonce dans le sable ce qui montre la destruction de l'équilibre des grains du massif résultant du renard.

Remarque sur le danger du renard

Le renard provoque la désorganisation du massif pulvérulent par suite de l'entraînement des particules par le courant d'infiltration. Le cratère d'érosion qui en résulte au voisinage du pied aval des palplanches contribue à réduire la longueur des trajectoires des filets liquides, donc à augmenter J c'est-à-dire F_2, ce qui accélère le phénomène d'autant que la désorganisation de la structure du massif réduit les forces de frottement des éléments qui tendraient à s'opposer à l'entraînement des particules.

Pour ces différentes raisons, lorsqu'un renard se forme sur le parement aval d'un massif pulvérulent (digue ou barrage en terre) le phénomène ne peut que s'accélérer et entraîner rapidement la destruction du massif.

XIII.5.4. Méthodes graphiques

XIII.5.4.1. *Ecoulement à travers une digue en terre*

Considérons le profil de la digue qu'on suppose reposer sur une couche imperméable AB (fig. XIII. 5.4.1) et supposons la digue assainie par un drain disposé en MN au pied du talus aval.

L'écoulement au travers de la digue supposée rectiligne est un écoulement plan à potentiel des vitesses ; on pourra donc lui appliquer la *méthode de Prasil* (cf. § IV.5.3).

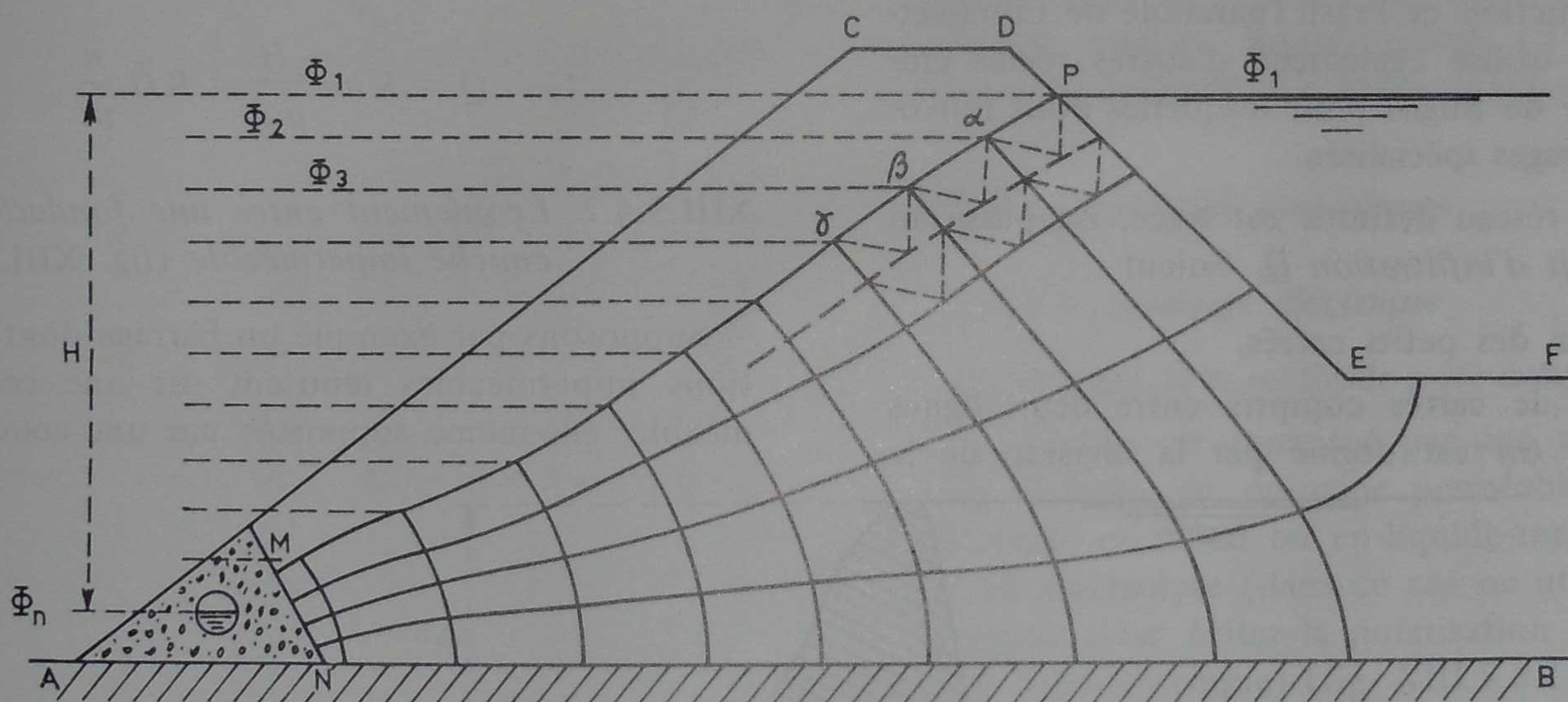


Fig. XIII.5.4.1 – Réseau d'écoulement à travers une digue en terre

A cet effet il faut connaître une ligne de courant et la répartition du potentiel le long de cette ligne. Or si nous supposons qu'il n'existe pas de suintement sur le parement aval de la digue (ce qui est le cas général), la différence de potentiel totale est donnée par :

$$\Phi_1 - \Phi_n = KH$$

H étant la différence entre le niveau de la retenue et le niveau dans le drain.

On divise H en m parties égales de sorte que :

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_2 - \Phi_3 = \cdots = \Phi_{n-1} - \Phi_n = \frac{KH}{m}$$

On se donne alors la ligne de courant PM qui constitue la surface libre de la nappe s'infiltrant au travers de la digue ; PM s'appelle la *ligne de saturation* ; bien entendu, on tient compte des conditions aux limites qui imposent que cette ligne soit normale en P au parement amont et en M à la paroi du filtre.

La répartition du potentiel le long de la ligne de saturation est alors donnée par les horizontales divisant H en m parties égales, soient α, β, γ . . . puisque la pression est constante et égale à la pression atmosphérique en tout point de cette ligne. On peut donc, à partir de la ligne de courant PM le long de laquelle on connaît la répartition du potentiel, appliquer la

construction de Prasil pour en déduire le réseau des équipotentielles et des lignes de courant.

Si la dernière ligne de courant ainsi obtenue coïncide approximativement avec la limite AB de la couche imperméable qui est une ligne de courant imposée par les conditions aux limites, le tracé obtenu peut être conservé ; sinon on recommence en modifiant le tracé de la ligne de saturation PM.

Dans le cas des barrages en terre, des règles plus ou moins empiriques permettent d'obtenir un tracé approximatif de cette ligne. Ainsi l'exemple donné au § IV.5.2.3 concernant l'utilisation des fonctions analytiques d'une variable complexe a montré que les lignes de courant et les équipotentielles d'un écoulement de filtration à travers un tel barrage formaient une double famille de paraboles homofocales ; on pourra donc choisir une des paraboles de la famille pour définir la ligne de saturation permettant d'effectuer la construction de Prasil (parabole de Limasset-Kozeny). On utilise également d'autres règles empiriques (règle de Bligh) pour lesquelles nous renvoyons aux ouvrages spécialisés.

Lorsque le réseau définitif est tracé, on passe au *calcul du débit d'infiltration Q.* Soient :

a le côté d'un des petits carrés,

m le nombre de carrés compris entre deux lignes de courant (m est donné par la division de la charge H en m parties égales comme il a été indiqué plus haut),

n le nombre de carrés compris entre deux lignes équipotentielles (n est donné par la construction de Prasil).

Pour une tranche de la digue de largeur unité comptée perpendiculairement au plan de la figure, la section totale d'écoulement normalement aux lignes de courant a pour expression :

$$S = na$$

La perte de charge unitaire J a pour valeur :

$$J = \frac{H}{ma}$$

Le débit a donc pour expression :

$$Q = KSJ$$

$$Q = Kna\frac{H}{ma} = KH\frac{n}{m}$$

XIII.5.4.2. *Ecoulement entre une fondation et une couche imperméable* (fig. XIII.5.4.2)

Supposons par exemple un barrage dont les fondations imperméables reposent sur une couche perméable, elle-même supportée par une couche imper-

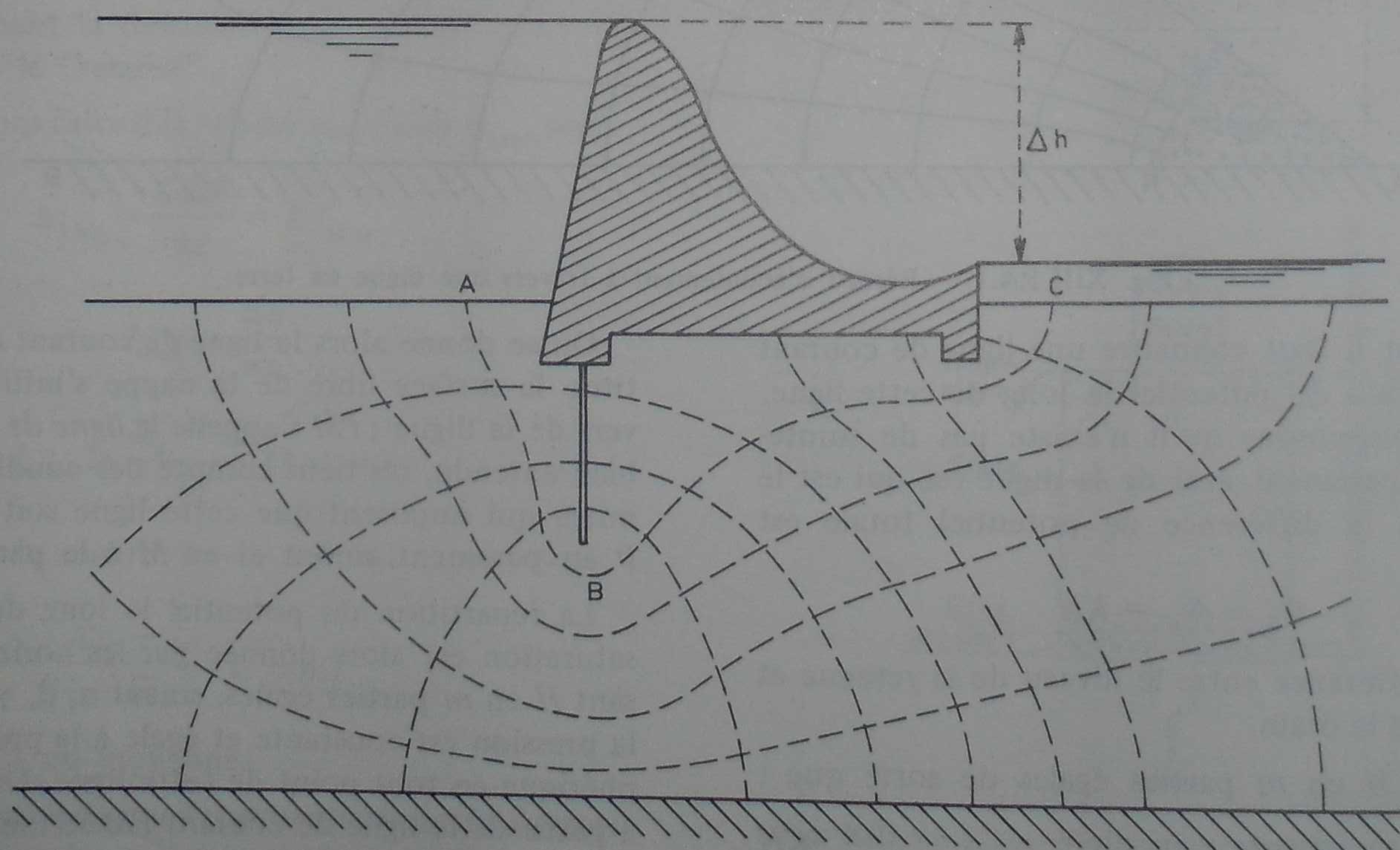


Fig. XIII.5.4.2 – Réseau d'écoulement à travers une fondation perméable

méable plus profonde. Un écran d'injection supposé étanche est réalisé au droit du parement amont.

Le voile d'injection et le contour de la fondation (partie inférieure) constituent une première ligne de courant tandis que la limite de la couche imperméable en constitue une seconde.

On entoure la première de ces lignes de courant d'une courbe ABC qui devra jouer le rôle de nouvelle ligne de courant et on partage l'espace entre elle et le contour de la fondation en carrés approximatifs à partir desquels on poursuit la construction de Prasil. Si la dernière ligne de courant ainsi obtenue coïncide approximativement avec la limite de la couche imperméable, le tracé exact est obtenu, sinon on recommence le tracé en modifiant la courbe ABC.

Le débit d'infiltration se calcule comme précédemment.

XIII.5.4.3. *Sol constitué de plusieurs zones de perméabilités différentes* (fig. XIII.5.4.3)

Supposons que la vitesse de filtration passe de K à $K' = nK$ au niveau d'une limite AB. La méthode graphique peut encore s'appliquer à condition d'introduire ou de supprimer des lignes équipotentielles au passage de la limite AB.

On peut également remarquer que le réseau des lignes équipotentielles et des lignes de courant présentera une brisure au droit de la limite AB, suivant un phénomène comparable à celui de la réfraction des rayons lumineux traversant la limite séparative de deux milieux d'indices de réfraction différents.

La ligne de courant qui traverse la surface de séparation de deux massifs dont les vitesses de filtration sont K et K' subit un changement brusque de direction caractérisé par les angles α et α' que fait la ligne de courant avec la ligne de séparation et on a la relation suivante :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{K'}{K}$$

XIII.5.4.4. *Sol présentant une anisotropie transversale*

Les sols naturels, notamment les sols d'alluvions, présentent fréquemment une anisotropie transversale caractérisée par une vitesse de filtration dans le sens horizontal (K_h) plus élevée que dans le sens vertical (K_v).

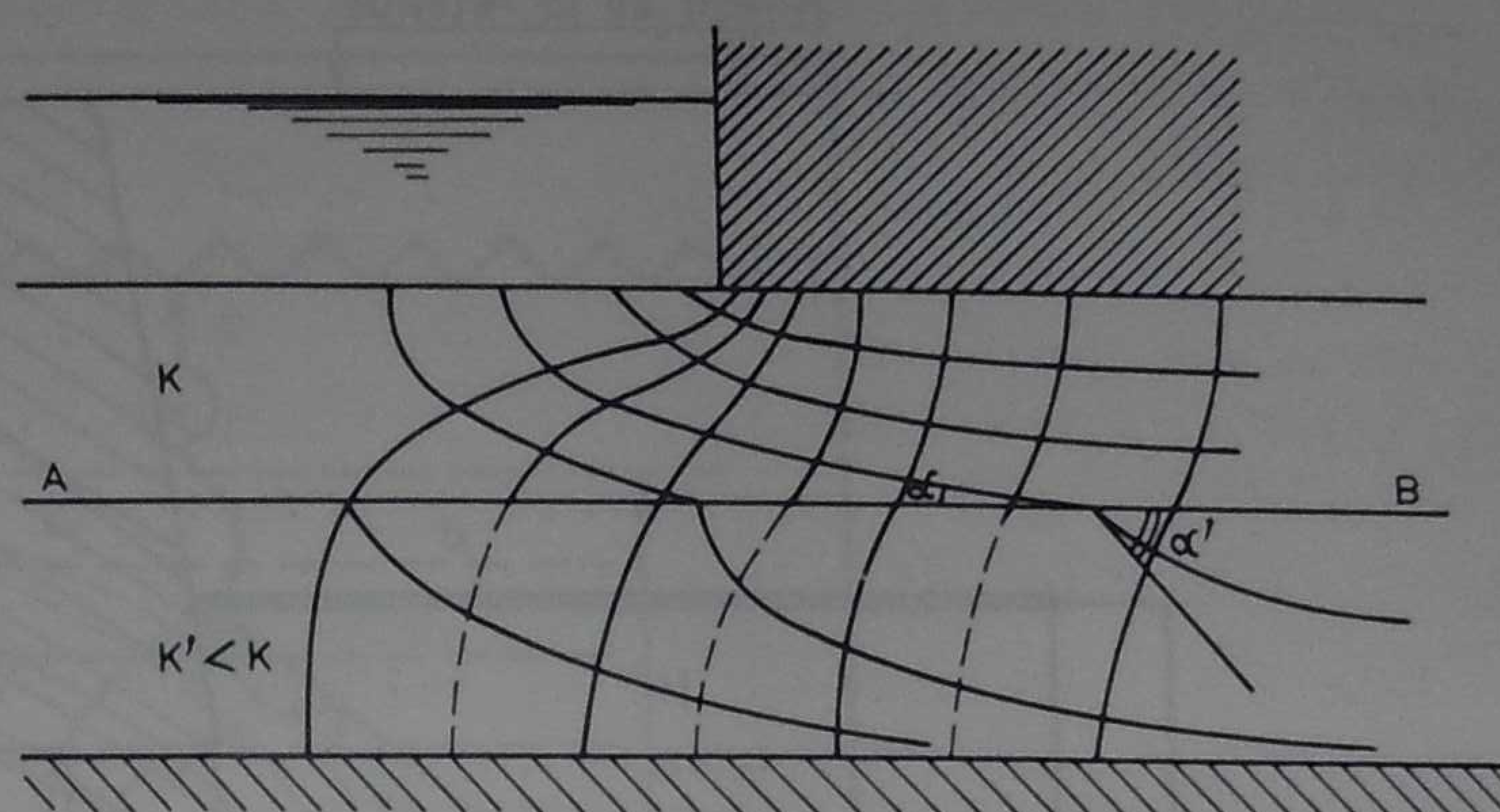


Fig. XIII.5.4.3 – Réseau d'écoulement à travers un sol constitué de deux couches de perméablités différentes

Dans un tel terrain le réseau d'écoulement est tracé comme si le terrain était isotrope, puis on dilate les dimensions horizontales du réseau dans le rapport $\sqrt{K_h/K_v}$. Quant au débit d'infiltration, il s'obtient comme précédemment (§ XIII.5.4.1) en utilisant la formule $Q = KH(n/m)$ avec $K = \sqrt{K_h K_v}$.

XIII.5.5. Méthodes analogiques

XIII.5.5.1. *Analogie électrique*

Le principe de la méthode a été donné au § IV.5.4.

Le modèle est constitué par une reproduction à petite échelle du domaine perméable à étudier. Il est réalisé en métal ou en liquide rendu conducteur par un électrolyte (dans ce cas on utilise le courant alternatif pour éviter la polarisation des électrodes) (cuve rhéo-électrique) (fig. XIII.5.5.1.1).

Le long des lignes équipotentielles extrêmes on fixe des électrodes en cuivre entre lesquelles on établit la différence de potentiel E ; le rhéostat de réglage R peut être constitué par une résistance liquide sur laquelle se déplace un curseur C relié à une pointe P qu'on déplace sur le modèle ; entre le curseur C et la pointe se trouve un galvanomètre A.

Pour une position donnée du curseur C on cherche les points du modèle pour lesquels le galvanomètre reste au zéro ; tous ces points se trouvent sur une même ligne équipotentielle dont le potentiel est celui de C.

On peut aussi obtenir directement les lignes de courant en utilisant le même modèle mais, dans ce cas, les électrodes à potentiel constant auront le

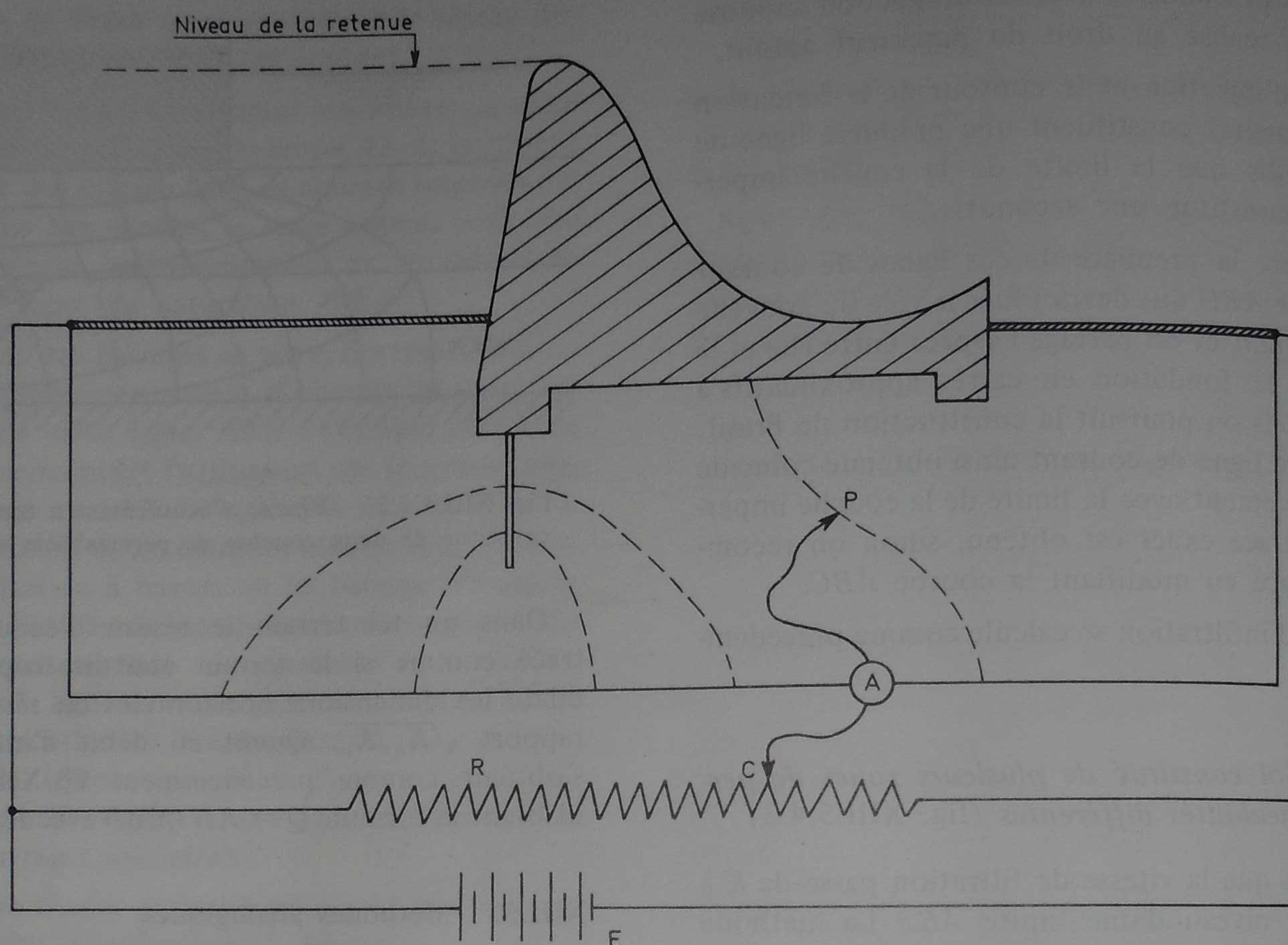


Fig. XIII.5.5.1.1 – Principe de l'analogie électrique

tracé des lignes de courant aux limites (analogie inverse, cf. § IV.5.4).

Utilisation du papier conducteur

Pour les écoulements plans un mode opératoire très simple consiste à utiliser un papier conducteur spécial constitué de deux feuilles assemblées par une colle à base de graphite (papier Télédeltos).

Il suffit de découper dans le papier le modèle du domaine à étudier ; les limites du domaine dont le potentiel est connu sont constituées par des électrodes (clinquant de cuivre collé au papier avec une colle spéciale conductrice ou peinture spéciale constituant une bande conductrice longeant la limite du domaine à potentiel constant). Les frontières imperméables $x'x$ ou les lignes de courant AB limitant le modèle sont de simples coupures du papier (fig. XIII.5.5.1.2).

La détermination du champ des équipotentielles se fait à l'aide d'une pointe de touche ou "sonde" portée à un potentiel déterminé. On pose verticalement la sonde sur le papier et on la déplace jusqu' à ce que l'intensité qui passe dans cette sonde soit nulle (montage en pont de Wheatstone).

On sait que dans le cas d'un écoulement à surface libre (par exemple l'écoulement de filtration à travers une digue en terre) la surface libre AB ou *ligne de saturation* est inconnue a priori et qu'elle peut être déterminée par *approximations successives*.

L'utilisation du papier conducteur se prête très facilement à ces approximations. On commence par diviser la charge totale H en m parties égales ($m = 5$ sur la figure XIII.5.5.1.2) et, à l'aide de la sonde, on cherche le point de chaque horizontale où le potentiel a la valeur correspondante. Si par exemple E_A et E_B sont les potentiels respectifs en A et B ($E_A > E_B$), le potentiel de l'horizontale ab (la première à partir de A) sera $E_A - 1/5\ (E_A - E_B)$. On règle le curseur C sur cette valeur lue au potentiomètre et on déplace la sonde S sur l'horizontale ab jusqu'à ce que le courant passant dans la sonde soit nul. On détermine ainsi le point c_1 de l'horizontale ab où le potentiel possède cette valeur ; la ligne de saturation devra

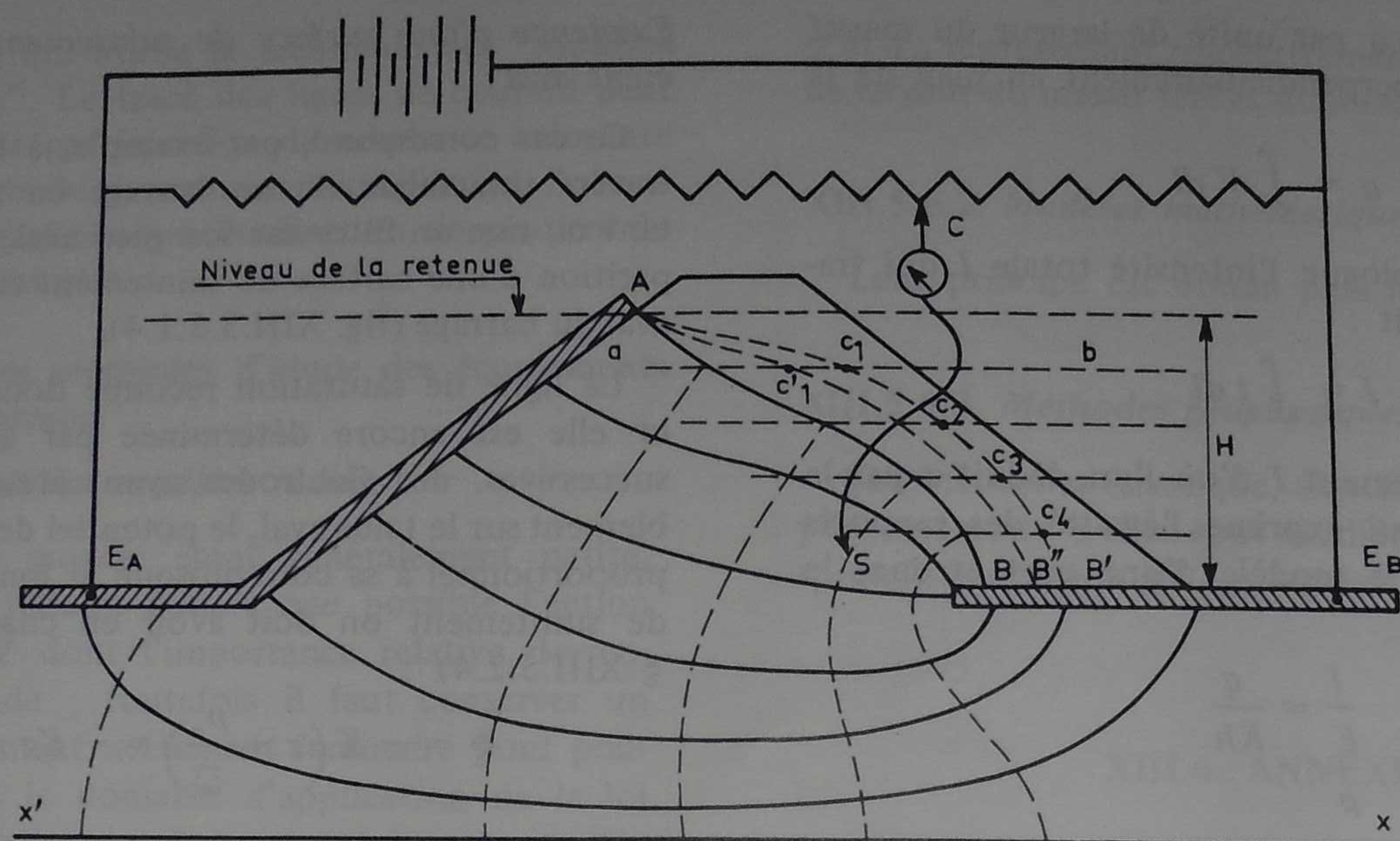


Fig. XIII.5.5.1.2

passer par c_1. On détermine de la même manière les points $c_2, c_3 \ldots$ d'où résulte un premier tracé de la ligne de saturation : $Ac_1c_2c_3c_4B'$. On découpe le papier suivant cette ligne (ou plus exactement un peu au-dessus par précaution). La suppression correspondante d'une partie du domaine a entraîné une modification dans la répartition des potentiels ce qui nécessite de recommencer l'opération et permet d'obtenir un second tracé plus précis AB'' et ainsi de suite. La convergence est assez rapide et au bout de 5 à 6 coupures successives, on obtient la ligne de saturation définitive AB.

On procède ensuite au tracé du réseau des équipotentielles et des lignes de courant suivant la technique classique.

Le calcul du débit d'infiltration s'effectue de la manière suivante :

Dans le massif réel l'écoulement suit la loi de Darcy ;

$$V = KI = -K\frac{dh}{ds} \qquad [XIII.5.5.1.1]$$

avec

$$h = z + \frac{p}{\varpi}$$

Dans le modèle électrique, l'intensité dI du courant traversant une bande de papier de longueur ds, de largeur dl et de résistivité ρ est donnée par la loi d'Ohm (fig. XIII.5.5.1.3) :

$$dI = -\frac{dE\,dl}{\rho\,ds}$$

dE étant la différence de potentiel entre les deux extrémités de la bande de papier.

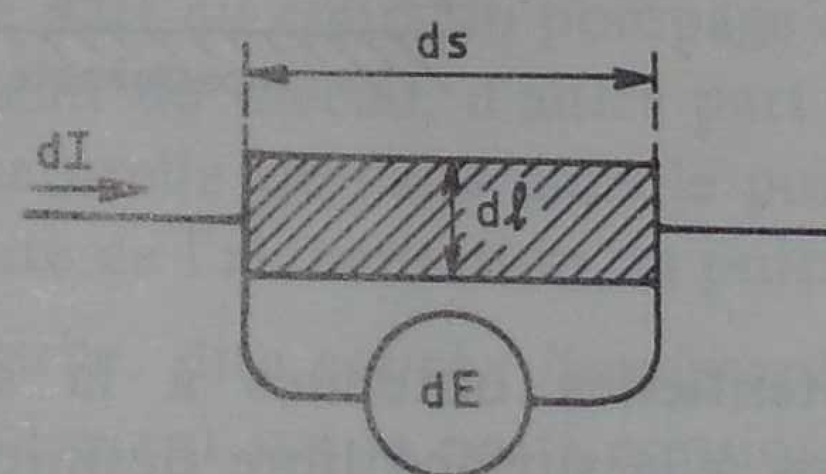


Fig. XIII.5.5.1.3

La densité de courant (intensité par unité de largeur de papier) sera donc :

$$i = \frac{dI}{dl} = -\frac{1}{\rho}\frac{dE}{ds} \qquad [XIII.5.5.1.2]$$

Les formules [*XIII.5.5.1.1* et *2*] montrent l'analogie directe suivante :

dans le sol	dans le modèle
V	i
K	$\frac{1}{\rho}$
h	E

Quant au débit q par unité de largeur du massif (largeur comptée perpendiculairement au plan de la figure) soit :

$$q = \int V\, dl$$

il aura pour homologue l'intensité totale I qui traverse le modèle soit :

$$I = \int i\, dl$$

On mesure facilement I d'où l'on déduit q par la relation suivante qui exprime l'égalité des rapports "analogues", dans le modèle d'une part et dans le sol de l'autre :

$$\frac{I}{\frac{E}{\rho}} = \frac{q}{Kh}$$

Existence d'une surface de suintement sur le parement aval

Ce cas correspond, par exemple, à l'infiltration à travers une digue ou un barrage en terre comportant ou non un filtre sur son pied aval, mais avec apparition d'une surface de suintement sur le parement aval du barrage (fig. XIII.5.5.1.4).

La ligne de saturation recoupe donc le talus aval et elle est encore déterminée par approximations successives, des électrodes ayant été placées préalablement sur le talus aval, le potentiel de chacune étant proportionnel à sa cote puisque le long de la surface de suintement on doit avoir en chaque point (cf. § XIII.5.2.4) :

$$\Phi = -K\left(z + \frac{p_a}{\varpi}\right) = -Kz + C^{te}$$

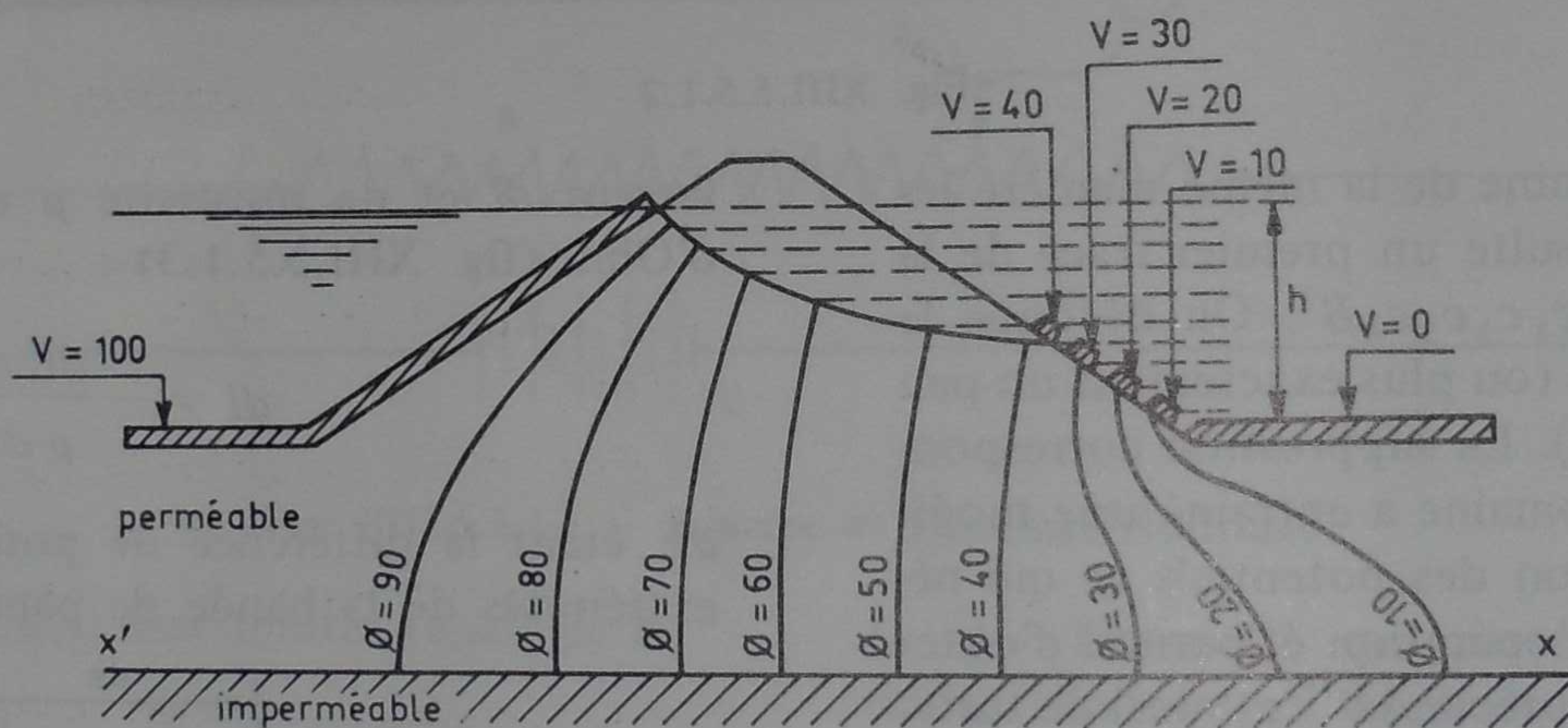


Fig. XIII.5.5.1.4

Les équipotentielles obtenues à la sonde sont perpendiculaires à la surface libre définitive à l'intérieur du massif ; celles qui aboutissent à la surface de suintement ne sont évidemment pas perpendiculaires au parement aval. La réalisation du modèle et la détermination du débit d'infiltration sont très rapidement obtenues à l'aide du papier conducteur en appliquant les mêmes principes que précédemment.

La méthode se prête également à l'application de l'*analogie inverse* pour la détermination des lignes de courant. Après avoir déterminé les équipotentielles et la surface libre AB par l'analogie directe (fig. XIII.5.5.1.2), on dispose les électrodes le long des lignes de courant extrêmes AB et $x'x$ et l'exploration du modèle avec la sonde permet de tracer directement les lignes de courant intermédiaires suivant le même montage que précédemment.

Milieux anisotropes

On réalise des modèles en papier conducteur perforé présentant directement l'anisotropie requise.

Dans le cas d'une anisotropie transversale, on peut également utiliser le procédé graphique signalé au § XIII.5.4.4 (dilatation des dimensions horizontales du réseau dans le rapport $\sqrt{K_h/K_v}$).

XIII.5.5.2. *Analogie hydraulique*

Le régime d'écoulement dans les sols étant un régime laminaire on pourra réaliser un écoulement analogue en utilisant un liquide visqueux (solution aqueuse de glycérine plus ou moins concentrée) s'écoulant en régime laminaire entre deux lames parallèles et de faible écartement. C'est l'*analogie de Hele-Shaw* dont le principe a été exposé au

§ VI.2.1.4 et qui utilise la technique des "modèles à fente mince". Le tracé des lignes de courant peut être matérialisé par injection de substance colorante en divers points du domaine de l'écoulement, l'observation étant facilitée par l'utilisation de plaques de verre ou de plexiglas.

XIII.5.6. Autres méthodes d'étude des écoulements souterrains

XIII.5.6.1. *Essais sur modèles réduits*

L'échelle du modèle étant généralement petite, il convient de réduire autant que possible l'action de la *capillarité* dont l'importance relative deviendrait trop grande ; toutefois il faut conserver un régime d'écoulement nettement laminaire pour pouvoir rester dans le domaine d'application de la loi de Darcy. Le matériau utilisé pour réaliser le modèle du massif poreux est généralement constitué de grains d'environ 1 mm de diamétre.

Si on demande au modèle de permettre la détermination du réseau des lignes de courant et des équipotentielles, la valeur de K n'intervient pas. On peut alors procéder directement en disposant le modèle entre deux parois vitrées limitant une tranche du massif et en colorant les lignes de courant, ou indirectement en relevant par points les hauteurs piézométriques $z + p/\varpi$ à l'aide de tubes ; toutefois l'introduction des tubes dans le massif risque de perturber l'écoulement.

Pour déterminer le *débit* on utilise la relation de similitude :

$$\frac{Q}{Q_M} = \frac{\Omega K I}{\Omega_M K_M I_M},$$

les lettres affectées de l'indice M se rapportant au modèle, les lettres sans indice au système réel à étudier (prototype).

S'il n'y a pas de distorsion (c'est-à-dire si l'échelle est la même dans les trois dimensions) on a :

$$I = I_M \quad \text{et} \quad Q = \lambda^2 \frac{K}{K_M} Q_M$$

λ représentant le rapport des longueurs.

Pour les écoulements plans (à deux dimensions) on a évidemment :

$$q = \lambda \frac{K}{K_M} q_M$$

q et q_M représentant respectivement le débit par unité de largeur du massif réel et du modèle.

XIII.5.6.2. *Modèles mathématiques*

Leur principe est donné plus loin (§ XIV.4.5.3).

XIII.5.6.3. *Méthodes géophysiques*

Ces méthodes (sismique, électrique) sont citées ici pour mémoire ; elles sont étudiées dans les ouvrages spécialisés de géologie appliquée.

XIII.6. ANNEXES

XIII.6.1. Méthode limnigraphique de Porchet pour l'étude des puits

Porchet a mis au point une méthode d'étude des puits tout à fait indépendante des théories précédentes.

Cette méthode est basée sur le relevé expérimental et l'examen de la courbe donnant en fonction du temps les variations de la cote du plan d'eau dans un puits, d'une part au cours du pompage correspondant à l'abaissement du niveau, d'autre part au cours de la remontée naturelle de l'eau dans le puits après pompage par suite de l'alimentation du puits par la nappe.

Cette courbe, dite *courbe limnigraphique*, se relève expérimentalement sur le puits considéré au cours du pompage, en utilisant des limnigraphes qui correspondent essentiellement aux deux types suivants :

— les *limnigraphes enregistreurs* utilisés chaque fois que cela est possible, notamment sur les puits ordinaires (diamètre de l'ordre du mètre ou plus). Ces appareils permettent de relever la courbe limnigraphique automatiquement et de manière continue.

— les *limnigraphes électriques* utilisés sur les puits de faible diamètre notamment les forages dans lesquels le limnigraphe enregistreur ne peut pas être employé ; les limnigraphes électriques permettent de relever la courbe par points.

La *courbe limnigraphique* se représente généralement en utilisant deux axes perpendiculaires (fig. XIII.6.1.1) :

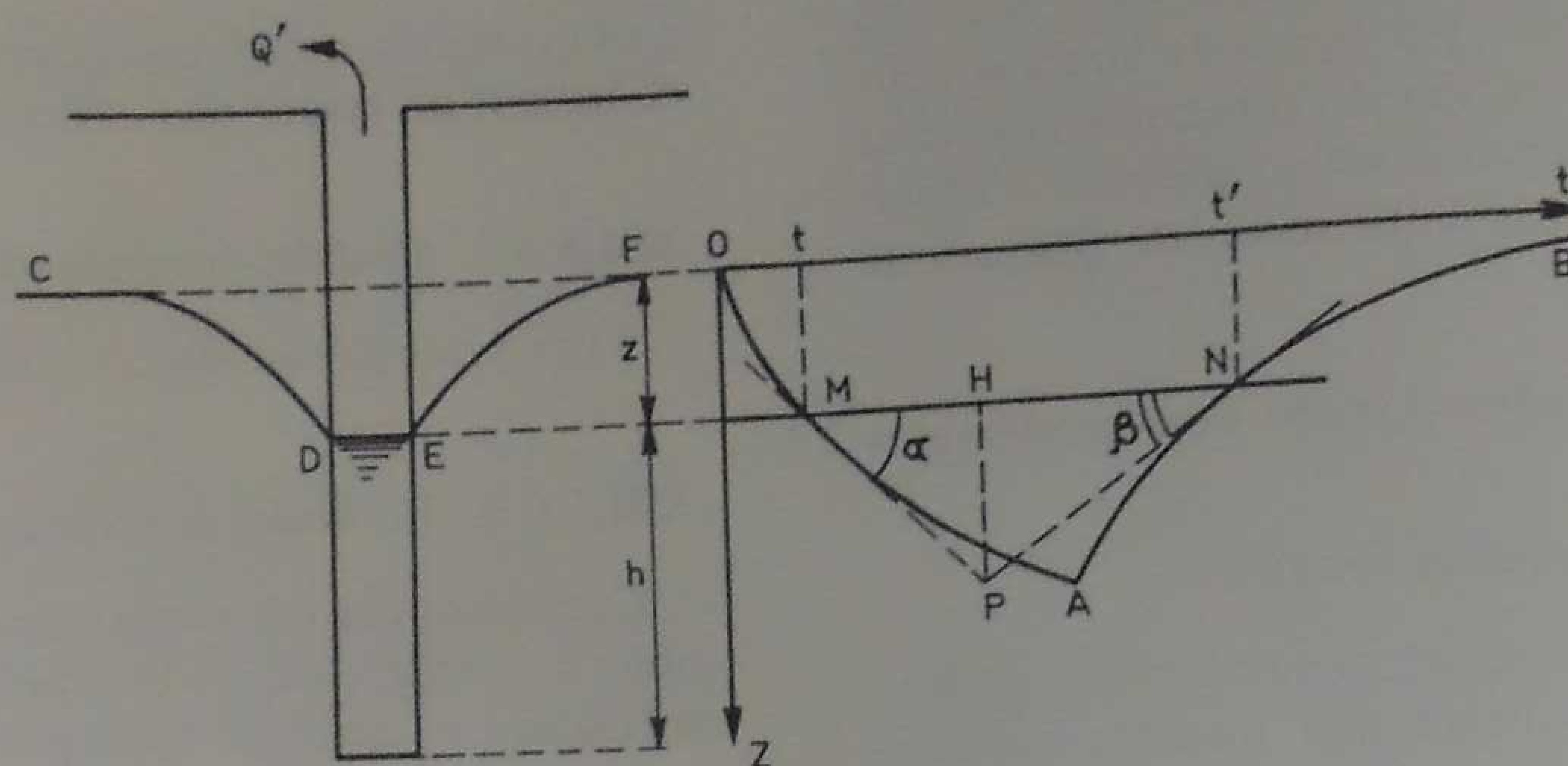


Fig. XIII.6.1.1 – Méthode limnigraphique de Porchet

— en ordonnées : les dénivellations z de la surface libre (niveau dynamique) mesurées par rapport au niveau statique avant pompage (Oz orienté positivement vers le bas).

— en abscisses : le temps t (Ot orienté positivement vers la droite).

La courbe limnigraphique obtenue dépend essentiellement des caractéristiques de la nappe et du puits. Toutefois elle présente toujours deux branches, l'une OA correspondant à la descente de la surface libre dans le puits au cours du pompage, l'autre AB correspondant à la remontée naturelle du niveau à partir de l'arrêt du pompage. Ces deux branches OA et AB ont leur concavité dirigée respectivement vers le haut et le bas ; la branche AB est sensiblement asymptote à l'axe Ot.

Principe de la méthode

Soit Q' le débit prélevé du puits c'est-à-dire le débit de la pompe et soit Q le débit de la nappe pour une dénivellation z correspondant à une hauteur d'eau h dans le puits ; négligeons d'abord la surface de résurgence, c'est-à-dire admettons que le niveau de la nappe au voisinage du puits est le même que le niveau dans le puits.

Au cours de la période de pompage, au temps t correspondant à la dénivellation z, désignons par E le volume de l'eau mobile contenue dans l'entonnoir $CDEF$. On peut écrire dans ces conditions :

$$Q' = Q + \frac{dE}{dt}$$

ou

$$Q' = Q + \frac{dE}{dz}\frac{dz}{dt} \qquad [XIII.6.1.1]$$

Après la période de pompage au cours de la remontée naturelle du niveau dans le puits à un instant t', le niveau repassera par DE, c'est-à-dire que E et z reprendront respectivement les mêmes valeurs ; on peut écrire à cet instant t' :

$$Q = -\frac{dE}{dt}$$

ou

$$Q = -\frac{dE}{dz}\frac{dz}{dt} \qquad [XIII.6.1.2]$$

Remarquons (fig. XIII.6.1.2) que si une *zone de résurgence* de hauteur x se produit à l'intérieur du puits, c'est-à-dire si le niveau $D'E'$ dans le puits est inférieur au niveau DE de la nappe à l'intérieur du sol autour du puits, les formules [XIII.6.1.1 et 2] sont encore valables. En effet la dénivellation devient :

$$y = z + x$$

et le volume E comprend alors :

— le volume E_1 du cylindre $MD'E'N$ qui est fonction de y,

— le volume d'eau mobile contenue dans le volume E_2 de l'entonnoir extérieur au puits engendré par la rotation du triangle curviligne ENF autour de l'axe de l'ouvrage.

Ce volume E_2 est fonction de z, lui-meme fonction de y puisque pour $z = 0$ on a $y = 0$ et pour $z = z_{max}$ on a $y = H$.

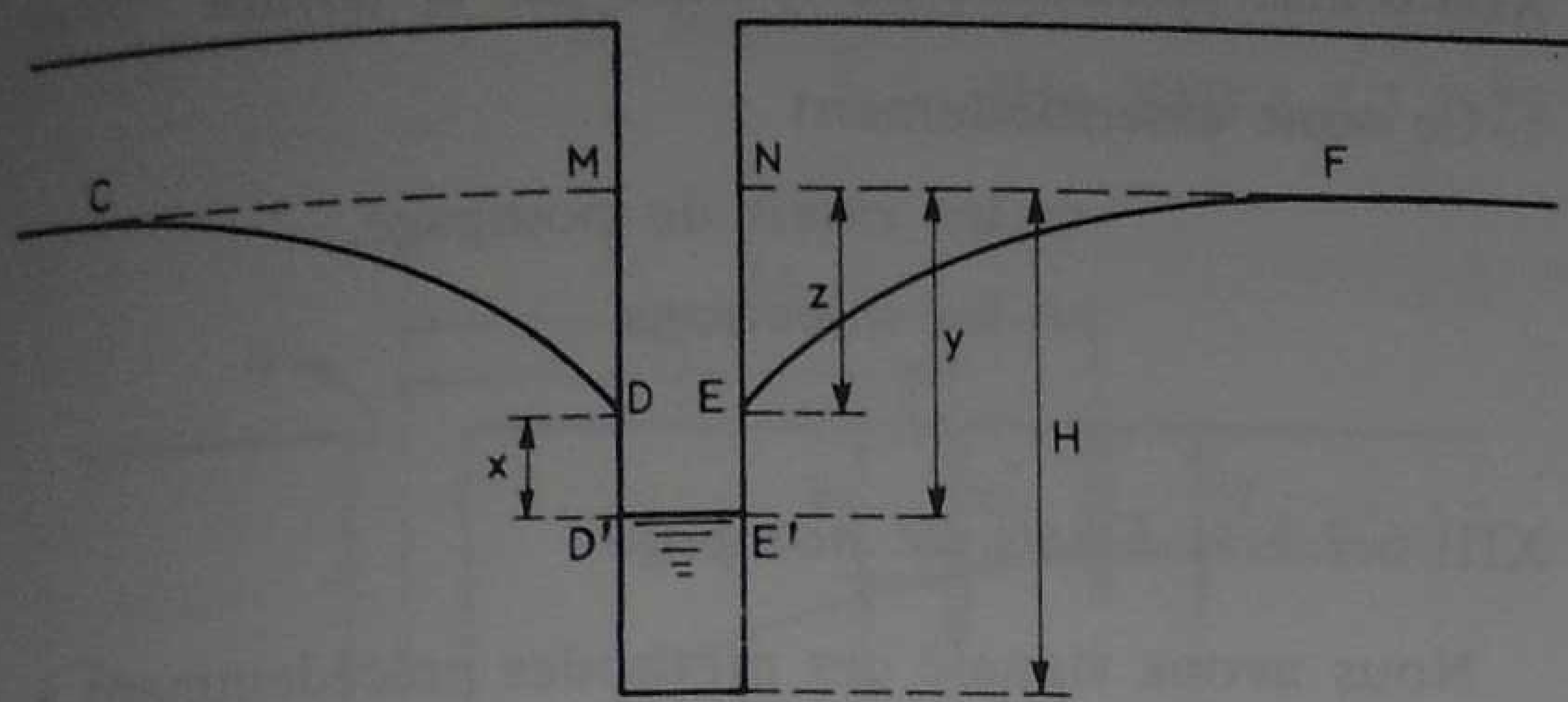


Fig. XIII.6.1.2 – Prise en compte de la hauteur de résurgence

On peut donc écrire :

à la descente (pompage) :

$$Q' = Q + \frac{dE}{dt} = Q + \frac{dE}{dy}\,\frac{dy}{dt} \quad [XIII.6.1.3]$$

à la remontée (après pompage) :

$$Q = -\frac{dE}{dt} = -\frac{dE}{dy}\,\frac{dy}{dt} \quad [XIII.6.1.4]$$

Ces deux équations sont identiques à [*XIII.6.1.1* et *2*] dans lesquelles l'ancienne dénivellation z est remplacée par la nouvelle dénivellation y effectivement enregistrée au limnigraphe.

Si donc nous revenons aux équations [*XIII.6.1.1* et *2*] on peut dire que dE/dz a la même valeur dans chacune d'elles puisque z et E sont les mêmes ; par contre les valeurs de dz/dt sont différentes et sont représentées par les pentes des tangentes en M et N aux deux branches de la courbe limnigraphique $z(t)$ (fig. XIII.6.1.1), les points M et N correspondant à la dénivellation z considérée, soit :

$$\text{en } M \text{ (instant } t\text{)} : \quad \frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\text{en } N \text{ (instant } t'\text{)} : \quad \frac{dz}{dt} = -\operatorname{tg}\beta$$

On peut donc remplacer dz/dt par leur valeur respective dans les équations [*XIII.6.1.1* et *2*] qui s'écrivent ainsi :

$$Q' = Q + \frac{dE}{dz}\operatorname{tg}\alpha \quad [XIII.6.1.5]$$

$$Q = \frac{dE}{dz}\operatorname{tg}\beta \quad [XIII.6.1.6]$$

En éliminant dE/dz entre ces deux équations il vient :

$$Q' = Q\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta}$$

Remarquons que (fig. XIII.6.1.1) :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{HP}{MH}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{HP}{HN}$$

de sorte que :

$$Q' = Q\,\frac{MN}{MH}$$

et finalement :

$$\boxed{Q = Q'\,\frac{MH}{MN}} \quad [XIII.6.1.7]$$

Connaissant le débit de la pompe il est donc possible, en utilisant la courbe limnigraphique relevée au cours de l'essai, d'obtenir par une construction graphique très simple, pour toutes les dénivellations z, le débit correspondant du puits c'est-à-dire de la nappe.

Une remarque doit toutefois être faite touchant au principe même de la méthode – Il n'est pas évident, en effet, que dE/dz ait la même valeur à la descente et à la remontée pour une même valeur de z. Cela ne serait exact que dans le cas d'un liquide de fluidité parfaite s'écoulant dans un milieu sans frottement ; dans la pratique des écoulements souterrains il n'en est jamais ainsi et les deux états auxquels correspondent les deux expressions de dE/dz ne sont pas des états d'équilibre mais des *états transitoires* qui ne sont pas nécessairement identiques pendant la période d'abaissement du niveau et pendant la période de remontée pour la même valeur de z. Autrement dit, la *vitesse de filtration K* qui n'apparaît pas dans la théorie de la méthode limnigraphique doit précisément intervenir pour expliquer la différence entre ces deux états transitoires.

Cette remarque signalée par M. l'Ingénieur général Vibert[1] doit sans doute expliquer certaines différences constatées parfois entre les résultats donnés par la méthode limnigraphique et ceux obtenus réellement.

---

(1) Vibert – La méthode de Porchet pour la reconnaissance des nappes aquifères (Le *Génie civil* – 15 Octobre 1946).

M. Ferrari, Ingénieur en chef du Génie rural, a montré comment l'analyse de la courbe limnigraphique en prenant en compte le régime variable déduit de la théorie de base de Boussinesq permettait de connaître le débit de la nappe en régime permanent pour la dénivellation considérée et d'en déduire également les caractéristiques de l'aquifère (transmissivité et coefficient d'emmagasinement). Nous renvoyons au mémoire original de M. Ferrari signalé dans la bibliographie.

La méthode limnigraphique est souvent utilisée pour les essais des puits en raison de sa simplicité et de son caractère universel puisque la théorie précédente ne préjuge en rien du degré de perméabilité, de l'homogénéité ou de l'isotropie du terrain.

Pour que la nappe suive constamment la descente du niveau dans le puits il est préférable de commencer le pompage avec un faible débit Q' qu'on augmente ensuite, en particulier en fin de pompage, pour réaliser l'assèchement de l'ouvrage. Il faut, bien entendu, tenir compte des variations de Q' quand on applique la formule [*XIII.6.1.7*].

Comme nous l'avons souligné précédemment, on peut reprocher à la méthode de donner des renseignements sur les débits instantanés de la nappe mais de ne pas donner de précision sur la manière dont la nappe peut fournir ces mêmes débits pendant des durées plus ou moins longues.

C'est la raison pour laquelle on préfère souvent réaliser l'essai en stabilisant le niveau dans le puits à une cote déterminée et en observant les variations qu'il faut alors apporter au débit de la pompe ; même dans ce cas l'examen de la courbe limnigraphique enregistrée au cours de l'essai (notamment l'allure de la courbe de remontée) permet de tirer des conclusions utiles sur la manière dont la nappe peut "soutenir" ses débits.

Enfin on peut également effectuer *plusieurs pompages successifs* en laissant le niveau remonter suffisamment entre chaque pompage ; l'examen comparatif des courbes limnigraphiques obtenues peut également permettre d'utiles déductions.

XIII.6.2. Mesure de la vitesse de filtration K

On distingue :

— les méthodes de mesure sur le terrain,

— les méthodes de laboratoire.

XIII.6.2.1. *Méthodes de mesure sur le terrain*

Ce sont essentiellement :

— les essais de pompage,

— les injections.

XIII.6.2.1.1. *Essais de pompage*

Nous avons signalé ces méthodes précédemment à l'occasion de l'étude des divers types de nappes. Nous les résumons ci-après :

— dans le cas d'une nappe cylindrique, l'application de la *théorie élémentaire de Dupuit* a conduit à la formule :

$$Q(x_2 - x_1) = \frac{K}{2}(y_2^2 - y_1^2)$$

(fig. XIII.6.2.1.1.1)

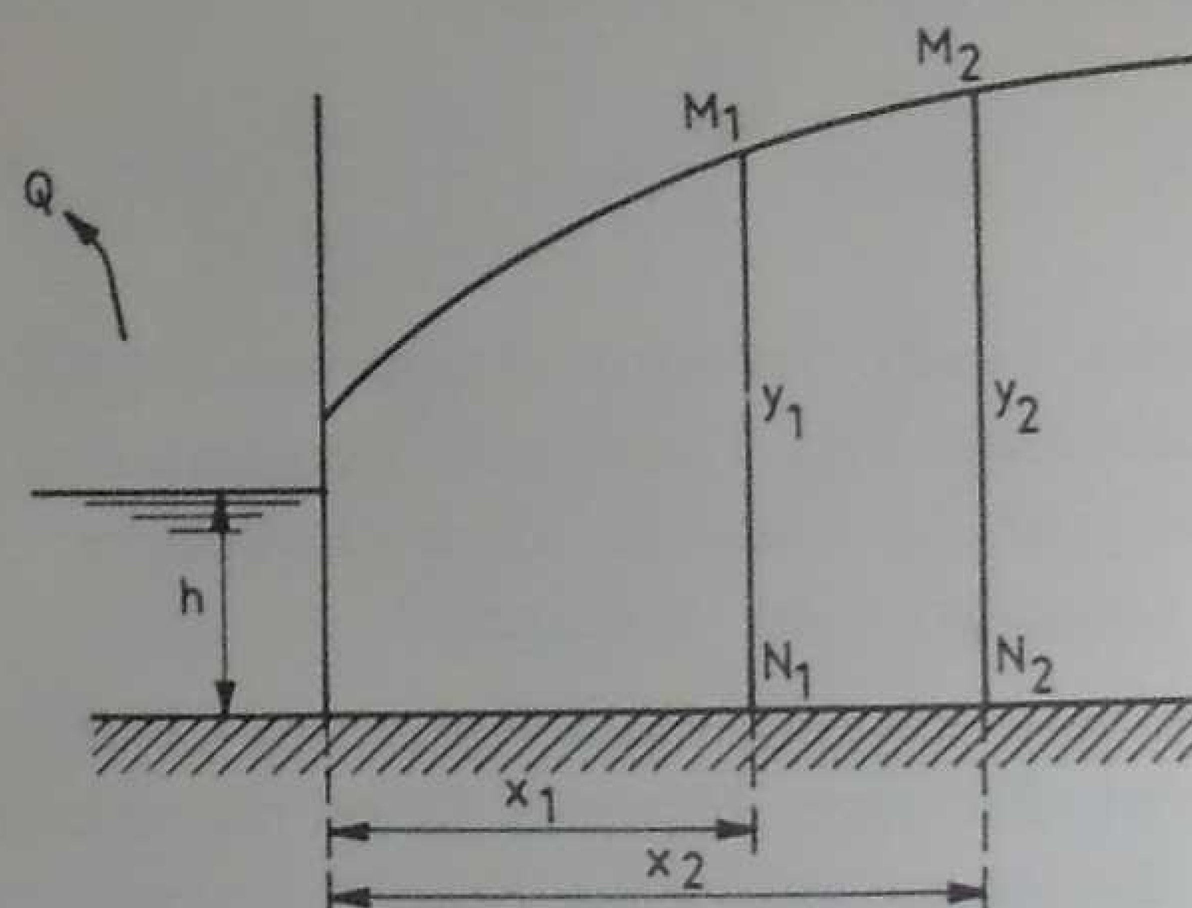


Fig. XIII.6.2.1.1.1 — Mesure de K (nappe cylindrique)

— dans le cas d'une nappe à filets convergents, la *méthode de Thiem* permet d'obtenir K à partir de la formule suivante qui nécessite deux pompages à débits différents Q_1 et Q'_1 :

$$K = \left(\frac{Q_1}{\operatorname{tg}\theta_1} - \frac{Q'_1}{\operatorname{tg}\theta'_1}\right) \frac{1}{2\pi x_1 (z'_1 - z_1)}$$

(fig. XIII.6.2.1.1.2)

ou bien, en n'effectuant qu'un seul pompage et en observant la cote de la nappe à deux piézomètres :

$$K = \frac{Q}{2\pi H'(z_1 - z_2)} \lg \frac{x_2}{x_1}$$

avec :

$$H' = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{(fig. XIII.6.2.1.1.2)}$$

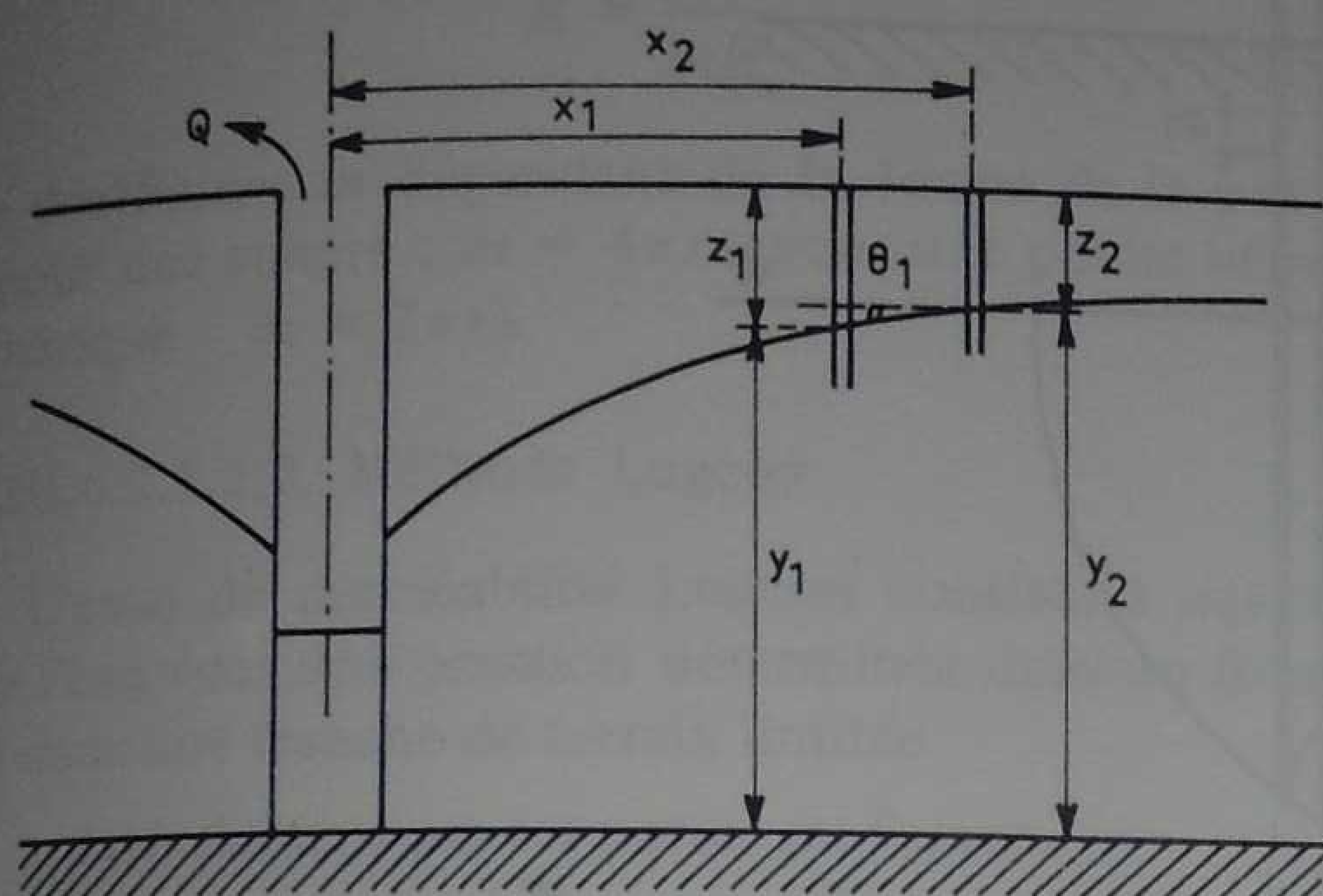


Fig. XIII.6.2.1.1.2 – Mesure de K par la méthode de Thiem

Pour l'utilisation de ces méthodes, on établit autour du puits de pompage une série de piézomètres d'observation placés à des distances croissantes suivant un certain nombre de rayons issus du puits de pompage (par exemple quatre rayons en croix).

Pour les nappes captives les écartements des piézomètres d'observation seront assez grands (20, 100, 250 m par exemple). Pour les nappes libres ces distances seront plus petites et diminueront si K est petit ; ainsi pour un sable très fin on pourra prendre 2, 5 et 15 m.

Autant que possible on ne fera intervenir comme valeurs z_1, z'_1, z_2, θ_1 et θ'_1 dans les formules de Thiem que celles des piézomètres d'observation se trouvant sur un même rayon, en prenant d'ailleurs sur ce rayon toutes les combinaisons possibles. Il est préférable, en effet, de ne pas mélanger les données de divers rayons, K pouvant varier avec l'azimut du rayon considéré.

On peut également utiliser les formules tenant compte de la *courbure des filets liquides*, notamment celle proposée par M. Vibert et signalée au § XIII.3.3.5 :

$$K \simeq 1{,}7 \frac{Q_M}{H^2}$$

avec

Q_M = débit maximal du puits (réalisé pour $h = 0$) ;
H = épaisseur de l'aquifère.

Ces diverses méthodes sont basées sur l'hypothèse du régime permanent ; il est donc nécessaire d'attendre un temps suffisamment long avant d'exécuter les mesures ; on effectue généralement des relevés d'ensemble à différents moments et on en déduit les valeurs de K pour chacun des relevés ; on continue le pompage jusqu'à ce qu'on constate une uniformisation des valeurs de K.

Enfin on utilise de plus en plus fréquemment les formules de Theis et Jacob déduites de la théorie de *l'écoulement en régime variable.* Nous avons indiqué au § XIII.4.4 les méthodes pratiques permettant à l'aide de ces formules de déterminer la transmissivité $\tau = KH$ et le coefficient d'emmagasinement S, à partir des mesures du rabattement s effectuées sur un ou plusieurs piézomètres pendant la phase de pompage ou de remontée de la nappe après pompage.

XIII.6.2.1.2. *Injections*

Nous donnerons le principe des principales méthodes utilisées.

XIII.6.2.1.2.1. Méthode Lefranc

Soit un tube cylindrique à parois imperméables enfoncé dans le terrain jusqu'en un point O ; creusons autour de O une cavité sphérique de rayon r (fig. XIII.6.2.1.2.1) et introduisons dans le tube d'injection un débit constant Q. Lorsqu'un régime permanent est établi, les filets liquides sortent radialement de la poche, s'incurvent et gagnent la surface libre NN' de la nappe. Si r est suffisamment petit par rapport aux dimensions de l'aquifère autour de O, on peut admettre que le débit Q s'écoule à travers une succession de sphères concentriques de centre O. A travers une de ces sphères de rayon ρ la vitesse apparente de filtration est :

$$V = \frac{Q}{4\pi\rho^2}$$

En passant à la sphère de rayon $\rho + d\rho$, la charge diminue de dh ; le gradient hydraulique est donc

$$J = -\frac{dh}{d\rho}$$

et la loi de Darcy s'écrit :

$$V = -K\frac{dh}{d\rho}$$

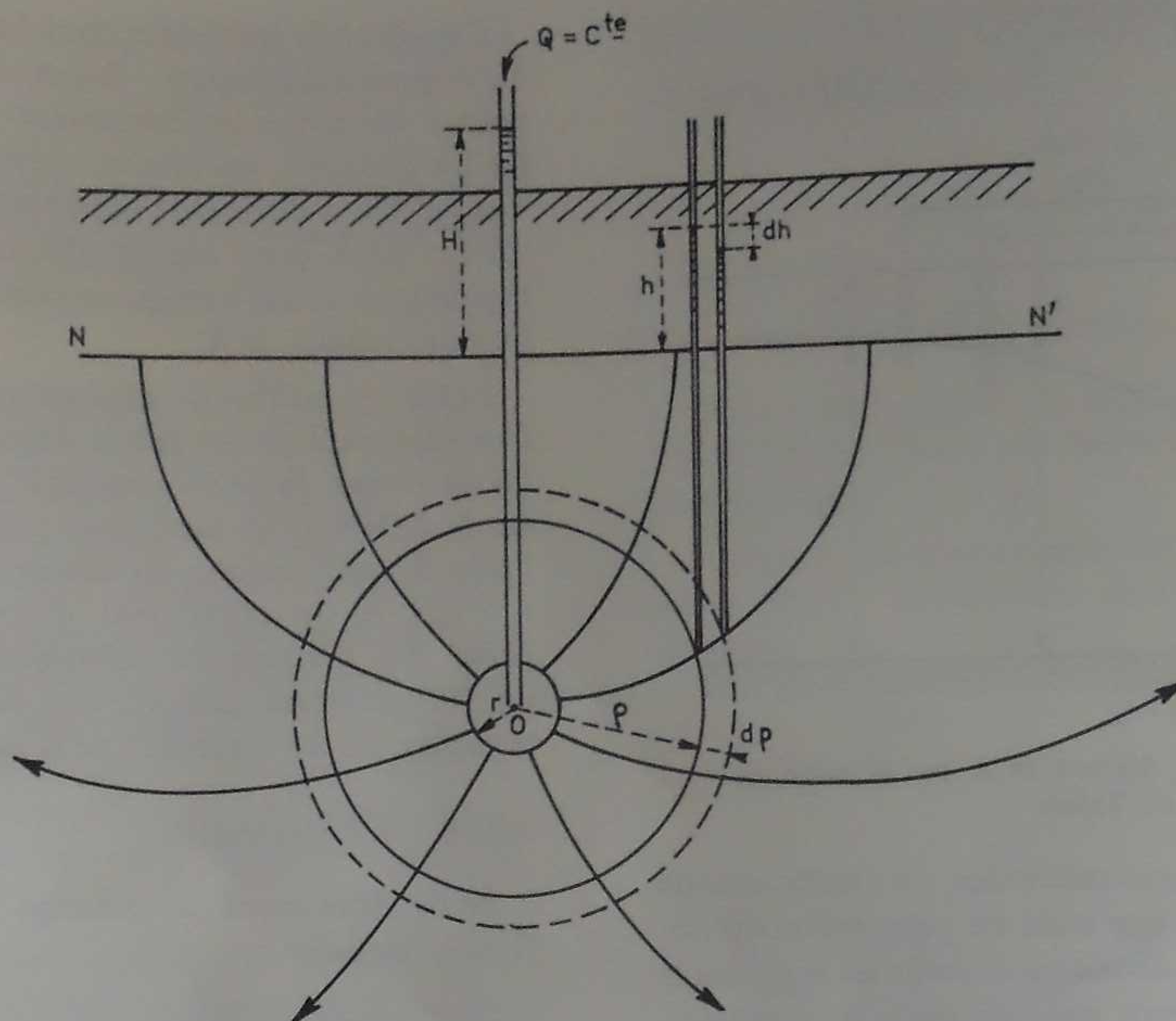


Fig. XIII.6.2.1.2.1 – Méthode Lefranc

En égalant les deux valeurs de V on obtient l'équation différentielle

$$\frac{Q}{4\pi K}\frac{d\rho}{\rho^2} = -\,dh$$

Intégrons entre la sphère de rayon r où la charge est H mesurée dans le tube d'injection et la sphère de rayon ρ où la charge est h. On obtient

$$\frac{Q}{4\pi K}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) = H - h$$

[XIII.6.2.1.2.1]

Or, des relations précédentes, on tire

$$\frac{Q}{4\pi K}\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = dh \quad \text{et} \quad \frac{Q}{4\pi K}\,d\left(\frac{1}{r}\right) = dH$$

d'où

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{dh}{dH}$$

$$d\left(\frac{1}{\rho}\right) dH = d\left(\frac{1}{r}\right) dh$$

$$\frac{H}{\rho} = \frac{h}{r} \quad \text{ou} \quad h\rho = Hr = C^{te}$$

h décroît donc hyperboliquement en fonction de ρ, de sorte que si ρ est suffisamment grand on peut négliger $1/\rho$ et h dans la relation [XIII.6.2.1.2.1] d'où on tire

$$K = \frac{Q}{4\pi r H}$$

On peut donc déduire K de la mesure de Q, r et H.

Remarques sur l'utilisation de la méthode Lefranc :

Pour alimenter le tube d'injection avec un débit constant on utilise un réservoir d'alimentation à niveau constant au-dessus de l'orifice de sortie. Il faut injecter de l'eau propre pour éviter le colmatage. Pour que le contour de la poche sphérique de rayon

r reste invariable pendant l'essai, on tapisse la poche d'une toile métallique à mailles fines. Si la poche n'est pas sphérique, on écrit

$$K = \frac{Q}{mH}$$

le coefficient m dépendant de la forme de la poche (pour une sphère : $m = 4\pi r$; pour une poche hémisphérique : $m = 2\pi r$).

XIII.6.2.1.2.2. Méthode Lugeon

L'essai de perméabilité Lugeon consiste à injecter de l'eau sous une pression déterminée dans un forage et dans une tranche de terrain limitée

– latéralement par les parois du forage,

– à la partie inférieure par le fond du forage,

– à la partie supérieure par un obturateur.

On mesure dans ces conditions la quantité d'eau absorbée sous pression constante. Par définition, une *unité Lugeon* (UL) correspond à l'absorption de un litre par minute et par mètre de forage sous une pression de 10 bars.

Pratiquement on injecte l'eau d'abord à pressions croissantes (2, 4, 6 et 8 bars) puis à pressions décroissantes ; chaque pression est maintenue constante pendant 10 minutes ; la pression P_m est lue au manomètre placé en surface, de sorte que la pression réelle au centre de la tranche de terrain essayée est

$$P = P_m + \overline{\omega}(h - j)$$

$\overline{\omega}$ = poids volumique de l'eau,

h = différence de cote entre le manomètre et le centre de la tranche de terrain essayée,

j = perte de charge dans les canalisations d'injection.

Les résultats observés permettent de tracer la courbe $P = f(Q)$ (fig. XIII.6.2.1.2.2). Si l'écoulement était laminaire, la courbe serait une droite ; en réalité le phénomène est perturbé par des colmatages et des débourrages du terrain, l'écoulement est parfois turbulent et la courbe $P(Q)$ n'est pas linéaire. On trace la droite passant par l'origine, tangente à la courbe, et on lit le débit Q_{10} sur la droite ainsi tracée en face de l'ordonnée 10 bars.

Le nombre d'unités Lugeon est alors :

$$UL = \frac{Q_{10}}{l}$$

Q_{10} en litres par minute

l = longueur de la passe essayée (en m)

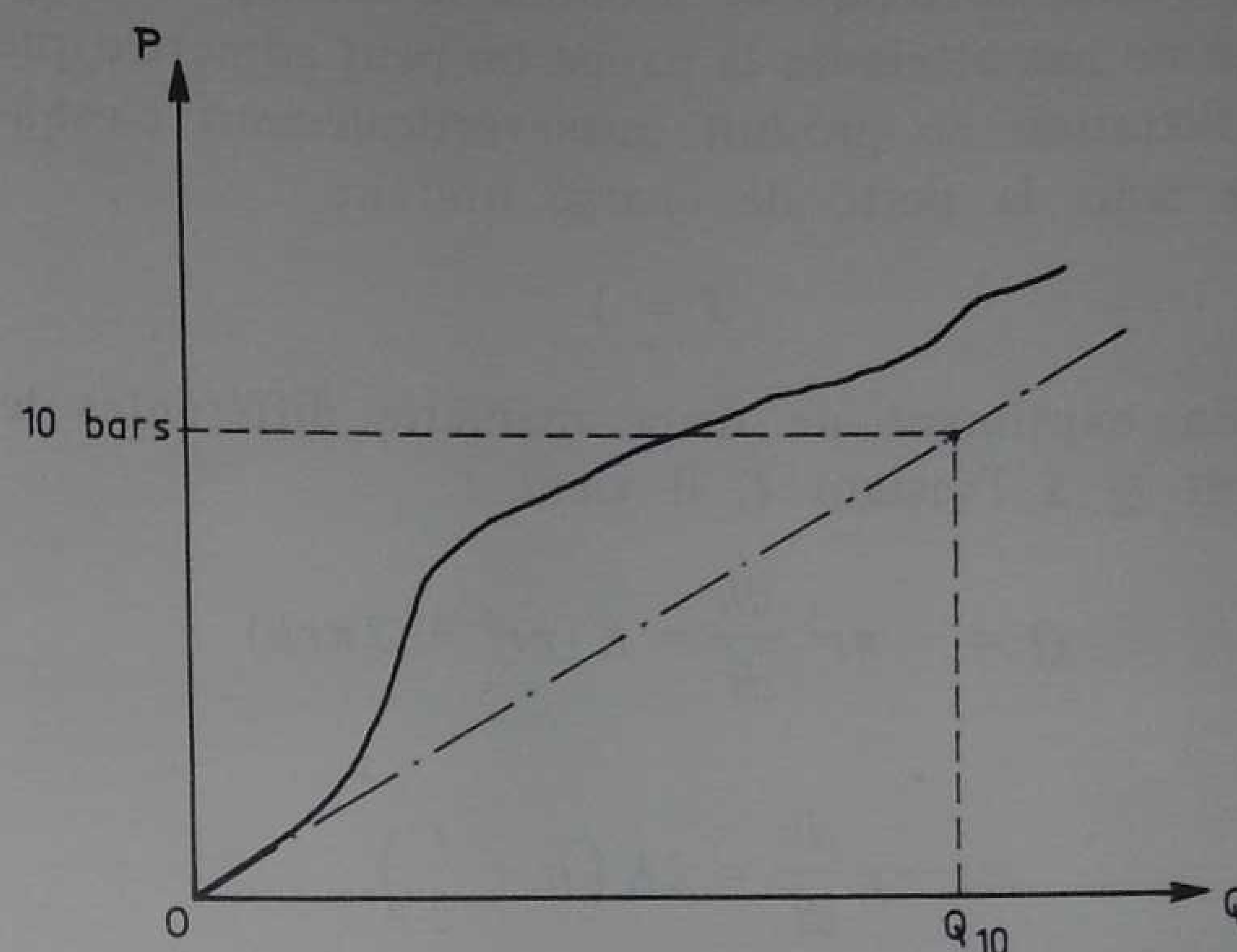


Fig. XIII.6.2.1.2.2 – Essai de perméabilité Lugeon

Dans le cas d'un terrain homogène perméable en petit (sable, gravier) on peut adopter la relation approximative

$$1\ UL = 10^{-7}\ \text{m/s}$$

La perméabilité Lugeon est couramment utilisée dans les travaux de reconnaissance des fondations de grands ouvrages (barrages).

XIII.6.2.1.3. *Mesure de K de la tranche superficielle d'un sol sec en vue de l'irrigation*

Cette méthode, proposée par Porchet, consiste à creuser un trou de sondage cylindrique qu'on remplit d'eau et à observer l'abaissement de la surface libre dans le sondage par suite de l'infiltration à travers le fond et les parois latérales qui, ici, sont perméables puisqu'il n'y a pas de tubage (fig. XIII.6.2.1.3.1).

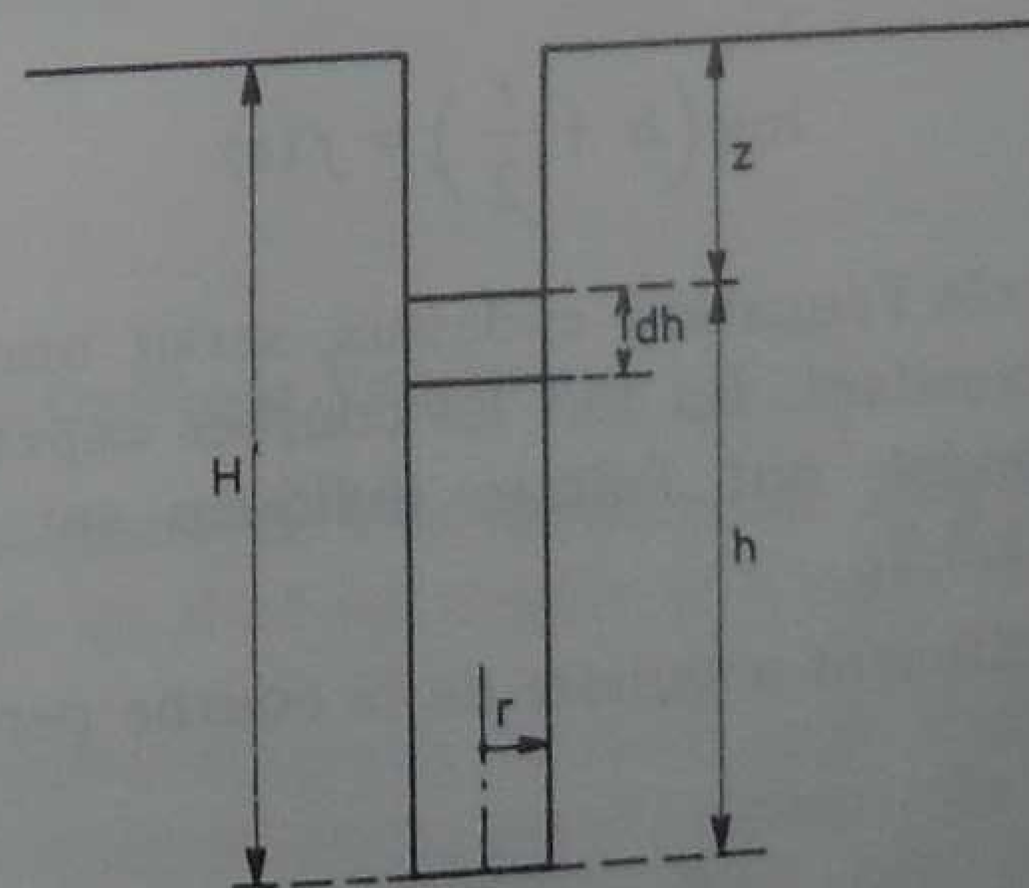


Fig. XIII.6.2.1.3.1

A un instant t la profondeur d'eau dans le sondage est h ; la surface libre s'abaisse de dh pendant l'intervalle de temps dt. Comme le sondage est supposé ne pas atteindre la nappe on peut admettre que l'infiltration se produit quasi-verticalement c'est-à-dire sous la perte de charge unitaire :

$$J = 1$$

En exprimant de deux manières différentes le débit Q à l'instant t, il vient :

$$Q = -\pi r^2 \frac{dh}{dt} = K(\pi r^2 + 2\pi r h)$$

ou

$$-r\frac{dh}{dt} = 2K\left(h + \frac{r}{2}\right)$$

$$-\frac{dh}{h + \frac{r}{2}} = \frac{2K}{r}\, dt$$

Intégrons entre les instants O et t auxquels correspondent respectivement les profondeurs h_0 et h ; il vient :

$$\mathcal{L}\left(h + \frac{r}{2}\right) = \mathcal{L}\left(h_0 + \frac{r}{2}\right) - \frac{2K}{r}\, t$$

ou, en passant aux logarithmes décimaux :

$$\log\left(h + \frac{r}{2}\right) = \log\left(h_0 + \frac{r}{2}\right) - \frac{2K}{2{,}3\, r}\, t$$

On relève par points la courbe limnigraphique $z(t)$ d'où on déduit $h(t)$:

$$h = H - z$$

On trace la courbe :

$$\log\left(h + \frac{r}{2}\right) = f(t)$$

qui, d'après l'équation ci-dessus, serait une droite si K était constant. En fait les courbes expérimentales ainsi relevées ont l'allure indiquée sur la figure XIII.6.2.1.3.2.

Le coefficient angulaire de la courbe permet d'obtenir K

$$K = \frac{2{,}3\, r}{2}\, \mathrm{tg}\, \alpha$$

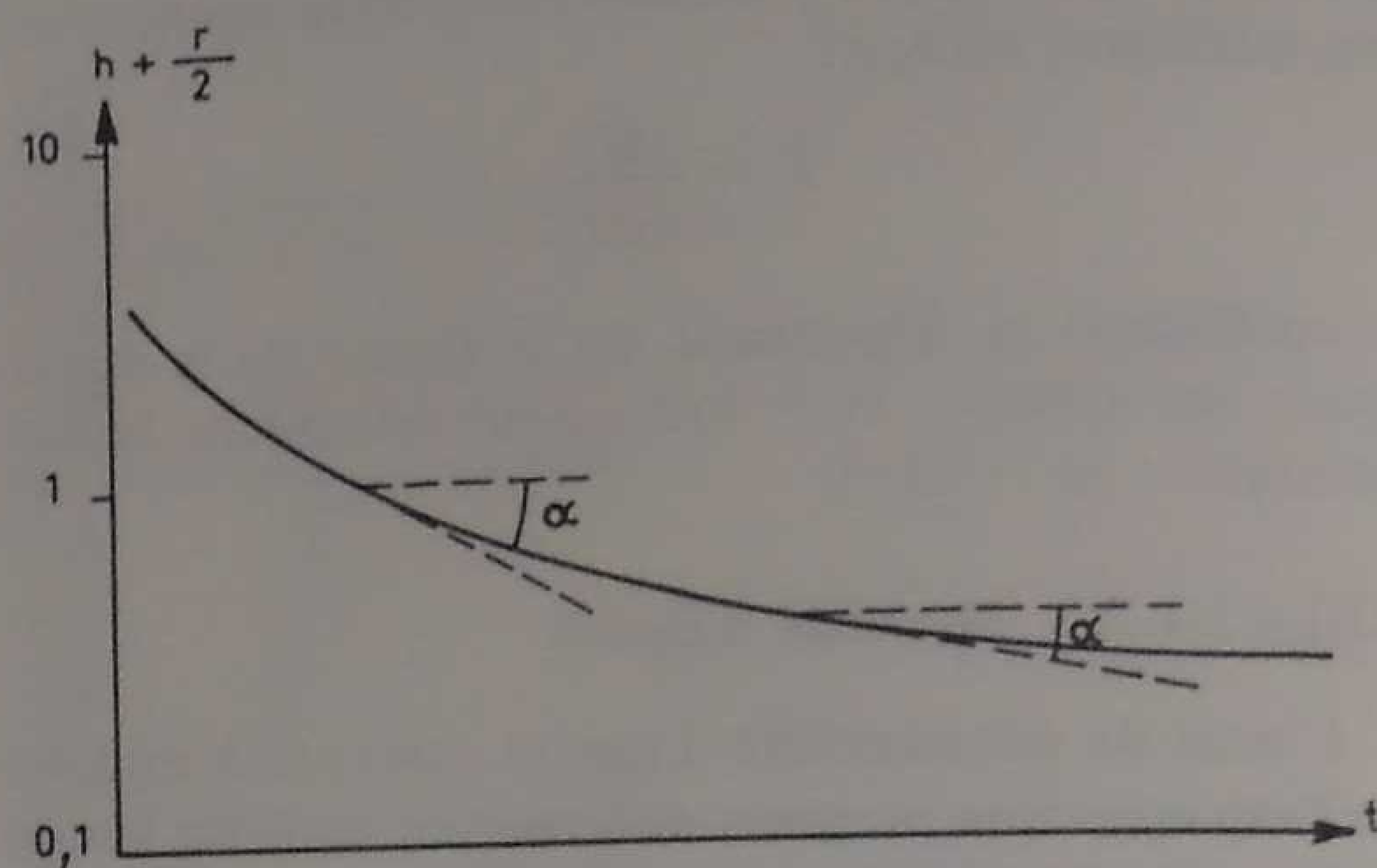


Fig. XIII.6.2.1.3.2

Cette méthode est simple et permet de connaître les valeurs de K pour la zone superficielle du sol ; pour cette raison elle est fréquemment utilisée pour l'étude des sols en vue de l'irrigation.

XIII.6.2.1.4. *Mesure de K de la tranche superficielle d'un sol gorgé d'eau en vue du drainage*

Cette méthode également proposée par Porchet consiste à réaliser dans un sondage un rabattement z par un pompage préalable, puis à noter le temps Δt nécessaire pour que le niveau dans le sondage remonte de Δz (fig. XIII.6.2.1.4).

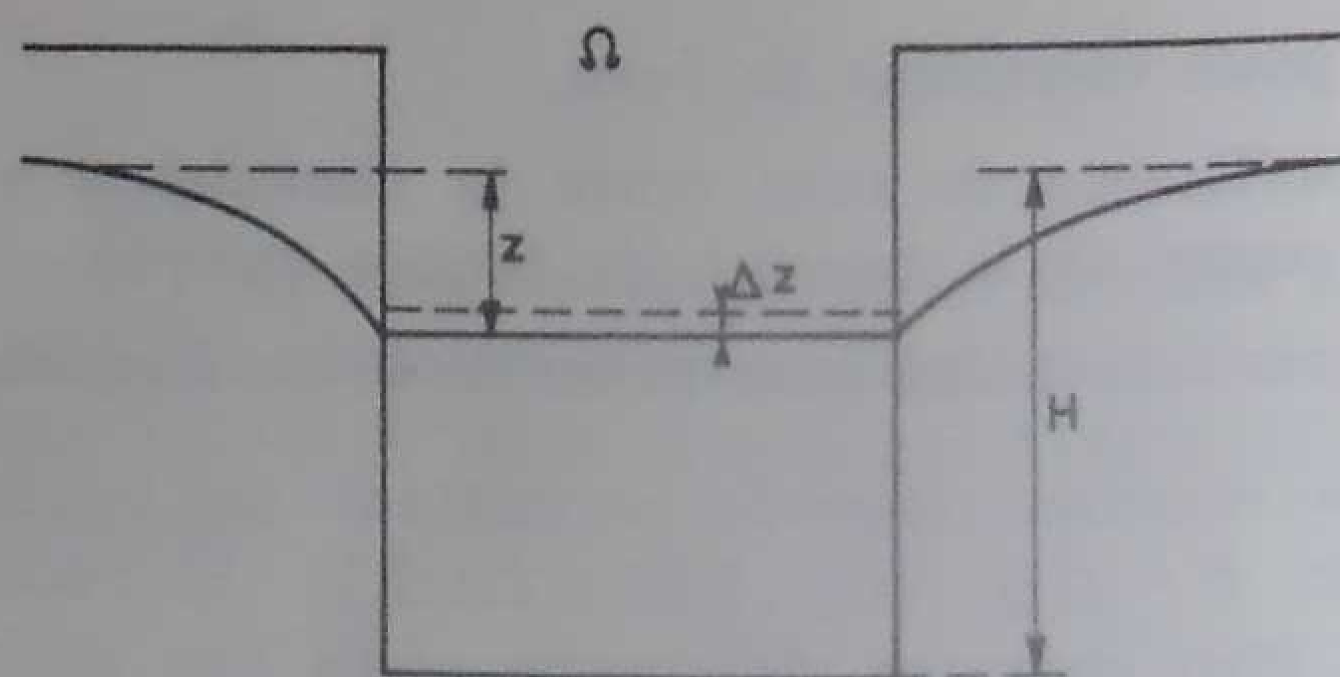


Fig. XIII.6.2.1.4

En appliquant à la nappe considérée la formule simplifiée proposée par Porchet :

$$Q = \frac{2}{3} K z'(2H' - z')$$

il vient :

$$Q = \Omega \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{2}{3} K z'(2H' - z')$$

avec :
$$H' = H + \frac{\Omega}{B} \quad \text{et} \quad z' = z - \frac{\Delta z}{2}$$

Ω = section droite du sondage ;

B = périmètre de la section droite du sondage.

On déduit K de la mesure de Ω, B, H, z, Δz et Δt.

Cette méthode a été perfectionnée par les Ingénieurs hollandais en relevant la courbe limnigraphique de remontée du niveau dans le sondage, après réalisation d'un rabattement suffisant à l'aide d'un pompage préalable (*méthode dite "du trou de tarière"* ou "auger-hole method").

XIII.6.2.2. *Méthodes de laboratoire*

On peut utiliser les *méthodes indirectes* consistant à mesurer le diamètre d des grains et à en déduire la valeur de K par les nombreuses formules qui ont été données à ce sujet et dont nous avons cité précédemment celle de Hazen (§ XIII.2.5.2).

Le plus souvent on utilise les *méthodes directes* qui consistent à prélever un échantillon du sol considéré et à mesurer le débit qui traverse une section donnée de cet échantillon sous une charge connue ; les appareils utilisés sont des *perméamètres*.

La *prise de l'échantillon* a une importance essentielle, il convient de prendre les plus grandes précautions pour que l'échantillon prélevé ne subisse pas de variations notables de ses caractéristiques hydrodynamiques c'est-à-dire de sa structure physique[1].

Deux appareils sont utilisés pour mesurer K sur l'échantillon ainsi obtenu :

— le *perméamètre à charge constante* dans le cas des sables ou graviers. On mesure le débit Q qui traverse par infiltration une longueur L de l'échantillon de section droite S sous une charge constante H.

On peut utiliser plusieurs dispositifs tel celui schématisé (fig. XIII.6.2.2.1) qui a été mis au point à la Station expérimentale d'Hydraulique agricole de Vergière et dans lequel :
$$J = \frac{H}{L}$$

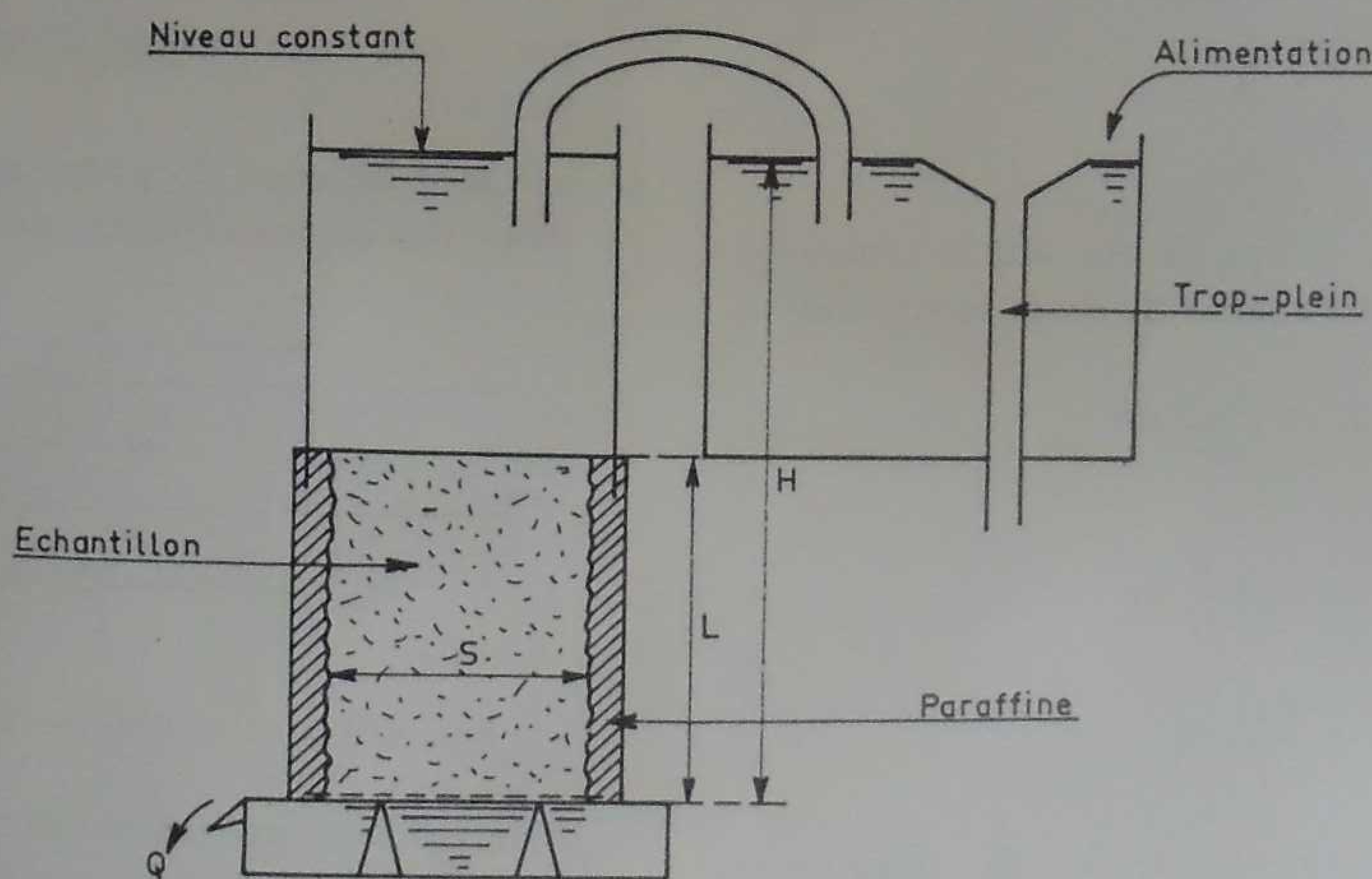


Fig. XIII.6.2.2.1 – Perméamètre à charge constante (méthode Vergière)

— le *perméamètre à charge variable* utilisé plutôt pour les terrains argileux (fig. XIII.6.2.2.2).

On verse en A un débit constant dans un tube vertical de section ω qui débouche à la partie inférieure de l'échantillon du sol étudié de hauteur H et de section Ω. Lorsque l'eau commence à s'écouler à la partie supérieure de l'échantillon, on cesse d'alimenter le tube en A et on mesure le temps $T = t_2 - t_1$

(1) On pourra se reporter à l'étude de M. Bourrier sur la mesure des caractéristiques hydrodynamiques des sols (*Annales de la Direction Générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole* – année 1954).

mis par le niveau dans ce tube pour descendre de M_1 à M_2.

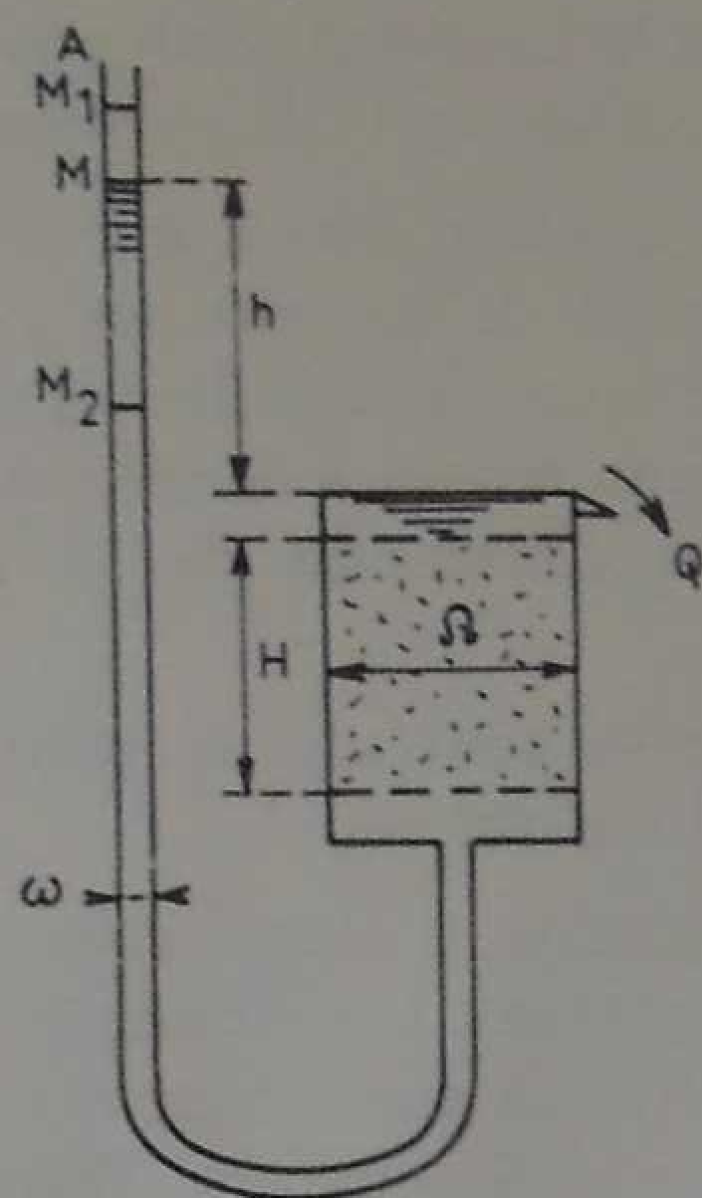


Fig. XIII.6.2.2.2 – Perméamètre à charge variable

A un instant t le niveau est en M correspondant à une charge h. La perte de charge dans le tube A est négligeable et h mesure la perte de charge à l'instant t au travers de l'échantillon. La loi de Darcy s'écrit donc :

$$Q = K\Omega \frac{h}{H}$$

Pendant l'intervalle de temps dt qui suit le temps t, le niveau dans le tube A s'abaisse de dh et le volume écoulé est :

$$dV = Q\,dt = -\,\omega\,dh$$

d'où l'équation :

$$-\,\omega\,dh = K\Omega \frac{h}{H}\,dt$$

$$-\,\omega \frac{dh}{h} = \frac{K\Omega}{H}\,dt$$

Soient h_1 et h_2 les valeurs de h aux instants t_1 et $t_2 (t_2 > t_1)$.

En intégrant l'équation précédente entre ces deux limites il vient :

$$\omega \mathcal{L} \frac{h_1}{h_2} = K \frac{\Omega}{H} T$$

d'où

$$K = \frac{\omega H}{\Omega T} \mathcal{L} \frac{h_1}{h_2}$$

XIII.6.3. Electrosmose

On sait que lorsque deux métaux différents sont mis en présence, il se produit sur chacun d'eux une migration d'électrons et il apparaît une différence de potentiel à la surface de séparation des deux métaux.

Le même phénomène se produit au contact de deux corps autres que des métaux, en particulier au contact de l'eau et du sol. De ces deux corps c'est l'eau qui possède la constante diélectrique la plus forte ; l'eau se chargera donc positivement et le sol négativement.

Si donc dans une colonne de sable saturé d'eau (fig. XIII.6.3.1) on dispose deux électrodes distantes de l entre lesquelles on maintient une différence de potentiel constante U, on constate que le phénomène d'électrosmose se traduit par une vitesse V_0 du liquide dirigée vers l'électrode négative ; cette vitesse est proportionnelle à l'intensité du champ électrique soit

$$V_0 = K_e \frac{U}{l}$$

K_e est la vitesse de filtration due à l'électrosmose par unité de champ électrique (en m/s par volt/m) ;

U est la différence de potentiel (en volts) entre les deux électrodes distantes de l (m).

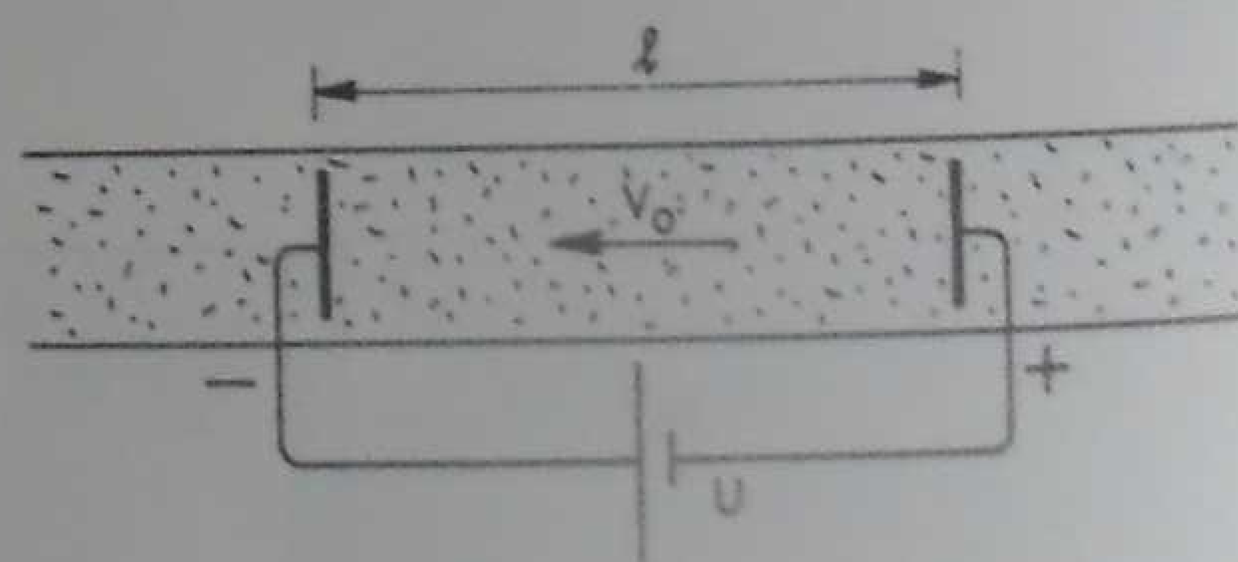


Fig. XIII.6.3.1 – Principe de l'électrosmose

Si le gradient hydraulique $J = H/l$ et la différence de potentiel U agissent en sens opposé (fig. XIII.6.3.2) on observe un état d'équilibre tel que :

$$V = KJ + K_e E = 0$$

ou

$$K \frac{H}{l} + K_e \frac{U}{l} = 0$$

U représentant la différence de potentiel maintenue entre les deux électrodes distantes de l.

H représentant la hauteur d'eau correspondant à la charge qui équilibre U.

De la relation précédente on tire :

$$K_e = K \frac{H}{U} \quad \text{(au signe près)}$$

ce qui permet de déterminer K_e au laboratoire.

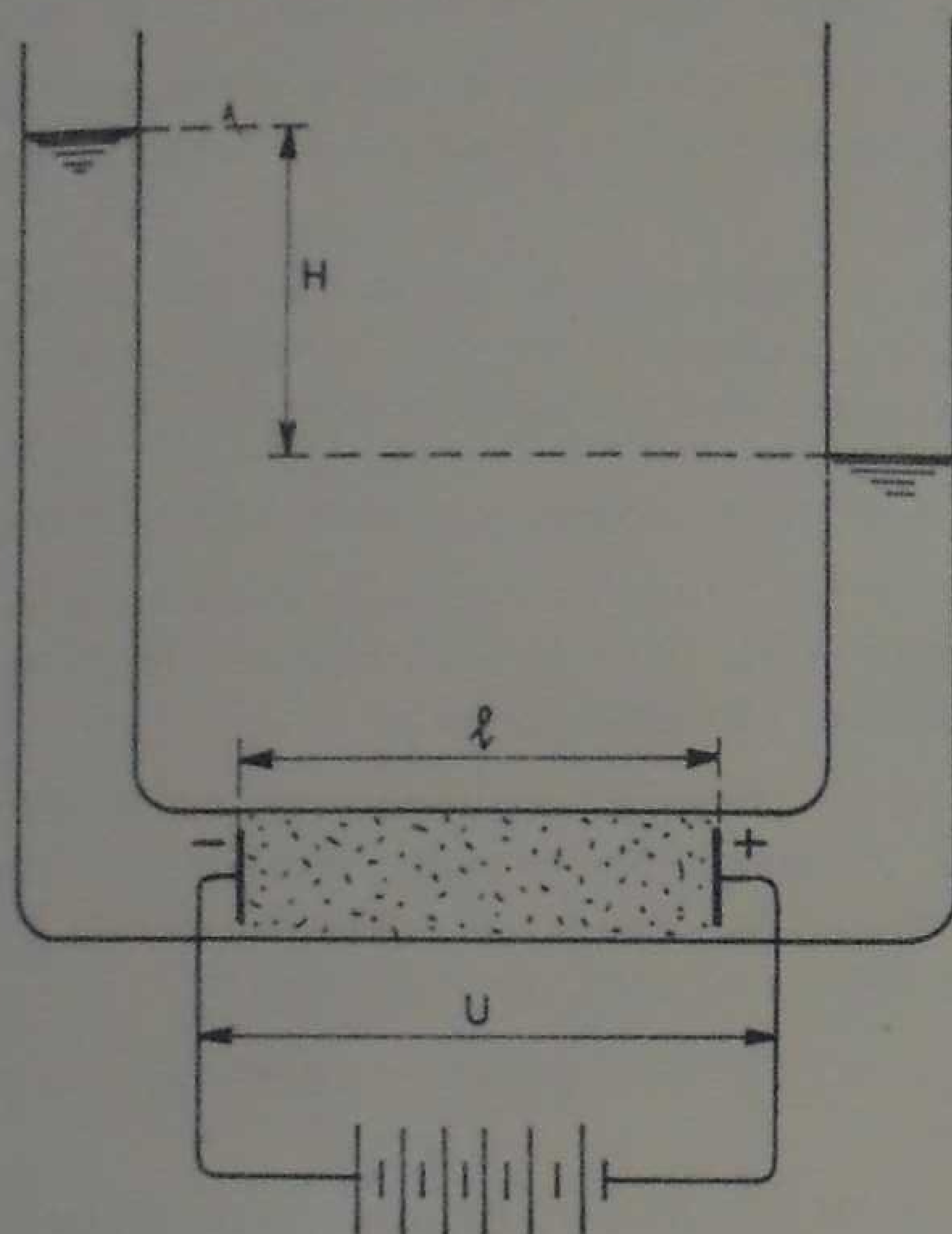


Fig. XIII.6.3.2 – Mesure expérimentale de la vitesse de filtration due à l'électrosmose

Pratiquement K_e est de l'ordre de 5×10^{-5} cm/s par volt/cm et le champ électrique qu'on peut appliquer au terrain ne peut guère dépasser 0,5 volt/cm, de sorte que l'électrosmose conduit à des vitesses de déplacement du liquide atteignant au maximum

$$V_0 = K_e E = 2{,}5 \times 10^{-5} \text{ cm/s}.$$

Si on compare les valeurs de K_e et V_0 à celles de K et de $V = KJ$, on constate que l'électrosmose est susceptible d'accroître très sensiblement le débit de filtration dans des terrains relativement peu perméables (argiles ou limons fins pour lesquels K est de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-5} cm/s) mais, sauf si le gradient hydraulique J est très petit, son influence sera faible en valeur relative dans le cas de terrains perméables (sables fins et grossiers pour lesquels K est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-2} cm/s).

Dans les argiles compactes et autres terrains argileux il est possible que dans certains cas l'action du courant électrique contribue à créer ou agrandir un réseau de fissures à travers le massif à drainer ce qui facilite la filtration. Effectivement les phénomènes d'électrosmose sont parfois utilisés pour améliorer le drainage des fondations.

On applique également ce procédé à l'*assainissement des maçonneries* construites dans les terrains humides ; on peut y constater l'existence d'une différence de potentiel entre deux tiges de métal enfoncées l'une dans le mur, l'autre dans la terre voisine ; c'est cette différence de potentiel qui, s'ajoutant à l'effet d'ascension capillaire, favorise la montée de l'eau dans le mur.

Le procédé d'électrosmose pour l'assèchement des murs humides consiste donc à placer à la base des constructions atteintes des sondes métalliques scellées avec un mortier spécial et qui sont reliées à un circuit de terre. Sous l'influence de la différence de potentiel ainsi réalisée l'eau redescend vers le sol à l'intérieur de la maçonnerie (fig. XIII.6.3.3).

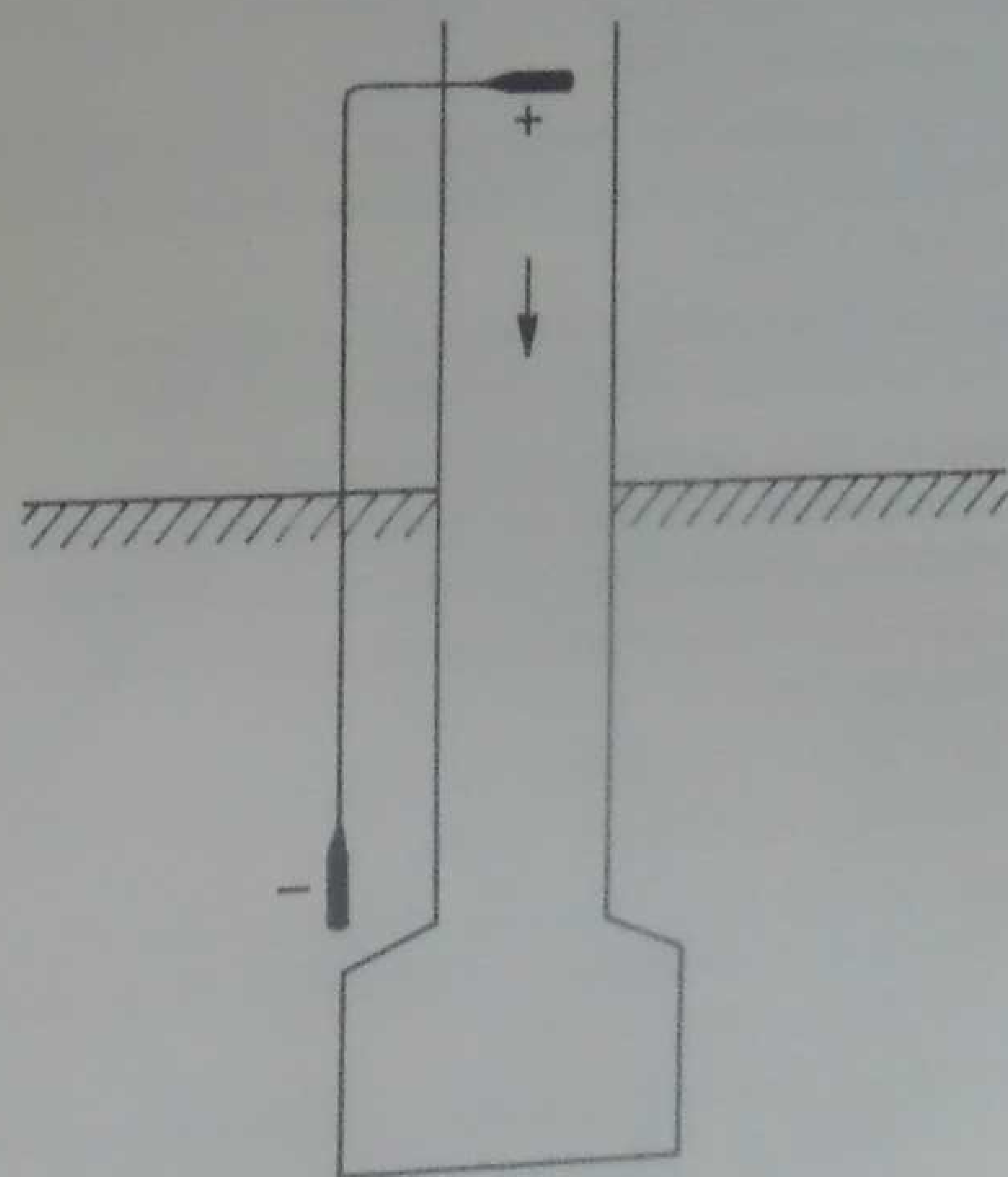


Fig. XIII.6.3.3 – Assèchement des maçonneries par électrosmose

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre XIII

1 — *Etudes générales*

Association Internationale d'Hydrologie scientifique. Symposium de Haïfa : Alimentation artificielle et aménagement des nappes aquifères, publication n° 72, 1967.

Association Internationale d'Hydrologie scientifique. Assemblée générale de Berne : Eaux souterraines, publication n° 77, 1968.

Association Internationale d'Hydrologie scientifique. Assemblée générale de Berne : Géochimie, précipitation, évaporation, humidité du sol, hydrométrie, publication n° 78, 1968.

Association Internationale d'Hydrologie scientifique : Eau dans la zone non saturée (2 vol.), publications n° 82 et 83, 1968.

BORELLI (M.).— Contribution à l'étude des milieux poreux. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 305, 1955.

BREMOND (R.).— *Contribution à l'interprétation des mesures de débit et de rabattement des nappes souterraines.* Ed. Gauthier-Villars, 1965.

BREMOND (R.), CHERET (I.) et PARSY (C.).— *Mesures piézométriques et essais de pompage dans les nappes souterraines. Application à l'estimation de la puissance d'une nappe*, 1961.

Bureau des Recherches Géologiques et Minières (BRGM). *Méthodes d'études et de recherches des nappes aquifères* (tome 1), 1962.

Bureau des Recherches Géologiques et Minières (BRGM). *Formulaire de l'hydrogéologue*, Juin 1967.

CAMBEFORT (H.), GERBER (Ch. S.) et VU-DUONG-TUYEN — Contribution à l'étude des écoulements dans les milieux stratifiés. Revue *Construction*, n° 11, Novembre 1963.

CASTANY (G.).— *Traité pratique des eaux souterraines.* Ed. Dunod, 1967.

CASTANY (G.).— *Prospection et exploitation des eaux souterraines.* Ed. Dunod, 1968.

CEDERGREN (H.R.).— *Seepage, Drainage and Flow Nets.* (Réseaux d'écoulements d'infiltration et de drainage). Ed. Wileg, Londres 1967.

DANEL (P.).— La mesure des débits des eaux souterraines. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 133, 15 Janvier 1958.

DE GELIS (E.).— Eléments d'hydraulique souterraine. *Notes et mémoires du Centre des études hydrogéologiques du Maroc*, n° 136, Rabat, 1956.

DUPONT (A.).— *Hydraulique urbaine — Tome 1 : hydrologie, captage et traitement des eaux.* Ed. Eyrolles 1969.

EMSELLEM (Y.).— Les transferts de pression entre nappes et la drainance dans les ensembles aquifères hétérogènes. *Chronique d'Hydrogéologie*, éditions BRGM, n° 11, 1967.

FERRANDON (J.).— Mécanique des terrains perméables. *La Houille Blanche*, n° 4, 1954 ; n^{os} 1, 2 et 3, 1955.

GLOVER (R.E.).— *Ground water movement.* (Ecoulement des eaux souterraines). Bureau of Reclamation, monographie n° 31, 1965.

GUYON (G.).— Note sur les écoulements en terrain homogène saturé d'eau. Revue *l'Eau*, n° 8, Août 1957.

HENRY (M.).— Contribution à l'étude des nappes phréatiques. *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 5, Septembre-Octobre 1963.

HOUPEURT — Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux. *Revue de l'Institut français du pétrole et Annales des combustibles liquides*, 1958.

MAYER (A.).— *Les terrains perméables.* Ed. Dunod, 1947.

REGAMEY (P.).— *Etude de quelques écoulements souterrains et superficiels dans les sols assainis.* Imprimerie de la Concorde, Lausanne, 1943.

SANZOT (E.).— Théorie mathématique de la filtration de l'eau à travers les terrains meubles ou fissurés. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 198, 15 Juin 1963 ; n° 200, 15 Août 1963.

SCHNEEBELI (G.).— *Hydraulique souterraine.* Ed. Eyrolles, 1966.

SCHOELLER (H.).— *Hydrologie des régions arides — Progrès récents.* UNESCO, Collection Recherches sur la zone aride, 1959.

SCHOELLER (H.).— *Les eaux souterraines, hydrologie dynamique et chimique, recherche, exploitation et évaluation des ressources.* Ed. Masson, 1962.

TODD (D.K.).— *Ground water Hydrology.* John Wiley and Sons, New-York, 1959.

VIBERT (A.).— Contribution à l'étude des gisements aquifères diaclasés. Revue *l'Eau*, n° 5, Mai 1967.

ZAOUI (J.).— Les écoulements en milieu poreux et l'hypothèse de Dupuit. *La Houille Blanche*, n° 3, 1964.

Divers auteurs — *Hydraulique des sols.* Compte-rendus des journées d'hydraulique des sols organisées les 27, 28 et 29 novembre 1968, à Paris, par la Section de mécanique des sols du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. *Bulletin de liaison des laboratoires routiers*, n° spécial X, avril 1970.

2 — *Caractéristiques hydrodynamiques des sols*

AMIRSADRI (A.), KOPP (C.) et ZILLIOX (L.).— Sur un facteur essentiel du cycle naturel de l'eau : sa vitesse de circulation dans les terrains perméables. *Terres et Eaux*, n° 58, Janvier-Mars 1969.

BOURRIER (J.).— Mesures des caractéristiques hydrodynamiques des sols à la station expérimentale d'hydraulique agricole (Vergière). *Annales techniques de la Direction Générale du Génie Rural et de l'Hydraulique agricole*, 1954.

BOURRIER (J.).— La mesure des caractéristiques hydrodynamiques des sols par la méthode Vergière. *Bulletin technique du Génie Rural*, n° 73, Septembre 1965.

BRILLANT (J.).— Appareil pour la mesure de la perméabilité dans le terrain en place. *Le Génie civil*, n° 15-16, 1-15 Août 1960.

DERAMPE (P.) — La perméabilité des terrains (définition, mesures, applications pratiques). *Le Moniteur des Travaux publics et du bâtiment*, n° 47, 22 Novembre 1958.

FORKASIEWICZ (J.).— *Interprétation des données des pompages d'essai pour l'évaluation des paramètres des aquifères.* BRGM, Document 69 SGL 293 HYD, Décembre 1969.

GUYON (G.).— La mesure de la perméabilité par la méthode des piézomètres en vue du calcul des dimensions du drainage. *Science du sol*, 2ème trim. 1964.

LACHAUD (R.).— L'application des radio-isotopes aux mesures de densité et de teneur en eau sur le terrain. *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics*, nos 175-176, Juillet-Août 1962.

LEFRANC (E.).— Procédé de mesure de la perméabilité des sols dans les nappes aquifères et applications au calcul du débit des puits. *Le Génie civil*, n° 15, 10 Octobre 1936.

LEFRANC (E.).— La théorie des poches absorbantes et son application à la détermination du coefficient de perméabilité des terrains en place et au calcul du débit des nappes d'eau. *Le Génie civil*, n° 20, 13 Novembre 1937.

MARCESSE (J.).— L'humidimètre à neutrons. Revue *l'Eau*, n° 5, Mai 1963.

MARTIN (P.).— Les coefficients de perméabilité des roches. Unités de perméabilité. Revue *l'Eau*, n° 9, Septembre 1960.

MARTIN (P.).— Les essais de perméabilité dans les sondages. (méthode Lefranc). Revue *l'Eau*, n° 6, Juin 1961.

MULLER-FEUGA (R.) et RUBY (P.).— Réflexions sur la porosité et la limite inférieure de la loi de Darcy. *La Houille Blanche*, n° A, Juillet 1961.

SOEIRO (F.).— Quelques recherches de mécanique des sols – Succion. *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics*, n° 110, 1957.

VAN BEERS (W.F.J.).— The Auger hole method (La méthode du trou de tarière) (traduction française). *Bulletin du Centre de Recherches et d'expérimentation du Génie Rural*, n° 32 H.S., Février 1959.

VIBERT (A.).— La détermination *"in situ"* de la porosité relative des gisements alluvionnaires. *Le Génie civil*, n° 18, 15 Septembre 1963.

3 — Lois de l'écoulement souterrain

CHAUVETEAU (G.).— Essais sur la loi de Darcy et les écoulements laminaires. *Thèse de l'Institut de Mécanique des fluides de Toulouse*, 1965-66.

CHAUVETEAU (G.) et THIRRIOT (C.).— Régimes d'écoulement en milieu poreux et limite de la loi de Darcy. *La Houille Blanche*, n° 2, 1967.

FERRARI (F.).— Considérations théoriques et pratiques sur la loi de Darcy et les formules de Dupuit. *Bulletin du Centre de Recherches et d'expérimentation de Génie Rural*, n° HS 26, Mai 1957.

HLAVEK (R.).— Réflexions sur la théorie de Dupuit et sur une hypothèse contradictoire émise par M. Achten quant à la répartition des vitesses dans une nappe aquifère. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 148, 15 Avril 1959.

KOCH (P.) et VIBERT (A.).— La filtration des eaux. *Deuxièmes Journées de l'Hydraulique de la SHF*, Grenoble, Juin 1952.

SCHNEEBELI (G.).— Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration. *La Houille Blanche*, n° 2, Mars-Avril 1955.

SOFIRO (A.).— Mouvement et répartition de l'humidité dans les sols. *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics*, n° 175-176, Juillet-Août 1962.

VACHAUD (G.).— Vérification de la loi de Darcy généralisée et détermination de la conductivité capillaire à partir d'une infiltration horizontale. *Association internationale d'hydrologie scientifique*, vol. 1, publ. n° 82, 1968.

4 — Méthodes analytiques d'étude des écoulements souterrains. Régimes non permanents

BEAR (J.) et TODD (D.K.).— *The transition zone between fresh and salt water in coastal aquifers* (La zone de transition entre les eaux douces et les eaux salées dans les nappes aquifères au voisinage de la mer) (Water Resources Center, contribution n° 29, Hydraulic Laboratory, University of California, Berkeley, 1er Septembre 1960.

BERKALOFF (E.).— *Effet de capacité des puits sur la dépression du niveau piézométrique. Limites de validité des formules de Theis et de Jacob.* BRGM, Document DS 66 A 128, Décembre 1966.

BONNET (M.), SUZANNE (P.) et UNGEMACH (P.).— Interprétation des essais de pompage en régime transitoire. *Terres et Eaux*, n° 54, 1968.

CASSAN (M.).— Exemples d'étude de filtration en régime non permanent. Revue *Construction*, n° 5, Mai 1962.

DASSONVILLE (G.).— Modalités d'exécution des essais de débit. Revue *l'Eau*, n° 11, Novembre 1965.

FERRARI (F.).— Théorie du puits – Application à la méthode de Porchet. *La Houille Blanche*, n° 8, 1964.

HOUDAILLE (A.) et DE MARSILLY (G.).— Débits soustraits à une rivière par un pompage effectué dans une nappe alluviale – Application aux périodes d'étiage. Revue *l'Eau*, n° 1, Janvier 1969.

HUARD DE LA MARRE (P.) et SCHNEEBELI (G.). – Nouvelles méthodes de calcul pratique des écoulements de filtration non permanents à surface libre. *La Houille Blanche*, n° B, 1953.

LANGENFELD (F.) et UNGEMACH (P.).— L'interprétation des essais de pompage en régime transitoire par la méthode d'identification : modification des abaques existants. Revue *l'Eau*, n° 4, Avril 1967.

MATTA (G.).— Application de la méthode de relaxation à l'étude de quelques écoulements en milieu poreux. *La Houille Blanche*, n° B, 1957.

SNEL (M.J.).— Détermination pratique des débits et des limites des nappes aquifères. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 173, 15 Mai 1961.

THONY (J.L.) et VACHAUD (G.).— Ecoulements non permanents des nappes à surface libre. Prise en compte de la zone non saturée. Critique des modèles analogiques classiques. *Bulletin de l'Association internationale d'hydrologie scientifique*, n° 2, Juin 1969.

VACHAUD (G.).— Etude du régime transitoire de l'écoulement de l'eau pendant le drainage des nappes à surface libre. *La Houille Blanche*, n° 5, 1968.

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).— Soluções novas de alguns problemas clàssicos de hidràulica subterrânea. (Solutions nouvelles de quelques problèmes classiques d'hydraulique souterraine) *Memorias da Ordem dos Engenheiros*, n° 186, Mars-Avril 1964.

VIBERT (A.).— Sur une démonstration rigoureuse des formules de Dupuit. *Le Génie civil*, 1er Janvier 1954.

DE VULPILLIERES (B.).— Formules de non-équilibre pour les essais de débit des nappes aquifères. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 265, Janvier 1969.

5 — *Méthodes analogiques d'étude des écoulements souterrains – Modèles mathématiques*

AGUIRRE-PUENTE (J.) et LE FUR (B.).— La visualisation des écoulements entre deux plaques parallèles rapprochées. (application aux milieux poreux) *La Houille Blanche*, n° 5, Août-Septembre 1963.

BEAR (J.) et TODD (D.K.).— *River seepage investigation*. (Recherches sur l'infiltration à partir des rivières) Water Resources Center, contribution n° 20, Hydraulic Laboratory, University of California, Berkeley, 1er Septembre 1959.

EMSELLEM (Y.) et PRUDHOMME (P.).— Traitement des mesures hydrogéologiques à l'aide de modèles. *Annales des Mines*, Janvier 1967.

GUELIN (P.) et VACHAUD (G.).— Equations et modèles mathématiques pour le calcul des transferts d'eau dans la zone de sol non saturée. *La Houille Blanche*, n° 8, 1969.

GUILLOT (M.).— Un problème d'évaluation des ressources aquifères souterraines – Etude par modèle mathématique (cas du Chott-El-Chergui, hautes plaines oranaises) *Annales des Ponts et Chaussées*, n° 6, Novembre-Décembre 1962.

HUARD DE LA MARRE (P.).— Résolution de problèmes d'infiltrations à surface libre au moyen d'analogies électriques. *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, n° 340, 1958.

HURTADO (J.).— Représentation des points à l'infini dans l'analogie électrique. *Le Génie civil*, n° 1, Janvier 1967.

LAGARDE (A.) et LANCHON (M.).— Simulation par modèle mathématique des écoulements souterrains permanents et transitoires – Application à l'étude de l'exploitation des nappes. *La Houille Blanche*, n° 2, 1967.

PRUDHOMME (P.), ROGNON (P.) et SOUQUET (G.).— Analyse critique de la validité des études de nappes souterraines à l'aide de modèles. *La Houille Blanche*, n° 2, 1967.

PRUDHOMME (G.), ROGNON (P.) et UNGEMACH (P.).— Etude sur modèle analogique électrique de l'alimentation par le Rhin de la nappe phréatique d'Alsace. *La Houille Blanche*, n° 5, 1968.

RENARD (G.).— Aperçu sur l'application des méthodes analogiques à l'étude des écoulements de filtration. *Bulletin technique de la Suisse Romande*, n° 17, 23 Août 1969.

6 — *Puits, galeries, drains, barrages et digues en terre*

BIZE (J.).— Données sur l'emploi des forages d'injection pour l'alimentation artificielle des nappes souterraines. *Terres et Eaux*, n° 58, Janvier-Mars 1969.

BREMOND (R.).— *La construction des puits de captage d'eau*. Ed. Gauthier-Villars, 1965.

BRILLANT (J.).— Débit des puits cylindriques pénétrant partiellement la nappe aquifère. *La Houille Blanche*, n° B, Décembre 1962.

CARLIER (M.).— L'hydraulique des nappes de drainage par canalisations souterraines. *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics*, n° 185, Mai 1963.

CAZENOVE (E.).— Rabattement d'une nappe à surface libre exploitée par puits ou tranchées. *La Houille Blanche*, n° 3, Mai-Juin 1961.

DE VRIES (C.A.) et VAN BAAK (B.C.P.H.).— *Drainage of agricultural land. A bibliography*. (Bibliographie du drainage des terres agricoles) International Institute for Land Reclamation and Improvement, publication n° 5, 1966.

DUMM (L.D.).— Subsurface drainage by transient-flow theory (Le drainage souterrain calculé par la théorie de l'écoulement transitoire) *Journal of the Irrigation and Drainage Division*, Proceedings of the A.S.C.E., U.S.A., vol. 94, n° IR 4, Décembre 1968.

EFTHYMIATOS (J.).— *Contribution à l'étude des écoulements à travers les digues et les barrages en terre*, Thèse de l'Institut de Mécanique des fluides de Toulouse, 1965-1966.

FERRARI (F.).– Théorie du puits en écoulement non permanent. *La Houille Blanche*, n° B, 1958.

GUYON (G.).– Quelques considérations sur la théorie du drainage et premiers résultats d'expérimentation. *Bulletin technique du Génie Rural* n° 52, Septembre 1961.

GUYON (G.).– L'expérimentation en matière de drainage agricole par canalisations souterraines. *Le Génie Rural*, n° 1, Janvier 1964.

GUYON (G.).– Considérations sur l'hydraulique des nappes de drainage par canalisations souterraines. *Bulletin technique du Génie Rural*, n° 65, Janvier 1964.

GUYON (G.).– Considérations sur l'hydraulique du drainage des nappes – Théorie et expérimentation. *Terres et Eaux*, n° 46, 1965.

GUYON (G.).– Considérations sur l'hydraulique du drainage des nappes. *Bulletin technique du Génie Rural*, n° 79, Novembre 1966.

GUYON (G.).– Calcul de la distance entre les drains dans un système de drainage. *Terres et Eaux*, n° 50, 1967.

GUYON (G.).– Notions sur les bases scientifiques du drainage agricole par canalisations souterraines. *L'équipement agricole*, Décembre 1967.

GUYON (G.).– Le drainage des "nappes perchées". *Bulletin technique du Génie Rural*, n° 102, Janvier 1970.

HABIB (J.) et HUGUES (L.).– Sur les nappes de drainage en régime variable. *Revue générale de l'Hydraulique*, n^{os} 55-56, Janvier-Avril 1950.

HALL (H.P.).– Recherches concernant l'écoulement permanent alimentant un puits gravitaire. *La Houille Blanche*, Janvier-Février 1955.

HAZAN (R.).– Contribution à l'explication des phénomènes intervenant lors d'un pompage dans un forage n'atteignant par l'imperméable. *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 161, 15 Mai 1960.

LABYE (Y.).– Note sur la formule de Hooghoudt. *Bulletin technique du Génie Rural*, n° 49, Octobre 1960.

LE MOIGNE (G.).– La détermination des pressions interstitielles dans les barrages en terre. Revue *Travaux*, Décembre 1957, Février et Mars 1958.

MATTA (G.).– Formules empiriques pour la détermination de la surface libre dans les écoulements à travers les digues en terre. *Le Génie civil*, 1er Juin 1961.

SCHNEEBELI (G.).– *Sur l'hydraulique des puits*. Symposia Darcy, Association internationale d'Hydrologie scientifique, publication n° 41, 1956.

SINE (L.).– Le dimensionnement rationnel d'un réseau de drainage agricole. *Annales de Gembloux*, vol. 71, 1965.

SINE (L.) et VERMEIREN (L.).– Contribution à l'étude hydraulique des nappes de drainage. *Bulletin de l'Institut agronomique et des Stations de recherches de Gembloux*, n° 3, année 1965.

U.R.S.S.– Ministère de la production électrique – *Code of practice for the design of hydraulic structures – Underground contour of dams on non-rocky foundations* – (Guide pratique pour les projets d'ouvrages hydrauliques – Tracé du profil des digues sur des fondations perméables) traduction anglaise d'un ouvrage russe.

VAN BEERS (W.F.J.).– Quelques nomogrammes pour le calcul des espacements des drains. *Terres et Eaux*, n° 47, 1966.

VAN HOORN (J.W.).– Principes fondamentaux du drainage des terres. *Bulletin annuel 1964 de la Commission internationale des irrigations et du drainage*.

VARLET (H.).– *Barrages-réservoirs – tome III : barrages en terre et en enrochements*. Ed. Eyrolles, 1966.

VIBERT (A.).– Sur un cas particulier d'écoulement d'une nappe aquifère. *La Technique de l'eau*, n° 144, 15 Décembre 1958.

VIBERT (A.).– La mesure "in situ" de la valeur approchée du coefficient de perméabilité des terrains alluvionnaires. *Le Génie civil*, n° 19, 1er Octobre 1961 et *Techniques et Sciences municipales*, n° 11, Novembre 1961.

VIBERT (A.).– La hauteur de résurgence dans les puits. *Le Génie civil*, n° 6, 15 Mars 1962 et *Techniques et Sciences municipales*, n° 4, Avril 1962.

VIBERT (A.).– Sur le "rayon d'action" des puits dans les nappes alluvionnaires. *Techniques et Sciences municipales*, n° 6, Juin 1962.

VIBERT (A.).– Drain de Dupuit ne reposant pas sur le substratum imperméable – Cas du débit maximal. *Le Génie civil*, n° 9, 1er Mai 1964 et *Techniques et Sciences municipales*, n° 5, Mai 1964.

VIBERT (A.).– Drain de Dupuit ne reposant pas sur le substratum imperméable – Cas général. *Le Génie civil*, n° 12, 15 Juin 1964 et *Techniques et Sciences municipales*, n° 6, Juin 1964.

VIBERT (A.).– L'écoulement non permanent dans les puits ou en régime de non-équilibre. *Techniques et Sciences municipales*, n° 10, Octobre 1965.

VIBERT (A.).– Le captage dans les nappes alluviales – Considérations sur le colmatage des berges. *Le Génie civil*, n° 7, 1er Avril 1966 et Revue *l'Eau*, n° 5, Mai 1966.

VIBERT (A.).– Réflexions nouvelles sur un problème ancien. Revue *l'Eau*, n° 9, Septembre 1968.

VIBERT (A.).– Le coefficient de débit d'un puits. *Techniques et Sciences municipales*, n° 2, Février 1969.

VIBERT (A.).– Considérations pratiques et théoriques sur l'hydraulique souterraine. *La technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 268, Avril 1969.

VIBERT (A.).– Débit des ouvrages de captage imparfaits ou incomplets. *Techniques et Sciences municipales*, n° 5, Mai 1970 et *Le Génie civil*, n° 5, Mai 1970.

ZANKER (K.).– A new method for the determination of appropriate depths and spacings of tile drains with regard to hydraulic conductivity of soil and to depth of an impermeable layer. (Nouvelle méthode de détermination de la profondeur et de l'espacement des files de drains, en fonction de la perméabilité du sol et de la profondeur d'une couche imperméable) *4ème Congrès international des irrigations et du drainage*, Madrid, 1960.

ZAOUI (J.).– Calcul des débits des puits incomplets. *La Houille Blanche*, n° 5, Août-September 1963.

7 – *Infiltration sous les fondations – Risque de renard*

BOURDON (C.).– Le calcul des batardeaux cellulaires fondés sur sable et sur argile. *Le Génie civil*, 1er Avril 1957.

JOSSELIN DE JONG (G. de).– L'entrainement de particules par le courant interstitiel. *Symposia Darcy* – Association Internationale d'Hydrologie scientifique, publication n° 42, 1956.

LAMPL (H.).– La condition du renard et la rupture du sol. *Revue d'hydraulique de l'Institut de recherches de ressources hydrauliques de Budapest*, n° 1, 1959.

SARKARIA (G.S.).– Hydraulic structures on pervious foundations : seepage discharge and uplift pressure (ouvrages hydrauliques sur des fondations perméables : débit des infiltrations et sous-pressions) *Civil Engineering and Public Works Review*, n° 586 et 587, Avril et Mai 1955.

VODGEO – *Problèmes du calcul des infiltrations dans les ouvrages hydrauliques*, ouvrage en langue russe, Ed. Gosstrojizdat, Moscou, 1956.

8 – *Electroosmose*

CARON – Application et essais dans le domaine de l'électroosmose des terrains argileux et sableux. *Bulletin technique de la Suisse Romande*, n° 1, Janvier 1964.

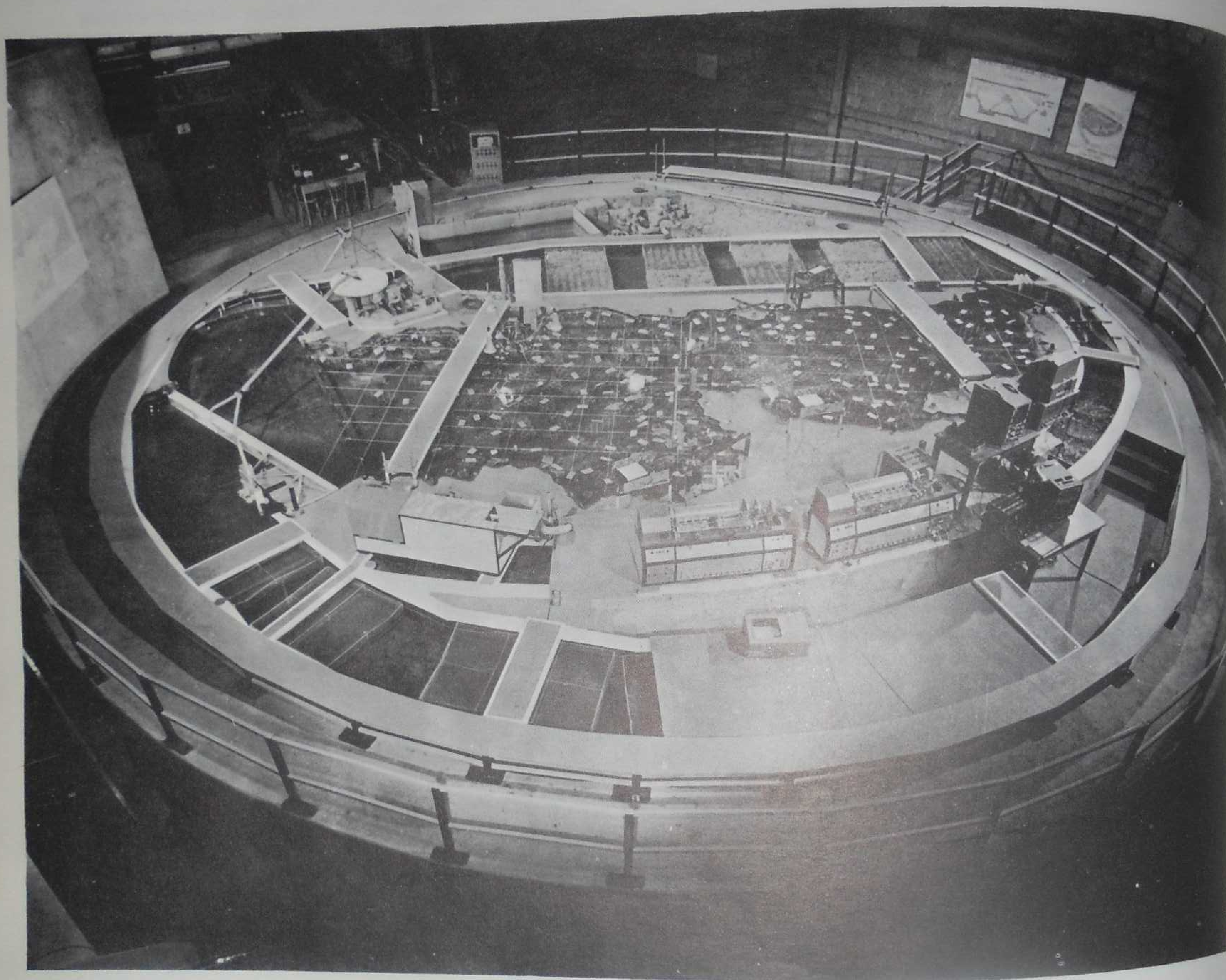
GASCUEL (L.).– Assainissement des constructions humides. *La Technique moderne – Construction*, n° 2, Février 1954.

LUFSKY (K.).– Trockenlegung feuchter Bauteil mittels Elektroosmose (L'assainissement des constructions humides par l'électro-osmose) *Die Bautechnik*, n° 11, Novembre 1967.

HUGON – L'assèchement des terrains et des bâtiments par électro-osmose. *Revue du Génie militaire*, 3ème trim. 1954.

REMENIERAS (G.).– Application de l'électroosmose à l'exécution de certains travaux en terrains aquifères. *La Houille Blanche*, 1949.

SCHAAD (W.).– Praktische Anwendung der Elektro-osmose im Gebiete des Grundbaues (Application de l'électroosmose dans la construction des fondations) *Die Bautechnik*, nos 6 et 11, Juin et Novembre 1958.



Modèle réduit de la MANCHE au 50.000ème sur la plaque tournante de GRENOBLE

SOGREAH – Service Photo-Cinéma

CHAPITRE XIV

LA SIMILITUDE EN HYDRAULIQUE MODÈLES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

XIV.1. INTRODUCTION AUX ESSAIS SUR MODÈLES RÉDUITS

Nulle part plus qu'en Hydraulique les formules théoriques utilisées pour fixer les dimensions des ouvrages ou les conditions d'écoulement ne sont susceptibles d'*extrapolation*, en raison des *hypothèses approximatives* (presque toujours appuyées sur l'expérience) sur lesquelles elles reposent et des simplifications préalables qui ont présidé à leur établissement.

Lorsqu'un Ingénieur étudie le projet d'un ouvrage hydraulique (prise d'eau, évacuateur de crue, siphon, etc.), il commence par préciser l'ordre de grandeur de ses dimensions en se basant sur celles des ouvrages analogues existants et en tenant compte de l'application à l'écoulement considéré des formules théoriques ou empiriques de l'hydraulique classique. Mais généralement les résultats qu'il obtient ainsi ne peuvent le satisfaire complètement en raison, d'une part, de l'approximation très grossière des formules utilisées et, d'autre part, de la nécessité de schématiser le phénomène considéré ou de négliger certains paramètres pour pouvoir lui appliquer la ou les formules utilisées.

L'idée vient tout naturellement d'essayer de voir "en petit" comment cela se passe en grand. C'est ce qui constitue le principe des essais sur *modèles réduits* qui ont pris un développement considérable non seulement en hydraulique mais dans d'autres branches de la mécanique, notamment en aérodynamique.

La faveur dont bénéficient ces essais s'explique par les facilités qu'offrent les mesures effectuées au laboratoire, la plus grande précision qu'autorisent les appareils de mesure utilisés ; en outre, les modèles réduits permettent d'effectuer aisément de nombreuses expériences, de les répéter en cas de nécessité en faisant varier dans tel ou tel sens tel ou tel paramètre du problème (étude systématique du comportement de l'écoulement pour différents débits, différents tirants d'eau, différentes pressions, différentes formes de telle ou telle partie de l'ouvrage, etc.). Enfin les dépenses nécessitées par les essais sur modèle représentent une fraction toujours faible du montant total des dépenses et les résultats fournis par le modèle permettent souvent de réaliser des économies de temps et d'argent très importantes pour l'exécution de l'ouvrage.

Mais un *problème essentiel* se pose alors : dans quelle mesure et suivant quelles lois les résultats obtenus sur le *modèle* peuvent-ils être transposés dans l'écoulement naturel en vraie grandeur (qu'on appelle le *prototype*) ? Autrement dit, si le modèle est géométriquement semblable au prototype, les dimensions linéaires homologues du modèle et du prototype étant dans le rapport λ (échelle du modèle) et si, en outre, dans le modèle les caractéristiques de l'écoulement qui intéressent l'ingénieur (vitesses, débits, pressions, etc.) sont réduites par rapport à celles du prototype suivant des rapports différents (λ_v, λ_q, λ_p, etc.) pour que les résultats obtenus sur le modèle soient transposables dans la réalité, il faut d'abord que les rapports susvisés (λ_v, λ_q, λ_p, etc.) soient *bien déterminés et constants*, qu'ils ne changent pas, par exemple, quand on modifie les conditions d'écoulement (débit, pression, tirant d'eau, etc.) ; ensuite, il faut que ces rapports soient *connus en fonction de l'échelle* λ. Si ces conditions sont

réalisées on a dans le modèle un écoulement semblable à l'écoulement réel dans le prototype.

La réalisation de ces conditions résulte de l'application des lois de similitude.

XIV.2. LOIS DE SIMILITUDE

XIV.2.1. Similitude géométrique

Nous l'avons déjà définie en introduisant l'échelle du modèle λ qui est le rapport des dimensions linéaires homologues du modèle (L_2) et du prototype (L_1), c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{L_2}{L_1} \qquad [XIV.1]$$

XIV.2.2. Similitude cinématique

La similitude cinématique exige que les vitesses et les accélérations soient dans un rapport défini et constant en tous les points correspondants des deux écoulements.

Soient

t_1 le temps mis à parcourir une distance L_1 dans le prototype,

t_2 le temps mis à parcourir la distance L_2 homologue de L_1 dans le modèle,

λ l'échelle du modèle : $\lambda = \frac{L_2}{L_1}$

λ_t l'échelle des temps : $\lambda_t = \frac{t_2}{t_1}$

λ_v l'échelle des vitesses : $\lambda_v = \frac{V_2}{V_1}$

λ_γ l'échelle des accélérations : $\lambda_\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$

On peut écrire facilement les relations suivantes :

$$V_1 = \frac{L_1}{t_1} \quad ; \quad V_2 = \frac{L_2}{t_2}$$

en divisant membre à membre :

$$\frac{V_2}{V_1} = \lambda_v = \frac{L_2}{L_1} \times \frac{t_1}{t_2} = \frac{\lambda}{\lambda_t} \qquad [XIV.2]$$

De même pour les accélérations :

$$\gamma_1 = \frac{L_1}{t_1^2} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{L_2}{t_2^2}$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{L_2}{L_1}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \frac{\lambda}{\lambda_t^2} \qquad [XIV.3]$$

On voit donc que le choix de l'échelle des temps λ_t impose celle des vitesses $\lambda_v = \lambda/\lambda_t$ et des accélérations $\lambda_\gamma = \lambda/\lambda_t^2$.

XIV.2.3. Similitude dynamique

Les mouvements du liquide dans le prototype et dans le modèle sont provoqués par des forces. Pour que les deux systèmes (modèle et prototype) soient dynamiquement semblables, il est donc nécessaire que toutes les forces agissant en des points homologues du modèle et du prototype soient dans le même rapport.

XIV.2.3.1. *Analyse des forces*

Les principales forces qui interviennent en hydraulique sont les suivantes :

1 — les forces d'inertie,
2 — les forces de turbulence,
3 — les forces de pesanteur,
4 — les forces de viscosité,
5 — les forces de capillarité.

Les forces de capillarité n'interviennent que pour l'étude de problèmes très particuliers qui sortent du domaine habituel de l'hydraulique traditionnelle. Nous ne considérerons donc que les quatre premières catégories de forces.

Pour chacune de ces catégories exprimons le rapport de similitude des forces correspondantes aux points homologues du modèle et du prototype.

Forces d'inertie :

La force d'inertie agissant sur la particule de masse m animée d'une vitesse V sur sa trajectoire dont le rayon de courbure est r, a pour expression :

$$F = m\frac{V^2}{r}$$

Dans le prototype on aura donc :

$$F_1 = m_1 \frac{V_1^2}{r_1}$$

Au point homologue du modèle :

$$F_2 = m_2 \frac{V_2^2}{r_2}$$

d'où :

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \frac{r_1}{r_2}$$

Posons

$\frac{F_2}{F_1} = \lambda_{fi}$ = rapport des forces d'inertie

$\frac{m_2}{m_1} = \lambda_m$ = rapport des masses

Il vient :

$$\lambda_{fi} = \frac{\lambda_m \lambda_v^2}{\lambda} = \lambda_m \lambda \lambda_t^{-2}$$

Mais le rapport des masses est égal au rapport des masses volumiques (λ_ρ) multiplié par le rapport des volumes (λ^3) ; on a donc, en définitive :

$$\lambda_{fi} = \lambda_\rho \lambda^4 \lambda_t^{-2} \qquad [XIV.4]$$

Forces de turbulence :

Comme nous l'avons démontré au § VI.3.3, la force tangentielle résultant de la turbulence d'un écoulement peut s'exprimer comme suit :

$$F_t = \rho S \overline{u'v'}$$

ρ étant la masse volumique du liquide,

S représentant la surface à travers laquelle se produit l'échange latéral de quantités de mouvement résultant de l'échange des particules liquides.

$\overline{u'v'}$ étant la moyenne du produit des fluctuations de la vitesse instantanée dans le sens longitudinal (u') et dans le sens transversal (v').

Le rapport des forces de turbulence sera donc :

$$\lambda_{ft} = \lambda_\rho \lambda^2 \lambda_v^2$$

$$\lambda_{ft} = \lambda_\rho \lambda^4 \lambda_t^{-2} = \lambda_{fi}$$

On constate donc que le rapport de similitude des forces de turbulence est le même que celui des forces d'inertie ce qui traduit le fait que ces deux catégories de forces sont de même nature.

Forces de pesanteur :

La force de pesanteur agissant sur la particule liquide de masse m est $F = mg$.

Le rapport des forces de pesanteur sera donc :

$$\lambda_{fp} = \lambda_m \lambda_g$$

$$\lambda_{fp} = \lambda_\rho \lambda^3 \lambda_g \qquad [XIV.5]$$

Forces de viscosité :

La force de viscosité agissant sur l'élément de surface dS est donnée par la formule de Newton :

$$dF = \mu \, dS \frac{dV}{dn}$$

dV/dn représentant le gradient de vitesse dans la direction normale à dS.

Le rapport des forces de viscosité sera donc :

$$\lambda_{fv} = \lambda_\mu \lambda^2 \lambda_v \lambda^{-1}$$

ou

$$\lambda_{fv} = \lambda_\mu \lambda^2 \lambda_t^{-1} \qquad [XIV.6]$$

XIV.2.3.2. *Lois de similitude dynamique*

Suivant la nature de l'écoulement considéré ces diverses catégories de forces interviennent d'une manière plus ou moins importante.

Si les forces d'inertie ne peuvent jamais être négligées puisqu'il y a toujours une masse liquide en mouvement, les conditions du problème étudié permettront souvent, pour les autres catégories de forces, d'en négliger certaines par rapport à d'autres.

Cette remarque permet d'établir les distinctions fondamentales suivantes en ce qui concerne la similitude dynamique.

XIV.2.3.2.1. *Les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux forces d'inertie, de turbulence et de pesanteur : Similitude de Reech-Froude*

Les forces d'inertie, de turbulence et de pesanteur sont donc pratiquement seules à intervenir et la condition de similitude des forces impose que les trois rapports λ_{fi}, λ_{ft} et λ_{fp} soient les mêmes ;

compte tenu de ce que $\lambda_{fi} = \lambda_{ft}$, la condition se résume à :

$$\lambda_{fi} = \lambda_{fp}$$

ou, en tenant compte de [*XIV.4* et *5*] :

$$\lambda_\rho \lambda^4 \lambda_t^{-2} = \lambda_\rho \lambda^3 \lambda_g$$

Il est pratiquement impossible de faire varier g entre le prototype et le modèle, donc $\lambda_g = 1$ et la condition s'écrit :

$$\lambda_\rho \lambda^4 \lambda_t^{-2} = \lambda_\rho \lambda^3$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_t^2} = 1$$

ou $$\frac{\lambda^2}{\lambda_t^2} = \lambda \qquad \boxed{\lambda_v = \sqrt{\lambda}} \qquad [XIV.7]$$

Le rapport des vitesses est donc égal à la racine carrée du rapport des longueurs. Cette relation très importante est connue sous le nom de *"loi de similitude de Reech-Froude"* ; elle fut découverte par l'alsacien Ferdinand Reech en 1832(1), rendue publique par lui en 1852 et tombée par la suite dans l'oubli ; elle a été retrouvée et remise en honneur par l'anglais William Froude vingt ans plus tard en 1872.

Cette loi de similitude de Reech-Froude peut s'exprimer d'une autre manière. La relation [*XIV.7*] peut en effet s'écrire :

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

ou

$$\frac{V_2}{\sqrt{g L_2}} = \frac{V_1}{\sqrt{g L_1}} = \mathfrak{F}$$

La condition de similitude imposée revient donc à réaliser un écoulement possédant le même nombre de Froude aux points homologues du modèle et du prototype.

En combinant les similitudes géométrique [*XIV.1*], cinématique [*XIV.2* et *3*] et dynamique [*XIV.7*], il est facile d'établir les rapports de toutes les grandeurs physiques caractérisant l'écoulement dans le modèle et le prototype, ce qui permet de passer des résultats observés sur le premier à ceux escomptés sur le second :

temps : $\lambda_t = \sqrt{\lambda}$

vitesses : $\lambda_v = \sqrt{\lambda}$

débits : $\lambda_q = \lambda_v \lambda^2 = \lambda^{5/2}$

accélérations : $\lambda_\gamma = \dfrac{\lambda}{\lambda_t^2} = 1$

forces : $\lambda_f = \lambda_m \lambda_\gamma = \lambda_\rho \lambda^3$

pressions : $\lambda_p = \dfrac{\lambda_f}{\lambda^2} = \lambda_\rho \lambda$

puissances : $\lambda_P = \dfrac{\lambda_f \lambda}{\lambda_t} = \lambda_\rho \lambda^{7/2}$

pentes : $\lambda_i = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$

On utilise souvent le même liquide dans le modèle et dans le prototype ; il suffit alors de faire $\lambda_\rho = 1$ dans ces diverses relations.

Notons que le rapport de similitude des pressions $\lambda_p = \lambda_\rho \lambda$ permet d'écrire :

$$\lambda_p = \frac{p_2}{p_1} = \lambda_\rho \lambda \quad ; \quad p_1 = \frac{p_2}{\lambda_\rho \lambda}$$

Si dans le modèle la pression p_2 devient en certains points de l'écoulement inférieure à la pression atmosphérique c'est-à-dire négative et si le rapport de similitude géométrique λ est suffisamment petit, la pression p_1 dans le prototype pourra devenir inférieure à la tension de vapeur du liquide à la température considérée ; l'absence de continuité qui en résulte dans la masse liquide du prototype constitue alors une limite à l'utilisation de la similitude ; c'est ce qui constitue un "effet d'échelle" nuisible ; nous en trouverons d'autres exemples plus loin.

La similitude de Reech-Froude est très fréquemment utilisée dans les études sur modèles réduits. Elle intervient notamment pour la plupart des écoulements à surface libre qu'il s'agisse d'*écoulements non turbulents sur des ouvrages courts* (déversoir, seuil, chute, ressaut . . .) dans lesquels le frottement visqueux à la paroi ne joue qu'un rôle très faible par rapport à la pesanteur, la pression et l'inertie ou

(1) Dans son cours professé à l'Ecole du Génie maritime, Reech écrivait en 1832 : "les résistances de corps flottants de formes semblables ne peuvent être proportionnelles aux surfaces et aux carrés des vitesses qu'autant que les carrés des vitesses sont proportionnelles aux dimensions linéaires".

d'écoulements très turbulents dans lesquels les forces de viscosité sont également négligeables par rapport aux forces d'inertie, de turbulence et de pesanteur.

XIV.2.3.2.2. *Les forces de pesanteur sont négligeables par rapport aux forces d'inertie, de turbulence et de viscosité : Similitude de Reynolds*

Les forces d'inertie, de turbulence et de viscosité sont donc pratiquement seules à intervenir et la condition de similitude des forces impose que les trois rapports λ_{fi}, λ_{ft} et λ_{fv} soient les mêmes ; compte-tenu de ce que $\lambda_{fi} = \lambda_{ft}$ la condition se résume à :

$$\lambda_{fi} = \lambda_{fv}$$

ou, en tenant compte de [*XIV.4* et *6*] :

$$\lambda_\rho \lambda^4 \lambda_t^{-2} = \lambda_\mu \lambda^2 \lambda_t^{-1}$$

$$\frac{\lambda_\mu}{\lambda_\rho} = \lambda^2 \lambda_t^{-1} = \lambda\lambda_v$$

Mais $\lambda_\mu/\lambda_\rho = \lambda_\nu$ rapport des coefficients de viscosité cinématique.

En définitive :

$$\frac{\lambda\lambda_v}{\lambda_\nu} = 1 \qquad [XIV.8]$$

ou encore :

$$\frac{L_2}{L_1}\,\frac{V_2}{V_1}\,\frac{\nu_1}{\nu_2} = 1$$

$$\frac{L_2 V_2}{\nu_2} = \frac{L_1 V_1}{\nu_1} = \mathcal{R} = C^{te}$$

ce qui revient à dire que le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement doit être le même aux points homologues du modèle et du prototype.

C'est ce qui constitue la *similitude de Reynolds*.

Rappelons que le nombre de Reynolds exprime précisément le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

La loi de similitude de Reynolds est fréquemment employée en hydraulique, en particulier dans les *écoulements en charge* dans lesquels la pesanteur n'intervient pas ni les phénomènes de tension superficielle, sauf toutefois dans le cas d'écoulements très rapides dans lesquels la turbulence et les phénomènes d'inertie deviennent prépondérants ; dans ce cas on doit se libérer de la similitude de Reynolds, nous verrons plus loin comment.

La loi de similitude de Reynolds est également utilisée pour l'étude sur modèle de la résistance opposée à un écoulement par *un corps entièrement immergé* ; dans ce cas en effet les forces de pesanteur sont négligeables par rapport aux forces d'inertie et de viscosité.

XIV.2.3.2.3. *Incompatibilité des similitudes de Reech-Froude et de Reynolds*

Ces deux similitudes étant les plus fréquemment employées, on peut se poser la question de savoir s'il est possible de réaliser un modèle dont la similitude avec le prototype puisse satisfaire simultanément aux conditions de similitude de Reech-Froude et de Reynolds.

La condition de Reech-Froude impose :

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda} \qquad [XIV.7]$$

En remplaçant dans la condition de Reynolds [*XIV.8*], il vient :

$$\lambda^{3/2} = \lambda_\nu$$

Or, dans la pratique, il est très difficile de faire varier ν entre le prototype et le modèle ; cela nécessiterait l'utilisation de liquides spéciaux très onéreux ; le plus souvent on utilise l'eau sur le modèle et sur le prototype c'est-à-dire $\lambda_\nu = 1$.

D'où il résulte $\lambda = 1$; autrement dit le modèle est identique au prototype ; il est donc pratiquement impossible de réaliser des essais en modèle réduit permettant de satisfaire simultanément aux conditions de Reech-Froude et de Reynolds.

Cette impossibilité n'a pas, comme nous le verrons plus loin, de conséquences fâcheuses pour la plupart des modèles d'écoulement à surface libre, à condition de se placer dans des conditions telles que les forces de viscosité soient négligeables sur le modèle et le prototype (ce qui permet d'utiliser seulement la similitude de Reech-Froude). Toutefois, dans l'étude des problèmes où on a affaire à des actions dynamiques de l'eau sur des obstacles, ni les forces de viscosité, ni les forces de pesanteur ne peuvent être négligées et l'impossibilité de réaliser une similitude totale ne peut être tournée que par l'utilisation de divers artifices dans le détail desquels nous ne pouvons entrer. C'est le cas, notamment, de l'étude de

la résistance d'avancement des navires au bassin des carènes ; en effet, la résistance à l'avancement d'un navire résulte de deux causes : le frottement visqueux de l'eau contre la coque (similitude de Reynolds) et la résistance des vagues produites par le mouvement du navire, or les vagues sont des ondes de gravité régies par la similitude de Reech-Froude.

XIV.3. APPLICATION AUX ESSAIS SUR MODÈLES RÉDUITS

XIV.3.1. Utilisation de la similitude de Reech-Froude Seuil de Reynolds

Nous avons montré au § VII.6.1.3 que la perte de charge J dans un ouvrage quelconque (canalisation en charge, écoulement à surface libre) s'exprimait par la relation :

$$J = \frac{\lambda^*}{D} \frac{U^2}{2g}$$

D représentant une dimension linéaire caractéristique d'une section transversale de l'ouvrage considéré (diamètre d'une canalisation, rayon hydraulique de la section mouillée d'un écoulement à surface libre, etc .),

U représentant la vitesse moyenne dans ladite section transversale,

λ^* est un coefficient adimensionnel, appelé généralement "coefficient de résistance" et qui est fonction de $\mathcal{R}$, nombre de Reynolds de l'écoulement, et de ϵ/D, rugosité relative des parois de l'ouvrage (ϵ est la hauteur moyenne des rugosités des parois) soit :

$$\lambda^* = f\left(\mathcal{R}, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Dans le cas d'un écoulement à surface libre, la pente I est l'homologue de J et l'expression précédente devient :

$$I = \frac{\lambda^*}{D} \frac{U^2}{2g}$$

ou

$$U = \sqrt{2gDI} \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}$$

On sait que $R = D/4$ et il vient donc :

$$U = \sqrt{\frac{8g}{\lambda^*}} \sqrt{RI}$$

expression qui est bien conforme aux formules classiques du type Chézy :

$$U = C\sqrt{RI} \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda^*}}$$

Supposons alors que nous désirions réaliser des essais sur modèles réduits d'un écoulement à surface libre, c'est-à-dire obéissant à la formule générale précédente.

Comme la variable $\lambda^* = f(\mathcal{R}, \epsilon/D)$ qui figure dans cette formule est sans dimension, elle est indépendante des unités qui sont employées pour l'évaluer ou, ce qui revient au même, de l'échelle à laquelle elle est représentée. La similitude des deux écoulements exige donc que λ^* *soit le même dans le modèle et dans le prototype*.

Si nous nous reportons au diagramme classique établi au § VII.6.2 : $\lambda^* = f(\mathcal{R}, \epsilon/D)$ (fig. XIV.1), nous constatons que pour chaque valeur de la rugosité relative ϵ/D, à partir d'une certaine valeur $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$, λ^* reste constant lorsque $\mathcal{R}$ varie, c'est ce qui constitue la zone de pleine turbulence ou ce que M. Camichel avait désigné sous le terme de "zone des ouvrages courts". Le nombre de Reynolds limite à partir duquel cette condition est réalisée est appelé *"seuil de Reynolds"*.

Si donc l'écoulement dans le prototype et dans le modèle est tel que ce seuil soit dépassé on est certain que, pour une même rugosité relative ϵ/D (condition réalisée par la similitude géométrique), le coefficient λ^* sera le même dans l'un ou l'autre et l'essai sur modèle pourra être réalisé en adoptant la condition de similitude de Reech-Froude même si les nombres de Reynolds ne sont pas les mêmes dans le modèle et dans le prototype.

On admet dans les conditions moyennes courantes que le seuil de Reynolds est de l'ordre de 4.000 ; en réalité, nous savons qu'il ne peut s'agir que d'un ordre de grandeur en raison de l'existence de la zone de transition entre le régime laminaire et le régime de pleine turbulence.

En fait les écoulements qu'on est amené à étudier dans la pratique sont généralement, dans le prototype,

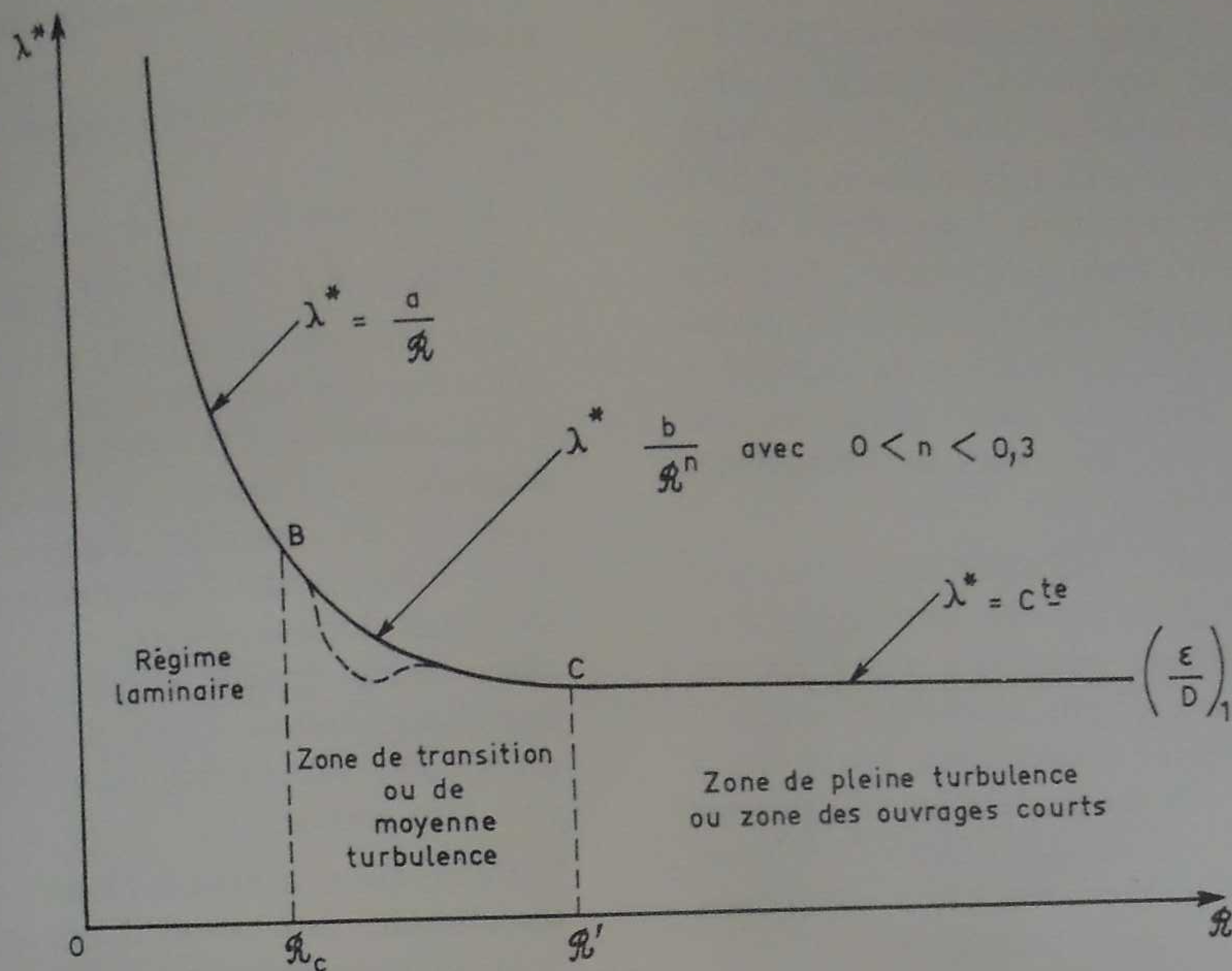


Fig. XIV.1

dans la zone de pleine turbulence. Par exemple, dans un canal de rayon hydraulique $R = 0{,}40$ m et de vitesse moyenne $V = 0{,}30$ m/s, on a :

$$\mathcal{R} = \frac{4\,VR}{\nu} = \frac{4 \times 0{,}3 \times 0{,}4}{10^{-6}} = 480.000$$

Mais quand on passe au modèle, le seuil de Reynolds peut fort bien ne pas être atteint si l'échelle du modèle est suffisamment petite.

Par exemple, si on veut étudier l'écoulement dans le canal précédent sur un modèle à l'échelle $\lambda = 1/25$, la condition de Reech-Froude impose pour les vitesses une échelle :

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

Le nombre de Reynolds dans le modèle sera donc :

$$\mathcal{R} = \frac{4\,VR}{\nu}\,\lambda\lambda_v = \frac{480.000}{25 \times 5} = 3.840$$

ce qui correspond précisément à la zone du seuil de Reynolds.

On constate donc que le seuil de Reynolds limite le choix de l'échelle des modèles, en particulier il interdit l'utilisation d'échelles trop petites, c'est un autre exemple d'*effet d'échelle nuisible*.

XIV.3.2. Influence de la rugosité

Nous avons admis que la rugosité relative ϵ/D (c'est-à-dire ici ϵ/R) était la même dans le modèle et dans le prototype, cette condition étant nécessaire pour que λ^* reste constant. En fait cette condition peut être parfois impossible à respecter, tout au moins mathématiquement ; en particulier dans le cas des ouvrages en béton dont la rugosité est relativement faible, il est très difficile de réaliser une rugosité relative identique dans le modèle et le prototype. En fait, l'erreur qui en résulte est généralement négligeable en raison de l'incidence relativement faible du facteur ϵ/R sur la valeur de λ^* ; si nous adoptons par exemple la formule de Manning-Strickler :

$$U = \frac{C}{\epsilon^{1/6}}\,R^{2/3}\,I^{1/2}$$

on constate que ϵ n'intervient qu'à la puissance 1/6 ; une variation même sensible sur la valeur de la rugosité absolue ϵ n'entraîne donc qu'une variation peu importante sur la vitesse.

Rappelons enfin que le paramètre ϵ qui caractérise la rugosité de la paroi n'est pas forcément égal à la hauteur des aspérités, notamment dans le cas fréquent d'une rugosité naturelle c'est-à-dire essentiellement hétérogène ; pour cette même raison, lorsqu'il s'agira sur un modèle réduit de cours d'eau de représenter la rugosité du fond du lit tapissé de matériaux d'un certain diamètre moyen, ce ne sera pas en général ce diamètre qui représentera la rugosité ϵ mais une longueur beaucoup plus grande et qui tiendra compte, en outre, de toutes les irrégularités du fond (trous, rides, etc .).

La rugosité convenable sera alors déterminée par l'*étalonnage ou le tarage du modèle* ; cette opération, souvent longue et délicate, consiste à reproduire sur le modèle un phénomène connu, c'est-à-dire constaté et mesuré sur le prototype (marée, crue, étiage, etc .) et à modifier la rugosité du modèle jusqu'à obtenir les mêmes conditions hydrauliques (formes des lignes d'eau, vitesses, niveaux, pressions, etc .) aux points homologues du modèle et du prototype.

XIV.3.3. Distorsion

Dans de nombreux cas, en particulier en hydraulique fluviale ou maritime, les phénomènes à représenter comportent de très grandes dimensions transversales par rapport aux profondeurs (par exemple un estuaire comme celui de la Gironde a une largeur de 6 km pour une profondeur moyenne de 10 m). Comme le seuil de Reynolds impose une échelle minimale pour le modèle on serait conduit à donner à ce dernier des dimensions considérables.

On adopte alors pour les dimensions horizontales une échelle plus petite que pour les dimensions verticales (profondeurs). Un des premiers modèles réduits, celui de l'estuaire de la Mersey réalisé en Angleterre par Osborne Reynolds, comportait ainsi une échelle de 1/8.500 en plan et 1/100 puis 1/200 pour les profondeurs.

Dans un modèle ainsi distordu il n'y a plus similitude géométrique totale avec le prototype puisqu'en réalité on passe de l'un à l'autre par une similitude suivie d'une affinité.

Il existe néanmoins une correspondance entre les grandeurs homologues ce qui nécessite l'introduction d'une variable supplémentaire.

Il existe, en effet, maintenant *deux* échelles des dimensions géométriques :

— l'une pour les dimensions horizontales (longueurs et largeurs) : λ_l [1]

— l'autre pour les dimensions verticales (hauteurs) : λ_h

Le rapport $\lambda_h/\lambda_l = \Delta$ s'appelle la *distorsion*.

En général $1 < \Delta < 10$ et, le plus souvent $1 < \Delta \leqslant 3$.

Par exemple, un modèle réduit de la Manche pour l'étude de l'aménagement marémoteur des îles Chausey a été réalisé en 1957 au Laboratoire National d'Hydraulique de Chatou ; ce modèle avait une échelle $\lambda_l = 1/2500$ pour les dimensions horizontales et $\lambda_h = 1/300$ pour les dimensions verticales. La distorsion était donc $\Delta = \lambda_h/\lambda_l = 8{,}3$. Une telle distorsion assez exceptionnelle s'était avérée nécessaire pour que l'amplitude de l'onde de marée en chaque point du modèle soit suffisamment importante pour pouvoir être mesurée.

En ce qui concerne le *rapport des vitesses*, comme on n'étudie pratiquement que des écoulements graduellement variés on ne se préoccupe que de l'échelle des vitesses horizontales :

$$\lambda_v = \frac{\lambda_l}{\lambda_t}$$

La condition de similitude de Reech-Froude s'obtiendra en écrivant que le théorème de Bernoulli est applicable dans le modèle et dans le prototype en des points homologues, puisque précisément ce théorème ne fait intervenir que les forces d'inertie et de pesanteur (poids et pression), soit :

$$z + \frac{p}{\varpi} + \frac{V^2}{2g} = C^{te}$$

g étant le même dans le modèle et le prototype, il faut donc que les termes en V^2 et en z ou p/ϖ (homogènes à des hauteurs) soient proportionnels, soit :

$$\lambda_v^2 = \lambda_h \quad \text{ou} \quad \lambda_v = \sqrt{\lambda_h}$$

d'où l'on déduit :

l'échelle des temps :

$$\lambda_t = \frac{\lambda_l}{\lambda_v} = \frac{\lambda_l}{\sqrt{\lambda_h}}$$

(1) Dans certains cas on est amené à utiliser deux échelles différentes pour les dimensions horizontales : l'une pour les longueurs λ_L, l'autre pour les largeurs λ_l. On a alors affaire à un modèle hyperdistordu.

l'échelle des débits :

$$\lambda_q = \lambda_l \lambda_h \lambda_v = \lambda_l \lambda_h^{3/2}$$

l'échelle des pentes :

$$\lambda_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{h_2}{l_2} \times \frac{l_1}{h_1} = \frac{\lambda_h}{\lambda_l} = \Delta$$

etc . . .

Pour préciser ce que devient la *rugosité* reprenons la formule de Manning-Strickler :

$$V = \frac{C}{\epsilon^{1/6}} R^{2/3} I^{1/2}$$

Comme on n'étudie pratiquement par cette méthode que des problèmes d'hydraulique fluviale c'est-à-dire des sections transversales très larges, on peut assimiler le rayon hydraulique R à la profondeur.

La relation de Manning-Strickler s'écrit donc :

dans le prototype

$$V_1 = \frac{C}{\epsilon_1^{1/6}} R_1^{2/3} I_1^{1/2}$$

dans le modèle

$$V_2 = \frac{C}{\epsilon_2^{1/6}} R_2^{2/3} I_2^{1/2}$$

Il est facile de voir que le coefficient C est égal à

$$\sqrt{\frac{8g}{\lambda^*}} \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^{1/6} \quad ;$$

il est donc le même dans le modèle et dans le prototype puisque ϵ/R et λ^* sont les mêmes.

En faisant le rapport membre à membre, il vient :

$$\frac{V_2}{V_1} = \lambda_v = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{2/3} \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)^{1/6} \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{1/2}$$

Compte tenu de ce qui a été indiqué précédemment, cette relation peut prendre la forme suivante en y introduisant les rapports λ_h, λ_ϵ et λ_I :

$$\lambda_v = \lambda_h^{2/3} \frac{1}{\lambda_\epsilon^{1/6}} \left(\frac{\lambda_h}{\lambda_l}\right)^{1/2}$$

La condition de similitude de Reech-Froude donne : $\lambda_v = \lambda_h^{1/2}$,

En égalant les deux expressions précédentes il vient, tous calculs faits :

$$\Delta^3 = \lambda_{\epsilon/h}$$

Autrement dit, *l'échelle de la rugosité relative ϵ/h est égale au cube de la distorsion.*

Si par exemple la distorsion est égale à 4, la rugosité relative du modèle devra être 64 fois plus grande que celle du prototype.

Si la distorsion est trop grande, on peut arriver ainsi à des rugosités tellement importantes que la nature de l'écoulement dans le modèle soit très sensiblement modifiée ; c'est ce facteur qui vient alors limiter la distorsion.

XIV.3.4. Conditions aux limites

Dans la nature, sur le prototype, les sites ne sont pas limités à la zone dans laquelle se trouvent les ouvrages à étudier (étendue de la mer, longueur d'un cours d'eau, etc.). Sur le modèle au contraire par raison d'économie on doit limiter l'emprise.

Il faut donc réaliser sur le modèle des conditions aux limites satisfaisantes, c'est-à-dire telles que les paramètres hydrodynamiques (vitesse, débit, profondeur, pression) soient les mêmes que dans la nature.

XIV.3.5. Modèles à fond mobile

L'étude sur modèle réduit des écoulements avec débit solide pose des problèmes encore plus compliqués en raison du fait qu'il faut non seulement concilier la similitude de Reech-Froude avec celle des efforts de frottement contre le lit, mais encore réaliser dans le modèle des conditions d'entraînement des matériaux semblables à celles de la nature.

Ces deux groupes de conditions sont d'ailleurs inconciliables et on est généralement conduit à réaliser deux modèles différents :

— l'un à *fond fixe* permettant d'étudier la forme des lignes d'eau,

— l'autre à *fond mobile* permettant d'étudier les phénomènes d'entraînement et de dépôt.

Sur ce dernier modèle on procède, préalablement à l'exécution des essais, à *l'étalonnage du modèle*. Par exemple on part d'un profil du fond correspondant aux sondages effectués à une certaine date, puis on fait couler l'eau sur le modèle jusqu'à obtenir sur celui-ci un profil du fond correspondant au profil relevé sur le prototype à une date ultérieure ; on peut ainsi déterminer une échelle des temps applicable aux transports solides et qui peut être différente de l'échelle des temps relative à l'écoulement liquide.

Les études sur modèles réduits en matière de débit solide malgré les difficultés spéciales auxquelles elles donnent lieu sont particulièrement précieuses pour l'Ingénieur, même si les renseignements fournis par le modèle ne présentent qu'un caractère qualitatif.

XIV.3.6. Modèles basculés

Le basculement d'un modèle réduit consiste à utiliser une échelle des pentes λ_i différente du rapport λ_h/λ_l (λ_h = échelle des hauteurs ; λ_l = échelle des longueurs).

Sur le modèle ainsi *"basculé"* les cotes sont repérées par rapport à un plan de référence incliné dans la direction de l'écoulement d'un angle

$$\beta = I\left(\lambda_i - \frac{\lambda_h}{\lambda_l}\right)$$

(I = pente longitudinale du cours d'eau prototype).

On ajoute donc une pente fixe β aux pentes longitudinales ; par conséquent les pentes transversales ne sont pas à la même échelle que les pentes longitudinales et l'échelle des pentes longitudinales n'est pas constante puisqu'elle a pour expression :

$$\lambda_i = \frac{\lambda_h}{\lambda_l} + \frac{\beta}{I}$$

qui dépend de la pente I du cours d'eau prototype.

Le basculement ne conserve donc pas les courbes de remous. Il n'est admissible que pour les cours d'eau quasi rectilignes à pente sensiblement uniforme.

XIV.3.7. Modèles tournants

Les perspectives offertes par les usines marémotrices, en particulier lorsqu'elles intéressent des surfaces importantes, conduisent à prendre en compte dans la similitude dynamique les forces résultant de l'*accélération de Coriolis* qui provoquent la formation des marées.

On sait que la composante horizontale de l'accélération de Coriolis due à la rotation de la Terre a pour expression :

$$2\vec{\omega}\sin\theta \wedge \vec{V}_r$$

$\vec{\omega}$ représentant la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles,

θ la latitude du lieu considéré,

$\vec{V}_r$ la vitesse relative au point considéré c'est-à-dire par rapport à des axes liés à la Terre.

La composante verticale de l'accélération de Coriolis peut être considérée comme négligeable dans tous les cas.

En mouvement relatif, la force de Coriolis modifie fondamentalement le mouvement car elle ne dérive pas d'un potentiel et est donc susceptible d'induire des rotations. Or sur un modèle réduit (distordu ou non) la force de Coriolis n'est pas représentée à la même échelle que la force de gravité.

Différentes solutions ont été proposées pour remédier à cette difficulté. La principale consiste à réaliser un modèle construit sur une plaque animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical (modèle tournant) de manière que l'échelle de la composante horizontale de l'accélération centrifuge complémentaire ou de Coriolis due à la rotation de la plaque soit la même que celle des accélérations horizontales λ_γ.

Bien entendu, l'accélération centrifuge d'entraînement due à la rotation de la plaque modifie dans le mouvement relatif la forme des équipotentielles du champ de gravité ; pour en tenir compte, il suffit de remplacer le plan de référence horizontal du prototype par le paraboloïde correspondant à la surface équipotentielle du champ de forces d'accélération centrifuge d'entraînement du modèle.

Ainsi, l'Université de Grenoble, l'Electricité de France et Sogreah ont réalisé en collaboration une plaque tournante de 14 m de diamètre supportant un modèle réduit de la Manche présentant les échelles suivantes :

$$\lambda_l = \frac{1}{50.000} \quad ; \quad \lambda_h = \frac{1}{500} \quad ; \quad \Delta = \frac{\lambda_h}{\lambda_l} = 100$$

L'ensemble de la partie tournante (plaque en béton armé, modèle proprement dit, eau, appareillage de mesure, personnel, etc . . .) pèse 250 tonnes. Pour l'étude de la zone de la Manche considérée ($\sin\theta = 0,75$), la plaque fait un tour en 51,6 secondes.

Les essais effectués dans ces conditions ont permis, après étalonnage du modèle, de reproduire l'amplitude des ondes de marée dans toute l'étendue couverte par le modèle ; en particulier, la prise en compte de l'accélération de Coriolis a permis de reproduire la différence de marnage observée dans la nature entre les côtes anglaises (où le marnage varie de 2 à 6 m pour une marée de coefficient 95) et françaises (où le marnage varie de 6 à 11 m, cette valeur maximale étant atteinte au fond du golfe de Saint-Malo, pour une marée de même coefficient 95).

XIV.3.8. Effets d'échelle nuisibles

Lorsque l'échelle des longueurs λ est trop petite, certains phénomènes dont l'influence est secondaire

ou négligeable dans le prototype peuvent prendre sur le modèle une importance relativement grande.

Nous avons déjà trouvé un exemple de cet effet d'échelle dans les modèles à surface libre en régime de forte turbulence dont l'étude peut être conduite en similitude de Reech-Froude et pour lesquels une échelle trop petite peut entraîner une diminution du nombre de Reynolds telle que l'écoulement sur le modèle corresponde à la zone de transition.

Voici *d'autres exemples* de cet effet d'échelle :

– Par suite d'une trop petite valeur de λ, les profondeurs sur le modèle deviennent très petites et les phénomènes de *tension superficielle* prennent une importance telle qu'on ne peut plus les négliger comme c'est le cas dans le prototype.

– Sur les *modèles à fond mobile* l'adoption d'une échelle trop petite peut conduire pour les matériaux du fond à des particules très fines (diamètre de l'ordre de 0,2 mm) pouvant présenter de ce fait des *phénomènes de cohésion* se traduisant sur le modèle par la production de rides ne correspondant pas à la configuration du fond sur le prototype.

– Une échelle trop petite réduit les dimensions des sections d'écoulement et peut transformer sur le modèle la nature du régime qui devient *laminaire* ; les pertes de charge sont alors linéaires ($J = aU$) et non plus quadratiques ($J = bU^2$) et la similitude dynamique n'est plus respectée.

– Sur des modèles dont l'échelle est très petite si on veut conserver une précision suffisante dans les mesures on est conduit à utiliser *des appareils très précis et délicats*, ce qui constitue également une limite à l'emploi d'échelles trop petites.

XIV.3.9. Essais sur modèles des turbo-machines

Dans l'écoulement considéré on néglige les forces de viscosité par rapport aux forces de pesanteur et d'inertie, autrement dit les essais sur modèles réduits des turbo-machines seront régis par la *condition de Reech-Froude*.

Par ailleurs on utilise toujours l'eau pour les essais sur le modèle.

En définitive, les rapports de similitude seront ceux obtenus au § XIV.2.3.2.1 dans lesquels $\lambda_\rho = 1$.

Les essais des turbines étant généralement réalisés en utilisant des *hauteurs de chute* différentes sur le modèle et le prototype, introduisons le rapport de similitude correspondant, soit :

$$\delta = \frac{H_2}{H_1}$$

δ est aussi le rapport des pressions puisque $p_2 = \varpi H_2$ et $p_1 = \varpi H_1$.

L'équation de Bernoulli devant être satisfaite sur le modèle et le prototype, on en déduit comme précédemment :

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{H_2}{H_1}$$

ou :

$$\lambda_v = \sqrt{\delta}$$

qui est analogue à la condition de Reech-Froude.

On en déduit tous les autres rapports :

Nombre de tours :

$$K = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{U_2}{r_2} \times \frac{r_1}{U_1} = \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\delta}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \qquad [XIV.3.9.1]$$

ou $$\delta = \frac{H_2}{H_1} = \lambda^2 K^2$$

Débits :

$$\lambda_q = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{S_2 U_2}{S_1 U_1} = \lambda^2 \lambda_v = \lambda^2 \sqrt{\delta} = \lambda^2 \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \qquad [XIV.3.9.2]$$

ou $$\frac{Q_2}{Q_1} = \lambda^2 \lambda K = \lambda^3 K$$

Puissances :

$$\lambda_P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\varpi Q_2 H_2}{\varpi Q_1 H_1} = \lambda_q \delta = \lambda^2 \delta^{3/2} = \lambda^2 \sqrt{\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3} \qquad [XIV.3.9.3]$$

ou $$\frac{P_2}{P_1} = \lambda^2 (\lambda^2 K^2)^{3/2} = \lambda^5 K^3$$

Les relations [*XIV.3.9.1, 2* et *3*] permettent de passer immédiatement des résultats obtenus aux essais sur le modèle aux résultats escomptés pour le prototype dans les conditions réelles. On reconnaît les relations exprimant les lois de similitude des turbo-machines telles qu'elles sont déduites de la théorie des turbo-machines(1).

(1) M. Carlier – *Machines hydrauliques* (Service des publications de l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Fôrets, 1968).

Eliminons λ entre les relations [*XIV.3.9.1* et *3*] ; il vient :

$$\lambda_P = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{K^2}\sqrt{\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^5} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{5/2}$$

La *vitesse spécifique* n_s de la turbine prototype (indice 1) sera la vitesse N_2 de son modèle qui développe une puissance $P_2 = 1$ ch sous une chute $H_2 = 1$ m, soit :

$$n_s = N_2 = N_1 \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{5/4} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2} = \frac{N_1 P_1^{1/2}}{H_1^{5/4}}$$

On retrouve bien l'expression classique de n_s obtenue à partir de la théorie des turbo-machines(1).

XIV.4. MODÈLES MATHÉMATIQUES

XIV.4.1. Limites d'emploi des modèles réduits

Les modèles réduits, appelés parfois *"modèles physiques"*, s'avèrent insuffisants pour l'étude d'aménagements de grande étendue (aménagement d'un bassin, de l'ensemble d'une rivière, aménagements en chaîne, propagation des crues tout le long d'une rivière, etc . . .). En effet, pour étudier ces problèmes le modèle réduit, même à petite échelle, devrait avoir néanmoins des dimensions importantes ; par ailleurs l'utilisation d'une échelle trop petite présente les inconvénients signalés précédemment (faible précision des mesures, apparition de phénomènes parasites, etc .).

Les puissants outils de calcul que constituent les *ordinateurs* vont alors permettre de résoudre par voie numérique tous les problèmes susceptibles d'être exprimés par des équations ou des lois empiriques.

XIV.4.2. Définition et principe du modèle mathématique

Les *équations différentielles* représentant l'évolution dans le temps et dans l'espace d'un écoulement donné (par exemple l'équation de continuité, l'équation de Bernoulli, etc .) sont remplacées par des équations *aux différences finies* ; on choisit un *"pas de temps"* et un *"pas linéaire"* (suivant les abscisses) et on calcule numériquement à l'aide de ces équations aux différences finies les valeurs des inconnues (hauteurs d'eau, vitesses, débits, etc .) à la fin du "pas de temps" ou du "pas linéaire", connaissant leur valeur initiale c'est-à-dire les conditions aux limites.

Le choix du "pas de temps" et du "pas linéaire" conditionne évidemment le volume des calculs et la précision des résultats mais la puissance des ordinateurs est telle que, malgré ce découpage du temps ou de l'espace, les durées totales de calcul demeurent raisonnables.

Supposons, par exemple, qu'on désire étudier sur un modèle réduit physique le cycle hydrologique d'une rivière s'étendant sur une année ; en adoptant une échelle des longueurs suffisamment petite, par exemple $\lambda = 1/1000$, l'échelle des temps résultant de la loi de Reech-Froude sera

$$\lambda_t = \frac{\lambda}{\lambda_v} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda} \simeq \frac{1}{30} \ ;$$

un essai complet durera donc $365/30 \simeq 12$ jours et 12 nuits ; pour cet exemple, le même essai sur un ordinateur suffisamment puissant durerait seulement quelques heures ; le temps d'exploitation du modèle serait environ 20 fois plus faible.

Comme pour un modèle physique, la *mise en oeuvre d'un modèle mathématique* nécessite les phases successives suivantes :

— *Conception du modèle* : Il s'agit de choisir et poser le système d'équations définissant le phénomène étudié, de déterminer leur mode de résolution numérique, puis d'établir le programme machine, c'est-à-dire la liste des instructions que doit suivre l'ordinateur pour résoudre les équations du problème. Cette phase de conception du modèle est beaucoup plus importante sur un modèle mathématique que sur un modèle physique.

— *Construction du modèle* : La topographie du site, les caractéristiques hydrauliques (hauteurs d'eau, débits, vitesses), les sections de contrôle, les rugosités, sont représentées par des *tables numériques* donnant les conditions topographiques et les conditions limites de débits, hauteurs, vitesses, etc . . . et des *paramètres numériques* correspondant aux coefficients de rugosité ou de débit. Ces données sont d'ailleurs souvent simplifiées en négligeant certains paramètres secondaires.

— *Réglage du modèle* : Comme pour les modèles physiques, on ajuste certaines données (coefficients de rugosité) pour mieux reproduire les écoulements

(1) M. Carlier – *Machines hydrauliques* (Service des publications de l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts, 1968).

permanents ou variables observés et connus sur le prototype.

– *Exploitation du modèle* : On introduit dans la machine, sous forme de cartes perforées, les modifications artificielles qu'on désire apporter à l'écoulement et l'ordinateur fournit très rapidement les modifications résultantes aux divers points et aux divers instants. Des programmes auxiliaires sont souvent utilisés pour tracer directement les courbes par points et présenter ainsi les résultats sous forme de graphiques. Cette phase d'exploitation du modèle est beaucoup plus rapide sur un modèle mathématique que sur un modèle physique en raison de la puissance des ordinateurs.

XIV.4.3. Avantages du modèle mathématique

L'ordinateur fournit directement les valeurs numériques des résultats sous forme de tableaux ou de courbes ; on évite ainsi les erreurs de report et le travail de collationnement des mesures effectuées sur le modèle physique. Pour des aménagements de grande envergure comportant de nombreux essais le gain de temps est considérable.

L'exploitation d'un modèle mathématique est beaucoup plus rapide que celle d'un modèle physique : chaque essai nécessite simplement de modifier certaines données et la machine sort immédiatement les résultats correspondants. On peut, en particulier, rechercher facilement la solution optimale du point de vue économique ; il suffit de construire un programme comportant des estimations de prix en sus des calculs purement hydrauliques.

Le modèle mathématique peut se conserver indéfiniment sous un faible volume puisqu'il comporte seulement un jeu de cartes et le programme ; un tel modèle est susceptible d'être facilement reproduit en nombreux exemplaires ; il est aisément transportable en un autre lieu d'utilisation disposant d'un ordinateur adapté, cet avantage est précieux dans certains cas tels que l'annonce des crues, l'exploitation des retenues, etc .

XIV.4.4. Comparaison du modèle mathématique et du modèle physique ; leur complémentarité

On sait qu'un ordinateur ne peut que résoudre les équations qu'on lui fournit. C'est donc à l'hydraulicien qu'il appartient de définir les équations qui représentent convenablement le problème posé ; il est évident que si certains paramètres ou certaines grandeurs ne figurent pas dans les équations initiales, le modèle ne pourra pas les fournir.

Si certains phénomènes importants sont insuffisamment connus pour pouvoir les mettre en équations, on peut utiliser concurremment le modèle mathématique et le modèle physique : le premier sera un modèle général donnant les réponses d'ensemble et permettant la construction de modèles physiques à grande échelle concernant des problèmes locaux et autorisant l'étude plus fine de points particuliers.

Certains problèmes peuvent être étudiés à l'aide de modèles mathématiques ou physiques ; la comparaison du coût et du délai des études conduites à partir de l'un ou l'autre modèle permettra de fixer son choix. En particulier, si la programmation existe et si l'exploitation du modèle nécessite la répétition de certains types d'écoulements en modifiant seulement un ou plusieurs paramètres, le modèle mathématique constituera souvent la solution la plus rapide et la plus économique.

L'extension d'un modèle mathématique est plus facile que celle d'un modèle physique à condition de disposer d'un ordinateur assez puissant. Si toutefois cette extension nécessite une refonte partielle du programme initial, le temps nécessaire à cette extension du modèle mathématique est alors comparable à celui exigé par les constructions supplémentaires du modèle physique.

XIV.4.5. Exemples d'emploi de modèles mathématiques en hydraulique

XIV.4.5.1. *Modèles mathématiques d'écoulements à surface libre*

Les équations différentielles de base, souvent désignées sous le terme *d'équations de Barré de Saint-Venant*, sont

– *l'équation de continuité* qui exprime la conservation du volume d'eau :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_1$$

avec

$\Omega(x , h)$ = section mouillée,

$Q(x , t)$ = débit de l'écoulement principal,

q_1 = débit latéral (débit dérivé ou affluent ou débit de fuite linéaire).

— *l'équation du mouvement* (permanent ou le plus souvent variable) exprimant l'équilibre entre les forces de pesanteur, de frottement et d'inertie appliquées à la masse d'eau en mouvement ; dans le cas général d'un mouvement en régime variable cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J)$$

avec

$V(x, t)$ = vitesse moyenne,

$h(x, t)$ = profondeur,

I = pente du fond,

J = pente de la ligne d'énergie (perte de charge unitaire).

Le modèle mathématique des régimes transitoires non permanents des écoulements à surface libre résultant des équations de Saint-Venant constitue un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique résolu à l'aide de la théorie des caractéristiques. Il peut également être étudié par des méthodes explicites et implicites utilisant la transcription en "différences finies" des variables spaciales et temporelles figurant sous forme différentielle dans les équations de Saint-Venant. L'état initial de l'écoulement (conditions aux limites amont ou aval) est introduit dans le modèle sous forme de relations imposées entre les hauteurs et les débits, les niveaux et les temps ou les débits et les temps.

Un tel modèle permettra, par exemple, le calcul complet de la *propagation des crues* et de leur composition. Le modèle est réglé sur une ou plusieurs crues naturelles connues ; on peut alors introduire, en amont, autant de crues fictives que nécessaires sous forme de cartes perforées et l'ordinateur fournit très rapidement les résultats (hauteurs et débits en diverses sections et à divers instants) sous forme de tableaux de chiffres, voire même sous forme de courbes directement tracées par des programmes auxiliaires.

Un tel modèle mathématique permettra de prévoir l'*influence sur l'écoulement d'aménagements éventuels* (endiguements, recalibrages du lit, dragages, barrages de retenue, exploitation d'usines hydroélectriques) alors qu'un modèle physique serait pratiquement irréalisable en raison des dimensions qu'il devrait atteindre. Le modèle mathématique pourra permettre également de déterminer les caractéristiques de *l'onde de crue résultant de la rupture d'un barrage*, l'étendue des zones inondées, le délai d'arrivée du flot, la durée et la hauteur des submersions.

XIV.4.5.2. *Modèles mathématiques hydrologiques*

La genèse des crues, c'est-à-dire le passage des précipitations aux débits, nécessite une série de calculs graphiques ou manuels susceptibles d'être transférés sur ordinateur qui effectue très rapidement les calculs permettant l'établissement des correspondances pluie-ruissellement, compte tenu de l'introduction des facteurs météorologiques (pluie et évaporation). L'exploitation du modèle ainsi réglé permet de reconstituer les débits au moyen d'opérateurs linéaires (hydrogrammes unitaires) ou par toute autre correspondance pluie-débit.

XIV.4.5.3. *Modèles mathématiques hydrogéologiques*

On sait que les équations différentielles régissant le mouvement des nappes souterraines ne peuvent être intégrées de manière exacte lorsque les conditions aux limites ne sont pas simples ; par ailleurs, les paramètres physiques intervenant dans l'écoulement (perméabilité, porosité, etc. . .) sont généralement connus de façon insuffisante.

Un tel problème se prête particulièrement bien au traitement par modèle mathématique. Les observations de l'évolution naturelle d'une nappe ou les essais de pompage permettent de procéder au réglage du modèle, en particulier de fixer la valeur des perméabilités qui reproduisent correctement le phénomène observé. Le modèle ainsi réglé permet ensuite de prévoir les débits disponibles en exploitation. Certains problèmes complexes, inabordables par les méthodes traditionnelles (représentation conforme, modèle analogique) tels que les écoulements transitoires en milieu hétérogène, peuvent être résolus par le modèle mathématique.

XIV.4.5.4. *Autres exemples d'emploi de modèles mathématiques*

Comme nous l'avons constaté au cours de plusieurs chapitres de cet ouvrage, l'hydraulicien a souvent l'occasion d'effectuer de nombreux *calculs à caractère répétitif* (courbes de remous, réseaux maillés, coups de bélier, etc.). Les méthodes classiques (calcul numérique ou graphique) de résolution de ces problèmes peuvent être avantageusement remplacées par l'ordinateur qui permet en outre d'élargir leur champ d'action lorsque la complexité des données rend leur emploi pratiquement impossible (coups de bélier dans un réseau maillé par exemple).

BIBLIOGRAPHIE du Chapitre XIV

1 – Lois de similitude

CHAPOUTHIER (P.).– La similitude et les machines tournantes. Revue *l'Industrie nationale*, n° 2, 1964.

CHAPOUTHIER (P.).– L'art de la similitude. Revue *l'Industrie nationale*, n° 2, 1964.

COMOLET (R.).– *Introduction à l'analyse dimensionnelle et aux problèmes de similitude en Mécanique des fluides.* Ed. Masson, 1958.

HERMANT (C.).– Applications de la similitude dans le domaine des turbomachines hydrauliques. Revue *l'Industrie nationale*, n° 2, 1964.

HUG (M.).– Analyse dimensionnelle et similitude en mécanique des fluides. Revue *l'Industrie nationale*, n° 2, 1964.

SCHLAG (A.).– L'étude hydraulique sur modèles des appareillages industriels. *Bulletin du Centre belge d'étude et de documentation des eaux*, n° 45, 3ème trim. 1959.

SOGREAH – Valeur du modèle réduit – Notion de similitude. *Etudes et réalisations,* n° 40, Avril 1957.

WEBER (J.).– Etude théorique et expérimentale de la similitude dans les essais sur modèles du comportement mécanique des milieux granulaires. *Annales des Ponts et Chaussées,* n° 1, Janvier-Février 1968.

2 – Modèles réduits physiques

BANAL (M.).– La marée en Manche-Etudes et essais sur modèles réduits. *Comité National français de Géodésie et Géophysique,* C.R. 1963.

BLANCHET (C.).– Modèles réduits et problèmes d'hydraulique dans les aménagements hydro-électriques. *Etudes et réalisations,* n° 77, Mars-Avril 1961.

BOUCHER (R.).– L'étude expérimentale des problèmes d'hydraulique fluviale. *L'Ingénieur,* Canada, n° 171, 1957.

CHABERT (J.).– Etude sur modèle du barrage de retenue de Rochemaure. *Construction,* n° 4, Avril 1957.

CHAUVIN (J.L.).– Similitude des modèles de cours d'eau à fond mobile. *Bulletin du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou,* n° 1, 1962.

GAMOT (J.P.).– Etude sur modèle réduit du pilotage des superpétroliers dans le canal de Suez. *Etudes et réalisations,* n° 82, Janvier-Février 1962.

SAUVAGE DE SAINT-MARC (G.).– Les études hydrauliques sur modèles réduits. *Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics,* n° 210, Octobre 1951.

WERLÉ (H.).– Méthodes de visualisation des écoulements hydrauliques. *La Houille Blanche,* n° 5, Août-Septembre 1963.

3 – Modèles mathématiques – Utilisation des machines à calculer

BERTHIER (P.) et MEGARD (J.).– Quelques aspects de l'emploi des modèles mathématiques fluviaux. *La Houille Blanche,* n° 4, 1965.

CUNGE (J.A.).– Comparaison des résultats d'essais d'intumescences effectués sur le modèle réduit et sur le modèle mathématique du canal Oraison-Manosque. *La Houille Blanche,* n° 1, 1966.

DA'UBERT (A.), FABRE (L.), Melle MARGNAC (A.) et MARVAUD (P.).– Quelques applications de modèles mathématiques à l'étude des écoulements non permanents dans un réseau ramifié de rivières ou canaux. *La Houille Blanche,* n° 7, 1967.

DUJARDIN (J.M.) et MOUGIN (G.).– Etablissement d'un modèle mathématique hydrologique servant à la prévision et l'annonce des crues du Rio Guadalquivir (Espagne). *La Houille Blanche,* n° 7, 1967.

HALBRONN (G.).– Un nouvel outil de l'étude des aménagements hydrauliques : le modèle mathématique. *Bulletin du P.C.M.,* n° 10, Décembre 1966.

LORGERE (H.) et PREISSMANN (A.).– Expériences dans l'exploitation de modèles mathématiques de bassin fluviaux. *La Houille Blanche,* n° 7, 1967.

LORGERE (H.) et ZANOBETTI (D.).– Le modèle mathématique du delta du Mékong. *La Houille Blanche,* nos 1,4 et 5, 1968.

MENARD (Y.).– Système de prévision des crues dans le delta du Mékong au Cambodge. *Nature et Ressources,* bulletin de la Décennie hydrologique internationale, Unesco, n° 2, Juin 1969.

PINGUET (M.L.).– Etudes hydrologiques en Espagne : La régulation du Guadalquivir. *La Technique de l'eau et de l'assainissement,* n° 247, Juillet 1967.

SAUVAGE DE SAINT-MARC (G.).– Compte-rendu de l'Assemblée générale de l'Association Internationale de Recherches hydrauliques tenue à Dubrovnik en Septembre 1961. *La Houille Blanche,* n° A, Mai-Juin 1962.

SOGREAH – Calcul des projets de canaux à l'aide des ordinateurs-Programme de terrassements. *Etudes et réalisations,* n° 119, Août-Septembre 1968.

4 – Laboratoires d'hydraulique

A.I.R.H.– Association internationale de recherches hydrauliques. *Recherches hydrauliques 1956.* Ed. A.I.R.H., Delft, 1956.

BANAL (M.).– Le Centre de Recherches et d'Essais de Chatou. *Bulletin du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou,* n° 3, Mars 1963.

BUNYAN (J.E.).– *Outline of the Nankin Hydraulic Engineering Research Institute.* L'Institut de recherches hydrauliques de Nankin. Nanking Hydraulic Engineering Research Institute, 1958.

CARLIER (M.).— Le laboratoire d'hydraulique de l'Ecole Nationale du Génie Rural. *La Documentation française*, Août 1962.

DODU (J.), DUPORT (J.) et MICHEL (J.M.).— Le tunnel hydrodynamique de l'Université de Grenoble. *La Houille Blanche*, n° 8, 1968.

EGUIASAROFF (I.V.). — Le développement des recherches hydrauliques en U.R.S.S. *La Houille Blanche*, n° 4, Août-Septembre 1958.

ESCANDE (L.).— Les laboratoires d'hydraulique de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique de Toulouse. Revue *Travaux*, n° 266, Décembre 1956.

ESCANDE (L.) et NOUGARO (J.).— Les études et la recherche en hydraulique. *L'Ingénieur-Conseil de France*, n° 34, Janvier 1959.

ESCANDE (L.).— Le laboratoire d'hydraulique de Toulouse. *Sciences*, Revue française des sciences et techniques, n° 5, Janvier-Février 1960.

GINOCCHIO (R.).— Le Laboratoire National d'Hydraulique. *Le Moniteur des Travaux Publics et du Bâtiment*, n° 34, 23 Août 1958 et *La Technique de l'eau et de l'assainissement*, n° 141, 15 Septembre 1958.

JAMME (G.).— La technique française en matière de laboratoires d'études hydrauliques. *Etudes et réalisations*, n° 87, Décembre 1962.

MIDDLETON (H.K.).— *Hydraulic research in the United States.* La Recherche hydraulique aux Etats-Unis. National Bureau of Standards, US Department of Commerce, publication n° 221, 1957.

ROLLINS (A.P.).— The Waterways Experiment Station. Le Laboratoire d'hydraulique fluviale du Corps of Engineers. *The Military Engineer*, USA, vol. 50, n° 337, Septembre-Octobre 1958.

ROSSI (A.) et MARZOLO (F.).— Laboratoires d'essais hydrauliques de Voltabarozzo (Padoue). *Giornale del Genio civile*, n° 3, Mars 1957.

WERLÉ (H.).— Le laboratoire des analogies hydrauliques de la Direction aérodynamique de l'O.N.E.R.A. *Office national d'études et de recherches aéronautiques*, bulletin n° 103, 1961.

X . .— Les laboratoires d'hydraulique en France. *La Technique de l'eau*, n° 124, 15 Avril 1957.

X . .— The Hydraulics Research Station, Wallingford. La station de recherches hydrauliques de Wallingford. *Water and Water Engineering*, n° 733, 1957.

ANNEXES

LISTE DES ANNEXES

1 – Abaques d'utilisation de la formule de Colebrook

2 – Tables d'application de la formule de Bazin

3 – Nomogramme à points alignés de la formule de Bazin

4 – Valeurs du coefficient n des formules de Ganguillet et Kutter et de Manning

5 – Formule de Manning – Table des puissances 2/3 de R

6 – Abaque d'utilisation de la formule de Strickler

7 – Table de la fonction de Bresse

8 – Table de la fonction de Bakhmeteff

9 – Table de la fonction $\Phi = \eta + \int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta^n - 1}$

10 – Diagramme universel de Silber pour le calcul et le tracé des courbes de remous

11 – Courbe standard $W(u) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$

11-a : $10^{-1} \leqslant u \leqslant 10$

11-b : $10^{-15} \leqslant u \leqslant 10^{-1}$

Les annexes n^{os} 1, 3, 6, 10 et 11 sont insérées dans une pochette placée à la fin de l'ouvrage

ANNEXE 2

TABLES D'APPLICATION DE LA FORMULE DE BAZIN

$$U = C\sqrt{RI} \quad \text{avec} \quad C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

Rayon moyen R en mètres	Valeurs de C pour γ =					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8
0,16	75,6	62,1	40,5	27,8	20,4	16,2
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1
0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,50	80,2	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,60	80,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,70	81,1	73,1	56,1	43,1	34,1	28,1
0,80	81,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,90	81,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
1,00	82,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
1,10	82,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
1,20	82,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33,5
1,30	82,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
1,40	82,8	76,6	62,6	50,6	41,4	35,1
1,50	82,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
1,60	83,0	77,2	63,8	52,0	42,9	36,5
1,70	83,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
1,80	83,2	77,7	64,8	53,2	44,2	37,7
1,90	83,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
2,00	83,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
2,40	83,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
2,80	83,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
3,40	84,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
4,00	84,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4

ANNEXE 4
VALEURS DU COEFFICIENT *n* DES FORMULES DE GANGUILLET ET KUTTER ET DE MANNING

(d'après R.E. HORTON – 1916)

Nature des surfaces	Etats des parois			
	Parfait	Bon	Assez bon	Mauvais
A) Canaux artificiels				
Ciment lissé	0,010	0,011	0,012	0,013
Mortier de ciment	0,011	0,012	0,013(*)	0,015
Aqueducs en bois raboté	0,010	0,012(*)	0,013	0,014
Aqueducs en bois non raboté	0,011	0,013(*)	0,014	0,015
Canaux revêtus de béton	0,012	0,014(*)	0,016	0,018
Moëllons bruts assemblés au ciment.	0,017	0,020	0,025	0,030
Pierres sèches	0,025	0,030	0,033	0,035
Moëllons dressés	0,013	0,014	0,015	0,017
Aqueducs métalliques à section demi-circulaire, lisses	0,011	0,012	0,013	0,015
Aqueducs métalliques en tôle plissée section demi-circulaire	0,0225	0,025	0,0275	0,030
Canaux et fossés en terre, droits et uniformes	0,017	0,020	0,0225(*)	0,025
Canaux et fossés avec pierres, lisses et uniformes	0,025	0,030	0,033(*)	0,035
Canaux et fossés avec pierres, rugueux et irréguliers	0,035	0,040	0,045	–
Canaux en terre à larges méandres .	0,0225	0,025(*)	0,0275	0,030
Canaux en terre dragués	0,025	0,0275(*)	0,030	0,033
Canaux avec lits de pierres rugueuses, herbes sur les rives de terre	0,025	0,030	0,035(*)	0,040
Canaux à fond en terre, côtés avec pierres	0,028	0,030(*)	0,033(*)	0,035
B) Cours d'eau naturels :				
1) Propres, rives en ligne droite, l'eau au niveau le plus haut, sans gué ou fosse profonde	0,025	0,0275	0,030	0,033
2) Le même que (1) mais avec quelques herbes et pierres	0,030	0,033	0,035	0,040

(*) Valeur utilisée généralement dans les projets.

Annexe 4 (suite et fin)

Nature des surfaces	Etat des parois			
	Parfait	Bon	Assez bon	Mauvais
3) Avec méandres, avec quelques étangs et endroits peu profonds, propres	0,035	0,040	0,045	0,050
4) Le même que (3), l'eau à l'étiage, pente et sections plus faibles	0,040	0,045	0,050	0,055
5) Le même que (3) avec quelques herbes et pierres	0,033	0,035	0,040	0,045
6) Le même que (4) avec pierres .	0,045	0,050	0,055	0,060
7) Zones à eau coulant lentement avec herbes ou fosses très profondes . .	0,050	0,060	0,070	0,080
8) Zones avec beaucoup de mauvaises herbes	0,075	0,100	0,125	0,150

ANNEXE 5

FORMULE DE MANNING $U = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2}$

Valeurs des puissances 2/3 de R

R	$R^{2/3}$	R	$R^{2/3}$	R	$R^{2/3}$	R	$R^{2/3}$
0,05	0,136	0,30	0,448	0,75	0,825	4,00	2,520
0,06	0,153	0,31	0,458	0,80	0,862	4,50	2,726
0,07	0,170	0,32	0,468	0,85	0,897	5,00	2,924
0,08	0,186	0,33	0,477	0,90	0,932	5,50	3,116
0,09	0,201	0,34	0,487	0,95	0,966	6,00	3,302
0,10	0,215	0,35	0,497	1,00	1,000	6,50	3,483
0,11	0,229	0,36	0,506	1,10	1,065	7,00	3,659
0,12	0,243	0,37	0,515	1,20	1,129	7,50	3,832
0,13	0,256	0,38	0,525	1,30	1,191	8,00	4,000
0,14	0,269	0,39	0,534	1,40	1,251	8,50	4,165
0,15	0,282	0,40	0,543	1,50	1,310	9,00	4,327
0,16	0,295	0,41	0,552	1,60	1,368	9,50	4,486
0,17	0,307	0,42	0,561	1,70	1,424	10,00	4,642
0,18	0,319	0,43	0,570	1,80	1,478	11,00	4,946
0,19	0,331	0,44	0,578	1,90	1,534	12,00	5,241
0,20	0,342	0,45	0,587	2,00	1,587	13,00	5,529
0,21	0,353	0,46	0,596	2,20	1,691	14,00	5,809
0,22	0,364	0,47	0,604	2,40	1,792	15,00	6,082
0,23	0,375	0,48	0,613	2,60	1,891	16,00	6,350
0,24	0,386	0,49	0,622	2,80	1,987	17,00	6,611
0,25	0,397	0,50	0,630	3,00	2,080	18,00	6,868
0,26	0,407	0,55	0,671	3,20	2,172	19,00	7,120
0,27	0,418	0,60	0,711	3,40	2,261	20,00	7,368
0,28	0,428	0,65	0,750	3,60	2,349		
0,29	0,438	0,70	0,788	3,80	2,435		

Calcul des courbes de remous par la méthode de Bresse

TABLE DE LA FONCTION DE BRESSE : $\Phi = -\int \frac{dy}{y^3 - 1}$

y	$\Phi(y)$	y	$\Phi(y)$
0,00	− 0,605	1,06	0,838
0,10	− 0,505	1,07	0,783
0,20	− 0,404	1,08	0,749
0,30	− 0,302	1,09	0,712
0,40	− 0,198	1,10	0,676
0,45	− 0,144	1,11	0,651
0,50	− 0,088	1,12	0,626
0,55	− 0,029	1,13	0,602
0,60	+ 0,032	1,14	0,580
0,65	0,099	1,15	0,561
0,70	0,171	1,16	0,541
0,72	0,202	1,17	0,525
0,74	0,235	1,18	0,509
0,75	0,252	1,19	0,493
0,76	0,270	1,20	0,479
0,77	0,288	1,22	0,454
0,78	0,306	1,25	0,420
0,79	0,326	1,30	0,373
0,80	0,346	1,35	0,335
0,81	0,367	1,40	0,304
0,82	0,387	1,45	0,277
0,83	0,411	1,50	0,257
0,84	0,435	1,60	0,218
0,85	0,460	1,70	0,190
0,86	0,487	1,80	0,166
0,87	0,516	1,90	0,146
0,88	0,546	2,00	0,132
0,89	0,578	2,25	0,102
0,90	0,614	2,50	0,082
0,91	0,652	2,75	0,0674
0,92	0,695	3,00	0,0564
0,93	0,743	3,25	0,0479
0,94	0,798	3,50	0,0412
0,95	0,862	4,00	0,0315
0,96	0,940	4,50	0,0248
0,97	1,040	5,00	0,0201
0,98	1,178	7,00	0,0102
0,99	1,412	10,00	0,0050
1,00	∞	15,00	0,0022
1,01	1,416	30,00	0,0006
1,02	1,196	50,00	0,0002
1,03	1,060	100,00	0,0001
1,04	0,970	∞	0,0000
1,05	0,895		

ANNEXE 8

Calcul des courbes de remous par la méthode de BAKHMETEFF

TABLE DE LA FONCTION $\mathcal{B} = -\int_0^n \frac{d\eta}{\eta^n - 1}$

η	$n = 2{,}8$	$n = 3{,}0$	$n = 3{,}2$	$n = 3{,}4$	$n = 3{,}6$	$n = 3{,}8$	$n = 4{,}0$	$n = 4{,}2$	$n = 4{,}6$	$n = 5{,}0$	$n = 5{,}4$
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,02	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
0,04	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040	0,040
0,06	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060
0,08	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080	0,080
0,10	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,12	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120
0,14	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140	0,140
0,16	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160	0,160
0,18	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180
0,20	0,201	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,22	0,221	0,221	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220	0,220
0,24	0,241	0,241	0,241	0,240	0,240	0,240	0,240	0,240	0,240	0,240	0,240
0,26	0,262	0,261	0,261	0,261	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260
0,28	0,282	0,282	0,281	0,281	0,281	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280
0,30	0,303	0,302	0,302	0,301	0,301	0,301	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
0,32	0,324	0,323	0,322	0,322	0,321	0,321	0,321	0,321	0,320	0,320	0,320
0,34	0,344	0,343	0,343	0,342	0,342	0,341	0,341	0,341	0,340	0,340	0,340
0,36	0,366	0,364	0,363	0,363	0,362	0,362	0,361	0,361	0,361	0,360	0,360
0,38	0,387	0,385	0,384	0,383	0,383	0,382	0,382	0,381	0,381	0,381	0,380
0,40	0,408	0,407	0,405	0,404	0,403	0,403	0,402	0,402	0,401	0,401	0,400
0,42	0,430	0,428	0,426	0,425	0,424	0,423	0,423	0,422	0,421	0,421	0,421
0,44	0,452	0,450	0,448	0,446	0,445	0,444	0,443	0,443	0,442	0,441	0,441
0,46	0,475	0,472	0,470	0,468	0,466	0,465	0,464	0,463	0,462	0,462	0,461
0,48	0,497	0,494	0,492	0,489	0,488	0,486	0,485	0,484	0,483	0,482	0,481
0,50	0,521	0,517	0,514	0,511	0,509	0,508	0,506	0,505	0,504	0,503	0,502
0,52	0,544	0,540	0,536	0,534	0,531	0,529	0,528	0,527	0,525	0,523	0,522
0,54	0,568	0,563	0,559	0,556	0,554	0,551	0,550	0,548	0,546	0,544	0,543
0,56	0,593	0,587	0,583	0,579	0,576	0,574	0,572	0,570	0,567	0,565	0,564
0,58	0,618	0,612	0,607	0,603	0,599	0,596	0,594	0,592	0,589	0,587	0,585
0,60	0,644	0,637	0,631	0,627	0,623	0,620	0,617	0,614	0,611	0,608	0,606
0,61	0,657	0,650	0,644	0,639	0,635	0,631	0,628	0,626	0,622	0,619	0,617
0,62	0,671	0,663	0,657	0,651	0,647	0,643	0,640	0,637	0,633	0,630	0,628
0,63	0,684	0,676	0,669	0,664	0,659	0,655	0,652	0,649	0,644	0,641	0,638
0,64	0,698	0,690	0,683	0,677	0,672	0,667	0,664	0,661	0,656	0,652	0,649
0,65	0,712	0,703	0,696	0,689	0,684	0,680	0,676	0,673	0,667	0,663	0,660
0,66	0,727	0,717	0,709	0,703	0,697	0,692	0,688	0,685	0,679	0,675	0,672
0,67	0,742	0,731	0,723	0,716	0,710	0,705	0,701	0,697	0,691	0,686	0,683

Annexe 8 (suite)

η	$n = 2,8$	$n = 3,0$	$n = 3,2$	$n = 3,4$	$n = 3,6$	$n = 3,8$	$n = 4,0$	$n = 4,2$	$n = 4,6$	$n = 5,0$	$n = 5,4$
0,68	0,757	0,746	0,737	0,729	0,723	0,718	0,713	0,709	0,703	0,698	0,694
0,69	0,772	0,761	0,751	0,743	0,737	0,731	0,726	0,722	0,715	0,710	0,706
0,70	0,787	0,776	0,766	0,757	0,750	0,744	0,739	0,735	0,727	0,722	0,717
0,71	0,804	0,791	0,781	0,772	0,764	0,758	0,752	0,748	0,740	0,734	0,729
0,72	0,820	0,807	0,796	0,786	0,779	0,772	0,766	0,761	0,752	0,746	0,741
0,73	0,837	0,823	0,811	0,802	0,793	0,786	0,780	0,774	0,765	0,759	0,753
0,74	0,854	0,840	0,827	0,817	0,808	0,800	0,794	0,788	0,779	0,771	0,766
0,75	0,872	0,857	0,844	0,833	0,823	0,815	0,808	0,802	0,792	0,784	0,778
0,76	0,890	0,874	0,861	0,849	0,839	0,830	0,823	0,817	0,806	0,798	0,791
0,77	0,909	0,892	0,878	0,866	0,855	0,846	0,838	0,831	0,820	0,811	0,804
0,78	0,929	0,911	0,896	0,883	0,872	0,862	0,854	0,847	0,834	0,825	0,817
0,79	0,949	0,930	0,914	0,901	0,889	0,879	0,870	0,862	0,849	0,839	0,831
0,80	0,970	0,950	0,934	0,919	0,907	0,896	0,887	0,878	0,865	0,854	0,845
0,81	0,992	0,971	0,954	0,938	0,925	0,914	0,904	0,895	0,881	0,869	0,860
0,82	1,015	0,993	0,974	0,958	0,945	0,932	0,922	0,913	0,897	0,885	0,875
0,83	1,039	1,016	0,996	0,979	0,965	0,952	0,940	0,931	0,914	0,901	0,890
0,84	1,064	1,040	1,019	1,001	0,985	0,972	0,960	0,949	0,932	0,918	0,906
0,85	1,091	1,065	1,043	1,024	1,007	0,993	0,980	0,969	0,950	0,935	0,923
0,86	1,119	1,092	1,068	1,048	1,031	1,015	1,002	0,990	0,970	0,954	0,940
0,87	1,149	1,120	1,095	1,074	1,055	1,039	1,025	1,012	0,990	0,973	0,959
0,88	1,181	1,151	1,124	1,101	1,081	1,064	1,049	1,035	1,012	0,994	0,978
0,89	1,216	1,183	1,155	1,131	1,110	1,091	1,075	1,060	1,035	1,015	0,999
0,90	1,253	1,218	1,189	1,163	1,140	1,120	1,103	1,087	1,060	1,039	1,021
0,91	1,294	1,257	1,225	1,197	1,173	1,152	1,133	1,116	1,088	1,064	1,045
0,92	1,340	1,300	1,266	1,236	1,210	1,187	1,166	1,148	1,117	1,092	1,072
0,93	1,391	1,348	1,311	1,279	1,251	1,226	1,204	1,184	1,151	1,123	1,101
0,94	1,449	1,403	1,363	1,328	1,297	1,270	1,246	1,225	1,188	1,158	1,134
0,95	1,518	1,467	1,423	1,385	1,352	1,322	1,296	1,272	1,232	1,199	1,172
0,96	1,601	1,545	1,497	1,454	1,417	1.385	1,355	1,329	1,285	1,248	1,217
0,97	1,707	1,644	1,590	1,543	1,501	1,464	1,431	1,402	1,351	1,310	1,275
0,975	1,773	1,707	1,649	1,598	1,554	1,514	1,479	1,447	1,393	1,348	1,311
0,980	1,855	1,783	1,720	1,666	1,617	1,575	1,536	1,502	1,443	1,395	1,354
0,985	1,959	1,880	1,812	1,752	1,699	1,652	1,610	1,573	1,508	1,454	1,409
0,990	2,106	2,017	1,940	1,873	1,814	1,761	1,714	1,671	1,598	1,537	1,487
0,995	2,355	2,250	2,159	2,079	2,008	1,945	1,889	1,838	1,751	1,678	1,617
0,999	2,931	2,788	2,663	2,554	2,457	2,370	2,293	2,223	2,102	2,002	1,917
1,001	2,399	2,184	2,008	1,856	1,725	1,610	1,508	1,417	1,264	1,138	1,033
1,005	1,818	1,649	1,506	1,384	1,279	1,188	1,107	1,036	0,915	0,817	0,737
1,010	1,572	1,419	1,291	1,182	1,089	1,007	0,936	0,873	0,766	0,681	0,610
1,015	1,428	1,286	1,166	1,065	0,978	0,902	0,836	0,778	0,680	0,602	0,537
1,02	1,327	1,191	1,078	0,982	0,900	0,828	0,766	0,711	0,620	0,546	0,486
1,03	1,186	1,060	0,955	0,866	0,790	0,725	0,668	0,618	0,535	0,469	0,415

Annexe 8 (suite)

η	$n = 2,8$	$n = 3,0$	$n = 3,2$	$n = 3,4$	$n = 3,6$	$n = 3,8$	$n = 4,0$	$n = 4,2$	$n = 4,6$	$n = 5,0$	$n = 5,4$
1,04	1,086	0,967	0,868	0,785	0,714	0,653	0,600	0,554	0,477	0,415	0,365
1,05	1,010	0,896	0,802	0,723	0,656	0,598	0,548	0,504	0,432	0,374	0,328
1,06	0,948	0,838	0,748	0,672	0,608	0,553	0,506	0,464	0,396	0,342	0,298
1,07	0,896	0,790	0,703	0,630	0,569	0,516	0,471	0,431	0,366	0,315	0,273
1,08	0,851	0,749	0,665	0,595	0,535	0,485	0,441	0,403	0,341	0,292	0,252
1,09	0,812	0,713	0,631	0,563	0,506	0,457	0,415	0,379	0,319	0,272	0,234
1,10	0,777	0,681	0,601	0,536	0,480	0,433	0,392	0,357	0,299	0,254	0,218
1,11	0,746	0,652	0,575	0,511	0,457	0,411	0,372	0,338	0,282	0,239	0,204
1,12	0,718	0,626	0,551	0,488	0,436	0,392	0,354	0,321	0,267	0,225	0,192
1,13	0,692	0,602	0,529	0,468	0,417	0,374	0,337	0,305	0,253	0,212	0,181
1,14	0,669	0,581	0,509	0,450	0,400	0,358	0,322	0,291	0,240	0,201	0,170
1,15	0,647	0,561	0,490	0,432	0,384	0,343	0,308	0,278	0,229	0,191	0,161
1,16	0,627	0,542	0,473	0,417	0,369	0,329	0,295	0,266	0,218	0,181	0,153
1,17	0,608	0,525	0,458	0,402	0,356	0,317	0,283	0,255	0,208	0,173	0,145
1,18	0,591	0,509	0,443	0,388	0,343	0,305	0,272	0,244	0,199	0,165	0,138
1,19	0,574	0,494	0,429	0,375	0,331	0,294	0,262	0,235	0,191	0,157	0,131
1,20	0,559	0,480	0,416	0,363	0,320	0,283	0,252	0,226	0,183	0,150	0,125
1,22	0,531	0,454	0,392	0,341	0,299	0,264	0,235	0,209	0,168	0,138	0,114
1,24	0,505	0,431	0,371	0,322	0,281	0,248	0,219	0,195	0,156	0,127	0,104
1,26	0,482	0,410	0,351	0,304	0,265	0,233	0,205	0,182	0,145	0,117	0,095
1,28	0,461	0,391	0,334	0,288	0,250	0,219	0,193	0,170	0,135	0,108	0,088
1,30	0,442	0,373	0,318	0,274	0,237	0,207	0,181	0,160	0,126	0,100	0,081
1,32	0,424	0,357	0,304	0,260	0,225	0,196	0,171	0,150	0,118	0,093	0,075
1,34	0,408	0,342	0,290	0,248	0,214	0,185	0,162	0,142	0,110	0,087	0,069
1,36	0,393	0,329	0,278	0,237	0,204	0,176	0,153	0,134	0,103	0,081	0,064
1,38	0,378	0,316	0,266	0,226	0,194	0,167	0,145	0,127	0,097	0,076	0,060
1,40	0,365	0,304	0,256	0,217	0,185	0,159	0,138	0,120	0,092	0,071	0,056
1,42	0,353	0,293	0,246	0,208	0,177	0,152	0,131	0,114	0,087	0,067	0,052
1,44	0,341	0,282	0,236	0,199	0,169	0,145	0,125	0,108	0,082	0,063	0,049
1,46	0,330	0,273	0,227	0,191	0,162	0,139	0,119	0,103	0,077	0,059	0,046
1,48	0,320	0,263	0,219	0,184	0,156	0,133	0,113	0,098	0,073	0,056	0,043
1,50	0,310	0,255	0,211	0,177	0,149	0,127	0,108	0,093	0,069	0,053	0,040
1,55	0,288	0,235	0,194	0,161	0,135	0,114	0,097	0,083	0,061	0,046	0,035
1,60	0,269	0,218	0,179	0,148	0,123	0,103	0,087	0,074	0,054	0,040	0,030
1,65	0,251	0,203	0,165	0,136	0,113	0,094	0,079	0,067	0,048	0,035	0,026
1,70	0,236	0,189	0,153	0,125	0,103	0,086	0,072	0,060	0,043	0,031	0,023
1,75	0,212	0,177	0,143	0,116	0,095	0,079	0,065	0,054	0,038	0,027	0,020
1,80	0,209	0,166	0,133	0,108	0,088	0,072	0,060	0,049	0,034	0,024	0,017
1,85	0,198	0,156	0,125	0,100	0,082	0,067	0,055	0,045	0,031	0,022	0,015
1,90	0,188	0,147	0,117	0,094	0,076	0,062	0,050	0,041	0,028	0,020	0,014
1,95	0,178	0,139	0,110	0,088	0,070	0,057	0,046	0,038	0,026	0,018	0,012

Annexe 8 (suite et fin)

η	n = 2,8	n = 3,0	n = 3,2	n = 3,4	n = 3,6	n = 3,8	n = 4,0	n = 4,2	n = 4,6	n = 5,0	n = 5,4
2,00	0,169	0,132	0,104	0,082	0,066	0,053	0,043	0,035	0,023	0,016	0,011
2,1	0,154	0,119	0,092	0,073	0,058	0,046	0,037	0,030	0,019	0,013	0,009
2,2	0,141	0,107	0,083	0,065	0,051	0,040	0,032	0,025	0,016	0,011	0,007
2,3	0,129	0,098	0,075	0,058	0,045	0,035	0,028	0,022	0,014	0,009	0,006
2,4	0,119	0,089	0,068	0,052	0,040	0,031	0,024	0,019	0,012	0,008	0,005
2,5	0,110	0,082	0,062	0,047	0,036	0,028	0,022	0,017	0,010	0,006	0,004
2,6	0,102	0,076	0,057	0,043	0,033	0,025	0,019	0,015	0,009	0,005	0,003
2,7	0,095	0,070	0,052	0,039	0,029	0,022	0,017	0,013	0,008	0,005	0,003
2,8	0,089	0,065	0,048	0,036	0,027	0,020	0,015	0,012	0,007	0,004	0,002
2,9	0,083	0,060	0,044	0,033	0,024	0,018	0,014	0,010	0,006	0,004	0,002
3,0	0,078	0,056	0,041	0,030	0,022	0,017	0,012	0,009	0,005	0,003	0,002
3,5	0,059	0,041	0,029	0,021	0,015	0,011	0,008	0,006	0,003	0,002	0,001
4,0	0,046	0,031	0,022	0,015	0,010	0,007	0,005	0,004	0,002	0,001	0,000
4,5	0,037	0,025	0,017	0,011	0,008	0,005	0,004	0,003	0,001	0,001	0,000
5,0	0,031	0,020	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000	0,000
6,0	0,022	0,014	0,009	0,006	0,004	0,002	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
7,0	0,017	0,010	0,006	0,004	0,002	0,002	0,001	0,001			
8,0	0,013	0,008	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000			
9,0	0,011	0,006	0,004	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000			
10,0	0,009	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000			
20,0	0,003	0,002	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000			

ANNEXE 9

Calcul des courbes de remous par la méthode de BAKHMETEFF simplifiée

TABLE DE LA FONCTION $\Phi = \eta + \int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta^n - 1} = \eta - \mathcal{B}(n, \eta)$

η	$n = 2,8$	$n = 3,0$	$n = 3,2$	$n = 3,4$	$n = 3,6$	$n = 3,8$	$n = 4,0$	$n = 4,2$
1,001	− 1,398	− 1,183	− 1,007	− 0,855	− 0,724	− 0,609	− 0,507	− 0,416
1,005	− 0,813	− 0,644	− 0,501	− 0,379	− 0,274	− 0,183	− 0,102	− 0,031
1,010	− 0,562	− 0,409	− 0,281	− 0,172	− 0,079	+ 0,003	+ 0,074	+ 0,137
1,015	− 0,413	− 0,271	− 0,151	− 0,050	+ 0,037	0,113	0,179	0,237
1,02	− 0,307	− 0,171	− 0,058	+ 0,038	0,120	0,192	0,254	0,309
1,03	− 0,156	− 0,030	+ 0,075	0,164	0,240	0,305	0,362	0,412
1,04	− 0,046	+ 0,073	0,172	0,255	0,326	0,387	0,440	0,486
1,05	+ 0,040	0,154	0,248	0,327	0,394	0,452	0,502	0,546
1,06	0,112	0,222	0,312	0,388	0,452	0,507	0,554	0,596
1,07	0,174	0,280	0,367	0,440	0,501	0,554	0,599	0,639
1,08	0,229	0,331	0,415	0,485	0,545	0,595	0,639	0,677
1,09	0,278	0,377	0,459	0,527	0,584	0,633	0,675	0,711
1,10	0,323	0,419	0,499	0,564	0,620	0,667	0,708	0,743
1,11	0,364	0,458	0,535	0,599	0,653	0,699	0,738	0,772
1,12	0,402	0,494	0,569	0,632	0,684	0,728	0,766	0,799
1,13	0,438	0,528	0,601	0,662	0,713	0,756	0,793	0,825
1,14	0,471	0,559	0,631	0,690	0,740	0,782	0,818	0,849
1,15	0,503	0,589	0,660	0,718	0,766	0,807	0,842	0,872
1,16	0,533	0,618	0,687	0,743	0,791	0,831	0,865	0,894
1,17	0,562	0,645	0,712	0,768	0,814	0,853	0,887	0,915
1,18	0,589	0,671	0,737	0,792	0,837	0,875	0,908	0,936
1,19	0,616	0,696	0,761	0,815	0,859	0,896	0,928	0,955
1,20	0,641	0,720	0,784	0,837	0,880	0,917	0,948	0,974
1,22	0,689	0,766	0,828	0,879	0,921	0,956	0,985	1,011
1,24	0,735	0,809	0,869	0,918	0,959	0,992	1,021	1,045
1,26	0,778	0,850	0,909	0,956	0,995	1,027	1,055	1,078
1,28	0,819	0,889	0,946	0,992	1,030	1,061	1,087	1,110
1,30	0,858	0,927	0,982	1,026	1,063	1,093	1,119	1,140
1,32	0,896	0,963	1,016	1,060	1,095	1,124	1,149	1,170
1,34	0,932	0,998	1,050	1,092	1,126	1,155	1,178	1,198
1,36	0,967	1,031	1,082	1,123	1,156	1,184	1,207	1,226
1,38	1,002	1,064	1,114	1,154	1,186	1,213	1,235	1,253
1,40	1,035	1,096	1,144	1,183	1,215	1,241	1,262	1,280
1,42	1,067	1,127	1,174	1,212	1,243	1,268	1,289	1,306
1,44	1,099	1,158	1,204	1,241	1,271	1,295	1,315	1,332
1,46	1,130	1,187	1,233	1,259	1,298	1,321	1,341	1,357
1,48	1,160	1,217	1,261	1,296	1,324	1,347	1,367	1,382
1,50	1,190	1,245	1,289	1,323	1,351	1,373	1,392	1,407
1,55	1,262	1,315	1,356	1,389	1,415	1,436	1,453	1,467

Annexe 9 (suite et fin)

η	$n = 2{,}8$	$n = 3{,}0$	$n = 3{,}2$	$n = 3{,}4$	$n = 3{,}6$	$n = 3{,}8$	$n = 4{,}0$	$n = 4{,}2$
1,60	1,331	1,382	1,421	1,452	1,477	1,497	1,513	1,526
1,65	1,399	1,447	1,485	1,514	1,537	1,556	1,571	1,583
1,70	1,464	1,511	1,547	1,575	1,597	1,614	1,628	1,640
1,75	1,538	1,573	1,607	1,634	1,655	1,671	1,685	1,696
1,80	1,591	1,634	1,667	1,692	1,712	1,728	1,740	1,751
1,85	1,652	1,694	1,725	1,750	1,768	1,783	1,795	1,805
1,90	1,712	1,753	1,783	1,806	1,824	1,838	1,850	1,859
1,95	1,772	1,811	1,840	1,862	1,880	1,893	1,904	1,912
2,00	1,831	1,868	1,896	1,918	1,934	1,947	1,947	1,965
2,1	1,946	1,981	2,008	2,027	2,042	2,054	2,063	2,070
2,2	2,059	2,093	2,117	2,135	2,149	2,160	2,168	2,175
2,3	2,171	2,202	2,225	2,242	2,255	2,265	2,272	2,278
2,4	2,281	2,311	2,332	2,348	2,360	2,369	2,376	2,381
2,5	2,390	2,418	2,438	2,453	2,464	2,472	2,478	2,483
2,6	2,498	2,524	2,543	2,557	2,567	2,575	2,581	2,585
2,7	2,605	2,630	2,648	2,661	2,671	2,678	2,683	2,687
2,8	2,711	2,735	2,752	2,764	2,773	2,780	2,785	2,788
2,9	2,817	2,840	2,856	2,865	2,876	2,882	2,886	2,890
3,0	2,922	2,944	2,959	2,970	2,978	2,983	2,988	2,991
3,5	3,441	3,459	3,471	3,479	3,485	3,489	3,492	3,494
4,0	3,954	3,969	3,978	3,985	3,990	3,993	3,995	3,996
4,5	4,463	4,475	4,483	4,489	4,492	4,495	4,496	4,497
5,0	4,969	4,980	4,987	4,991	4,994	4,996	4,997	4,998
6,0	5,978	5,986	5,991	5,994	5,996	5,998	5,998	5,999
7,0	6,983	6,990	6,994	6,996	6,998	6,998	6,999	6,999
8,0	7,987	7,992	7,995	7,997	7,998	7,999	7,999	
9,0	8,989	8,994	8,996	8,998	8,999	8,999		
10,0	9,991	9,995	9,997	9,998	9,999	9,999		

INDEX ALPHABÉTIQUE

Dans cet index ne figurent pas les mots les plus couramment utilisés en hydraulique, tels que "ajutage", "canalisation", "déversoir", "orifice", "régime", etc. qui correspondent à des chapitres ou fractions importantes de chapitres qu'il sera facile de retrouver dans la table des matières.

	Paragraphe	Page
– A –		
ALLEN		
Méthode et écran d'ALLEN (jaugeage des écoulements à surface libre) . .	XII.3.5	434
ALLIEVI		
Equations et formule d'ALLIÉVI (coup de bélier)	XI.10.2	294
Analogie		
Analogie électrique		
Principe	IV.5.4	79
Calcul des réseaux maillés	XI.5.5.2	282
Hydraulique souterraine	XIII.5.5.1	497
Analogie hydraulique (calcul des réseaux maillés)	XI.5.5.1	281
Analogie pneumatique (calcul des réseaux maillés)	XI.5.5.1	281
Analogie de HELE-SHAW		
Principe	VI.2.1.4	115
Hydraulique souterraine	XIII.5.5.2	500
ANDERSSON		
Ecran d'ANDERSSON(jaugeage)	XII.3.4	433
Anémomètre à fil chaud	VI.3.7	128
Aqueducs		
Aqueducs romains	I.3	2
Ecoulement dans les aqueducs	XII.1.9	340
ARCHIMÈDE		
Historique	I.2	2
Principe d'ARCHIMÈDE	III.7.2	46
Artésien		
Puits artésien	XIII.3.3.12	476
AUBUISSON		
Formule d'AUBUISSON (remous de pile de pont)	XII.2.10.2.4.2	415
– B –		
BAKHMETEFF		
Analogie de BAKHMETEFF (turbulence)	VI.3.3	123
Méthode de BAKHMETEFF (courbes de remous)	XII.2.7.2	376

	Paragraphe	Page
BAZIN		
Historique	I.11	14
Formule de BAZIN – Déversoirs	X.2.1.1.1.1 et X.4	193 et 211
– Canaux	XII.1.2	325
BÉLANGER		
Théorème de BÉLANGER (élargissement brusque)	VII.6.3.1	159
Bélier		
Coup de bélier	XI.10	292
BERGERON		
Méthode de BERGERON (Coup de bélier)	XI.10.4	305
BERNOULLI		
Historique	I.8	8
Théorème de BERNOULLI	V.1.6.2.2	91
BETZ		
Appareil de BETZ (jaugeage)	XII.3.7.1.2	442
BIDONE		
Expériences et formule de BIDONE (orifices à contraction incomplète)	VIII.2.3	173
BINGHAM		
Loi de BINGHAM (rhéologie)	VI.2.5	120
BLANC		
Formule de BLANC (nappe de drainage)	XIII.3.2.4	465
BLASIUS		
Formule et droite de BLASIUS (écoulement dans les canalisations)	XI.1.3.2.2	227
BORDA		
Historique	I.9	11
Théorème de BORDA (élargissement brusque)	VII.6.3.1	159
Ajutage de BORDA	IX.1.1	179
BOUSSINESQ		
Historique	I.12	15
Coefficient de BOUSSINESQ (turbulence)	VII.1.3.1	134
Branchements		
Perte de charge dans les branchements	XI.2.2.3	254
BRESSE		
Formule de BRESSE (canalisation de refoulement)	XI.8.2.1	289
Méthode de BRESSE (courbes de remous)	XII.2.7.1	373
– C –		
Capillaire		
Eau capillaire, frange capillaire, hauteur capillaire	XIII.1	455
Caractéristique		
Equation caractéristique d'un fluide	III.3.1	30
	III.3.2	32
	IV.1.2	58
Profondeur caractéristique	XII.2.6.3	364
Caractéristique universelle (écoulement à surface libre)	XII.2.7.5.1	382
Caractéristique du ressaut (méthode de SILBER)	XII.2.7.5.3	386
Carène		
Corps flottants	III.8.2.1	46
CASAGRANDE		
Formule de CASAGRANDE (vitesse de filtration)	XIII.2.5.2	461

	Paragraphe	Page
CAUCHY		
Equations de CAUCHY-RIEMANN	IV.5.2.3	68
Nombre de CAUCHY	VII.6.1.2	156
Centrifugation	III.4.1	32
Charge		
Charge entre deux points	V.1.6.2.2	91
	V.2.3	105
Brise-charge (canalisation)	XI.2.3.4	258
Charge spécifique (écoulement à surface libre)	XII.2.3	347
CHATELAIN		
Méthode de RAYTCHINE et CHATELAIN (calcul des courbes de remous)	XII.2.7.4	380
CHEN CHE-PEN		
Formule de CHEN CHE-PEN (canaux)	XII.1.2	329
CHÉZY		
Historique	I.9	10
Formule de CHÉZY (canaux)	XII.1.1	323
CIPOLLETTI		
Déversoir de CIPOLLETTI	X.2.1.1.3	200
Circulation		
Circulation de la vitesse le long d'un contour	IV.3	63
Clapet		
Perte de charge dans un clapet	XI.2.2.5	256
Coin		
Coin d'huile	VI.2.1.5	116
COLEBROOK		
Formule de COLEBROOK		
– Canalisations en charge	XI.1.3.3.4	233
– Canaux	XII.1.2	329
Compressibilité		
Compressibilité des liquides	II.1	21
CONE		
Formule de CONE (déversoir triangulaire)	X.2.1.1.2	199
Conforme		
Transformation conforme	IV.5.2.4	72
Conjuguées		
Profondeurs conjuguées (ressaut)	XII.2.9.1	399
Continuité		
Equation de continuité		
Cas général	IV.2	57
Ecoulement giratoire	IV.6.3	81
Contraction		
Contraction d'une veine liquide	VIII.2.1.1	168
Convergent		
Dispositif convergent	VII.6.3.4	162
Nappe à filets convergents	XIII.3.3	468
CORIOLIS		
Accélération de CORIOLIS	V.1.1	88
Coefficient de CORIOLIS	VII.1.3.2	135

	Paragraphe	Page
Couche limite	VII.2.2	136
Définition	VII.3.2	141
Décollement de la couche limite	VII.3.4	143
Aspiration de la couche limite	X.2.2.6	210
Coude		
Perte de charge dans un coude de canalisation	XI.2.2.2	250
Coude arrondi	XI.2.2.2.1	250
Coude à angles vifs	XI.2.2.2.2	253
Coude à ailettes	XI.2.2.2.3	254
Débitmètre à coude	XI.2.2.2.1	252
COUETTE		
Expérience de COUETTE	V.2.1	98
Viscosimètre de COUETTE	V.2.1	98
Ecoulement plan de COUETTE	VI.2.1.2	114
Courant		
Ligne de courant	IV.1.2	55
Fonction de courant	IV.5.2.2	67
Courbure		
Courbure de la trajectoire (gradient transversal des pressions)	V.1.7.3	95
COWAN		
Formule de COWAN (application de la formule de MANNING-STRICKLER)	XII.1.2	327
CREAGER		
Formule de CREAGER (profil du radier des évacuateurs de crue)	X.2.2.5	210
Crépine		
Perte de charge dans une crépine	XI.2.2.5	256
Critique		
Régime critique	XII.2.4	350
Profondeur critique	XII.2.4	350
Niveau critique	XII.2.4	350
Vitesse critique	XII.2.4	350
Pente critique	XII.2.4.6	356
CRUMP		
Formule de CRUMP (écoulement dans les canaux)	XII.1.2	329
Cylindrique		
Nappe cylindrique (hydraulique souterraine)	XIII.3.2	464
– D –		
Darce		
Unité de perméabilité	XIII.2.4.3	460
DARCY		
Historique	I.11	14
Formule de DARCY		
– Ecoulement dans les canalisations	XI.1.2	220
– Hydraulique souterraine	XIII.2.1	456
Unité de perméabilité	XIII.2.4.2	459
Débit		
Principe du débit maximal	X.2.2.2	207
Débitance		
Débitance de BAKHMETEFF	XII.2.7.2.1	376

	Paragraphe	Page
Débitmètre		
Débitmètre électromagnétique	XII.3.7.1.3	442
Débitmètre à coude	XI.2.2.2.1	252
Déficitaire		
Vitesse déficitaire (écoulement dans les canalisations)	XI.1.3.2.1	224
Déformation		
Déformation d'un particule fluide	IV.3	59
Quadrique des déformations	IV.3	61
Fonction de déformation	IV.3	61
Tenseur de la déformation	IV.3	62
Dénoyé		
Ecoulement dénoyé	XII.2.10.1	405
Dérivation		
Perte de charge dans une dérivation	XI.2.2.3	254
Diagramme		
Diagramme universel		
Ecoulement dans les canalisations en charge	XI.1.3	222
Ecoulement à surface libre	XII.2.7.5.2	384
Diaphragme		
Perte de charge dans un diaphragme	VII.6.3.3	162
Dilatant		
Liquide dilatant	VI.2.5	120
Distorsion		
Distorsion d'une particule liquide	IV.3	61
Distorsion d'un modèle réduit	XIV.3.3	526
DOMINGUEZ		
Formule de DOMINGUEZ (déversoir latéral)	X.2.1.3	205
Drainage		
Nappe de drainage en régime permanent	XIII.3.2.4	465
Nappe de drainage en régime variable	XIII.4.4.8	487
DU BUAT		
Historique	I.9	11
Paradoxe de DU BUAT	VI.3.2	122
DUPUIT		
Formule de DUPUIT		
Ecoulement dans les canalisations	XI.1.2	220
Débit d'un puits	XIII.3.3.2	468
Règle de DUPUIT (conduites équivalentes)	XI.3.2.1	264
Théorie de DUPUIT (nappes souterraines)	XIII.3	462
Ecran		
Ecran mobile (écran ANDERSSON)	XII.3.4	433
Ecran flottant	XII.3.4	433
Ecran salin	XII.3.5	434
EIFFEL		
Paradoxe d'EIFFEL	VII.3.3	142
EINSTEIN		
Formule d'EINSTEIN (écoulement dans les canaux de section hétérogène)	XII.1.4.2	332

	Paragraphe	Page
Elargissement		
Elargissement le long d'un courant liquide	VII.6.3.1 VII.6.3.2	159 161
Elargissement d'un écoulement à surface libre	XII.2.10.2.2	408
Electromagnétique		
Tuyère et débitmètre électromagnétique	XII.3.7.1.3	442
Electrosmose		
Définition et principe de l'électrosmose	XIII.6.3	510
Emmagasinement		
Coefficient d'emmagasinement d'un aquifère	XIII.2.3.2	458
Emission		
Ligne d'émission	IV.1.2	55
Energie		
Ligne d'énergie	V.1.6.2.2	93
Energie spécifique (écoulement à surface libre)	XII.2.3	347
ENGELS		
Formule d'ENGELS (déversoir latéral)	X.2.1.3	206
ENGLER		
Viscosimètre ENGLER	VI.2.3	119
EPER		
Pointe d'EPER	XII.3.7.1.1	438
Equilibre		
Réservoir d'équilibre	XI.6	282
Equipotentielle		
Surface équipotentielle	IV.5.1	65
Ligne équipotentielle	IV.5.2.2	67
EULER		
Historique	I.8	8
Méthode d'EULER (cinématique des liquides)	IV.1.1.2	55
Variables d'EULER (cinématique des liquides)	IV.1.1.2	55
Equations d'EULER (hydrodynamique)	V.1.1	87
Théorème d'EULER	VII.5.1	151
Nombre d'EULER	VII.6.1.2	156
Evacuateur		
Evacuateur de crue (profil du seuil déversant)	X.2.2.5	209
Eventail		
Transformation en éventail (transformation conforme)	IV.5.2.4.2	75
Exposant		
Exposant hydraulique (méthode de BAKHMETEFF)	XII.2.7.2.1	376
EYTELWEIN		
Formule d'EYTELWEIN (remous de pile de pont)	XII.2.10.2.4.2	415
– F –		
FERRIS		
Formule de FERRIS (nappe souterraine en régime variable)	XIII.4.4.7	486
Filet		
Filet liquide	V.1.6.2.2	92

	Paragraphe	Page
Filtration		
Vitesse de filtration		
Définition	XIII.2.3	458
Mesure	XIII.6.2	504
FLAMANT		
Formule de FLAMANT (écoulement dans les canalisations)	XI.1.2	221
Flotteur		
Equilibre d'un flotteur	III.8.2	46
Jaugeage par la méthode du flotteur	XII.3.6	435
Fluvial		
Régime fluvial	XII.2.4.3	352
Frottement		
Vitesse de frottement	XI.1.3.1	222
FROUDE		
Nombre de FROUDE	VII.6.1.2	156
Similitude de FROUDE	XIV.2.3.2.1	521
– G –		
GIBSON		
Méthode de GIBSON (mesure du débit d'une canalisation)	XI.10.3.5	303
Giratoire		
Ecoulement giratoire	IV.6	80
Constante giratoire	IV.6.4	82
Granulométrie		
Courbe granulométrique d'un sol	XIII.2.5.2	461
Coefficient d'uniformité granulométrique	XIII.2.5.2	461
Grille		
Remous au passage d'une grille	XII.2.10.2.4.5	418
Venturi à grille	XII.3.9	450
– H –		
HARDY-CROSS		
Méthode HARDY-CROSS (calcul des réseaux maillés)	XI.5.3	274
HAZEN		
Formule de HAZEN (vitesse de filtration)	XIII.2.5.2	462
HÉGLY		
Formule d'HÉGLY (déversoir rectangulaire)	X.2.1.1.1.2	195
Formule d'HÉGLY (déversoir circulaire)	X.2.1.1.4	202
HELE-SHAW		
Ecoulement de HELE-SHAW	VI.2.1.4	115
Analogie de HELE-SHAW		
Principe	VI.2.1.4	115
Application en hydraulique souterraine	XIII.5.5.2	500
HERMANCK		
Formule d'HERMANCK (écoulement dans les rivières)	XII.1.3.2	331
HEYNDRICKX		
Formule d'HEYNDRICKX (déversoir triangulaire)	X.2.1.1.2	199
HOOGHOUDT		
Formule de HOOGHOUDT (nappe de drainage)	XIII.3.2.5	466

	Paragraphe	Page
Horizontal		
Canal horizontal	XII.2.6.3 XII.2.10.3.1	369 418
– I –		
Impulsion		
Impulsion totale	XII.2.2.2	346
Impulsion critique	XII.2.4.4	353
Intégration		
Jaugeage par intégration	XII.3.3.2	432
Intrinsèque		
Equations intrinsèques	V.2.4	107
Perméabilité intrinsèque	XIII.2.4.3	460
Intumescence		
Intumescence infinitésimale	XII.2.8	397
Inversion		
Inversion d'une veine liquide	VIII.2.1.5	170
Irrotationnel		
Ecoulement irrotationnel	IV.4 IV.5	64 65
– J –		
JACOB		
Formule de JACOB (hydraulique souterraine)	XIII.2.3.2 XIII.4.3	459 479
Jauge		
Orifice de jauge	VIII.2.1.6	171
Jaugeage		
Jaugeage des écoulements à surface libre	XII.3	427
Jaugeage chimique	XII.3.3	429
JOUKOWSKY		
Transformation de JOUKOWSKY (transformation conforme)	IV.5.2.4.2	76
Formule de JOUKOWSKY (coup de bélier)	XI.10.3.1	300
– K –		
KINDSVATER		
Formule de KINDSVATER		
Déversoir rectangulaire	X.2.1.1.1.3	196
Déversoir triangulaire	X.2.1.1.2	199
KOCH		
Formule de KOCH et VIBERT		
Ecoulement dans les canalisations	XI.1.3.3.5	234
Canalisation de refoulement	XI.8.2.2	289
KOZENY		
Formule de KOZENY (vitesse de filtration)	XIII.2.5	461
KUTTER		
Formule de KUTTER (écoulement dans les canaux)	XII.1.2	326
– L –		
LACEY		
Formule de LACEY (écoulement dans les rivières)	XII.1.3.2	331

	Paragraphe	Page
LAGRANGE		
Historique	I.8	8
Méthode de LAGRANGE (cinématique des liquides)	IV.1.1.1	55
Variables de LAGRANGE (cinématique des liquides)	IV.1.1.1	55
Théorème de LAGRANGE	V.1.7.1	93
Formule de LAGRANGE (intumescence infinitésimale)	XII.2.8.2	398
LAMÉ		
Coefficients de LAMÉ (hydrodynamique)	V.2.2.1	102
Laminage		
Laminage d'une crue par un réservoir	X.7	215
Laminaire		
Régime laminaire	VI.2	112
LANG		
Formule de LANG (remous de pile de pont)	XII.2.10.2.4.2	415
LAPLACE		
Equation de LAPLACE (hydrodynamique)	IV.5.2	66
Latéral		
Déversoir latéral	X.2.1.3	204
LEFRANC		
Méthode LEFRANC (vitesse de filtration)	XIII.6.2.1.2.1	505
LÉVY		
Formule de LÉVY (écoulement dans les canalisations)	XI.1.2	220
LUGEON		
Perméabilité LUGEON	XIII.2.4.4	461
Unité LUGEON	XIII.6.2.1.2.2	507
– M –		
MACH		
Nombre de MACH	VII.6.1.2	156
Maillé		
Réseau maillé (écoulement dans les canalisations)	XI.5	271
MALHOTRA		
Formule de MALHOTRA (écoulement dans les rivières)	XII.1.3.2	331
MANNING		
Formule de MANNING		
Ecoulement dans les canalisations	XI.1.2	222
Ecoulement dans les canaux	XII.1.2	326
Manomètres		
Principaux types de manomètres	III.6	36
MARIOTTE		
Historique	I.6	5
MARLY		
Machine de MARLY	I.6	5
Mélange		
Longueur de mélange	VI.3.5	125
Condition de bon mélange	XII.3.3.2.2	432
Métacentre		
Définition et position du métacentre (corps flottants)	III.8.2.2	47
MICHAUD		
Formule de MICHAUD (coup de bélier)	XI.10.3.2	303

	Paragraphe	Page
MITCHELL		
Butée MITCHELL	VI.2.1.5	116
Modèles		
Modèles réduits	XIV.3	524
Modèles distordus	XIV.3.3	526
Modèles à fond mobile	XIV.3.5	527
Modèles basculés	XIV.3.6	528
Modèles tournants	XIV.3.7	528
Modèles mathématiques	XIV.4	530
Module		
Module d'un puits (hydraulique souterraine)	XIII.3.3.6	471
MORANDI		
Pompe MORANDI	IX.3.3	186
Moulinets		
Moulinets hydrométriques	XII.3.7.1.1	436
MUNIER		
Formule de MUNIER (canalisation de refoulement)	XI.8.2.3	291
– N –		
NAGLER		
Formule de NAGLER (remous de pile de pont)	XII.2.10.2.4.2	415
NAVIER		
Formule de NAVIER	V.1.6.2.1	90
Equations de NAVIER-STOKES	V.2.2.2	102
Neutre		
Point neutre (écoulement dans les canalisations)	XI.4.4	269
NEWTON		
Historique	I.7	7
Formule de NEWTON (tension visqueuse)	V.2.1.1	99
NIKURADSE		
Expériences et formule de NIKURADSE (écoulement dans les canalisations)	XI.1.3.3.3	232
Noyé		
Orifice noyé	VIII.3	174
Nappe noyée	X.1.2.1	190
	X.4	211
Déversoir noyé	X.5	212
Ecoulement noyé	XII.2.10.1	405
– O –		
Oblique		
Déversoir oblique	X.2.1.4	206
Ondulé		
Ressaut ondulé	XII.2.9.1	400
– P –		
PARSHALL		
Définition et propriétés du Parshall	XII.2.10.2.3	409
PASCAL		
Historique	I.7	6
Principe de PASCAL (hydrostatique)	III.3.1	32

	Paragraphe	Page
Pente		
Changement brusque de pente dans un canal	XII.2.10.3.3	421
Permanent		
Ecoulement (régime) permanent	IV.1.2.2	56
	V.1.6.1	90
Perm		
Unité de perméabilité	XIII.2.4.3	460
Perméabilité		
Module de perméabilité	XIII.2.4.1	459
Perméabilité d'un milieu filtrant	XIII.2.4	459
Perméabilité intrinsèque	XIII.2.4.3	460
Perméabilité LUGEON	XIII.2.4.4	461
Perméamètre		
Principaux types de perméamètres	XIII.6.2.2	509
PITOT		
Historique	I.9	10
Tube de PITOT	XII.3.7.1.2	439
Poise		
Définition de la poise (viscosité des liquides)	V.2.1.2	99
POISEUILLE		
Ecoulement plan de POISEUILLE	VI.2.1.1	113
Formule de POISEUILLE	VI.2.2	118
Droite de POISEUILLE	XI.1.3.1	223
POLENI		
Formule de POLENI (déversoirs)	X.2.1.1.1	193
PONCELET		
Formules de PONCELET (vannes de fond)	VIII.2.3	173
Pont		
Remous de pile de pont	XII.2.10.2.4	411
PORCHET		
Formule de PORCHET (écoulement dans les canaux)	XII.1.8	340
Calcul des canaux horizontaux	XII.2.10.3.1	420
Méthode limnigraphique (hydraulique des puits)	XIII.6.1	501
Porosité		
Définition des différentes porosités d'un milieu pulvérulent	XIII.2.3.2	458
Potentiel		
Potentiel des vitesses	IV.5.1	65
Potentiel analytique	IV.5.2.3	69
Potentiel complexe	IV.5.2.4.2	74
Poutrelles		
Déversoir à poutrelles	X.2.2.4	208
POWELL		
Formule de POWELL (écoulement dans les canaux)	XII.1.2	328
PRANDTL		
Ecoulement dans les canalisations	XI.1.3.2.1	223
Tube (sonde) de PRANDTL	XII.3.7.1.2	441
PRASIL		
Construction graphique de PRASIL	IV.5.3	76

	Paragraphe	Page
Pression		
Pression en un point d'un liquide	II.2	22
Pression étoilée	III.3.1	30
Pression effective	III.3.1	31
Unités de pression	III.5	35
Mesure des pressions	III.6	36
Pression sur une surface solide	III.7	39
Centre de pression	III.7	40
PRONY		
Formule de PRONY (canalisations)	XI.1.2	220
Formule de PRONY (canaux)	XII.1.2	325
Proportionnel		
Déversoir proportionnel	X.2.1.1.5	203
– R –		
Radioactif		
Traceur radioactif	XII.3.3.2.4	433
RAYTCHINE		
Méthode de RAYTCHINE et CHATELAIN (calcul des courbes de remous)	XII.2.7.4	380
REDWOOD		
Viscosimètre REDWOOD	VI.2.3	119
REECH		
Loi de similitude de REECH-FROUDE	XIV.2.3.2.1	521
Refoulement		
Conduite de refoulement	XI.8	288
REHBOCK		
Formule de REHBOCK		
Déversoirs	X.2.1.1.1	194
Remous de pile de pont	XII.2.10.2.4.2	415
Remous		
Définition du remous	XII.2.6.1	360
Courbes de remous (étude qualitative)	XII.2.6.3	362
Calcul des courbes de remous	XII.2.7	372
Remous des piles de pont	XII.2.10.2.4.2	414
Remous dû aux petits ouvrages (ponceaux)	XII.2.10.2.4.4	417
Renard		
Phénomène de renard (hydraulique souterraine)	XIII.5.3.3	493
Réseau		
Réseau de canalisations	XI.2.4	259
Réseau maillé de canalisations	XI.5	271
Ressaut		
Caractéristique du ressaut (méthode de SILBER)	XII.2.7.5.3	386
Définition et propriétés du ressaut	XII.2.9	399
Résurgence		
Hauteur de résurgence (hydraulique souterraine)	XIII.3.2.3	465
	XIII.3.3.5	471
Rétention		
Capacité de rétention d'un sol	XIII.2.3.2	459

	Paragraphe	Page
Rétrécissement		
Rétrécissement le long d'un courant liquide	VII.6.3.3	162
	VII.6.3.4	162
Rétrécissement dans une canalisation	XI.2.2.1	250
Rétrécissement dans un canal	XII.2.10.2.1	406
REYNOLDS		
Expérience et nombre de REYNOLDS	VI.1	111
Formule de REYNOLDS (écoulement dans les canalisations)	XI.1.3.2.2	227
Similitude de REYNOLDS	XIV.2.3.2.2	523
Seuil de REYNOLDS	XIV.3.1	524
Rhéologie		
Introduction à la rhéologie	VI.2.5	120
RIEMANN		
Equations de CAUCHY-RIEMANN	IV.5.2.3	68
Robinet-vanne		
Perte de charge dans un robinet-vanne	XI.2.2.4	255
Rotationnel		
Ecoulement rotationnel	IV.4	64
Route		
Service en route le long d'une canalisation	XI.4	265
Rugosité		
Rugosité d'une paroi	XI.1.3.3.1	228
Rugosité d'ondulation	XI.1.3.3.6	235
Fonction générale de rugosité	XI.1.3.3.7	236
Evolution de la rugosité en fonction de l'âge et de la nature de la paroi	XI.1.3.3.8	237
– S –		
SAE		
Nombre SAE (viscosité)	VI.2.3	120
SAYBOLT		
Viscosimètre SAYBOLT	VI.2.3	119
SCIMEMI		
Formule de SCIMEMI (profil du radier des évacuateurs)	X.2.2.5	210
Seuil		
Seuil sur le fond d'un canal	XII.2.10.3.2	421
Seuil de REYNOLDS (essais sur modèles réduits)	XIV.3.1	524
SILBER		
Méthode de SILBER (calcul des courbes de remous)	XII.2.7.5	382
Sillage		
Sillage derrière un obstacle	VII.3.2	141
Similitude		
Lois de similitude en hydraulique	XIV.2	520
Soupape		
Perte de charge dans les soupapes	XI.2.2.5	256
STEVIN		
Paradoxe de STEVIN	I.5	4
Corps flottants	III.8.2.3	49

	Paragraphe	Page
STOKES		
Théorème et formule de STOKES (cinématique des liquides)	IV.3	63
Unité de viscosité	V.2.1.2	99
Equations de NAVIER-STOKES (hydrodynamique)	V.2.2.2	102
Vitesse limite de chute d'un corps dans un liquide	VII.3.6.2	145
STRICKLER		
Formule de STRICKLER (écoulement dans les canaux)	XII.1.2	326
– T –		
TADINI		
Formule de TADINI (écoulement dans les canaux)	XII.1.2	325
Tenseur		
Tenseur de la déformation	IV.3	62
	V.2.2.1	101
Tenseur des contraintes de viscosité	V.2.2.1	101
Tenseur de perméabilité	XIII.5.1	488
Tension		
Tension visqueuse	V.2.2.1	101
THEIS		
Formule de THEIS (hydraulique souterraine)	XIII.4.3	479
THIEM		
Module de THIEM (hydraulique souterraine)	XIII.2.4.1	459
THIJSSE		
Formule de THIJSSE (écoulement dans les canaux)	XII.1.2	328
Thixotropie		
Liquides thixotropiques	VI.2.5	121
Torrentiel		
Régime torrentiel	XII.2.4.3	352
TORRICELLI		
Historique	I.6	5
Formule de TORRICELLI (écoulement par les orifices)	VIII.2.1.2	168
Tourbillon		
Vecteur tourbillon	IV.3	62
Traceur		
Traceur radioactif (jaugeage)	XII.3.3.2.4	433
Traînée		
Coefficient de traînée	VII.2.2.2	139
	VII.3.5	143
Transformation		
Transformation conforme	IV.5.2.4	72
Transformation en éventail	IV.5.2.4.2	75
Transformation de JOUKOWSKY	IV.5.2.4.2	76
Transmissivité		
Définition de la transmissivité d'un milieu aquifère	XIII.4.2	478
Mesure de la transmissivité d'un milieu aquifère	XIII.4.4.	482
Turbulence		
Régime turbulent	VI.3	121
Coefficient de turbulence	VI.3.6	126

	Paragraphe	Page
Tuyère		
Tuyère à veine moulée	VIII.2.2	172
Tuyère électromagnétique	XII.3.7.1.3	442
– U –		
UBELHODE		
Formule de UBELHODE (viscosité des liquides)	VI.2.3	120
– V –		
Vanne		
Ecoulement par les vannes non noyées	VIII.2.3	173
Ecoulement par les vannes noyées	VIII.3	174
Perte de charge dans un robinet-vanne	XI.2.2.4	255
VASCHY		
Théorème de VASCHY (analyse dimensionnelle)	VII.6.1.1	155
VENTURI		
Expérience de VENTURI (ajutage cylindrique extérieur)	IX.1.2	183
Débitmètre VENTURI	IX.3.1	185
Canal VENTURI	XII.2.10.2.3	409
VENTURI à grille	XII.3.9	450
Vidange		
Vidange par un orifice	VIII.4	176
Vidange par un déversoir	X.6	214
Vides		
Indices des vides (hydraulique souterraine)	XIII.2.4.1	459
Viscosimètres		
Principaux types de viscosimètres	VI.2.3	119
VINCI (Léonard de)		
Historique	I.5	3
Viscosité		
Coefficients de viscosité	V.2.1.2	99
Nature physique de la viscosité des liquides	V.2.1.3	100
VON KARMAN		
Formule de VON KARMAN (écoulement dans les canalisations)	XI.1.3.2.1	226
Vortex		
Définition et étude cinématique du vortex	IV.6.4	82
– W –		
WILLIAMS-HAZEN		
Etudes et formule de WILLIAMS-HAZEN (écoulement dans les canalisations)	XI.1.3.3.8	237
WEBER		
Nombre de WEBER	VII.6.1.2	156

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE
(Ouvrages généraux sur l'hydraulique)

ADDISON (H.).– *A treatise on Applied Hydraulics* ("Chapman and Hall, Londres, 5^e éd^on, 1965).

BRUN (E.) et MARTINOT-LAGARDE (A.).– *Mécanique des fluides* – (3 volumes ; Ed^r DUNOD, 1960, 1968 et 1970).

CAUVIN (A.) et GUERREE (H.).– *Eléments d'hydraulique* (Ed. Eyrolles, 1968).

CHAPOUTHIER (P.).– *Hydraulique* (Collection A. Colin, n° 388, 1965).

COMOLET (R.).– *Mécanique expérimentale des fluides.* (Ed. Masson, 1963).

DAVIS (C.V.).– *Handbook of applied hydraulics* (Mc. Graw-Hill, Londres, 1952).

ESCANDE (L.).– *Hydraulique Générale* (tomes I et II) (Ed. Privat, Toulouse, 1941 et 1943).

ESCANDE (L.).– *Compléments d'hydraulique* (Ed. Privat, Toulouse, 1947).

ESCANDE (L.).– *Nouveaux compléments d'hydraulique* (1ère, 2ème et 3ème parties) (Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air, n° 280 année 1953, n° 302 année 1955, n° 346 année 1958).

EYDOUX (D.).– *Hydraulique générale et technique* (Centre de Documentation universitaire, 1942).

FOCH (A.).– *Introduction à la Mécanique des fluides* (A. Colin, 1932).

FRANCIS (J.R.D.) et JACKSON (G.).– *A textbook of Fluid Mechanics for Engineering Students* (3ème édition, Arnold, Londres 1969).

GIBERT (R.).– *Génie chimique – Tome 1 : Mécanique des fluides* (Ed. Eyrolles 1960).

GINOCCHIO (R.).– *Aménagements hydro-électriques* (Ed. Eyrolles, 1959).

JAEGER (C.).– *Hydraulique technique* (Ed. Dunod, 1953).

LARRAS (J.).– *L'Hydraulique* (Collection "Que sais-je ?", Presses universitaires de France, 1965.

LE BOITEUX (H.).– *Mécanique physique* II – La mécanique des milieux fluides (Librairie polytechnique Béranger, 1961).

LENCASTRE (A.).– *Manuel d'hydraulique générale* (Collection du Centre de Recherches et d'Essais de Chatou, Ed. Eyrolles, 1966).

LEVIN (L.).– *L'hydrodynamique et ses applications* (Collection A. Colin, n° 377, 1963).

OUZIAUX (R.) et PERRIER (J.).– *Mécanique appliquée* – Tome 1 : Mécanique des fluides (Ed. Dunod, 1958).

PASSERINI (G.).– *Idraulica agraria* (Libreria scientifica Giordano Pellegrini, Pise, Italie, 1950).

PEERLESS (S.J.).– *Basic Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Londres, 1967).

PRANDTL (L.).– *Précis de Mécanique des fluides* (Ed. Dunod, 1940).

PRESS (H.).– *Hilfstafeln zur Bearbeitung von Wasserbaulichen und Wasserwirtschaftlichen Entwürfen und Anlagen wie Stauwerke, Wasserkrafttechnische Bauwerke* (Verlag Paul Parey, Berlin, 1965).

ROUSE (H.).– *Advanced Mechanics of Fluids* (John Wiley and Sons, New-York, 1959).

SCHLAG (A.).– *Hydraulique générale* (Ed. Dunod, 1963).

SEDILLE (M.).– *Turbo-machines hydrauliques et thermiques* – Tome 1 : Mécanique des fluides incompressibles (Ed. Masson, 1966).

TANER (Y.M.N.).– *Hidrolik* (4 volumes) (Teknik Universite Matbaasi, Istanbul, 1957, 1961, 1964 et 1968).

TISON (L.J.).– *Cours d'Hydraulique* (2 vol.) (Ed. Centerick, Louvain, 1950 et 1953).

TROSKOLANSKI (A.T.).– *Théorie et pratique des mesures hydrauliques* (Ed. Dunod, 1963).

VALEMBOIS (J.).– *Memento d'hydraulique pratique* (Ed. Eyrolles, 1958).

VALLENTINE (H.R.).– *Applied hydrodynamics* (2ème édition ; Butterworths Scientific Publications, Londres, 1969).

DE VARENNES E MENDONÇA (P.).– *Exertos das Liçoes de Hydráulica Geral e Agricola* (Institut supérieur agronomique de Lisbonne, 1968).

Dans la même collection :

1. **Chabert (J.).** — *Calcul des courbes de remous,* 1956, épuisé.
2. **Larras (J.).** — *Plages et côtes de sable,* 1958, épuisé.
3. **Valembois (J.).** — *Memento d'hydraulique pratique,* 1958, corrigé et mis à jour, 1963, nouveau tirage 1977, en cours de révision.
4. **Bouvard (M.).** — *Barrages et prises d'eau en rivières,* 1958, 2e édition revue et augmentée, 1960, épuisé.
5. **Ginocchio (R.).** — *Aménagements hydroélectriques,* 1959, épuisé.
6. **Réméniéras (G.).** — *L'hydrologie de l'Ingénieur,* 1960, 2e édition revue et augmentée, 1965, nouveaux tirages 1976, 1980, 1986.
7. **Lencastre (A.).** — *Manuel d'hydraulique générale,* 1961, nouveau tirage 1976.
8. *La Mécanique des fluides et la magnétohydrodynamique,* 1962.
9. **Ailleret (P.).** — *Energétique. Les besoins d'énergie,* 1963, nouveau tirage 1974.
10. **Condoyannis (G.).** — *Le Russe scientifique,* 1964 (en vente chez Ophrys).
11. **Larras (J.).** — *Embouchures, estuaires, lagunes et deltas,* 1965, épuisé.
12. **Schneebeli (G.).** — *Hydraulique souterraine,* 1966, nouveau tirage 1978, en réimpression.
13. **Idel'cik (I.E.).** — *Memento des pertes de charge,* 1969, nouveaux tirages 1978, 1986.
14. **Carlier (M.).** — *Hydraulique générale et appliquée,* 1972, nouveaux tirages 1980, 1986.
15. **Larras (J.).** — *Hydraulique et granulats,* 1972.
16. **Thérond (R.).** — *Recherche sur l'étanchéité des lacs de barrage en pays karstique,* 1973.
17. *Aéro-Hydro-Elasticité.* (Cycle de conférences C.E.A.-E.D.F., septembre 1972), 1973.
18. **Lebreton (J.C.).** — *Dynamique fluviale,* 1974.
19. **Jamme (G.).** — *Travaux fluviaux,* 1974.
20. **Chambadal (P.).** — *La thermodynamique,* 1974.
21. *Techniques de mesure dans les écoulements.* (Cycle de conférences C.E.A.-E.D.F., septembre 1973), 1974.
22. **Ishii (M.).** — *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow,* 1975.
23. **André (H.), Audinet (M.), Mazeran (G.), Richer (C.).** — *Hydrométrie pratique des cours d'eau,* 1976.
24. **Gary (C.), Moreau (M.).** — *L'effet de couronne en tension alternative,* 1976.
25. **Bonnin (J.).** — *Hydraulique urbaine appliquée aux agglomérations de petite et moyenne importance,* 1977, nouveau tirage 1986.
26. **Chambadal (P.).** — *La turbine à gaz,* 1976.
27. *Nouveaux systèmes énergétiques : cycles thermodynamiques associés.* (Cycle de conférences C.E.A.-E.D.F., septembre-octobre 1974), 1976.

28. *Les sources froides des centrales électriques.* (Cycle de conférences C.E.A.-E.D.F., octobre 1975), 1977.

29. **Maurel (E.), Roux (D.), Dupont (D.).** — *Techniques opérationnelles d'ordonnancement,* 1977.

30. **Chouard (Ph.), Michel (H.), Simon (M.F.).** — *Bilan thermique d'une maison solaire,* 1977.

31. **Valid (R.).** — *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures,* 1977.

32. *Phénomènes thermiques et hydrauliques non stationnaires.* (Cycle de conférences C.E.A.-E.D.F., octobre 1976), 1978.

33. **Ginocchio (R.).** — *L'énergie hydraulique,* 1978.

34. **Meyer (B.), Baudoin (C.).** — *Méthodes de programmation,* 1978, nouveau tirage 1980, 3e édition revue et corrigée 1984, nouveau tirage 1986.

35. **Bidard (R.), Bonnin (J.).** — *Energétique et turbomachines,* 1979.

36. **Larras (J.).** — *Physique de la houle et des lames,* 1979.

37. **Gondran (M.), Minoux (M.).** — *Graphes et algorithmes,* 1979, 2e édition, revue et complétée, 1985.

38. *Energie électrique et environnement,* 1980. (Publié sous la direction de R. Ginocchio).

39. **Pagès (A.), Gondran (M.).** — *Fiabilité des systèmes,* 1980.

40. **Raviart (P.A.).** — *Les méthodes d'éléments finis en mécanique des fluides.* (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., juillet 1979), 1981.

41. *La réalisation des logiciels graphiques interactifs.* (Ecole d'été d'informatique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., juillet 1979), 1981.

42. **Bonnin (J.).** — *Aide-mémoire d'hydraulique urbaine,* 1982.

43. **Ailleret (P.).** — *Essai de théorie de la normalisation,* 1982.

44. **Arrighi (R.).** — *Evolution des disjoncteurs à haute et moyenne tensions,* 1983.

45. **Reynaud (J.F.).** — *La concentration par évaporation,* 1984.

46. **Liénart (P.), François (P.).** — *Acoustique industrielle et environnement. I. Eléments fondamentaux d'acoustique physique et perceptive.* (Monographie publiée sous les auspices du Groupement des acousticiens de langue française), 1983.

47. **Bonnin (J.).** — *L'eau dans l'antiquité : l'hydraulique avant notre ère,* 1984.

48. **Duderstadt (J.J.), Lewis (E.E.), Bardos (C.).** — *Neutron transport equation.* (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., 1981), en anglais, 1983.

49. **Golub (G.H.), Meurant (G.A.).** — *Résolution numérique des grands systèmes linéaires.* (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., 1980), 1983.

50. **Persoz (H.), Santucci (G.), Lemoine (J.C.), Sapet (P.).** — *La planification des réseaux électriques,* 1984.

51. **Le Roy (G.), Gary (C.), Hutzler (B.), Lalot (J.), Dubanton (C.).** — *Les propriétés diélectriques de l'air et les très hautes tensions,* 1984.

52. **SOGREAH, Laboratoire National d'Hydraulique.** — *Catalogue sédimentologique des côtes françaises, côtes de la Méditerranée* (ouvrage publié sous les auspices du Secrétariat d'Etat auprès du Ministre des Transports, chargé de la mer), 1984.

53. **Miquel (J.).** — *Guide pratique d'estimation des probabilités de crues,* 1984.

54. **Bouvard (M.).** — *Barrages mobiles et ouvrages de dérivation, à partir de rivières transportant des matériaux solides* (en collaboration avec la Section d'Hydraulique Fluviale de l'A.I.R.H.), 1984.

55. **Mathieu (J.), Jeandel (D.).** — *La simulation des modèles de turbulence et leurs applications, Volume 1* (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., juillet 1982), 1984.

56. **Launder (B.E.), Reynolds (W.C.), Rodi (W.).** — *La simulation des modèles de turbulence et leurs applications, Volume 2* (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., juillet 1982), 1984.

57. **Bergman (D.), Lions (J.L.), Papanicolaou (G.), Murat (F.), Tartar (L.), Sanchez-Palencia (E.).** — *Les méthodes de l'homogénéisation. Théorie et applications en physique* (Ecole d'été d'analyse numérique, C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A., juillet 1983), 1985.

58. **Cormary (Y.), Nicolas (C.).** — *La thermique des serres,* 1985.

59. **Borghi (R.), Clavin (P.), Liñán (A.), Pelcé (P.), Sivashinsky (G.I.).** — *Modélisation des phénomènes de combustion* (Ecole d'été sur les problèmes non linéaires appliquées, C.E.A.-INRIA-E.D.F., décembre 1982), 1985.

60. *Fortran 77. Guide pour l'écriture de programmes portables,* ouvrage réalisé sous la direction de Ficheux-Vapné (F.), 1985.

61. **Laboratoire Central d'Hydraulique de France, Laboratoire National d'Hydraulique.** — *Catalogue sédimentologique des côtes françaises, de la frontière belge au Mont-Saint-Michel* (ouvrage publié sous les auspices du Secrétariat d'Etat auprès du Ministre de l'Urbanisme, du Logement et des Transports, chargé de la mer), 1986.

62. **Biau (D.).** *Les applications industrielles du chauffage par rayonnement infrarouge,* 1986.

63. **Fournié (R.).** *Les isolants en électrotechnique. Concepts et théories,* en cours d'édition.

64. **Bernier (J.)., Chaloin (B.), Coeffé (Y.), Feuillet (J.).** — *Le dimensionnement des digues à talus,* en cours d'édition.

ESE 1. **Roubine (E.).** — *Distributions-Signal,* 1982.

ESE 2. **Barret (P.).** — *Régimes transitoires des machines tournantes électriques,* 1982.

ESE 3. **Dattée (F.).** — *Electronique. Concepts de base* (avec la collaboration de D. Venot), 1983.

ESE 4. **Mésa (F.).** — *Méthodes d'études des circuits électriques,* 1985.

Dans les publications de cette collection, la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France laisse aux auteurs la liberté d'exprimer leur point de vue personnel sur les sujets traités.

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Publications scientifiques et littéraires
05002 GAP — Tél. : 92.51.35.23
Dépôt légal : 123 — Février 1986

14

ISSN 0399-4198